ROGER PENROSE

GERÇEĞİN YOLLARI

EVREN
YASALARININ
EKSİKSİZ BİR
REHBERİ

ALFA | BİLİM

ROGER PENROSE

GERÇEĞİN YOLLARI

ALFA® | BİLİM

2754 | ALFA | BİLİM | 92

Gerçeğin Yolları

Evren Yasalarının Eksiksiz Bir Rehberi

ROGER PENROSE

1931 doğumlu İngiliz matematiksel fizikçi Sir Roger Penrose ülkemizde *"Kralın Yeni Usu"* ve Hawking'le beraber yazdıkları *"Zamanın ve Uzayın Doğası"* kitapları ile tanınmaktadır. Dünyanın en tanınmış fizikçileri arasında yer alan Penrose, Oxford Üniversitesinde, Rouse Ball kürsüsünde Emeritus Matematik Profesörlüğü ve Wadham Kolejinde Emeritus Öğretim Üyeliği görevlerini sürdürmektedir. 1988 Wolf Fizik ödülünü Stephen Hawking ile paylaşan Penrose'un çok önemli bilimsel çalışmalarının yanı sıra, ödüllü ve çok satan popüler fizik kitapları bulunmaktadır.

MAHİR AKKAYA

1981 yılında İzmit'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bursa'da tamamladıktan sonra ODTÜ Kimya Mühendisliği Bölümüne girdi ve 2009 yılında aynı bölümden mezun oldu. Halen Almanya'da yaşamakta ve çevirmen olarak çalışmaktadır.

Gerçeğin Yolları
Evren Yasalarının Eksiksiz Bir Rehberi
© 2012, ALFA Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.

The Road to Reality
A Complete Guide to the Laws of the Universe
© Roger Penrose, 2004

Kitabın Türkçe yayın hakları Anatolialit Ajans aracılığıyla Alfa Basım Yayım Dağıtım Ltd. Şti.'ne aittir. Tanıtım amacıyla, kaynak göstermek şartıyla yapılacak kısa alıntılar dışında, yayıncının yazılı izni olmaksızın hiçbir elektronik veya mekanik araçla çoğaltılamaz. Eser sahiplerinin manevi ve mali hakları saklıdır.

Yayıncı ve Genel Yayın Yönetmeni M. Faruk Bayrak
Genel Müdür Vedat Bayrak
Yayın Yönetmeni Mustafa Küpüşoğlu
Dizi Editörü Kerem Cankoçak
Redaksiyon Mehmet Ata Arslan
Kapak Tasarımı Adnan Elmasoğlu
Sayfa Tasarımı Zeliha Güler

ISBN 978-605-171-060-0
1. Basım: Nisan 2015

Baskı ve Cilt
Melisa Matbaacılık
Çiftehavuzlar Yolu Acar Sanayi Sitesi No: 8 Bayrampaşa-İstanbul
Tel: 0(212) 674 97 23 Faks: 0(212) 674 97 29
Sertifika no: 12088

Alfa Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.
Alemdar Mahallesi Ticarethane Sokak No: 15 34110 Fatih-İstanbul
Tel: 0(212) 511 53 03 Faks: 0(212) 519 33 00
www.alfakitap.com - info@alfakitap.com
Sertifika no: 10905

ROGER PENROSE

GERÇEĞİN YOLLARI

EVREN YASALARININ EKSİKSİZ BİR REHBERİ

Çeviri: Mahir Akkaya

ALFA | TARİH

Bana fiziğin heyecanını gösteren

DENNIS SCIAMA

anısına

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ 15
TEŞEKKÜRLER 22
NOTASYON 25
GİRİŞ 28
1. BİLİMİN KÖKENLERİ 33
1.1 Dünyayı şekillendiren kuvvetlere ilişkin arayış 33
1.2 Matematiksel doğruluk 35
1.3 Platon'un matematiksel dünyası "gerçek" midir? 38
1.4 Üç dünya ve üç derin gizem 44
1.5 İyi, doğru ve güzel 49
2. ANTİK BİR TEOREM VE MODERN BİR SORU 51
2.1 Pisagor teoremi 51
2.2 Öklit'in önermeleri 54
2.3 Pisagor teoreminin benzer–alanlar kanıtı 57
2.4 Hiperbolik geometri: konformal resim 59
2.5 Hiperbolik geometrinin diğer gösterimleri 63
2.6 Hiperbolik geometrinin tarihsel görünümleri 69
2.7 Fiziki uzayla ilişki 73
3. FİZİKİ DÜNYADA SAYI TÜRLERİ 77
3.1 Pisagorcu felaket mi? 77
3.2 Gerçel sayı sistemi 80
3.3 Fiziki dünyadaki gerçel sayılar 86
3.4 Doğal sayılar fiziki dünyaya gereksinim duyar mı? 90
3.5 Fiziki dünyadaki ayrık sayılar 93
4. SİHİRLİ KARMAŞIK SAYILAR 96
4.1 Sihirli "i" sayısı 96
4.2 Denklemleri karmaşık sayılarla çözmek 99
4.3 Üslü serinin yakınsaması 102
4.4 Caspar Wessel'in karmaşık düzlemi 106
4.5 Mandelbrot kümesininin oluşturulması 109
5. LOGARİTMALARIN, ÜSLERİN VE KÖKLERİN GEOMETRİSİ 111
5.1 Karmaşık cebirin geometrisi 111
5.2 Karmaşık logaritma fikri 115
5.3 Çoklu değerlilik, doğal logaritmalar 117
5.4 Karmaşık üsler 122
5.5 Modern parçacık fiziğiyle bazı ilişkiler 126

6. GERÇEL SAYI ANALİZİ 129
6.1 Güvenilir bir fonksiyonu oluşturan nedir? 129
6.2 Fonksiyonların eğimleri 132
6.3 Yüksek dereceli türevler; C^∞–pürüzsüz fonksiyonlar 135
6.4 "Eulerci" fonksiyon kavramı? 138
6.5 Türev alma kuralları 141
6.6 İntegral alma 143
7. KARMAŞIK SAYI ANALİZİ 149
7.1 Karmaşık pürüzsüzlük; holomorfik fonksiyonlar 149
7.2 Kontür integral alma 150
7.3 Karmaşık pürüzsüzlükten üslü seriler 154
7.4 Analitik sürdürme 156
8. RIEMANN YÜZEYLERİ VE KARMAŞIK DÖNÜŞÜMLER 162
8.1 Riemann yüzeyi fikri 162
8.2 Konformal dönüşümler 166
8.3 Riemann küresi 170
8.4 Tıkız bir Riemann yüzeyinin cinsi 173
8.5 Riemann dönüşüm kuramı 177
9. FOURIER AYRIŞMASI VE HİPERFONKSİYONLAR 180
9.1 Fourier serisi 180
9.2 Bir çember üzerindeki fonksiyonlar 185
9.3 Riemann küresi üzerinde frekans bölme 188
9.4 Fourier dönüşümü 192
9.5 Fourier dönüşümünden frekans bölme 194
9.6 Hangi tür fonksiyon uygundur? 196
9.7 Hiperfonksiyonlar 200
10. YÜZEYLER 207
10.1 Karmaşık boyutlar ve gerçel boyutlar 207
10.2 Pürüzsüzlük, kısmi türevler 209
10.3 Vektör alanları ve 1–biçimliler 214
10.4 Bileşenler, skaler çarpımlar 219
10.5 Cauchy–Riemann denklemleri 221
11. HİPER KARMAŞIK SAYILAR 226
11.1 Dördeyler cebiri 226
11.2 Dördeylerin fiziki rolü? 228
11.3 Dördeyler geometrisi 232
11.4 Döndürmelerin oluşturulması 235
11.5 Clifford cebiri 237
11.6 Grassmann cebiri 240

12. n BOYUTLU MANİFOLDLAR 245
12.1 Yüksek boyutlu manifoldları niçin çalışmalı? 245
12.2 Manifoldlar ve koordinat yamaları 249
12.4 Grassmann çarpımları 256
12.5 Biçimlilerin integralleri 259
12.6 Dışsal türev 261
12.7 Hacim elemanı; toplama uzlaşısı 266
12.8 Tensörler: soyut indis ve diyagram biçimli notasyon 269
12.9 Karmaşık manifoldlar 272
13. SİMETRİ GRUPLARI 275
13.1 Dönüşüm grupları 275
13.2 Alt gruplar ve basit gruplar 279
13.3 Doğrusal dönüşümler ve matrisler 283
13.4 Determinantlar ve izler 289
13.5 Öz değerler ve öz vektörler 291
13.6 Temsil kuramı ve Lie cebiri 294
13.7 Tensör temsil uzayları; indirgenebilirlik 299
13.8 Ortogonal gruplar 304
13.9 Üniter gruplar 310
13.10 Simplektik gruplar 315
14. MANİFOLDLAR ÜZERİNDEKİ ANALİZ 320
14.1 Bir manifold üzerinde türev alma? 320
14.2 Paralel taşıma 322
14.3 Kovaryant türev 326
14.4 Eğrilik ve torsiyon 329
14.5 Jeodeziler, paralelkenarlar ve eğrilik 332
14.6 Lie türevi 338
14.7 Bir metriğin sizin için yapabileceği şey 345
14.8 Simplektik manifoldlar 349
15. LİF DEMETLERİ VE AYAR BAĞLANTILARI 352
15.1 Lif demetleriyle ilgili bazı fiziki güdüler 352
15.2 Matematiksel demet fikri 355
15.3 Demetlerin ara kesitleri 359
15.4 Clifford demeti 361
15.5 Karmaşık vektör demetleri, (ko)tanjant demetler 366
15.6 İzdüşümsel uzaylar 369
15.7 Demet bağlantısındaki önemsiz olmama durumu 373
15.8 Demet eğriliği 377
16. SONSUZLUK MERDİVENİ 383
16.1 Sonlu alanlar 383

16.2 Fizikle ilgili sonlu ya da sonsuz geometri? 385
16.3 Sonsuzun farklı boyutları 390
16.4 Cantor'un çapraz kesiği 394
16.5 Matematiğin temellerindeki bilmeceler 398
16.6 Turing makineleri ve Gödel teoremi 401
16.7 Fizikte sonsuzun boyutları 406
17. UZAYZAMAN 409
17.1 Aristotelesçi fiziğin uzayzamanı 409
17.2 Galileici görelilikle ilgili uzayzaman 411
17.3 Uzayzaman terimleriyle Newtoncı dinamik 414
17.4 Eşdeğerlik ilkesi 417
17.5 Cartan'ın "Newtoncı uzayzamanı" 421
17.6 Işığın sabit sınırlı hızı 426
17.7 Işık konileri 428
17.8 Mutlak zamanın terki 431
17.9 Einstein genel göreliliğinde uzayzaman 436
18. MINKOWSKICİ GEOMETRİ 439
18.1 Öklitçi ve Minkowskici 4–uzay 439
18.2 Minkowski uzayının simetri grupları 442
18.3 Lorentzci ortogonallik; "saat paradoksu" 445
18.4 Minkowski uzayındaki hiperbolik geometri 449
18.5 Bir Riemann küresi olarak gökküresi 455
18.6 Newtoncı enerji ve (açısal) momentum 458
18.7 Görelilikle ilgili enerji ve (açısal) momentum 461
19. MAXWELL VE EINSTEIN'IN KLASİK ALANLARI 466
19.1 Newtoncı dinamik ötesindeki evrim 466
19.2 Maxwell'in elektromanyetik kuramı 468
19.3 Maxwell kuramındaki korunum ve akış yasaları 473
19.4 Ayar eğriliği olarak Maxwell alanı 475
19.5 Enerji momentum tensörü 481
19.6 Einstein'ın alan denklemi 485
19.7 Daha başkaca konular: kozmolojik sabit; Weyl tensörü 489
19.8 Kütleçekimle ilgili alan enerjisi 492
20. LAGRANGE DENKLEMİ VE HAMILTONLAR 498
20.1 Sihirli Lagrange formalizmi 498
20.2 Daha simetrik biçimli Hamilton tablosu 503
20.3 Küçük salınımlar 506
20.4 Simplektik geometri olarak Hamiltoncı dinamik 511
20.5 Alanların Lagrange denkleminin ele alınışı 513
20.6 Lagrange denklemlerinin modern kuramı güdüleme biçimi 516

21. KUANTUM PARÇACIĞI 520
21.1 Değişmeli olmayan değişkenler 520
21.2 Kuantum Hamiltonları 523
21.3 Schrödinger'in denklemi 526
21.4 Kuantum kuramının deneysel ardalanı 528
21.5 Dalga parçacık ikiliğini anlamak 533
21.6 Kuantum "gerçekliği" nedir? 535
21.7 Bir dalga fonksiyonunun "holistik" doğası 540
21.8 Gizemli "kuantum sıçramaları" 544
21.9 Bir dalga fonksiyonundaki olasılık dağılımı 546
21.10 Konum durumları 549
21.11 Momentum uzay açıklaması 551
22. KUANTUM CEBİRİ, GEOMETRİ VE SPİN 555
22.1 U ve R kuantum işlemleri 555
22.2 U'nun doğrusallığı ve R'ye çıkardığı sorunlar 558
22.3 Üniter yapı, Hilbert uzayı, Dirac notasyonu 561
22.4 Üniter evrim: Schrödinger ve Heisenberg 564
22.5 Kuantum "gözlemlenebilirler"i 568
22.6 EVET/HAYIR ölçümleri; projektörler 572
22.7 Boş ölçümler; sarmallık 574
22.8 Spin ve spinörler 580
22.9 İki–durumlu sistemlere ilişkin Riemann küresi 584
22.10 Yüksek spin: Majorana tablosu 590
22.11 Küresel harmonikler 593
22.12 Görelilikçi kuantum açısal momentumu 598
22.13 Genel yalıtık kuantum nesnesi 602
23. DOLANIK KUANTUM DÜNYASI 608
23.1 Çok parçacıklı sistemlerin kuantum mekaniği 608
23.2 Çok parçacıklı durum uzayının büyüklüğü 610
23.3 Kuantum dolanıklığı; Bell eşitsizlikleri 613
23.4 Bohm tipi EPR deneyleri 616
23.5 Hardy'nin EPR örneği: neredeyse olasılık–serbest 621
23.6 Kuantum dolanıklığının iki gizemi 623
23.7 Bozonlar ve fermiyonlar 626
23.8 Bozon ve fermiyonların kuantum durumları 628
23.9 Kuantum Işınlama 631
23.10 Kudolanıklık 635
24. DIRAC ELEKTRONU VE KARŞI–PARÇACIKLAR 641
24.1 Kuantum kuramı ve görelilik arasındaki gerilim 641
24.2 Karşı–parçacıklar niçin kuantum alanlarını ima eder? 642

24.3 Kuantum mekaniğinde enerji pozitifliği 645
24.4 Görelilikçi enerji denklemindeki zorluklar 647
24.5 $\partial/\partial t$'nin değişmez olmayışı 649
24.6 Dalga işlemcisinin Clifford–Dirac karekökü 651
24.7 Dirac denklemi 653
24.8 Dirac'ın pozitrona giden yolu 656
25. PARÇACIK FİZİĞİNİN STANDART MODELİ 660
25.1 Modern parçacık fiziğinin kökenleri 660
25.2 Elektrona ilişkin zikzak tablo 662
25.3 Elektrozayıf etkileşimler; yansıma asimetrisi 666
25.4 Yük eşlemesi, dönüşüm çarpanı ve zaman tersinimi 672
25.5 Elektrozayıf simetri grubu 675
25.6 Yeğin etkileşen parçacıklar 680
25.7 "Renklendirilmiş kuarklar" 683
25.8 Standart modelin ötesi? 687
26. KUANTUM ALAN KURAMI (QFT) 690
26.1 Modern kuramda QFT'nin temel konumu 690
26.2 Yaratma ve yok etme işlemcileri 692
26.3 Sonsuz boyutlu cebirler 695
26.4 QFT'deki karşı–parçacıklar 697
26.5 Alternatif vakumlar 699
26.6 Etkileşimler: Lagrange denklemi ve yol integralleri 701
26.7 Iraksak yol integralleri: Feynman'ın tepkisi 706
26.8 Feynman grafiklerinin oluşumu; S–matrisi 708
26.9 Yeniden normalleştirme 712
26.10 Lagrange denkleminden Feynman grafikleri 717
26.11 Feynman grafikleri ve vakum seçimi 719
27. BÜYÜK PATLAMA VE TERMODİNAMİK MİRASI 722
27.1 Dinamik evrimdeki zaman simetrisi 722
27.2 Mikroskopla bile görülemeyen bileşenler 724
27.3 Entropi 726
27.4 Entropi kavramının sağlamlığı 729
27.5 İkinci yasanın türetimi; yoksa değil mi? 733
27.6 Tüm evren "yalıtık bir sistem" midir? 736
27.7 Büyük Patlamanın rolü 739
27. 8 Kara delikler 745
27.9 Olay ufukları ve uzayzaman tekillikleri 750
27.10 Kara delik entropisi 752
27.11 Kozmoloji 756
27.12 Konformal diyagramlar 762

27.13 Olağanüstü biçimde özel Büyük Patlamamız 766
28. ERKEN EVRENLE İLGİLİ KURGUSAL KURAMLAR 773
28.1 Erken evren kendiliğinden simetri kırılımı 773
28.2 Kozmik topolojik bozukluklar 777
28.3 Erken evren simetri kırılımıyla ilgili sorunlar 781
28.4 Şişme kozmolojisi 786
28.5 Şişmeyle ilgili yönlendiriciler geçerli midir? 792
28.6 Antropik ilke 798
28.7 Büyük Patlamanın özel doğası: antropik bir anahtar? 803
28.8 Weyl eğrilik hipotezi 806
28.9 Hartle–Hawking "sınır yok" önermesi 810
28.10 Kozmolojik parametreler: gözleme dayalı konum? 814
29. ÖLÇÜM PARADOKSU 822
29.1 Kuantum kuramının geleneksel ontolojileri 822
29.2 Kuantum kuramıyla ilgili alışılmadık ontolojiler 826
29.3 Yoğunluk matrisi 833
29.4 1/2 spini için yoğunluk matrisleri: Bloch küresi 836
29.5 EPR durumlarındaki yoğunluk matrisleri 840
29.6 FAPP çevresel evre uyumsuzluk felsefesi 845
29.7 "Kopenhag" ontolojisiyle Schrödinger'in kedisi 847
29.8 Diğer geleneksel ontolojiler "kedi"yi çözümleyebilir mi? 850
29.9 Geleneksel olmayan hangi ontolojiler yardım edebilir? 853
30. KUANTUM DURUM İNDİRGENMESİNDE KÜTLEÇEKİMİN ROLÜ 857
30.1 Bugünün kuantum kuramı kalıcı mıdır? 857
30.2 Kozmolojik zaman asimetrisinden ipuçları 859
30.3 Kuantum durum indirgemesinde zaman asimetrisi 861
30.4 Hawking'in kara delik sıcaklığı 865
30.5 Karmaşık periyodiklik yoluyla kara delik sıcaklığı 870
30.6 Killing vektörleri, enerji akışı ve zaman yolculuğu! 876
30.7 Negatif enerji yörüngelerinden enerji çıkışı 879
30.8 Hawking patlamaları 882
30.9 Daha radikal bir bakış açısı 886
30.10 Schrödinger öbeği 890
30.11 Einstein ilkeleriyle ilgili temel çelişki 894
30.12 Tercih edilmiş Schrödinger–Newton durumları? 898
30.13 FELIX ve ilgili önermeler 901
30.14 Erken evrendeki dalgalanmaların kökeni 907
31. SÜPERSİMETRİ, BOYUTLULUK ÖTESİ VE SİCİMLER 913
31.1 Açıklanmamış parametreler 913
31.2 Süpersimetri 917

31.3 Süpersimetriye ilişkin cebir ve geometri 922
31.4 Yüksek boyutlu uzayzaman 925
31.5 Orijinal hadronik sicim kuramı 930
31.6 Dünyaya ilişkin bir sicim kuramına doğru 934
31.7 Ek uzayzaman boyutlarıyla ilgili sicim güdüsü 937
31.8 Kuantum kütleçekim olarak sicim kuramı? 939
31.9 Sicim dinamiği 943
31.10 Ek uzay boyutlarını niçin görmüyoruz? 945
31.11 Kuantum kararlılık argümanını kabul etmeli miyiz? 951
31.12 Ek boyutlara ilişkin klasik kararsızlık 955
31.13 Sicim QFT'si sonlu mudur? 958
31.14 Sihirli Calabi–Yau uzayları; M–kuramı 960
31.15 Sicimler ve kara delik entropisi 967
31.16 "Holografik ilke" 972
31.17 D–zar bakış açısı 975
31.18 Sicim kuramının fiziki konumu? 979
32. EINSTEIN'IN DAHA DAR YOLU; DÖNGÜ DEĞİŞKENLERİ 983
32.1 Kanonik kuantum kütleçekim 983
32.2 Ashtekar değişkenlerine yönelik aynal girdi 985
32.3 Ashtekar değişkenlerinin biçimi 988
32.4 Döngü değişkenleri 991
32.5 Düğüm ve bağların matematiği 994
32.6 Spin ağları 998
32.7 Döngü kuantum kütleçekim konumu? 1004
33. DAHA RADİKAL BAKIŞ AÇILARI; BURGAÇ KURAMI 1008
33.1 Geometrinin ayrık elemanlara sahip olduğu kuramlar 1008
33.2 Işık ışınları olarak burgaçlar 1013
33.3 Konformal grup; tıkızlaştırılmış Minkowski uzayı 1019
33.4 Yüksek boyutlu spinörler olarak burgaçlar 1023
33.5 Temel burgaç geometrisi ve koordinatları 1026
33.6 Spin yapan kütlesiz parçacıklar olarak burgaç geometrisi 1029
33.7 Burgaç kuantum kuramı 1034
33.8 Kütlesiz alanlara ilişkin burgaç tanımlaması 1037
33.9 Burgaç deste kohomolojisi 1040
33.10 Burgaçlar ve pozitif/negatif frekans bölme 1046
33.11 Çizgisel olmayan graviton 1048
33.12 Burgaçlar ve genel görelilik 1054
33.13 Parçacık fiziğine ilşikin bir burgaç kuramına doğru 1056
33.14 Burgaç kuramının geleceği? 1057

34. GERÇEĞE GİDEN GOL NEREDEDİR? 1063
34.1 20. yüzyıl fiziğinin büyük kuramları; ya ötesi? 1063
34.2 Matematiksel olarak yönlendirilen temel fizik 1068
34.3 Modanın fiziki kuramdaki rolü 1071
34.4 Yanlış bir kuram deneysel olarak çürütülebilir mi? 1075
34.5 Sonraki fiziki devrimimizi nereden bekleyebiliriz? 1080
34.6 Gerçeklik nedir? 1083
34.7 Zihinselliğin fiziki kuramdaki rolleri 1086
34.8 Gerçeğe giden uzun matematiksel yolumuz 1090
34.9 Güzellik ve mucizeler 1095
34.10 Derin sorular yanıtlanır, daha derinleri sorulur 1101
SONSÖZ 1104
KAYNAKÇA 1106
DİZİN 1146

ÖNSÖZ

Bu kitabın amacı okuyucuya insanlığın giriştiği, keşfin elbette ki en önemli ve heyecan verici yolculuklarından biri hakkındaki bazı duyguları aktarmaktır. Bu, evrenimizin davranışlarını yöneten temel kurallara ilişkin arayıştır. İki bin beş yüz yıldan daha fazla sürmüş bu yolculukta önemli boyutta gelişme sağlanmış olması bizi şaşırtmamalı. Öte taraftan bu yolculuğun derinlemesine zor bir yolculuk olduğu kanıtlanmış ve gerçeği kavrayış büyük oranda yavaşça edinilmiştir. Bu içsel zorluk bizi birçok yanlış yöne sevk etti; öyleyse dikkatli olmayı öğrenmeliyiz. Yalnızca 20. yüzyıl dahi bize olağanüstü yeni kavrayışlar sundu; bazıları öylesine etkileyici ki birçok günümüz bilim insanı fiziğin temel yasalarının *tümüne* yönelik temel bir anlayışa yakın olabileceğimiz görüşünü dillendirdiler. 20. yüzyıl artık sona doğru yaklaşırken var olan temel kuramlarla ilgili tanımlamalarımda daha makul bir bakışı ele almaya çalışacağım. Fikirlerimin hepsi bu "iyimserler" tarafından hoş karşılanmayabilir fakat geçen yüzyılınkilerden bile daha büyük yön değişiklikleri bekliyorum.

Okuyucu bu kitapta matematiksel denklemlerden, bunun okuyucu sayısında ciddi düşüşlere yol açacağına ilişkin müthiş uyarılara rağmen kaçınmadığımı görecektir. Bu sorun üzerine ciddi olarak düşündüm ve söylemem gereken şeyin belirli miktarda matematiksel ifade ve gerçek matematiksel kavramların incelenmesi olmaksızın aktarılamayacağı sonucuna ulaştım. Fiziki dünyamızın davranışlarını gerçekte temellendiren yasalara ilişkin anlayışımız aslında, ona ilişkin matematiğin kavranmasına dayanıyor. Bazı insanlar bunu, matematiğe karşı bir yetenekleri olmadığı inancını edindiklerinden, ne kadar temel bir seviyede olduğundan bağımsız olarak umutsuzluğa düşmenin bir nedeni olarak kabul ediyorlar. Şüphesiz şunu da iddia edebilirler; fiziki kuramın en gelişkin ortamında ilerleyen araştırmayı algılamak *kesirli* işlemlere hâkim olmadan nasıl mümkün olabilir? Zorluğu elbette görüyorum.

Kavrayışı iletme anlamında hâlâ bir iyimserim. Belki de ıslah olmaz bir iyimserim. Kesirli işlemlere hâkim olamadıklarını ileri süren –ya da onlara hâkim olamadıklarını iddia eden– okuyucuların kendilerini en azından biraz olsun kandırıp kandırmadıklarını ve önemli bir kısmının aslında bu yönde farkında olmadıkları bir potansiyele sahip olup olma-

dıklarını merak ediyorum. Matematiksel sembollerden oluşan bir satırla karşılaştıklarında, ne kadar basit ifadelendirilmiş olursa olsun, karşılarında konunun sihrine ya da güzelliğine ulaşmaya imkan veren ipuçları yerine kendilerine yalnızca papağana benzer türde, idrak etmeksizin yalın bir yeterlilik –bir yükümlülük, yalnızca bir yükümlülük– aşılamaya çalışan bir ebeveyn ya da öğretmenin katı yüz ifadesini gören bazılarının olduğuna kuşku yok. Bazıları için belki çok geç; fakat dediğim gibi ben bir iyimserim ve dışarıda, aralarında kesirli işlemlere hiçbir zaman hâkim olamayacak olanlar olsa da, kendileri için belirli bir dereceye kadar erişilebilir olan muhteşem bir dünyaya ufacık bir göz atabilme kapasitesine sahip pek çoklarının var olduğuna inanıyorum.

Annem genç bir kızken onun en yakın arkadaşlarından biri, kesirleri kavrayamayanlar arasındaydı. Bu hanımefendi, emekli olduğu başarılı bir balerinlik kariyeri sonrasında bir kez kendini bana böyle anlattı. Hâlâ gençtim ve bir matematikçi olarak faaliyetlerime bütünüyle başlamamıştım fakat bu konuda çalışmaktan keyif alan biri olarak tanınıyordum. Bana "hep o sadeleştirme" dedi, "sadeleştirmenin nasıl yapıldığını hiç öğrenemedim". Oldukça zarif ve zeki bir kadındı ve zihnimde, balede merkezi önemde olan karmaşık koreografi kavrayışı için gerekli zihinsel niteliklerin bir matematik problemiyle ilintili olarak ele alınması gerekenlerden aşağı kalır yanı olmadığına dair kuşku yoktu. Böylece aktarımla ilgili yeteneklerimi fazlasıyla abartarak ona, daha önce başkalarının da yaptığı gibi, "sadeleştirme" işleminin mantıksal doğasını ve basitliğini açıklamaya giriştim.

Çabalarımın diğerlerininkiler kadar başarısız olduğuna inanıyorum. (Bu arada babasının seçkin bir bilim insanı ve bir Kraliyet Derneği üyesi olması nedeniyle, bilimsel konuların algılanışında elverişli bir altyapıya sahip olmuş olması gerekirdi. Bilmiyorum, belki burada da "katı yüz ifadesi" bir etmen olmuş olabilir.) Öte taraftan şimdi onun ve onun gibi bir çoğunun, tüm matematiksel netliğime rağmen fark edemediğim daha rasyonel bir tabuları olup olmadığını merak ediyorum. Aslında matematikte ve matematiksel fizikte kişinin tekrar tekrar karşılaştığı derin bir konu, ilk olarak basit sayısal bir kesrin pay ve paydasındaki ortak çarpanı, görünüşte masumca sadeleştirme işlemi sırasında karşılaştığı bir konu mevcuttur.

Bu tür işlemlerle sürekli aşinalık sebebiyle sadeleştirme eylemi kendilerinin ikinci doğası haline gelenler, kendilerini bu görünürde basit işlemin arkasına gizlenmiş zorluğa karşı duyarsız bulabilirler. Belki de sadeleştirmeyi gizemli bulanlar belirli bir derin konuyu, onu şövalyece ileri atılıp görmezden gelen bizlerden daha derinlemesine görüyorlar. Bu hangi

konudur? Bu konu, matematikçilerin matematik kavramlarına bir varlık sağlayabildikleri gerçek yöntemle ve bu kavramların fiziki gerçeklikle nasıl ilişkilendiğiyle ilgilenir.

11 yaşlarında okuldayken, öğretmen sınıfta bir kesrin (örneğin $\frac{3}{8}$) ne olduğunu sorduğunda bir tür şok geçirdiğimi anımsıyorum! Bir pastanın dilimlenmesi gibi çeşitli görüşler ileri sürülmüş fakat bunlar öğretmen tarafından yalnızca kesin matematiksel kesir kavramının kendilerine *uygulandığı* kesin olmayan fiziki durumlarla ilgili oldukları, bize yalın matematiksel kavramın ne *olduğunu* söylemedikleri (haklı) gerekçesiyle reddedilmişti. Örneğin $\frac{3}{8}$'in "3'ün üstte ve 8'in altta, aralarında da yatay bir çizgi olacak şekilde bir şey" olduğu önerisi gibi başka öneriler de geldi ve öğretmenin bu önerileri dikkate alır göründüğünü fark ettiğimde kesinlikle şaşırdım! Konunun sonuçta nasıl çözüldüğünü açıkça anımsamıyorum fakat çok sonraları bir matematik bölümü öğrencisi olarak edindiğim deneyimlerle anladım ki okul öğretmenim matematikteki evrensel *eşdeğerlik sınıfı* kavramı yardımıyla kesrin tanımını bize cesurca bir anlatma girişiminde bulunmuştu.

Bu kavram nedir? Bir kesir söz konusu olunca nasıl uygulanabilir ve onun aslında ne olduğunu bize nasıl söyleyebilir? Sınıf arkadaşlarımın "üstte 3 ve altta 8 olan bir şey"i ile başlayalım. Temelde bu öneri bize bir kesrin, tamsayıların düzenli bir çifti ile belirtildiğini söyler, bu durumda sayılar 3 ve 8'dir. Bununla birlikte kesri böylesine düzenli bir çift olarak *var olur* biçimde değerlendiremeyiz çünkü $\frac{6}{16}$ kesri $\frac{3}{8}$ kesriyle aynı sayı iken öte yandan (6,16) çifti (3,8) çiftiyle kesinlikle aynı değildir. Burada bir sadeleştirme söz konusudur; $\frac{6}{16}$'yı $\frac{3\times2}{8\times2}$ şeklinde yazıp $\frac{3}{8}$ elde etmek için 2'yi üstten ve alttan sadeleştirebiliriz. Bunu yapmamız ve böylece bir anlamda (6,16) çiftiyle (3,8) çiftini *eşitlememiz* niçin olanaklıdır? Matematikçinin cevabı –kaçamak gibi de görülebilir– bir kesrin tanımında inşa edilmiş sadeleştirme kuralını içerir: tamsayılara ilişkin bir $(a\times n, b\times n)$ çiftinin, (a, b) çiftiyle, n sıfır olmayan tamsayılardan herhangi biri olduğunda (ve b'nin de sıfır olmasına izin vermediğimizde), aynı kesri temsil ettiği varsayılır.

Yine de bu da bize bir kesrin ne olduğunu söylemez; yalnızca kesirleri hangi yolla temsil ettiğimize dair bir şey söyler. Öyleyse bir kesir *nedir*? Matematikçilerin "eşdeğerlik sınıfı" kavramına göre $\frac{3}{8}$ kesri örneğin, basitçe tüm, (3, 8), (–3, –8), (6, 16), (–6, –16), (9, 24), (–9, –24), (12, 32), ..., çiftlere ilişkin her çift listedeki diğer çiftlerden yukarıdaki sadeleştirme kuralının sürekli uygulanışıyla elde edilebilmek üzere, sonsuz bir derlemedir.[1] Ayrı-

[1] Buna "eşdeğerlik sınıfı" denir çünkü aslında o, elemanlarının her biri belirli bir anlamda her

ca bize cebirin normal kurallarının geçerli olduğu yerde, tamsayı çiftlerinin böylesi sınırsız kümelerini nasıl toplayacağımızı, çıkaracağımızı ve çarpacağımızı ve tamsayıların kendilerini kesrin belirli türleri olarak nasıl belirteceğimizi söyleyen tanımlamalara ihtiyacımız var.

Bu tanım matematiksel olarak kesirlere ilişkin tüm gereksinimimizi kapsar (örneğin $\frac{1}{2}$ bir sayı olarak kendisine eklendiğinde 1 sayısını verir, vb) ve sadeleştirme işlemi görmüş olduğumuz gibi tanım içinde inşa edilir. Bu hâlâ oldukça biçimsel görünmektedir ve aslında onun bir kesrin ne olduğuna ilişkin sezgisel kavrama gerçekten hükmedip etmediğini merak ederiz. Her ne kadar bu evrensel eşdeğerlik sınıfı işlemi, yukarıdaki gösterimi onun sadece belirli bir örneği olsa da, tutarlılık oluşturmak ve matematiksel varlık için saf matematiksel bir araç olarak oldukça güçlüdür ve bizi çok ağır görünümlü kavramlar konusunda destekleyebilir. Örneğin $\frac{3}{8}$'in ne olduğuna ilişkin sezgisel kavramı bize açıkça iletiyor! Annemin arkadaşının kafasının karıştığına şaşmamalı.

Matematiksel kavramlara ilişkin açıklamalarımda, bizi bir kesri "çiftlerin sonsuz bir sınıfı" biçiminde açıklamaya sevk eden matematiksel ukalalık çeşidinden, matematiksel titizlik ve kesinlikte açıkça bir değere sahip olsa bile, yapabildiğim kadarıyla kaçınmaya çalışacağım. Buradaki açıklamalarımda matematiksel pek çok önemli kavramın doğasında bulunan fikri –ve güzelliği ve sihri– iletmekle daha fazla ilgileneceğim. Bir kesir fikri basitçe, örneğin $\frac{3}{8}$'in kendi kendine toplamda 7 defa eklendiğinde 3 verme özelliğine sahip bir tür işlem olmasıdır. Sihir şurada ki aslında bir kesir fikri, fiziki dünyada kesirlerle kesin olarak ölçülebilen şeyleri –pasta dilimleri yalnızca yaklaşık tahminlere yol açar– doğrudan deneyimlemememize rağmen işler. (Bu durum, doğrudan deneyimimize ait rakamları kesin olarak ölçebildiğimiz 1, 2, 3 gibi doğal sayılarda var olan durumdan oldukça farklıdır.) Kesirlerin tutarlı bir anlam ifade ettiğini görmenin bir yolu aslında "tanımı", yukarıda işaret edildiği gibi tamsayı çiftlerinin sınırsız kümeleri biçiminde kullanmaktır. Fakat bu $\frac{3}{8}$'in aslında böylesi bir derleme *olduğu* anlamına gelmez. $\frac{3}{8}$'i, bir tür (Platonik) kendinde var olan işlem olarak düşünmek ve çiftlerin sonsuz derlemesini, işlemin bu türüne ilişkin tutarlılığı kabul edip başa çıkmamızın yalnızca bir yolu olarak düşünmek daha iyi olur. $\frac{3}{8}$ gibi bir kavramı kendi türünde var oluşa sahip bir şey olarak ve "çiftlerin sonsuz bir derlemesi" fikrini yalnızca ukalaca bir araç, bir kez kavradığımızda imgelemimizden hızlıca

bir diğerine denk varsayılan bir varlık (bu özel durumda tamsayı çiftleri halinde oluşur) sınıfıdır.

uzaklaşan bir araç olarak kavrayabileceğimize samimiyetle inanmaya başlarız. Matematiğin hemen bütünü böyledir.

Matematikçilere göre (anlayabildiğim kadarıyla en azından çoğunluğu), matematik sadece kendi kendimize yarattığımız kültürel bir etkinlik değildir, kendine ait bir yaşamı söz konusudur ve onun çoğunluğu fiziki evrenle inanılmaz bir uyum yakalar. Matematik dünyasına girmeksizin fiziki dünyaya hükmeden kurallar hakkında derin bir kavrayış elde edemeyiz. Özellikle eşdeğerlik sınıfının yukarıdaki anlamı sadece önemli (ve kafa karıştırıcı) matematiğin değil ama aynı zamanda örneğin Einstein'ın genel görelilik kuramı ve Doğa kuvvetlerini modern parçacık fiziğine göre açıklayan "ayar kuramı"* gibi önemli (ve kafa karıştırıcı) fiziğin de büyük kısmıyla ilintilidir. Modern fizikte, matematiğin çok yönlü incelikleriyle yüzleşmekten kaçınılamaz. Bu nedenledir ki bu çalışmanın ilk 16 bölümünü matematiksel fikirlerin doğrudan açıklanmasına ayırdım.

Bununla başa çıkması için okura ne gibi önerilerde bulunabilirim? Bu kitabın okunabileceği dört seviye bulunmaktadır. Belki de siz yelpazenin bir ucunda yer alan, matematiksel bir ifade kendini gösterdiği anda kitaptan kopan bir okursunuz (ve böyle bazı okurlar kesirlerle baş etmekte zorluk yaşayabilirler). Böyleyse, inanıyorum ki tüm denklemleri basitçe görmezden gelip sadece sözcükleri okuyarak dahi kitaptan çok şey edinebilirsiniz. Sanırım bu büyürken benim, evimizde darmadağın duran satranç dergilerini bazı zamanlar gözden geçirme yöntemime benziyor. Satranç, abilerim ve ebeveynlerimin yaşamlarının önemli bir parçasıydı fakat ben satranca, kendilerini bu oyuna adayan o istisna ve çoğunlukla tuhaf karakterlerin maceralarını okumaktan keyif almak dışında çok az ilgi gösterirdim. Sıkça yaptıkları hamlelerin görkemini okumaktan, yapılanları anlamasam ve değişik konumlar için verilmiş işaretlemeleri takip etmesem bile, bir şeyler edindim. Bunu hâlâ ilgimi çekebilen keyifli ve aydınlatıcı bir etkinlik olarak buluyorum. Umuyorum ki burada kullandığım matematik bilgisi, cesaret ya da merak yoluyla da olsa, fiziki evrenimizin temelinde yattığı görülen matematiksel ve fiziki fikirleri araştırma yolculuğumda bana eşlik ederlerse bazı matematik dışı okurlara bile ilgi çekici bir şeyler aktarabilir. Denklemleri atlamaktan korkmayın (ben de sık sık yapıyorum) ve dilerseniz sizi çok bunalttıklarında bölümleri ya da bölümlerdeki parçaları da atlayın. Malzemenin zorluğu ve teknik oluşu anlamında büyük bir çeşitlilik mevcuttur ve herhangi başka bir yer daha çok hoşunuza gidebilir. Yalnızca gömülüp gözden geçirmeyi seçebilirsiniz. Umuyorum ki genişçe başvurulmuş iç referans yöntemi aşina olunmayan kavramları yeterli derecede aydınlatabilir ve böylece gerekli düşünce ve işaretlemelerin

* Gauge theory –çn.

açıklamalar için aranması daha önce okunmamış bölümlere dönmek yoluyla mümkün olabilir.

İkinci bir seviyede, matematiksel denklemler sunulduğunda onları incelemeye hazırlıklı bir okur olabilirsiniz fakat ileri süreceğim iddiaları kendiniz için sınamaya hevesiniz (ya da zaman) olmayabilir. Bu iddiaların çoğunun doğrulamaları kitabın matematiksel kısımlarına serpiştirdiğim alıştırmaların çözümlerini oluşturuyor. Zorluğun üç seviyesini şu şekillerle belirttim –

oldukça yalın

biraz düşünmeye ihtiyacı var

basitçe ele alınamaz

Bu şekillere, dilerseniz, güvenmeniz mükemmel derecede akla yatkındır ve bu konumlanışı tercih ederseniz süreklilik yitimi de söz konusu olmaz.

Diğer taraftan eğer bu tür değişik (önemli) matematiksel kavramlara ilişkin kolaylık elde etmek isteyen bir okursanız fakat betimlediğim fikirler size o kadar da tanıdık gelmiyorsa, umuyorum ki bu alıştırmalarla çalışmanın böylesi kolaylıklar edinmenizde kayda değer yardımları olacaktır. Matematik söz konusu olduğunda durum her zaman, konular üzerine kendinizin eğileceği bir miktar doğrudan düşünme denemesinin, yalnızca onlar hakkında okuma yapmaktan daha derin bir kavrayış sağlayabilecek olmasıdır. (Çözümlere ihtiyaç duyarsanız www.roadsolutions.ox.ac.uk adresine bakın.)

Nihayet, belki de bir uzmansınız; bu durumda matematikle ilgili güçlük çekmemelisiniz (çoğunluğu size tanıdık gelecektir) ve alıştırmalarla zaman kaybetmek istemeyebilirsiniz. Yine de bazı konulara ilişkin, alışılmış olanlardan bir şekilde farklılığa sahip yaklaşımlarımdan (bazen oldukça farklı) elde edebileceğiniz bir şeyler olabilir. Birtakım modern kuramlarla (örneğin süpersimetri, şişme kozmolojisi,[&] Büyük Patlamanın doğası, kara delikler, sicim kuramı, ya da M–kuramı, kuantum kütleçekimdeki ilmek değişkenleri,[*] burgaç kuramı[†] ve hatta kuantum kuramının son bulgularıyla) ilgili görüşlerime dair merak sahibi olabilirsiniz. Bu konuların bir çoğunda bana katılmayacağınıza kuşku yok. Bununla birlikte ihti-

[&] Enflasyon kozmolojisi –yn.

[*] Loop variable –çn.

[†] Twistor theory –çn.

lafların bilimin gelişiminin önemli bir parçası olmasından hareketle modern kuramsal fiziğin bazı ana akım etkinlikleriyle kısmen uyumsuz görünen görüşleri sergilemek konusunda bir pişmanlığa sahip değilim.

Bu kitabın esasen, matematik ve fizik arasındaki ilişki ve evren hakkında daha iyi bir kuram için arayışlarımızın temellerini güdüleyen iki güçlü etki arasındaki etkileşimin nasıl şekillendiğiyle ilgili olduğu söylenebilir. Birçok modern gelişmede, bu itkilerin asli bir bileşeni matematiksel zarafet, derinlik ve çok yönlülüğün yargılanışından doğar. Bu tür matematiksel etkilerin, 20. yüzyıl fiziğinin bazı en etkileyici ve başarılı çalışmalarında görüldüğü üzere, yaşamsal önemde olduğu şüphesizdir: elektron için Dirac denklemi, kuantum mekaniğinin genel çerçevesi ve Einstein'ın genel göreliliği. Öte taraftan tüm bu durumların kabul edilmesi için gerekli başat koşulları fiziki –son tahlilde gözleme dayalı olan– değerlendirmeler sundu. Evrenin yasalarını algılayışımızı temelden geliştirmeyi amaçlayan modern fikirlerin çoğunda uygun fiziki koşullar –diğer bir deyişle deneysel veri ya da hatta deneysel araştırma olanağı– olanaklı değildir. Böylelikle elde edilebilir matematiksel eksikliklerin, bu fikirlerin başarı şansına sahip olduklarını değerlendirmemize yetecek nitelikte olup olmadıklarını sorgulayabiliriz. Soru oldukça hassastır; burada herhangi başka bir yerde yeterince tartışılmamış olduğuna inandığım konuları ele almaya çalışacağım.

Bazı bölümlerde tartışmalı olduğu kabul edilen görüşleri sunacak olsam da bu tür ayrıcalıkları kullanırken durumu okuyucuya açıklamak için oldukça özen gösterdim. Bu nedenle kitap esasen modern fiziğin merkezi fikirlerine (ve harikalarına) yönelik gerçek bir kılavuz olarak kullanılabilir. Okullarda, üçüncü binyılın ilk yıllarına doğru ilerlerken konunun anlaşıldığı haliyle, modern fiziğe açık yürekli bir giriş çalışması olarak kullanılmaya uygundur.

TEŞEKKÜRLER

Tamamlanması sekiz yıla mal olan bu boyutta bir kitap için teşekkür borçlu olduğum çok sayıda insan olması kaçınılmaz. Neredeyse aralarında, yaradılıştan düzensizliğim ve unutkanlığım nedeniyle değerli katkılarına atıfta bulunamadığım bir çoklarının oluşu kadar kaçınılmaz. Öncelikle, bana cömert yardımlarını sunmuş fakat isimleri şu an aklıma gelmeyen böylesi insanlara teşekkürlerimi –ve de özürlerimi– ifade edeyim. Bununla birlikte parçalar halinde çeşitli kesin bilgi ve destek sunmaları nedeniyle, Michael Atiyah, John Baez, Michael Berry, Dorje Brody, Robert Bryant, Hong–Mo Chan, Joy Christian, Andrew Duggins, Maciej Dunajski, Freeman Dyson, Artur Ekert, David Fowler, Margaret Gleason, Jeremy Gray, Stuart Hameroff, Keith Hannabuss, Lucien Hardy, Jim Hartle, Tom Hawkins, Nigel Hitchin, Andrew Hodges, Dipankar Home, Jim Howie, Chris Isham, Ted Jacobson, Bernard Kay, William Marshall, Lionel Mason, Charles Misner, Tristan Needham, Stelios Negre–pontis, Sarah Jones Nelson, Ezra (Ted) Newman, Charles Oakley, Daniel Oi, Robert Osserman, Don Page, Oliver Penrose, Alan Rendall, Wolfgang Rindler, Engelbert Schücking, Bernard Schutz, Joseph Silk, Christoph Simon, George Sparling, John Stachel, Henry Stapp, Richard Thomas, Gerard 't Hooft, Paul Tod, James Vickers, Robert Wald, Rainer Weiss, Ronny Wells, Gerald Westheimer, John Wheeler, Nick Woodhouse ve Anton Zeilinger'e teşekkür ederim. Sayısız ve çok çeşitli husustaki yardımları için Lee Smolin, Kelly Stelle ve Lane Hughston'a özel teşekkürlerimi sunuyorum. Parçacık fiziği alanındaki muazzam yardımları için Florence Tsou'ya (Sheung Tsun), en kayda değeri belirli kuantum mekaniksel konuların sunumu olan çeşitli konulardaki görüş ve yardımları nedeniyle Fay Dowker'a, kozmolojik veriler ve bunların değerlendirilmeleriyle ilgili değerli katkıları dolayısıyla Subir Sarkar'a, benzer şekilde evrenin bütünsel geometrisiyle ilgili kozmolojik bulguları hakkında sunduğu bazı yetkin bilgiler nedeniyle Vahe Gurzadyan'a ve özel olarak, ilmek değişkenleri kuramı hakkındaki kapsamlı ve sicim kuramı üzerine çeşitli ayrıntılı konulardaki bilgi desteği nedeniyle Abhay Ashtekar'a minnettarım.

Ulusal Bilim Kurumu'na PHY 93–96246 ve 00–90091 adı altındaki desteği ve Leverhulme Kurumu'na 2000–2002 yılları arasında verdikleri iki yıllık Leverhulme Emeritus Fellowship ödülü dolayısıyla teşekkür ederim.

Londra'da Gresham Koleji'ndeki (1998–2001) ve ABD, Pennsylvania'da Penn Devlet Üniversitesi Kütleçekim Fiziği ve Geometrisi Merkezi'ndeki yarı zamanlı randevular, Oxford Üniversitesi Matematik Enstitüsü'nde bir oda ve sekreterlik desteği sunulmasında olduğu gibi, bu kitabın yazılmasında benim için son derece değerli katkılardı.

Zorlu zamanlama baskısı altında ve istikrarsız çalışma alışkanlığına sahip bir yazarın varlığında işin editörlük kısmındaki özel destek paha biçilmezdi. Eddie Mizzi'nin başlangıç editörlük desteği kaotik el yazmalarımı gerçek bir kitaba dönüştürme sürecini başlatmakta yaşamsal önemdeydi ve Richard Lawrence mükemmel verimi ve sabırlı, hassas ısrarıyla bu projeyi tamamlama noktasında kritik bir etmendi. Bu derece karmaşık bir gözden geçirme çalışmasını yetiştirme noktasında John Holmes mükemmel bir dizin hazırlayarak sağlam bir iş çıkardı. Ve William Shaw'a, geç bir aşamada, burada Mandelbrot kümesi ve hiperbolik düzlem için kullanılan kusursuz bilgisayar grafikleri (Şekiller 1.2 ve 2.19 ve şekiller 2.16 ve 2.19'da içerilen dönüşüm uygulamaları) üretmek için yardımımıza gelmesi dolayısıyla özel olarak müteşekkirim. Öte taraftan benim için herkülvari bir başarıyla kaynaklar elde edip tasniflemesi ve dikkat çekecek derecede kısa bir zamanda el yazmalarının tümünü kontrol ederek sayısız açığı kapatması nedeniyle Jacob Foster'a sunabileceğim tüm teşekkürler, onun devasa yardımı karşısında yetersiz kalır. Açıklayıcı notların büyük kısmındaki kişisel mührü, onlara özel bir nitelik kazandırıyor. Şüphesiz burada teşekkür ettiğim hiç kimse arta kalan hata ve ihmallerle ilgili suçlanamaz, bununla ilgili yegâne sorumlu benim.

Hollanda'daki M. C. Escher Şirketi'ne, şekiller 2.11, 2.12, 2.16 ve 2.22'deki Escher çalışmalarını kopyalamaya izin verdikleri ve özellikle sonuncusu açık bir matematiksel dönüşüme uğratılan, şekiller 2.12 ve 2.16'da kullanılan Şekil 2.11 üzerinde değişiklik yapmaya izin verdikleri için özel minnettarlık sunuyorum. Kitapta kullanılan tüm Escher çalışmalarının telif hakkı (2004) M. C. Escher Şirketi'ne aittir. Sırasıyla, şekiller 27.19 ve 28.19'daki grafikleri kopyalamaya izin verdiği için Heidelberg Üniversitesi Kuramsal Fizik Enstitüsü'ne ve Charles H. Lineweaver'a da teşekkür ederim.

Son olarak sınırsız teşekkürlerimi, yalnızca ani talebimle bana bilgisayar grafikleri (Şekiller 4.1, 4.2, 5.7, 6.2–6.8, 8.15, 9.1, 9.2, 9.8, 9.12, 21.3b, 21.10, 27.5, 27.14, 27.15 ve Şekil 1.1'deki çok yüzlü cisimler) temin ettiği için değil ayrıca süreğen sevgi ve ilgisi için ve zihin olarak yalnızca yarısı var olan bir kocaya sahip oluşu bitimsiz yıllar boyu sürecekmiş gibi görünmesine rağmen anlayışı ve duyarlılığı için sevgili eşim Vanessa'ya sunuyorum. Ve ayrıca tüm hayatı boyunca beni sadece böylesi kendinden

geçmiş bir halde tanıma şansı olan Max, sadece bu kitabın yazımını yavaşlattığı için değil (kitabın ömrü bu sayede uzayabildi ve böylece onlarsız olmaz iki önemli bilgi yığınını da içerdi), iyi bir moralle devam etmeme yardım eden süreğen neşesi ve iyimserliği nedeniyle de en sıcak teşekkürlerimi alıyor. Nihayetinde kendisinin de gösterdiği gibi gerçek ilerleme için gerekli fikir ve anlayışlar, içinde yaşadığımız evrene *gerçekten* hükmeden o derindeki yasalar uğruna yapılan arayışla, yaşamın yenilenmesi yoluyla gelecek.

NOTASYON

(Kavramlara aşina olmadan okumayın fakat belki de yazı karakterleri kafa karıştırıcıdır!)

Belirli yazı karakterlerinin kullanımında makul şekilde tutarlı olmaya çalıştım fakat her şey bu standartta olmadığı için benimsediğim temel kullanım şeklini açıklamam okuyucu için faydalı olabilir.

İtalik ince punto türüne sahip harfler, örneğin w^2, p^n, $\log z$, $\cos\theta$, $e^{i\theta}$, ya da e^x'dekiler, sayısal ya da skaler nicelikler olan matematiksel değişkenler için klasik şekilde kullanılıyor; fakat e, i, ya da π gibi yerleşik sabitler veya sin, cos ya da log gibi yerleşik fonksiyonlar dikey harflerle gösteriliyor. Buna karşın c, G, h, $\hbar$, g, ya da k gibi standart fiziki sabitler italik yazıldı.

Bir vektör veya tensör niceliği kendi (soyut) bütünlüğünde düşünüldüğünde, Riemann eğrilik tensörünün $\boldsymbol{R}$ oluşu gibi italik kalın punto türüne sahip harflerle gösterilirken bileşenler kümesi, (indisindeki çekirdek sembol için de) R_{abcd}'deki gibi italik harflerle yazılabilir. Burada §12.8'de sunulan soyut indis gösterimi uyarınca, yorum yerindeyse R_{abcd} niceliği alternatif olarak tüm $\boldsymbol{R}$ tensörünü de temsil edebilir, bu metinde açıklanmalıdır. Soyut doğrusal dönüşümler tensör çeşitlerindendir ve bu birimler için de $\boldsymbol{T}$'de olduğu gibi italik kalın punto türüne sahip harfler kullanılır. Ayrıca soyut indis formu $T^a{}_b$, uygun olduğu yerde, indislerin derecelendirilmesinin matris çarpımlarının düzenleriyle olan kesin bağlantısını açıklığa kavuşturarak soyut doğrusal dönüşümler için de kullanılır. Böylece $S^a{}_b T^b{}_c$ *(soyut) indis ifadesi doğrusal dönüşümlerdeki* **ST** *matris çarpımını temsil eder.* $S^a{}_b$ *ve* $T^b{}_c$ *sembolleri alternatif olarak (metindeki bağlamına ya da açıkça belirtilme durumuna göre) genel tensörlerde olduğu gibi* **S** *ve* **T** *dik kalın harflerinin karşılıkları olan bileşenlere karşılık gelen dizilimlerle de temsil edilebilir. Bu durumda* **ST**, *karşılık gelen matris çarpımını temsil eder.* R_{abcd} *ya da* $S^a{}_b$*'de olduğu gibi (bileşen dizilimini ya da soyut tensörün kendisini temsil eden) sembollerin bu "kararsız" yorumları, cebirsel (ya da diferansiyel) ilişkilere bağlı olan bu semboller tüm yorumlamalarda özdeş oldukları için karışıklığa sebep olmamalı. Böyle nicelikler için burada bazen* bir *üçüncü gösterim de –diyagram biçiminde gösterim– kullanılıyor ve şekiller 12.17, 12.18, 14.6, 14.7, 14.21, 19.1'de ve kitapta herhangi bir yerde de açıklanıyor.*

Kitapta görelilik kuramının 4–boyutlu uzayzaman kavramlarını sıradan 3–boyutlu saf uzamsal kavramların karşılıklarından ayırmam gereken yerler mevcut. Öyleyse 4–momentum ya da 4–konum için sırasıyla, yukarıdaki gibi italik kalın punto türüne sahip örneğin $\boldsymbol{p}$ ya da $\boldsymbol{x}$ harleri kullanılırken 3–boyutlu saf uzamsal kavramlar kendilerine karşılık gelen dik kalın **p** ya da **x** harfleriyle temsil ediliyorlar. Benzer şekilde soyut bir doğrusal dönüşüm için kullanılan $\boldsymbol{T}$'dekinin aksine bir matris için kullanılan **T** gösterimi, **p** ve **x** nicelikleri her bir durumda, $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{x}$ daha çok bir bileşen–bağımsız yorumlama gibi görülebilse de (bu konuda yine de özellikle katı olmayacağım), üç uzamsal bileşeni "temsil ediyor" olarak düşünülme eğilimindedir. 3–vektörlü $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ niceliğinin Öklitçi "uzunluğu" $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ iken a olarak ve a'nın $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ile skaler çarpımı $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ olarak yazılabilir. Skaler çarpımlar için kullanılan bu "nokta" gösterimi ayrıca soyut bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörünün bir $\boldsymbol{\xi}$ vektörüyle $\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\xi}$ skaler (ya da iç) çarpımı için gerekli genel n–boyutlu bağlam içinde de geçerlidir.

Bununla birlikte kuantum mekaniğinde, o konudaki fiziki nicelikler çizgisel işlemciler olarak gösterilmeye eğilimli olduklarından gösterimle ilgili bir karışıklık meydana geliyor. Bu bağlam içindeki standart bir işlemi, tanıdık klasik niceliklerin kuantum işlemcilerini temsil eden harf versiyonları üzerine "şapkalar" (inceltme işareti) koymanın, sembollerle ilgili gereksiz bir karışıklığa yol açacağım düşündüğüm için benimsemiyorum. (Bunun yerine klasik ve kuantum kavramların, kuantum mekaniğinde ab, ba'dan $\hbar$ düzenindeki bir şey kadar farklılık gösterirken klasik $ab = ba$ değişim özelliklerinin sağlandığı $\hbar$ düzenindeki niceliklerin göz ardı edilmesinin savunulduğu klasik durumu dışta tutarsak, gerçekten "aynı" oldukları felsefi bir bakış açısını benimsemeye eğilimli olacağım.) Böylesi çizgisel işlemcilerin yukarıdakilerle uyum gereğince italik kalın punto türüne sahip harflerle ($\boldsymbol{T}$ gibi) temsil edilmeleri gerektiği görülür fakat bu önceki paragrafta ifade edilen felsefe ve ayrımları hükümsüz kılıyor. Bu nedenle **p** momentumu ya da $\boldsymbol{p}$ veya **x** konumu ya da $\boldsymbol{x}$ gibi belirli nicelikler söz konusu olduğunda bu paragrafta daha önce söylenenle paralel olarak klasik durumdaki aynı gösterimi kullanmaya yöneleceğim. Öte taraftan daha belirsiz kuantum işlemciler için $\boldsymbol{Q}$ gibi italik kalın harflerin kullanımı benimsenecek.

Sırasıyla doğal sayılar (diğer bir deyişle negatif olmayan tamsayılar), tamsayılar, gerçel sayılar, karmaşık sayılar ve q elamanlı (q asal bir sayının bir üssü olmak üzere, *bkz.* §16.1) sınırlı alan sistemleriyle ilgili $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_q$ kabuklu harfleri, tıpkı böylesi n'inci derecede düzenlenmiş sayı sistemlerinin karşılıkları olarak kullanılan $\mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{F}_q^n$ gibi, matema-

tikte standart hale geldiler. Bunlar standart kullanımda kabul edilen matematiksel kavramlardır. Kitapta (o kadar da genel olmadığından) bu gösterim, Öklitçi 3–uzay, $\mathbb{E}^3$, ya da daha genel olarak Öklitçi n–uzay, $\mathbb{E}^n$, gibi başka bazı matematiksel yapılara genişletiliyor. Bu kitapta sıkça kullanılan, kendisi de bir tür "sözde" Öklitçi uzay olan standart 4–boyutlu yatay Minkowski uzayzamanıdır ki bu uzay için $\mathbb{M}$ kabuklu harfini kullanacağım ($\mathbb{M}^n$'yi n–boyutlu versiyonu temsil eder şekilde 1 zaman ve $(n-1)$–uzay boyutlu bir "Lorentzci" uzayzamanı). $\mathbb{C}$'yi bazen örneğin $\mathbb{CE}^n$ ile temsil edilen karmaşık Öklitçi 4–uzayı ele alabilelim diye bir sıfat olarak "karmaşıklaştırılmış"ı göstermek üzere kullanıyorum. $\mathbb{P}$ kabuklu harfi de izdüşümsel n–uzayı temsil eden $\mathbb{P}^n$ olarak, "izdüşümsel"i (*bkz.*§15.6) temsil eden bir sıfat ya da bir isim gibi kullanılabilir (veya gerçel ya da kompleks izdüşümsel n–uzayıyla ilgileniyorsak sırasıyla $\mathbb{RP}^n$ya da $\mathbb{CP}^n$'yi kullanıyorum). Burgaç kuramında (bölüm 33) $\mathbb{M}$'yle (ya da karmaşıklaştırılmışı $\mathbb{CM}$) kurallara uygun bir şekilde ilintili karmaşık $\mathbb{T}$ 4–uzayı ve ayrıca izdüşümsel versiyonu $\mathbb{PT}$ söz konusudur. Bu kuramda ayrıca *boş** burgaçların bir $\mathbb{N}$ (bu harfin karışıklığa yol açmaması ayrıca dikkat edilmesi gereken ikinci bir görevdir) uzayı ve onun izdüşümsel versiyonu $\mathbb{PN}$ de mevcuttur.

Kabuk harf $\mathbb{C}$'nin sıfat olarak ele alınan rolü burada "karmaşık eşleniği" (§13.1, 2'deki kullanımı gibi) anlamına gelen sans serif ince punto türüne sahip C harfiyle karıştırılmamalıdır. Bu, temelde C'nin, parçacık fiziğinde *yük eşlemesi* olarak adlandırılan, her bir parçacığın kendi karşı–parçacığıyla yer değiştirmesi işleminde ifade edilene benzer (*bkz.* bölümler 24, 25) başka bir kullanımıdır. Bu işlem genellikle parçacık fiziğindeki, P'yle temsil edilen, bir aynadaki yansıma işlemi olan *dönüşüm çarpanı* ve T'yle temsil edilen, *zamanda tersinme* adındaki başkaca iki temel işlemle bağlantılı olarak ele alınır. Kalın sans serif harfleri, burada *vektörel uzayları* işaretleyen, **V**, **W** ve **H** harfleri bu amaç için en sık kullanılanları olmak üzere başka bir amaca hizmet ediyorlar. **H**'nin kullanımı kuantum mekaniğinin Hilbert uzaylarına özgü ve $\mathbf{H}^n$ ise n kompleks boyutundaki Hilbert uzayını temsil ediyor. *Eğik* (ya da eğilebilen) uzaylar $\mathcal{M}$, $\mathcal{S}$, ya da $\mathcal{T}$ gibi, *boş sonsuz*'u göstermek üzere belirli bir el yazısı karakteri, $\mathcal{I}$, için özel bir kullanımın olduğu, el yazısı şeklindeki harflerle gösteriliyor. Fiziki kuramdaki çok özel yerlerine bakarak Lagrange denklemi ($\mathcal{L}$) ve Hamilton ($\mathcal{H}$) için el yazısı şeklinde harfler kullanarak oldukça genel bir uzlaşıyı takip ediyorum.

* Boş: İngilizce'deki *null* sözcüğünün karşılığı olarak kullanılıyor. Kabuklu harf $\mathbb{N}$, "null" sözcüğünü temsil etmek üzere ilk harf olan n'den esinleniyor ve bu durumun bir karışıklık yaratmaması için özen gösterilmesi bekleniyor –çn.

GİRİŞ

AM–TEP kralın baş zanaatkârı, mükemmel yeteneklere sahip bir sanatçıydı. Geceydi ve fazlasıyla üretken bir akşam çalışmasının ardından yorgun düşmüş, atölyesindeki sedirde uyuya kalmıştı. Fakat uykusu –belki de havada olduğu hissedilen anlaşılmaz bir gerilim nedeniyle– huzursuzdu. Aslında bu olduğunda uykuda olduğundan da pek emin değildi. Kemikleri ona hâlâ gece olması gerektiğini söylediğinde gün, aniden ışımıştı.

Ansızın doğruldu. Bir şeyler tuhaftı. Şafağın ışığı kuzeyde olamazdı; yine de günün kızıllığı denizin üzerinden kuzeye doğru bakan açık penceresinden endişe verici şekilde parlıyordu. Pencereye doğru yürüdü ve inanmaz bir şaşkınlıkla dışarıya baktı. Güneş daha önce hiç kuzeyden doğmamıştı! Sersemlemiş haliyle bunun belki de güneş olmayabileceğini kavraması biraz zamanını aldı. Sudan dikey olarak yukarıya, gökyüzüne doğru ışıyan ateş gibi koyu kızıl bir ışığın oluşturduğu uzak bir huzmeydi bu.

Orada dikilirken kara bir bulut, ışık demetinin ucunda, bütün yapıya uzak, dumansı bir yanıcı maddeyle lanetlenmişçesine yanan devasa bir güneş şemsiyesi görünümü vererek belirgin hale geldi. Şemsiyenin tepesi genişleyip koyulaşmaya başladı; yer altından bir iblis. Gece aydınlanıyor fakat şimdi yıldızlar cehennemden gelip sürekli büyüyen bu ucube yaratığın ardına çekilerek bir bir gözden kayboluyordu.

Doğal tepkisi dehşete düşmek olmalıydı fakat hareket edemedi, sahnenin mükemmel simetrisi ve müthiş zarafeti karşısında birkaç dakika olduğu yerde kalakaldı. Fakat sonra korkunç bulut, hâkim rüzgâra yakalanarak hafifçe doğuya doğru bükülmeye başladı. Bu onu belki biraz rahatlattı ve o anda büyü bozuldu. Fakat toprağın altında ona hiç de tanıdık gelmeyen uğursuz bir uğuldama tınısının eşlik ettiği garip bir rahatsızlık hissettiğinde, endişe derhal geri döndü. Bu gazaba yol açabilen şeyin ne olduğunu merak etmeye başladı. Daha önce bir tanrının bu derece hiddetlendiğine hiç şahit olmamıştı.

İlk tepkisi yeni bitirdiği adak kâsesini tasarladığı için kendini suçlamak oldu; bu konuyla ilgili zamanında da kaygılanmıştı. Yaptığı Boğa Tanrı tasviri yeterince dehşetli olmamış mıydı? O tanrı incinmiş miydi?

Fakat bu düşüncenin saçmalığı onu durdurdu. Az önce tanıklık ettiği gazap böylesine önemsiz bir eylemin sonucu olamazdı ve muhakkak ki özellikle onu hedeflemiyordu. Bununla birlikte Yüce Saray'ın tehlikede olduğunu biliyordu. Rahip Kral bu Şeytan Tanrı'yı yatıştırmak için zaman kaybetmezdi. Kurbanlar olacaktı. Meyvelerin, hatta hayvanların geleneksel sunuluşu bile bu boyutta bir öfkeyi yatıştırmaya yetmezdi. Kurbanlar insan olmalıydı.

Birdenbire katıksız bir şaşkınlık içinde, şiddetli bir rüzgârı takip eden itici bir hava patlaması tarafından odanın içinde geriye doğru fırlatıldı. Gürültü o kadar şiddetliydi ki o an sağırlaştı. Zarifçe süslenmiş kaplarının çoğu raflarından fırlayıp arkadaki duvara çarparak parçalandı. Patlamanın etkisiyle fırlatıldığı odanın uzak bir köşesinde uzanırken duyularını geri kazanmaya başladı ve odanın karmaşa içinde olduğunu gördü. Gözde vazolarından birinin paramparça olduğunu, müthiş özenle ürettiği harika ayrıntılara sahip tasarımlarının yok olduğunu görünce dehşete kapıldı.

Am-tep yerden kararsızca kalktı ve bir süre sonra, bu kez dikkate değer bir telaşla deniz üzerindeki korkunç sahneyi yeniden incelemek için pencereye yaklaştı. O uzaktaki fırın tarafından aydınlanan karmaşanın artık kendisine doğru geldiğini düşünüyordu. Bu, sahile doğru süratle ilerleyen, uçurum duvarına benzeyen bir dalganın takip ettiği engin bir su yarığı gibi görünüyordu. Yaklaşan dalganın devasa ebatlara ulaşmasını izlerken yeniden olduğu yere mıhlandı. Nihayet karmaşa sahile ulaştı ve hemen önündeki deniz yeni oluşan kumsalda karaya oturmuş pek çok gemi bırakarak aniden geri çekildi. Daha sonra uçurumsu dalga boşalan bölgeye girdi ve korkunç bir şiddetle patladı. İstisnasız tüm gemiler parçalanmış ve yakınlardaki pek çok ev derhal yıkılmıştı. Su, önünde devasa yükseklikleri ulaşmasına rağmen kendi evi denizden görece uzak yüksek bir tepede olduğundan kurtulmuştu.

Yüce Saray da kurtuldu. Fakat Am-tep daha kötüsünün geleceğinden korkuyordu ve haklıydı; gerçi nasıl haklı olduğunu bilmiyordu. Bununla birlikte bildiği bir şey vardı ki artık sıradan bir insan kölenin kurban edilmesi yeterli olamazdı. Bu korkunç Tanrı'nın şiddetli öfkesini yatıştırmak için daha fazlası gerekecekti. Düşünceleri oğulları ve kızlarına ve yeni doğmuş torununa odaklandı. Onlar da güvende olmayabilirlerdi.

Am-tep yeni insanların kurban edilmesinden korkmakta haklıydı. Genç bir kız ve yeni doğmuş bir çocuk yakalanıp yakınlardaki bir dağın yüksek bir yamacındaki tapınağa götürülmüştü. Ayin yeni bir felaket geldiğinde çoktan başlamış ve devam etmekteydi. Yer tahripkâr bir şiddetle sarsıldı ve tapınağın çatısının çöküp içindeki tüm rahiplerin ve tanrılara adamaya

hazırlandıkları kurbanların bir anda ölmelerine yol açtı. Bu olduğunda ayinin tam ortasındaydılar; neredeyse üç bin beş yüz yıldan fazladır orada gömülü olarak!

Yıkım dehşetliydi fakat son değildi. Yüce Sarayın kendisi neredeyse tamamen yıkılmış olsa da Am–tep'in insanlarının yaşadıkları adadaki pek çokları korkunç depremden kurtuldu. Evlerin çoğu yıllar içinde yeniden inşa edildi. Hatta Saray bile eskisinin yıkıntıları üzerinde inşa edilip eski ihtişamını büyük oranda geri kazandı. Am–tep yine de adadan ayrılmaya ant içmişti. Dünyası artık tamir edilemeyecek şekilde değişmişti.

Bildiği dünyada, Yeryüzü Tanrıçası'nın hüküm sürdüğü binlerce yıllık barış, refah ve kültür vardı. Güzel sanatların gelişimine izin verilmişti. Komşu topraklarla daha fazla ticaret yapılıyordu. Muazzam Yüce Saray harikulade bitki ve hayvan freskleriyle bezenmiş devasa bir labirent, adeta kendi içinde gerçek bir şehir gibiydi. Sürekli akan su sayesinde mükemmel bir kanalizasyon ağına ve temizlenen lağımlara sahipti. Savaş neredeyse yabancıydı ve savunmaysa gereksizdi. Am–tep Yeryüzü Tanrıçası'nı artık bütünüyle farklı değerlere sahip bir Varlık tarafından alt edilmiş olarak algılıyordu.

Am–tep'in kurtulmayı başarıp kendisine eşlik eden ailesiyle birlikte, yetenekli bir marangoz ve denizci olan oğlunun yeniden tamir ettiği bir gemiyle adayı gerçekten terk etmesinden birkaç yıl önceydi. Am–tep'in torunu etrafındaki dünyayla ilgili her şeye ilgi duyan afacan bir çocuğa dönüşmüştü. Yolculuk birkaç gün aldı fakat hava inanılmaz dingindi. Duru bir gecede, Am–tep tuhaf bir düşünceye kapıldığında torununa yıldızların örüntüsünü açıklıyordu: *yıldızların örüntüsü korkunç şeytanın felaketinin ortaya çıkmasından önceki hallerinden bir zerrecik olsun değişmemişti.*

Am–tep keskin bir sanatçı gözüne sahip olduğundan bu örüntüyü iyi biliyordu. Gökyüzündeki o minicik mum ışıklarının, o gecenin şiddetiyle tıpkı kaplarının kırılıp harika vazosunun paramparça oluşu gibi eski konumlarından mutlaka, en azından biraz olsun öteye savrulmuş olmaları gerekirdi diye düşündü. Ay da yüzünü aynen daha önceki gibi göstermiş, ve Am–tep'in söyleyebildiği kadarıyla yıldız dolu gökyüzündeki rotası bir nebze olsun değişmemişti. Felaketten aylar sonra gökler farklı görünmüştü. Karanlık ve tuhaf bulutlar oluşmuş, ay ve güneş bazen alışılmadık renklere bürünmüştü. Fakat bu artık geçmiş ve hareketleri tamamen normale dönmüştü. Benzer şekilde minik yıldızlar da oldukça hareketsizdi.

Korkunç İblis'ten bile çok daha endamlı olan gökler felakete karşı bu derece ilgisiz kaldılarsa, diye kendi kendini ikna etti Am–tep, İblis'i gerçekte kontrol eden güçler adadaki küçük insanların aptalca ayinler yapıp

insan kurban ederken ne yaptıklarıyla neden bu kadar ilgilenmeliydi? Bir an şeytanın yalnızca onun kaplarının modelleriyle ilgilenmiş olabileceği gibi aptalca şeyler düşünmekten utandı.

Yine de "neden?" sorusu Am–tep'i rahat bırakmıyordu. Dünyanın davranışını hangi derin güçler kontrol ediyor ve bazen neden şiddetle ve akıl almaz gibi görünen biçimlerde patlak veriyorlar? Sorularını torunuyla paylaştı fakat yanıtlar yoktu.

Bir yüzyıl geçti, ardından binyıl ve hâlâ yanıtlar yoktu.

Zanaatkâr Amphos hayatı boyunca tıpkı babası, babasının babası ve ondan önce onun babası gibi aynı küçük şehirde yaşamıştı. Geçimini zarifçe süslenmiş altın bilezikler, küpeler, tören bardakları ve sanatsal yeteneğinin diğer ince ürünlerini imal ederek sağlıyordu. Bu iş kırk nesildir, Am–tep oraya bin yüz yıl önce yerleştiğinden beridir kesintisizce aile mesleği olagelmişti.

Kuşaktan kuşağa aktarılan şey yine de yalnızca bu sanatsal yetenek değildi. Am–tep'in soruları, daha önce tıpkı kendisini rahatsız ettiği gibi Amphos'u da rahatsız ediyordu. Barışçıl bir antik medeniyeti mahveden felaketin korkunç hikayesi babadan oğula iletilmişti. Am–tep'in felaketi algılayışı da kendi soyuyla birlikte yaşamaya devam etmişti. Amphos da göklerin bu korkunç olaya bu derece ilgisiz kalacak kadar yüce ve endam sahibi olduğunu anlıyordu. Bununla birlikte olayın kendi şehirlerine, insan kurbanlara ve anlamsız dini ayinlere sahip küçük insanlar üzerinde feci etkileri olmuştu. Böylece kıyaslanırsa olayın kendisi insanoğlunun o sıradan eylemleriyle oldukça alakasız muazzam kuvvetlerin etkisiyle olmuş olmalıydı. Yine de bu kuvvetlerin doğası Amphos'un zamanında da Am–tep'inkindeki kadar bilinmezdi.

Amphos bitkiler, böcekler ve diğer ufak hayvanlar ile kristal kayaların yapısı üzerine çalışmıştı. Gözlemlemek için kullandığı keskin gözleri ona dekoratif tasarım çalışmalarında da iyi hizmet ediyordu. Tarıma heves etti ve buğday ve diğer bitkilerin tohumdan yetişmelerinden çok etkilendi. Fakat bunların hiçbiri ona "neden"i söylemedi ve o da tatmin olmadı. Doğanın davranışlarının temelinde yatan bir neden olduğuna gerçekten inanıyordu fakat kesinlikle bunları aydınlatacak donanıma sahip değildi.

Aydınlık bir gecede Amphos gökyüzüne baktı ve yıldızların örüntüsünden gökte kümeler oluşturan o yarı tanrı ve tanrıçaların şekillerini anlamlandırmaya çalıştı. Tanrıların yıldızları niçin daha uygun biçimde düzenlemediklerini çözmeye çalıştı. Şu halde örüntüleri bir tanrının titizlikle düşünülmüş tasarımından daha çok bir çiftçi tarafından rasgele serpilip

ekilmiş tohum tanelerine benziyordu. Birden saçma bir düşünceye kapıldı: *yıldızların belirli örüntüsündeki ya da diğer nesnelerin dağınık düzenlerindeki nedenleri arama; bunun yerine şeylerin davranışlarındaki daha derin bir yasaya bak.*

Nihayet Amphos, düzeni, dağılmış tohumların toprağa düştüklerinde oluşturdukları örüntüde değil o tohumların her birinin, en ince ayrıntısına dek birbirine benzeyen, mükemmel bir yapıya sahip, yaşayan birer bitkiye dönüşmelerindeki mucizevi yapıda bulacağımız sonucuna vardı. Toprağa serpiştirilmiş tohumların belirlenmiş düzenlerindeki anlamı aramaya çalışmıyoruz; yine de her bir tohumun kendi başına yetişmesini kontrol eden içsel kuvvetlerin saklı gizeminde bir anlam olmalı ki her biri esasen aynı muhteşem rotayı takip etsin. Bunun mümkün olması için Doğanın yasalarının gerçekten mükemmelce düzenlenmiş bir kesinliğe sahip olması zorunludur.

Amphos, düzen gerçekte daha çok şeylerin davranışlarında hissedilirken temelde yatan yasalarda kesinlik olmaksızın dünyada hiçbir düzen olamayacağına ikna olmuştu. Dahası bu konularda cidden yanlış yollara sapmak istemiyorsak bizim düşünüş yöntemlerimizde de kesinlik olmak zorunda.

Olay öyle gelişti ki, ülkenin başka bir tarafında yaşayan ve inanışları Amphos'unkilerle duygudaşlık içindeymiş gibi görünen bir bilgenin bahsi Amphos'a ulaştı. Bu bilgeye göre bir kimse geçmişin geleneklerine ve öğretilerine bel bağlayamazdı. Birinin inandığı şeylerden emin olabilmesi için tartışma götürmez gerekçeler kullanarak kesin sonuçlara varması gerekirdi. Bu kesinliğin doğası nihai olarak matematiksel *sayı* kavramına ve onun geometrik şekiller üzerindeki kullanımına bağımlı olmalıydı. Bu nedenle dünyanın davranışına hükmeden şey batıl inanç ve efsane değil sayı ve geometri olmalı.

Am-tep'in bin yüz yıl önce yaptığı gibi Amphos denize açıldı. Yolunu gerçeklik arayışındaki bilgenin ve onun 571 akıllı adam ve 28 akıllı kadından oluşan kardeşliğinin bulunduğu Croton şehrine çevirdi. Bir süre sonra kardeşliğe kabul edildi. Bilgenin adı *Pisagor*'du.

1

BİLİMİN KÖKENLERİ

1.1 Dünyayı şekillendiren kuvvetlere ilişkin arayış

Evrenimize hangi yasalar hükmediyor? Onları nasıl bileceğiz? Bu bilgi dünyayı algılamamıza ve böylece onun hareketlerini kendi yararımız için yönlendirmemize nasıl yardım edebilir?

İnsanlığın doğuşundan beridir bu tür sorular insanları derinden etkilemiştir. Başlangıçta kendi yaşamlarından edindikleri kavrayış türüne dayanarak dünyayı kontrol eden bu etkileri anlamlandırmaya çalışmışlardı. Çevrelerini kontrol eden her kim ya da her ne idiyse bunu kendi çabalamaları gibi, şeyleri kontrol etmek için yaptığını düşünmüşlerdi: aslında yazgılarının, çoğunlukla kendilerininkine benzeyen, çeşitli bilindik insani güdüler uyarınca hareket eden varlıkların etkisi altında olduğu değerlendirmesi yapmışlardı. Böylesi güdüler gurur, aşk, hırs, öfke, korku, intikam, tutku, sadakat veya sanatçılık olabilirdi. Bu sebeple –güneşin doğuşu, yağmur, fırtınalar, kuraklık, hastalık ve ölümcül hastalıklar gibi– doğa olaylarının seyri bu tür insani arzularla güdülenen tanrı ya da tanrıçaların kaprisleriyle açıklanıyordu. Ve bu olayları etkileyecek tek hareket tanrı figürlerinin sakinleştirilmesi olarak algılanıyordu.

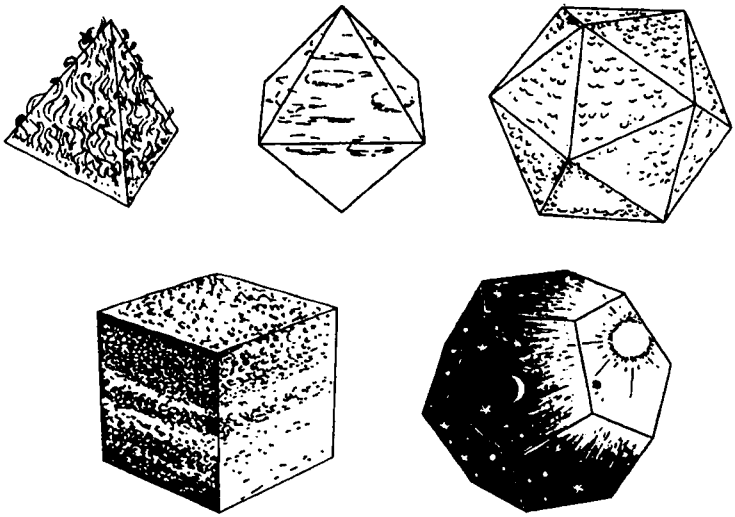
Bununla birlikte yavaş yavaş farklı türde modeller kendi güvenilirliklerini tesis etmeye başladılar. Güneşin gökyüzündeki hareketinin kesinliği ve gece ile gündüzün birbirini takip edişleriyle açık ilişkisi, en belirgin örnekleri oluşturuyordu; fakat ayrıca yıldızlardan oluşan gök kubbeyle ilişkisi içinde güneşin konumlanışı, mevsimlerin değişimi ve amansız düzenleriyle, iklim üzerinde var olan açık ve net etkiyle ve takiben bitki örtüsü ve hayvansal davranışlarla yakından ilintili görünüyordu. Ayrıca ayın hareketinin de sıkıca kontrol edildiği ve evrelerinin güneşle olan geometrik ilişkisi tarafından belirlendiği görülüyordu. Dünya üzerinde açık denizlerin karayla buluştuğu yerlerde dalgaların ayın konumu (ve evresi) tarafından sıkıca kontrol edilen bir düzene sahip oldukları fark ediliyordu. Sonuçta gezegenlerin çok daha fazla karmaşık görünen belirgin hareketleri

bile sırlarını, temelde yatan muazzam bir kesinliği ve düzenliliği açığa vurarak gözler önüne sermeye başladı. Gökler gerçekten tanrıların kaprislerinin kontrolü altındaysa bile bu tanrıların kendileri de kesin matematiksel yasaların büyüsünün etkisinde gibi görünüyorlardı.

Benzer şekilde, gökler tarafından en azından bu anlamda da etkilendiği görülen dünyevi olguları kontrol eden, –örneğin günlük ve yıllık sıcaklık değişimleri, okyanusların gelgitleri ve bitkilerin yetişmesi gibi– yasaları, tanrıları yönlendirir görünen matematiksel düzen de paylaşıyordu. Bununla birlikte göksel cisimlerle dünyevi davranışlar arasındaki bu tür bir ilişki bazen abartılır ya da yanlış anlaşılır ve astrolojiyle ilgili mistik ve doğaüstü çağrışımlara yol açan yersiz bir ilgi gösterilmesini sağlardı. Bilimsel kavrayışın kesinliğinin, göklerin gerçek etkilerini saf varsayımsal ve mistik anlayışlardan ayırmaya olanak sağlaması yüzyılları buldu. Yine de bu tür etkilerin gerçek anlamda var oluşu ve takiben gökler için geçerli matematiksel yasaların dünyadakilerle de ilintili olması gerekliliği en eski zamanlardan beri açık olagelmişti.

Dünyevi nesnelerin davranışlarında algılanan, görünüşte bundan bağımsız, başka düzenlilikler mevcuttu. Bunlardan biri, belirli bir çevredeki her şeyin, şimdi *kütleçekim* diye adlandırdığımız etkinin sonucu olarak aynı doğrultuda aşağıya doğru hareket etme eğiliminde oluşuydu. Maddenin bazen bir biçimden başka bir biçime dönüştüğü, örneğin buzun erimesi ya da tuzun çözünmesi, ama toplam niceliğinin asla değişmediği, şu an *maddenin korunumu* diye adlandırdığımız yasayı yansıtır halde olduğu gözlemleniyordu. Dahası katı uzamsal hareket fikri doğduğunda, biçimlerini korumaya ilişkin önemli özelliğe sahip pek çok maddi cismin varlığı farkedildi ve uzamsal ilişkileri anlamak şimdi *Öklitçi* diye adlandırdığımız, kesin ve iyi tanımlı 3–boyutlu geometri sayesinde mümkün oldu. Dahası bu geometrideki "düz çizgi" kavramının ışık ışınlarının (ya da görüş çizgisi) temin ettikleriyle aynı olduğu ortaya çıktı. Bu fikirler eski uygarlıklar için tıpkı bugün bizim için olduğu gibi önemli ölçüde bir çekicilik oluşturan dikkate değer bir kesinliğe ve zarafete sahipti.

Yine de matematiğin kendisi derin bir gerçekliğe işaret ediyor görünmesine rağmen günlük yaşantımız bakımından matematiksel kesinliğin dünyanın hareketlerine ilişkin ima ettiği şeyler sıklıkla can sıkıcı ve sınırlı görülüyor. Bu nedenle, eski zamanlardaki pek çok insan konuyla ilgili büyülenişlerinin, hayallerini alıp onları uygun olanın kapsamının çok ötesine götürmesine izin verirdi. Astrolojide örneğin, geometrik şekiller de sıkça mistik ve doğaüstü çağrışımlara, örneğin pentagram ve heptagramların sihirli güçleri olduğu varsayımına neden olurdu. Ve Platonik katı cisimlerle maddenin temel halleri arasında bütünüyle varsayıma dayanarak



Şekil 1.1 Platonik beş katı cisim ve dodekahedronla temsil edilen gök kubbeyle birlikte dört element (ateş, hava, su ve toprak) arasında eski Yunanlarca oluşturulmuş hayali birliktelik.

üretilmiş bir birliktelik vardı (*bkz.* Şekil 1.1). Kütle, kütleçekim, geometri, gezegensel hareketler ve ışık davranışı arasındaki gerçek ilişkiler hakkında bugün sahibi olduğumuz derin kavrayışa ulaşmamız üzerinden yüzyılları bulan bir zaman geçmiş değildir.

1.2 Matematiksel doğruluk

Doğayı kontrol eden gerçek etkileri anlamaya doğru atılacak ilk adımlar, gerçeğin saf varsayımsal olandan ayrıştırılması işlemini gerektiriyor. Bununla birlikte eski insanlar Doğayı güvenilir biçimde anlama işlemini gerçekleştirebilecekleri herhangi bir konuma sahip olmadan önce başka bir şeyi başarmaya gereksinim duydular. İlkin yapmaları gereken, gerçeği varsayımsal olandan *matematik* içinde kalarak nasıl ayrıştıracaklarını keşfetmekti. Verili matematiksel bir iddianın doğruluğuna güvenilip güvenilemeyeceğini söyleyen bir yöntem gerekiyordu. Bu ilk konu uygun şekilde yerli yerine oturtulmadan dünyanın davranışlarını kontrol eden kuvvetler ve bunların matematiksel doğruyla ilişkilerinin ne olabileceğine ilişkin çok daha zor sorunları gerçek olarak ele alma konusunda çok az umut vardı. Doğayı anlamanın kilit rolünün şüphe götürmez biçimde matematiğe ait olduğu kavrayışı belki de bilim adına ilk önemli kırılmaydı.

Çeşitli türde matematiksel doğrular hakkında antik Mısır ve Babil zamanından itibaren sonuçlar çıkarılmışsa da matematiksel kavrayışın –ve bu nedenle bilimin kendisinin– ilk sağlam yapı taşının yerleştirilmesi, büyük Yunan filozoflar Miletli Thales (yaklaşık İÖ 625–547) ve Samoslu Pisagor (yaklaşık İÖ 572–497)[1] *matematiksel kanıtlama* kavramını tanıtmaya başlamadan önce mümkün olmadı. Bu kanıt kavramını ilk kez Thales ileri sürmüş olabilir fakat görünen o ki aksi durumda açıklığa kavuşmayacak şeylerin yerli yerine oturmasında, kavramın hakkınca kullanımını ilk olarak Pisagorcular gerçekleştirdiler. Ayrıca Pisagor sayının ve aritmetik kavramların fiziki dünyanın hareketlerini yönetmekteki önemiyle ilgili kuvvetli bir öngörüye sahipti. Denir ki bu kavrayıştaki en önemli etmen onun, lirlerin ve flütlerin ürettiği en uyumlu ezgilerin, titreşen teller ya da boruların uzunlukları arasındaki en basit kesirlerlerle ifade edilen oranların varlığıyla ilgili olduğunu fark etmesidir. Onun şu an batı müziğinin esasen dayandığı temel süreleri belirleyen frekanslar olarak bildiğimiz sayısal oranları, "Pisagor gamı"nı ortaya koyduğu söylenir.[2] Dik açılı bir üçgenin hipotenüsünün karesinin diğer iki kenarın kareleri toplamına eşit olduğunu iddia eden ünlü *Pisagor teoremi* sayıların aritmetiği ile fiziki uzam arasında aslında kesin bir ilişki olduğunu belki de her şeyden çok ortaya koyar (*bkz.* bölüm 2).

Şu anda İtalya'nın güneyi olan Croton şehrinde yerleşmiş hatırı sayılır bir takipçi kitlesi –Pisagorcular– bulunmaktaydı fakat Pisagorcu kardeşliğin tüm üyelerinin gizlilik yemini ettikleri gerçeği dış dünya üzerindeki etkilerini engelledi. Bu nedenle ayrıntılı çıkarımlarının neredeyse tamamı kayboldu. Bununla birlikte bu çıkarımların bazıları, "köstebek" için talihsiz sonuçlar doğurarak –en azından bir bakımdan, boğularak idam!– dışarı sızdırıldı.

Uzun vadede Pisagorcular'ın insan düşünüşünün gelişimine etkileri devasa boyutta oldu. İlk kez olarak matematiksel kanıt sayesindedir ki kanıtlanamaz bir doğa hakkında açıklamalar yapmak mümkün oldu ve dün-

---

[1] Maalesef Pisagor ve yaşamı hakkında, gerçekten var olmaları dışında takipçileri ya da onların çalışmaları ve müziksel harmonideki basit oranların rolünün Pisagor tarafından kabulü hakkında neredeyse güvenilir hiçbir şey bilinmiyor. *Bkz.* Burkert, 1972. Yine de Pisagorculara ortak bir şekilde oldukça fazla önem atfediliyor. Bu yüzden "Pisagorcu" terimini tarihsel netlik tarzında hiçbir imayı kastetmeden basit bir etiket gibi kullanacağım.

[2] Bu, frekanslarının (titreşim unsurlarının uzunluklarıyla ters orantılı) 24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48 oranlarında olduğu, kulağa hoş gelen ezgilerin temelindeki pek çok basit oranın örneklerini veren saf "diyatonik ölçek"tir. Modern bir piyanonun "beyaz notaları" *eşit yedirimli* ölçek uyarınca $\alpha = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946...$ olmak üzere $1 : \alpha^2 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^7 : \alpha^9 : \alpha^{11} : \alpha^{12}$ bağıl oranlarıyla Pisagorcu oranlara yaklaşıklık tahminleri yapılarak akort edilir. (Not: α^5, α'nın beşinci dereceden üssü anlamına gelir, diğer bir deyişle $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha$'dır. On ikinci dereceden kuvveti 2'ye eşit olan $\sqrt[12]{2}$ niceliği, 2'nin on ikinci dereceden köküdür, başka bir deyişle $\alpha^{12} = 2$ olacak şekilde $\alpha = 2^{1/12}$'dir. *Bkz.* not 1.3 ve §5.2.)

ya üzerine olan bilgimiz o günden bu yana ne kadar ilerlemiş olursa olsun bu açıklamalar bugün bile yapıldığı zamandaki kadar geçerlidir. Matematiğin gerçek zaman aşırı doğası gözler önüne serilmeye başlıyordu.

Peki ama matematiksel kanıt nedir? Matematikte kanıt yalnızca saf mantıksal muhakeme yöntemlerini kullanarak kişiye verili matematiksel bir ifadenin geçerliliğini ön belirlenime sahip başka bir matematiksel ifadeden ya da geçerliliği kendinde kanıtlı bazı basit ifadelerden *–aksiyomlar–* çıkarsamaya olanak sağlayan kusursuz bir savdır. Bunun gibi matematiksel bir ifade bir kez bu şekilde oluşturulduğunda artık ona bir *teorem* denir.

Pisagorcular'ın ilgilendikleri teoremlerin pek çoğu geometrik yapıda olanlardı; diğerleri basitçe sayılarla ilgili ifadelerdi. Sayılarla ilgili olanlar, Pisagor zamanında oldukları gibi bugün de mükemmel derecede net bir geçerliliğe sahiptir. Ya Pisagorcular'ın kendi matematiksel kanıt yöntemlerini kullanarak elde ettikleri *geometrik* teoremler? Onlar da bugün açık bir geçerliliğe sahipler fakat burada zorlaştırıcı bir durum söz konusu. Bu, doğası modern seyir mevkimizden bakınca Pisagor'un zamanında olandan daha belirgin görünen bir konudur. Eski insanlar bizim şu anda *Öklit geometrisi* olarak adlandırdığımız tek bir tür geometri biliyorlardı fakat biz şimdi pek çok başka türünü biliyoruz. Bu nedenle antik Yunan zamanının geometrik teoremleri göz önünde tutulursa geometri kavramıyla temsil edilenin aslında Öklit'in geometrisi olduğunu belirtmek önemli hale gelir. (Bu konular hakkında Öklitçi olmayan geometrinin önemli bir örneğinin verileceği §2.4'te daha açık sözlü olacağım.)

Öklit geometrisi kendine özgü aksiyomlarıyla (önerme adı verilen daha az güvenilir bazı ifadeleri içeren) fiziki dünyanın belli bir görünümüne mükemmel bir yaklaşıklık tahmini sağlayan özel bir matematiksel yapıdır. Bu, Antik Yunanların yakından tanıdıkları, 3–boyutlu uzamda hareket ettirildiklerinde katı cisimlerin geometrisine ve onların diğer katı cisimlerle olan ilişkilerine hükmeden yasaların işaret ettiği gerçeğin bir görünümüydü. Bu özelliklerin bazıları öylesine tanıdık ve iç tutarlılığa sahipti ki "kendinde kanıtlı" matematiksel gerçekler olarak görülme eğilimi gösterdiler ve aksiyomlar (ya da önermeler) olarak kabul edildiler. Bölümler 17–19 arasında ve §§27.8, 11'de göreceğimiz üzere Einstein'ın genel göreliliği –ve hatta özel göreliliğin Minkowski uzayzamanı– fiziki evren için Öklit geometrisinden farklı ve eski insanlara ait Öklit geometrisinin olağanüstü biçimde hatasız oluşu gerçeğine rağmen, yine de daha hatasız geometriler sunuyor. Böylelikle geometrik ifadeler ele alındığında "aksiyomların" herhangi bir anlamda gerçekten *doğru* olup olmadıklarına güvenmek noktasında dikkatli olmalıyız.

Peki bu bağlamda "doğru" nedir? Zorluk Pisagor'dan yaklaşık bir yüzyıl sonra Atina'da yaklaşık İÖ 429'dan 347'ya kadar yaşayan büyük eski Yunan filozofu Platon tarafından yeterince değerlendirildi. Platon –şüphe götürmez şekilde doğru kabul edilebilen şeyler olarak– matematiksel önermelerin gerçek fiziki nesnelere (kuma çizilerek veya tahta ya da taştan yapılan yaklaşık kareler, üçgenler, çemberler, küreler ve küpler) değil birtakım idealize edilmiş varlıklara atfedildiklerini gözler önüne serdi. Kafasında bu ideal varlıkların fiziki dünyadan farklı bir dünyada ikamet ettiklerini canlandırdı. Günümüzde bu dünyayı *matematiksel biçimlerin Platonik dünyası* olarak adlandırıyoruz. Papirüs ağacından kesilmiş ya da yassı bir yüzeye çizilmiş kareler, çemberler veya üçgenler ya da belki mermerden oyulmuş küpler, dört yüzlüler ya da küreler gibi fiziki yapılar bu ideallere çok yakından uyabilir fakat yalnızca yaklaşıklıkla. Gerçek matematiksel kareler, küpler, çemberler, küreler, üçgenler, vb fiziki dünyanın bir parçası olmaktan ziyade Platon'un biçimlerin idealize edilmiş matematiksel dünyasının sakinleriydi

1.3 Platon'un matematiksel dünyası "gerçek" midir?

Bu, zamanı için sıradışı bir fikirdi ve çok güçlü bir fikir haline geldi. Peki Platonik matematiksel dünya herhangi makul bir anlamda gerçekten mevcut mudur? Filozofları da içeren birçok insan böylesi bir "dünya"yı, yalnızca kontrolsüz düşlerimizden oluşan tam bir hayal ürünü olarak değerlendirebilir. Yine de Platonik bakış açısı esasen son derece değerlidir. O bize kesin matematiksel kavramları etrafımızdaki fiziki şeyler dünyası içinde gördüğümüz yaklaşıklık tahminlerinden ayırmakta dikkatli olmamızı öğütler. Dahası bize modern bilimin şu ana kadarki gelişim seyrini anlatan taslağı sunar. Bilim insanları dünyaya –ya da daha doğrusu dünyanın birtakım görünümlerine– dair modellemeler ileri sürerler ve bu modellemeler daha önceye dayanan gözlemler ve titizlikle tasarlanmış deneyler aracılığıyla test edilir. Modellemeler böylesi titiz incelemelerden başarıyla geçer ve ayrıca iç bütünlüğe sahip yapılar olduklarını kanıtlarsa uygun olarak kabul edilir. Mevcut tartışmamız için bu modellemeler hakkındaki önemli nokta onların temelde tamamen soyut *matematiksel* modellemeler olduğudur. Bilimsel bir modelin iç tutarlılığa sahip olması sorunu özelde o modelin kesin olarak tanımlanmış olmasını gerektirir. Gerekli kesinlik modelin, aksi durumda bu sorulara iyi tanımlanmış yanıtlar verilemeyeceği için matematiksel olmasını talep eder.

Modelin kendisi eğer bir "varlık" olarak saptanacaksa bu varlık matematiksel biçimlerin Platonik dünyasında konumlandırılır. Elbette aksi bir

bakış açısı savunulabilir: Platon'un dünyasını herhangi bir anlamda mutlak ve "gerçek" kabul edenden ziyade modelin bizlerin farklı farklı *zihinlerimizde* var olduğunu kabul eden bir bakış açısı. Matematiksel yapıları kendi gerçekliklerine sahip olan yapılar olarak değerlendirmek için hâlâ edinilmesi gereken önemli bir şeyler var. Bireysel zihinlerimiz, yargılamalarındaki dağınıklık, güvenilmezlik ve tutarsızlıklarla ünlüdür. Bilimsel kuramlarımızın gerektirdiği kesinlik, güvenilirlik ve tutarlılık herhangi birimizin bireysel (güvenilmez) zihninin ötesinde bir şeyler talep eder. Matematikte herhangi belirli bir zihinde olandan çok daha büyük oranda bir sağlamlık buluruz. Bu durum, her bir bireyin başarabileceğinin ötesinde yer alan bir gerçeklik yoluyla kendi dışımızdaki bir şeye işaret etmez mi?

Bununla birlikte matematiksel dünyanın bağımsız bir varlığa sahip olmadığı, yalnızca farklı farklı zihinlerden damıtılmış ve herkesçe bütünüyle güvenilir bulunup kabul edilen belirli fikirlerden oluştuğu alternatif görüşü hâlâ savunulabilir. Yine de bu bakış açısı bile bizi gereksinim duyulandan daha tedariksiz bırakır görünüyor. "Herkesçe kabul edileni" mi ya da örneğin "sağduyu sahiplerince kabul edileni" mi ya da "matematikte doktorasını tamamlamış ve bir "uzman" görüşü cüreti göstermeye hakkı olan herkesçe kabul edileni" mi (bunun Platon zamanında fazlaca hükmü yoktu) kastediyoruz? Burada bir kısır döngü tehlikesi var gibi görünür; birinin "sağduyu sahibi" olup olmadığına karar vermek için dışsal bir standart gereklidir. Elbette "çoğunluk görüşü" gibi bilimsel olmayan doğaya sahip bir standart benimsenmediyse "uzman" sözcüğünün anlamı için de gereklidir (açıkça belirtmek gerekir ki çoğunluk görüşü demokratik hükümetler için ne kadar önemli olursa olsun asla bilimsel bir kabul edilebilirlik kriteri olarak kullanılamaz). Aslında matematiğin herhangi bir matematikçinin idrak yeteneğinin çok ötesine giden bir sağlamlığı barındırdığı görülür. Bu alanda çalışanlar, ister kendilerini matematiksel araştırmaya etkin şekilde adamış olsunlar isterse de başkaları tarafından elde edilmiş sonuçları kullanıyor olsunlar genellikle yalnızca kendilerinin çok ötesinde var olan bir dünyanın, bu düşünce kendilerinin de olsa, ne kadar uzman olurlarsa olsunlar başkalarına ait de olsa saf düşünceyi aşan nesnellikteki bir dünyanın kaşifleri olduklarını hissederler.

Platonik dünyanın gerçek varlığına ilişkin durumu farklı bir şekilde ortaya koymam faydalı olabilir. Bu "varlığın" aslında yalnızca matematiksel doğrunun nesnelliği olduğunu söylerken kastettiğim nedir? Platonik varlık, onu anladığım haliyle, bireysel fikirlerimize ya da özel kültürümüze bağlı olmayan nesnel bir dışsal standardın varlığına tekabül eder. Bu "varlık" ayrıca ahlak ya da estetik (*krş.* §1.5) gibi matematikten başka şey-

lere de tekabül edebilir fakat burada yalnızca çok daha berrak bir konu olarak görünen matematiksel nesnellikle ilgileniyorum.

Bu konuyu matematiksel bir doğruya ilişkin meşhur bir örneği ele alarak ve onu "nesnellik" sorunuyla ilişkilendirerek göstereyim. Pierre de Fermat 1637'de, şimdilerde "Fermat'nın Son Teoremi" (bir tamsayının hiçbir pozitif n'inci üssü[3], n, 2'den büyük bir tamsayıysa başkaca iki pozitif n'inci üssün toplamı olamaz) olarak bilinen, 3. yüzyılda Yunan matematikçi Diophantos tarafından yazılmış *Arithmetica* isimli kitabın kendisindeki kopyasının kenarına not aldığı ünlü ifadesini oluşturdu. Bu kenar notunda Fermat ayrıca şunu da yazmıştı: "Bu kenarlığın darlığı sebebiyle kapsayamayacağı gerçekten müthiş bir kanıt buldum." Seçkin bir çok matematikçinin ortak çabalarına rağmen Fermat'nın bu ifadesi 350 yılı aşkın doğrulanamamış olarak kaldı. Sonunda bir kanıt Andrew Wiles tarafından (daha önceki çeşitli matematikçilerin çalışmalarına dayanarak) yayımlandı ve bu kanıt şu an matematik camiası tarafından geçerli bir tez olarak kabul görmektedir.

Şu halde Fermat'nın ifadesinin her zaman, aslında Fermat onu ileri sürmeden çok önce de doğru olduğu görüşünde mi olacağız ya da o, geçerliliği matematikçilerin öznel standartları her neyse ona bağlı saf kültürel bir konu mudur? Gelin Fermat ifadesinin aslında öznel bir konu olduğunu varsaymayı deneyelim. Bu durumda herhangi bir X matematikçisinin Fermat ifadesine gerçek ve özgün bir karşı örnekle itiraz etmesi, bunu 1995 yılından önce yapmış olduğu sürece bir saçmalık olmazdı.[4] Böylesi bir durumda matematik camiasının X'in karşı örneğinin doğruluğunu kabul etmiş olması gerekirdi. Bu andan itibaren Wiles'ın Fermat ifadesini kanıtlamaya yönelik her çabası, X tezini daha önce sunmuş olduğu için nafile olur ve de Fermat ifadesi şu an yanlış olurdu! Dahası X'in ileriki karşı örneğinin doğruluğunun kabulünü takiben Fermat'nın kendisinin, "gerçekten müthiş kanıt"ının sağlamlığına inanmakla, kenar notunu yazdığı anda yanılmış olup olmayacağı sorusunu sorabilirdik. Matematiksel gerçeğin

---

[3] Not 1.2'den anımsayacağınız gibi bir sayının n'inci üssü o sayının kendisiyle n kez çarpımına eşittir. 5'in üçüncü üssü 125'tir ve $5^3 = 125$; 3'ün dördüncü üssü 81'dir ve $3^4 = 81$; vb şeklinde yazılır.

[4] Aslında Wiles Fermat'nın Son Kuramıyla ilgili kanıtında Haziran 1993'te Cambridge'teki ilk sunumu sonrası görünür hale gelen "boşluğu" onarmaya çalışırken matematik camiasında matematikçi Noam Elkies'in Fermat'nın ifadesine karşı bir karşı örnek bulduğuna dair bir söylenti yayıldı. Daha önce Elkies 1988'de Euler'in varsayımına karşı bir karşı örnek bulmuş $-x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ eşitliğinin hiçbir pozitif çözümü yoktur– ve onun yanlışlığını kanıtlamıştı. Böylece Fermat'nın ifadesinin de yanlış olduğunu kanıtlamış olması inanılmaz değildi. Oysa söylentiye neden olan e–mail 1 Nisan tarihliydi ve Henri Darmon tarafından hazırlanmış bir aldatmaca olduğu ortaya çıktı; *bkz.* Singh, 1997, s. 293.

öznel bakışına göre durum belki de Fermat'nın geçerli (açıklamış olsa meslektaşları tarafından öyle kabul edilecek olan) bir kanıta sahip oluşu ve de X'e daha sonra bir karşı örnek elde etme olanağı sağlayan şey Fermat'nın gizemi olmuş olabilirdi. Fiilen "Platonculuğa" karşı açıkladıkları görüşlerine bakmaksızın bütün matematikçilerin bu tür olasılıkları açıkça saçma olarak değerlendireceklerini düşünüyorum.

Elbette Wiles'ın tezinin gerçekten bir hata barındırması ve Fermat ifadesinin aslında yanlış olması hâlâ söz konusu olabilir. Bununla birlikte Wiles'ın tezinde temel bir hata olabilir ama Fermat ifadesi yine de doğrudur. Ya da Wiles'ın tezi, matematiksel kabul edilebilirliğin bazı gelecek kurallarının standardı bakımından "titiz olmayan kademeler" içerirken temel öğeleriyle doğru olabilir. Yine de bu konular varmak istediğim noktaya ulaştırmıyor. Konu Fermat ifadesinin nesnelliğidir, herhangi birinin ifadeyi belirli şekilde olumlayıcı sunumunun (ya da olumsuzlamasının) herhangi belirli bir zamanın matematik camiasını tatmin edip edemeyeceği değil.

Belki de Fermat ifadesinin aslında, matematiksel mantığın bakış açısından nesnelliği özellikle açık olan bilhassa basit türde[5] bir matematiksel anlatım olduğundan bahsetmek gerekiyor. Bu tür ifadelerin doğruluğunu –tatmin edici olduğu değerlendirilen böylesi tezlerde biraz öznellik olabilmesine rağmen– yalnızca matematikçilerin küçük bir azınlığı[6] herhangi bir biçimde "öznel" olarak değerlendiriyor. Bununla birlikte doğruluğu makul şekilde "görüş meselesi" olarak değerlendirilebilen başka tür matematiksel ifadeler mevcuttur. Bu ifadelerin en iyi bilineni belki de *seçme aksiyomu*dur. Bizim için şu an seçme aksiyomunun ne olduğunu bilmek önemli değil. (Onu §16.3'te anlatacağım.) Burada yalnızca bir örnek olarak alıntılandı. Birçok matematikçi seçme aksiyomunu bir şekilde sorgulanabilir, hatta yanlış bile olabilecek bir ifade olarak değerlendirirken (ben de kendimi bu ilk bakış açısına eğilimli görüyorum), pek çoğu da muhtemelen onu "apaçık doğru" olarak değerlendiriyor. Yine de başkaları onu "doğruluğu" yalnızca bir görüş meselesi olan bir ifade olarak ele alıyor ya da daha doğrusu hangi aksiyom sistemine ve hangi işlemin kurallarına (bir "biçimsel sistem"; *bkz.* §16.6) bağlı kalınacağının seçilmesine göre öyle ya da böyle ele alınabilecek bir şey olarak görüyorlar. Bu son

[5] Teknik olarak bu bir Π_1–cümlesidir; *bkz.* §16.6.

[6] Böylesi bir iddiada bulunmakla bir anlamda kendi tuzağıma düştüğümün farkındayım. Mesele gerçekten böylesine uçta yer alan öznel bir görüşü savunan matematikçilerin küçük bir azınlıkta olup olmadıkları değil(ve kesin olan şu ki, bu konu hakkında matematikçiler arasında güvenilir bir anket yapmadım); konu bu derece uç bir konumda olunmasının gerçekten gerekip gerekmediğidir. Kararı okuyucuya bırakıyorum.

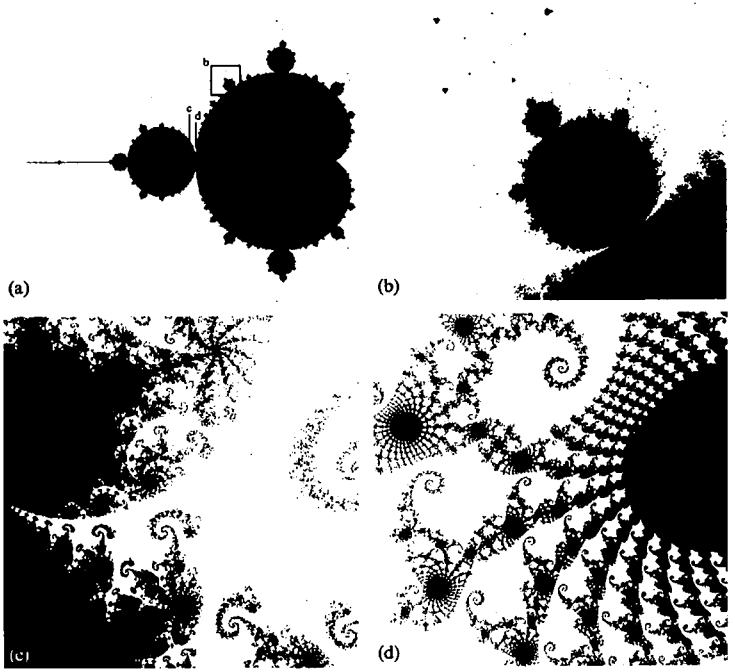
bakış açısını benimseyen (fakat özellikle yukarıda tartışılan Fermat ifadesi gibi açık ve net matematiksel anlatımların doğruluğunun nesnelliğini kabul eden) matematikçiler görece zayıf Platonculardır. Nesnelliğe seçme aksiyomunun doğruluğu bakımından bağlı olanlarsa daha sağlam Platoncular.

Fiziki kuramda fazlaca değinilmiyor olması gerçeğine rağmen, fiziki dünyanın temeldeki davranışlarıyla matematiği belli oranda ilintilendirdiği için seçme aksiyomuna §16.3'te geri döneceğim. Şu an için bu konu hakkında fazlaca endişelenmek uygun olmayacak. Seçme aksiyomu şüphe götürmez matematiksel muhakemenin[7] uygun bir biçimi tarafından o veya bu şekilde yerine oturtulabilirse demek ki doğruluğu aslında bütünüyle nesnel bir konudur ve "Platonik dünya" terimini aktardığım anlamda Platonik dünyaya ya o aittir ya da olumsuzlaması. Öte taraftan seçme aksiyomu yalnızca bir görüş ya da rasgele bir karar meselesiyse (her ne kadar "şu ve bu seçme aksiyomundan gelir" ya da "seçme aksiyomu şu ve bu matematiksel sistemin kuralları uyarınca bir kuramdır" biçimindeki ifadeleri içerse de) mutlak matematiksel biçimlerin Platonik dünyası ne seçme aksiyomunu ne de onun olumsuzlamasını içerir.

Platon'un dünyasına ait olabilen matematiksel ifadeler kesinlikle nesnel olarak doğru olanlardır. Aslında matematiksel nesnelliği matematiksel Platonculuğun gerçekten ilgili olduğu her şey olarak değerlendiriyorum. Birtakım matematiksel ifadelerin Platonik varlığa sahip olduklarını söylemek yalnızca onların nesnel anlamda doğru olduklarını söylemektir. Benzer bir yorumlama nesnel kavramlar olmaları nedeniyle Platonik varlığa sahip matematiksel kavramların –örneğin 7 sayısı bağlamı gibi, ya da tamsayılarda çarpma kuralı, ya da bazı kümelerin sonsuz sayıda elemana sahip olduğu fikri gibi– tümü için geçerlidir. Benim düşünüş yöntemime göre Platonik varlık basitçe bir nesnellik meselesidir ve bundan dolayı bazı insanlar onu o şekilde değerlendirse de kesinlikle "mistik" ya da "bilimsel olmayan" bir şey gibi görülmemelidir.

---

[7] Bazı okuyucular Gödel ve Cohen'in, seçme aksiyomunun küme kuramının (Zermelo–Frankel aksiyom sistemi) daha temel aksiyomlarından bağımsız olduğuna ilişkin çıkardıkları sonuçlardan haberdar olabilirler. Gödel–Cohen tezinin kendi içinde, seçme aksiyomunun o veya bu şekilde yerine oturtulacağını saptamadığını açıklamak gerekiyor. Örneğin, Paul Cohen'in kitabının (Cohen, 1966, Bölüm 14, §13) son bölümünde, orada seçme aksiyomundan ziyade *süreklilik hipotezi*yle daha etraflıca ilgilenmesini dışta tutarsak, konunun bu biçimi vurgulanır; *bkz.* §16.5.



Şekil 1.2 (a) Mandelbrot kümesi. (b), (c) ve (d) Şekil 1.2a'da uygun şekilde işaretlenmiş alanlardaki baloncukları ilgili 11,6, 168,9 ve 1042 çizgisel çarpanlarıyla büyütülmüş halde gösteren bazı ayrıntılar.

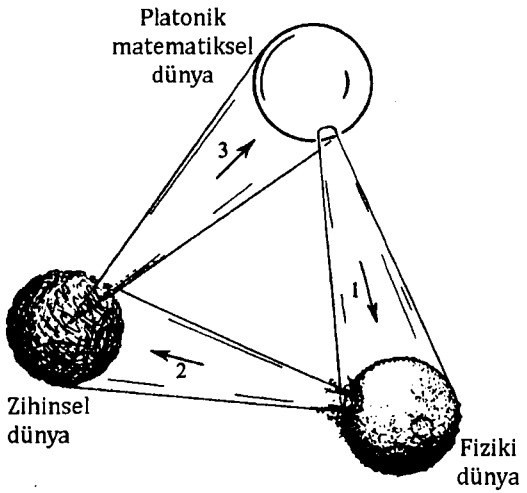
Bununla birlikte seçme aksiyomuyla birlikte, bir matematiksel işlem için yapılan belirli bir önermenin nesnel varlığa sahip olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği gibi sorular hassas ve bazen teknik olabilir. Buna rağmen pek çok matematiksel kavramın genel sağlamlığını değerlendirmek için matematikçi olmaya kesinlikle ihtiyacımız yok. Şekil 1.2'de *Mandelbrot* kümesi olarak bilinen ünlü matematiksel kavramın değişik küçük parçalarını gösterdim. Küme olağanüstü ayrıntılı bir yapıya sahip olmakla beraber herhangi bir insanın tasarımı değildir. Bu yapı dikkate değer biçimde kendine özgü sadelikte matematiksel bir kuralla tanımlanır. Buna §4.5'te etraflıca değineceğiz fakat bu kuralı şu an ayrıntılı olarak anlatmaya çalışsaydım dikkatimizi var olan amaçlarımızdan başka yere çekerdi. Belirtmek istediğim nokta şu ki hiç kimse, kümenin hassas ayrıntılarındaki akıl almaz karmaşanın görüntüsünü ilk kez yakaladığı anda Benoit Mandelbrot bile, kümenin olağanüstü zenginliğine ilişkin bir öngörüye sahip değildi. Mandelbrot kümesi kesinlikle hiçbir insan zekasının buluşu değildi. Küme sadece nesnel olarak orada, matematiğin için-

deydi. Mandelbrot kümesine gerçek bir varlık atamanın anlamı olacaksa o varlık zihinlerimizde yer almaz çünkü kümenin sonsuz çeşitliliği ve sınırsız karmaşası kimse için bütünüyle algılanabilir değildir. Onun varlığı, kendisine ilişkin akıl almaz karmaşıklığı ve ayrıntıyı yakalamaya başlayan bilgisayar çıktısı yığınının –bunlar da en iyi ihtimalle kümenin kendisine yönelik bir yaklaşıklık tahmininin gölgesini yakalar– içinde de yer almaz. Yine de her tür kuşkunun ötesinde bir sağlamlığa sahiptir; çünkü aynı yapı, onu inceleyen matematikçi ya da bilgisayardan bağımsız olarak – daha yakından incelendiğinde giderek daha büyük hassasiyetle algılanabilir tüm ayrıntısı içinde– ortaya çıkar. Onun varlığı yalnızca matematiksel biçimlerin Platonik dünyasında mümkün olabilir.

Matematiksel yapılara herhangi bir tür gerçek varlık atfetmekte zorluk çeken hâlâ pek çok okuyucu olduğunun farkındayım. Böylesi okuyuculardan yalnızca, "varlık" teriminin kendilerine ifade edebildiği şeye ilişkin kavramın boyutunu genişletmeleri ricasında bulunayım. Platon'un dünyasının matematiksel biçimleri açıktır ki masa, sandalye gibi sıradan fiziki nesnelerin sahip oldukları türde bir varlığa sahip değildir. Ne uzamsal mekâna sahiptirler ne de zamanda mevcutturlar. Nesnel matematiksel kavramlar zaman aşırı olarak düşünülmeli ve insanlar onları ilk algıladıkları anda hayat bulmuş gibi değerlendirilmemelidir. Mandelbrot kümesinin Şekil 1.2c ya da 1.2d'de gösterilen özel girdapları, bilgisayar ekranında ya da çıktısında ilk görüldükleri anda varlık kazanmadı ya da Mandelbrot kümesinin ardındaki genel fikir insanlar tarafından–aslında Mandelbrot tarafından değil fakat 1981'de R. Brooks ve J. P. Matelski tarafından– ilk kez ileri sürüldüğünde ortaya çıkmadı. Kesin olarak ne Brooks ne Matelski ne de hatta Mandelbrot 1.2c ve 1.2d'de gördüğümüz özenle ayrıntılandırılmış tasarımlar hakkında gerçek bir kavrayışa sahipti. Bu tasarımlar potansiyel zaman aşırı anlamda zamanın başlangıcından itibaren, kesinlikle onları bugün algıladığımız biçimleriyle muhakkak açığa çıkmış halde, bazı algılayabilen varlıkların hangi zaman ya da mekânda onları incelemeyi seçmiş olmalarından bağımsız olarak, zaten mevcuttu.

1.4 Üç dünya ve üç derin gizem

Böylece, matematiksel varlık yalnızca kendi fiziki varlığımızdan farklı değil fakat aynı zamanda zihinsel algımız tarafından atanmış bir varlıktan da farklıdır. Yine de o diğer iki varlık biçiminin her biriyle derin ve gizemli bir bağ mevcuttur: fiziki ve zihinsel. Şekil 1.3'te bu varlık biçimlerinin tümünü –fiziki, zihinsel ve Platonik matematiksel– küreler biçiminde



Şekil 1.3 *Üç "dünya" – Platonik matematiksel, fiziki ve zihinsel– ve bunlar arasındaki bağlantılarda yatan üç derin gizem.*

resmedilmiş üç ayrı dünyaya ait kavramlar şeklinde şematik olarak gösterdim. Dünyalar arasındaki gizemli bağlantılar da, okuyucuyu bu gizemlere ilişkin bazı inanç ya da önyargılarıma maruz bıraktığım şemada gösteriliyor.

Bu gizemlerin *ilki* bakımından –Platonik matematiksel dünyayı fiziki dünyaya ilintilendirerek– matematik dünyasının yalnızca küçük bir parçasının fiziki dünyanın etkinlikleriyle ilişkili olma gereğine olanak tanıdığım belirtilebilir. Konu kesin olarak, bugün sade matematikçilerin etkinliklerinin çok büyük çoğunluğunun, beklenmedik önemli uygulamalar sayesinde sık sık şaşırıyor olsak da, fizikle ya da herhangi başka bir bilimle (*krş.* §34.9) açık hiçbir bağlantıya sahip olmamasıdır. Benzer şekilde *ikinci* gizemle ilgili olarak, zihniyetin belirli fiziki yapılarla (özelde sağlıklı, uyanık insan beyinleri) ilişki içinde olmasından hareketle fiziki yapıların çoğunluğunun zihniyete neden olması gerektiğinde ısrar etmiyorum. Bir kedi beyni aslında zihinsel nitelikleri çağrıştırabilirken bir kaya için aynısına gerek duymam. Nihayet *üçüncü* gizemle ilgili olarak, zihinsel etkinliğimizin yalnızca küçük bir kısmı mutlak matematiksel gerçekle ilgilenmeye (daha ziyade çeşit çeşit kızgınlıklar, memnuniyetler, endişeler, heyecanlar ve günlük hayatımızı kaplayan buna benzer şeylerle ilgileniyoruz) gereksinim duyduğundan bu gizemi kendinde kanıtlı olarak değerlendiriyorum. Bu üç olgu her bir dünyanın bir diğeriyle olan bağlantı tabanlarının küçüklüğünde, dünyalar şemada saat yönü biçiminde kabul edilerek temsil edilmektedir. Bununla birlikte önyargılarımı açığa vurduğum yer,

her bir dünyanın, kendinden önce gelen dünyayla bağlantısı kapsamında kuşatıldığı yerdir.

Böylece Şekil 1.3'e göre tüm fiziki dünyanın matematiksel yasalar tarafından yönetildiği gösterilmektedir. Sonraki bölümlerde bu tartışmayı destekleyen güçlü (fakat eksik) deliller olduğunu göreceğiz. Bu görüş uyarınca fiziki evrendeki her şey aslında bütünüyle açık ayrıntılara sahip matematiksel kurallar tarafından –belki ilerleyen bölümlerde öğreniyor olacağımız denklemler gibileri tarafından ya da belki bugün "denklem" terimiyle ifade ettiğimiz kavramlardan temelden farklı bazı geleceğe ait matematiksel kavramlar tarafından– yönetilir. Bu doğruysa demek ki kendi fiziki etkinliklerimiz dahi tümüyle bu tür, katı olasılığa dayalı kurallar tarafından yönetilen birtakım rasgele davranışlara hâlâ izin verebilen nihai matematiksel "kontrol"e bağlıdır.

Pek çok insan kendini bu tür tartışmalarda rahatsız hissetmektedir ve itiraf etmeliyim ki konuyla ilgili benim de bazı huzursuzluklarım söz konusudur. Bununla birlikte kişisel önyargılarım aslında, matematiksel kontrol altındaki fiziki eylemleri diğer tarafta kalabilecek olanlardan ayıran bir çizginin nasıl çizilebileceğini görmek zor olduğundan, bu genel doğaya ilişkin bir bakış açısını kayırıyor. Kişisel görüşüme göre pek çok okurun bu konu hakkında benimle paylaşacakları huzursuzluk kısmen, "matematiksel kontrol"ün gerektirebileceği şeye ilişkin son derece sınırlı bir kavramından kaynaklanmaktadır. Kitabın amaçladığı bir şey de, bir kez keşfedildiğinde öne fırlayabilen doğru matematiksel kavramların inanılmaz zenginliğine, gücüne ve zarafetine değinip bunları okurun gözünde anlaşılır kılmaktır.

Kendi başına Şekil 1.2'de gösterilen Mandelbrot kümesinde bile böylesi şeylerde içselleşmiş kapsam ve zarafetin anlık bir resmini yakalamayı başarabiliriz. Bununla birlikte bu yapılar dahi bir bütün olarak, davranışın katı hesaba dayalı kontrol tarafından yönetildiği, matematiğin oldukça sınırlanmış bir kısmında ikamet eder. Bu kısmın ötesinde akıl almaz potansiyelde bir zenginlik mevcuttur. Bana ve arkadaşlarıma ait tüm eylemlerin nihai olarak bu tür matematiksel kurallar tarafından yönetilmesi olasılığı hakkında gerçekten nasıl hissediyorum? Bununla yaşayabilirim. Aslında bu eylemlerin, pek çoklarının katı bilimsel bir bakış açısının içerdiği şeyler olarak savunacakları mutluluk arayışı, kişisel açgözlülük ya da kavgacı saldırganlık benzeri türdeki temel basit güdülere bağlı olmasındansa Platon'un şahane matematiksel dünyasının herhangi bir cephesinde yer alan bir şey tarafından kontrol edilmesini tercih ederim.

Yine de önemli sayıda okuyucunun, evrendeki tüm bu eylemlerin bütünüyle matematiksel yasalara bağlı olduklarını kabul etmekte hâlâ zorla-

nacaklarını tahmin edebiliyorum. Benzer şekilde pek çoğu, Şekil 1.3'te ima edilen diğer iki önyargıma itiraz edecektir. Örneğin şekli, zihinselliğin tamamının köklerinin fizikilikte olduğu anlamına gelecek biçimde çizmekle, oldukça pişkin bir bilimsel yaklaşım sergilediğimi hissedebilirler. Aslında bu, "zihinler"in varlığına ilişkin fiziki bir temele sahip olmayan makul herhangi bir bilimsel kanıtımızın olmayışı gerçeklik olmaya devam ettiği sürece, tümüyle emin olamayacağımız bir önyargıdır. Dahası dinsel bir inanışa sahip pek çokları fiziki olarak bağımsız zihinlerin olanaklı olduğunu şiddetle savunuyor ve sıradan bilimin açığa çıkardığından farklı türde, güçlü kanıt olarak değerlendirdikleri şeye başvuruyor.

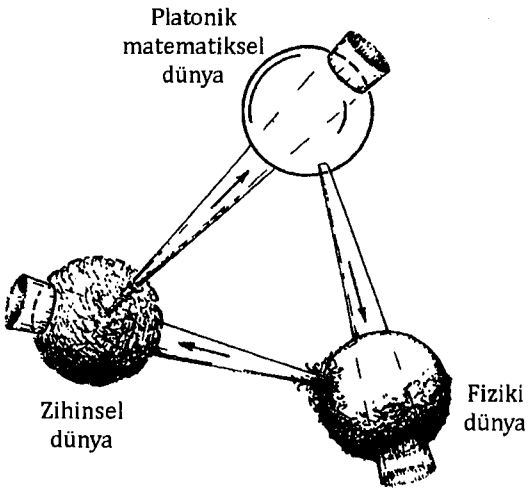
Ek bir önyargım da, Platonik dünyayı Şekil 1.3'te zihinselliğin kapsamı içinde göstermiş olmam gerçeğinde yansıtılmaktadır. Bununla, nedenin bağlamı dışında –en azından kural olarak– hiçbir matematiksel doğruluğun olmadığı gösterilmek isteniyor. Elbette, karşılarında hiç kimsenin gerekli muhakemeyi gerçekleştirebilecek zihinsel dayanıklılığa sahip olamadığı bir hayli karmaşık matematiksel ifadeler mevcuttur. Bununla birlikte bu tür şeyler *potansiyel olarak* insan zihinselliğinin kapsamı içindedir ve Şekil 1.3'te betimlemek istediğim anlamla uyumludur. Buna rağmen nedenin potansiyel kapsamının bile dışında yer alan başkaca matematiksel ifadeler olabileceği ve bunların Şekil 1.3'ün ardındaki amacı ihlâl edecekleri göz önünde bulundurulmalıdır. (Bu mesele, Gödel'in meşhur eksiklik teoremiyle ilişkisinin tartışılacağı §16.6'da etraflıca ele alınacak.)[8]

Şekil 1.4'te, bu konulardaki kişisel önyargılarımın tümünü paylaşmayanlara bir ayrıcalık olması için dünyalar arasındaki bağlantıları önyargılarıma ilişkin bu üç olası ihlâle izin verecek şekilde yeniden çizdim. Buna göre artık matematiksel kontrolün kapsamı ötesindeki fiziki eylem olasılığı hesaba katılmaktadır. Şema ayrıca fiziki yapılar içinde kökleşmemiş zihinselliğin var olabileceği inancına da izin verir. Son olarak, doğruluğu kural olarak neden ve kavrayışça erişilmez olan doğru matematiksel ifadelerin varlığına izin verir.

Bu genişletilmiş resim, dünyanın Şekil 1.3'te gösterilen kendi tercih ettiğim resminde bile izin verdiğimin ötesinde yer alan potansiyel gizemler sunar. Bana göre Şekil 1.3'ün daha sıkı organize edilmiş bilimsel bakış

---

[8] Burada, matematiğin "zihindeki her şey" olduğuna inanan bütünüyle olgun bir anti–Platoncunun aynı zamanda kural olarak nedenin ötesinde hiçbir matematiksel ifadenin olmaması gerektiğine de inanmasında, belki bir ironi mevcut. Örneğin Fermat'nın Son Teoremi neden tarafından (kural olarak) erişilemez olmuş olsaydı bu anti–Platoncu bakış ne doğruluğun ne de yanlışlığın herhangi bir geçerliliğine, ki bu geçerlilik yalnızca zihinsel kanıtlama ya da çürütmeyi algılayış eylemi sonucu oluşur, izin verirdi.



Şekil 1.4 Şekil 1.3'ün, yazarın üç ön-yargısının ihlaline izin verilmiş yeniden çizimi.

açısında yeterince gizem mevcuttur. Bu gizemler Şekil 1.4'teki daha rahat düzene geçildiğinde ortadan kaldırılmaz. Matematiksel yasaların böylesi olgusal kesinliklere sahip dünyada niçin geçerli olması gerektiği konusu derin bir bilmece olmaya devam etmektedir. (Temel fiziki kuramların olağanüstü tamlığının bir boyutuna §19.8, §26.7 ve §27.13'de göz atacağız.) Dahası bu yalnızca kesinlik değil ayrıca derinlemesine gizemli olan bu başarılı kuramların algılanması zor karmaşası ve matematiksel zarafetidir de. Uygunca düzenlenmiş fiziki maddenin –ve burada özellikle canlı insan (ya da hayvan) beynine atıfta bulunuyorum– bilinçli farkındalığın zihinsel niteliğini bir şekilde anımsatabilmesinin nasıl meydana gelebildiğinde de şüphe götürmez derin bir gizem vardır. Nihayet bir de matematiksel doğruluğu nasıl algıladığımızla ilgili bir gizem söz konusudur. Bu yalnızca, beyinlerimizin güvenilir şekilde "hesaplama"ya programlanmış olması değildir. Örneğin "sıfır", "bir", "iki", "üç", "dört", vb terimlerinin gerçek anlamlarını değerlendirdiğimizde aramızdaki en naif insanın bile, işin iç yüzünde, zihnini kurcalayan şeyden çok daha derin bir şey mevcuttur.[9]

Bu üçüncü gizemle bağlantılı olarak ortaya çıkan bazı konularla *matematiksel kanıt* kavramıyla ilişkisi içinde bir sonraki bölümde (ve daha etraflıca §§16.5, 6'da) ilgileneceğiz. Bununla birlikte kitabın ana itkisi bu gizemlerin ilkiyle olan ilişkidir: fiziki dünyanın gerçek davranışı ile matematik arasındaki dikkate değer ilişki. Bu matematiksel fikirlerin en azından bazılarıyla tanışıklık olmaksızın modern bilimin olağanüstü gücün-

[9] *Bkz.* örneğin Penrose, 1997b.

den uygun biçimde faydalanılamaz. Şüphesiz pek çok okuyucu kendisini, bu faydaya ulaşmak amacıyla böylesi matematiğin tümüyle anlaşılmış olması beklentisi nedeniyle yılmış bulabilir. Yine de bu şeylerin, hiçbirinin korktuğu kadar kötü olmadığını anlayacakları iyimser inancına sahibim. Dahası umuyorum ki pek çok okuyucuyu, daha önce algılamış olabilecekleri şeye rağmen matematiğin eğlenceli olabileceğine ikna edeceğim.

Şekil 1.3 ve 1.4'te gösterilen gizemlerin ikincisiyle, zihinselliğin –en özelde bilinçli farkındalık– uygun fiziki yapılarla ilişki içinde nasıl meydana gelebildiği konusuyla (bu derin soruya §34.7'de değinecek olsam da) burada özel olarak ilgilenmeyeceğim. Bizi fiziki evren ve onunla bağlantılı matematiksel yasaları araştırırken meşgul edecek yeterince şey olacak. Ek olarak zihinselliği ilgilendiren konular derinlemesine tartışmalıdır ve onlara bulaşırsak kitabın hedeflediğinden bambaşka bir yere saparız. Buna rağmen belki de burada bir yorum hatalı olmayacaktır. Kendi görüşüme göre fiziki gerçekliğin en temeli hakkında daha fazla bilgi sahibi olmaksızın zihnin doğası hakkında herhangi derin bir kavrayışın oluşması küçük bir olasılıktır. Sonraki bölümlerde sunulan tartışmalar sayesinde açığa çıkacağı üzere, fiziki kavrayışımızda önemli devrimlere gereksinim duyulduğuna inanıyorum. Bana göre bu devrimler gerçekleşene dek zihinsel süreçlerin asıl doğasını anlamakta daha fazla gerçek ilerleme sağlanabileceğini beklemek fazlasıyla iyimserliktir.[10]

1.5 İyi, doğru ve güzel

Bununla bağlantı içinde Şekil 1.3 ve 1.4'ten kaynaklanan birtakım mesele daha mevcuttur. Platon'un bir "ideal biçimler dünyası" kavramını yalnızca matematiksel biçimlere ilişkin sınırlı bir anlamda aldım. Matematik, *Doğruluk* özel idealiyle önemli biçimde ilgilenir. Platon'un kendisi *Güzel* ve *İyi* olarak adlandırılan başkaca iki temel mutlak idealin varlığında ısrar etmişti. Bu tür ideallerin varlığını kabul etmeye ve Platonik dünyanın bu doğanın mutlaklarını içerecek şekilde genişletilmesine izin vermeye çok da karşı değilim.

Aslında daha sonra, fiziki kuramların keşiflerine ve kabullenilişlerine ilişkin konuları hem aydınlatıp hem de karmaşıklaştıran doğruluk ve güzellik arasındaki dikkate değer bazı iç ilişkilere rastlıyor olacağız (özellikle *bkz.* §§34.2,3,9; ayrıca *bkz.* Şekil 34.1). Dahası, estetik koşullar, fiziki dünyanın çalışmalarının altında yatan matematiğe ilişkin güzelliğin kuş-

[10] Fiziki dünya görüşümüzdeki değişim türüne ilişkin bilinçli zihinselliğin oturtulabilmesi için gerekecek görüşler Penrose'da, 1989, 1994, 1996, 1997, aktarılmaktadır.

ku götürmez rolünden oldukça ayrı olarak, hem keşfe yönelten dürtüye ve hem de doğruluğa ilişkin güçlü bir kılavuzluğa olanak sağlayarak, matematiksel fikirlerin kendi yararları için gelişimlerinde temeldir. Hatta ben matematikçilerin dışsal bir Platonik dünyanın bizden bağımsız bir varlığa sahip olduğu ortak kanısının önemli bir unsurunun, fikirlerin kendilerinin sıklıkla açığa vurdukları beklenmedik olağanüstü gizli güzelliklerinden kaynaklandığını sanıyorum.

Burada daha az belirginlikte ilgi çeken –fakat daha geniş kapsamda daha berrak önemde olan– konu mutlak bir ahlak ideali sorunudur: iyi ve kötü nedir ve zihinlerimiz bu değerleri nasıl algılar? Ahlak zihinsel dünyayla, bilinçli varlıklar tarafından kararlaştırılmış değerlerle ve daha önemlisi bilincin kendi gerçek varlığıyla, çok yakından ilişkili olduğu için köklü bir bağlantıya sahiptir. Duyu sahibi varlıkların yokluğu koşulunda ahlakın ne anlama geldiğini anlamak zordur. Bilim ve teknoloji ilerledikçe içerisinde zihniyetin beyan edildiği fiziki koşullara ilişkin bir kavrayış daha da anlamlı hale gelir. Bugünün teknolojik kültürü içinde bilimsel soruların kendi ahlaki karşılıklarından ayrı tutulmamalarının her zamankinden önemli olduğuna inanıyorum. Bununla birlikte bu meseleler bizi kitabın dolaysız hedefinden oldukça uzakta tutardı. İyiyi kötüden ayırmak için böylesi bir anlayışı uygulamaya hakkıyla girişmeden önce doğruyu yanlıştan ayırma konusuna yönelmeye gerek duyuyoruz.

Nihayet, Şekil 1.3'le ilgili sona sakladığım bir gizem daha mevcuttur. Şekli kasıtlı olarak bir paradoksu göstermek üzere çizdim. Her bir dünyanın, önyargılarımla uyum içerisinde, bir sonrakini kendi bütünlüğünde kuşatır görünmesi nasıl mümkün olur? Bu meseleyi önyargılarımdan vazgeçmek için bir neden olarak değerlendirmeyip, yukarıda işaret etmiş olduğum gizemleri de aşan daha derin bir gizemin varlığını göstermek için dikkate alıyorum. Üç dünyanın tümüyle ayrı olmadıkları, yalnızca şu an kendisine dair bir bütün olarak küçük bir algılayışa sahip olduğumuz dünya hakkındaki daha derin bir gerçeğin görünümünü tek tek yansıtmakta oldukları fikrinde bir anlam olabilir. Bu tür konuların uygun şekilde aydınlatılabilmesi için daha katetmemiz gereken uzun bir mesafe söz konusudur.

Bizi burada ilgilendirecek konulardan epeyce sapmaya izin verdim. Bu bölümün temel amacı matematiğin hem antik hem de modern bilimdeki merkezi önemini vurgulamaktı. Gelin şimdi Platon'un dünyasına, en azından o dünyanın görece küçük fakat önemli bir kısmına, özel olarak fiziki gerçekliğin doğasıyla ilişkisi içerisinde bir göz atalım.

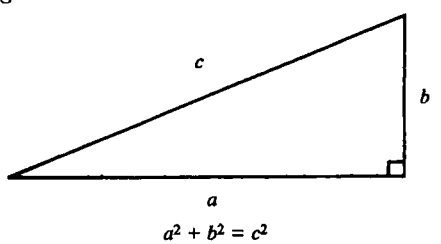
2

ANTİK BİR TEOREM VE MODERN BİR SORU

2.1 Pisagor teoremi

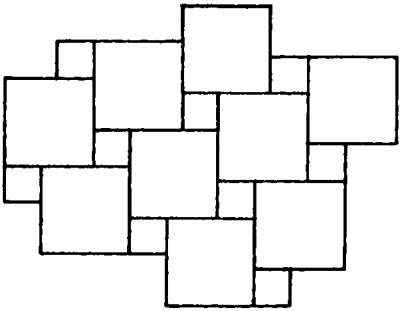
Geometri konusunu ele alalım. Geçen bölümde değinilmiş olan farklı "geometri türleri" aslında nedir? Konuya başlamak üzere Pisagor'la karşılaşmamıza dönecek ve onun adıyla anılan ünlü teoremi ele alacağız:[1] herhangi bir dik üçgende hipotenüsün (dik açının karşısındaki kenar) uzunluğunun karesi diğer iki kenarın uzunluklarının kareleri toplamına eşittir (Şekil 2.1). Bu ifadenin doğruluğuna inanmak için elimizde ne gibi sebepler var? Gerçekte Pisagor teoremini nasıl "kanıt"larız? Pek çok tez biliniyor. Her biri farklı vurgulara sahip olan, özel bir açıklıkta olmaları nedeniyle seçilmiş iki örneği ele almak isterim.

İlki için Şekil 2.2'deki modeli göz önünde bulundurun. Tamamen iki farklı boyuta sahip karelerden oluşmaktadır. Modelin sınırsızca devam ettirilebileceği ve herhangi bir boşluk ya da atlama olmaksızın tüm düzlemin, iki farklı boyuttaki bu kareler tarafından böyle tekrarlanan bir düzenle kaplanabileceği, "apaçık" olarak değerlendirilebilir. Bu düzenin tekrar eden doğası, büyük karelerin merkezlerini işaretlediğimizde, bu noktaların her iki kareden daha büyük boyutta karelerden oluşan fakat öncekilere göre belli bir açıyla eğilmiş bir sistem (Şekil 2.3) oluşturmaları gerçeği tarafından belirlenir.

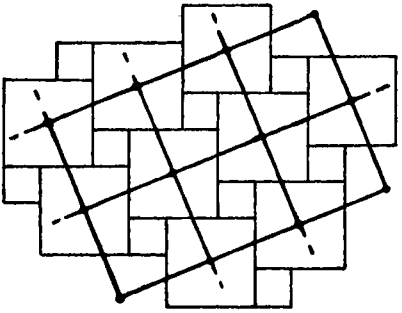


Şekil 2.1 Pisagor teoremi: herhangi bir dik açılı üçgen için hipotenüsün, c, uzunluğunun karesi diğer iki kenarın, a ve b, uzunluklarının kareleri toplamına eşittir.

[1] Şu an "Pisagor teoremi" olarak adlandırdığımız teoremi aslında ilk olarak kimin kanıtladığı tarihsel olarak oldukça belirsizdir, *bkz.* not 1.1. Antik Mısırlılar ve Babillilerin bu teoremin en azından pek çok örneğini bildiklerini görmekteyiz. Pisagor ya da takipçilerinin gerçek rolleri oldukça kuşkuludur.



Şekil 2.2 Düzlemin farklı boyutlardaki iki kareyle mozaikleme şeklinde bir gösterimi.

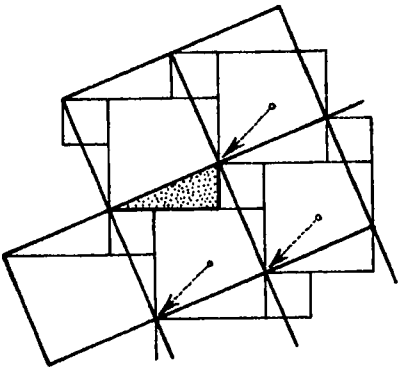


Şekil 2.3 Büyük karelerin merkezleri kafes halindeki daha büyük ve belli bir açıyla eğilmiş karelerin köşelerini oluşturur.

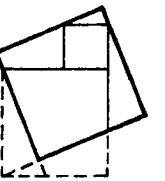
Bu eğimli karelerin her biri kesin olarak, üzerlerindeki işaretlemeler orijinal iki kareli düzeni oluşturacak şekilde çizilir. Orijinal düzendeki iki kareden büyük olanlarının merkezlerini işaretlemek yerine, herhangi başka bir noktayı seçip dizilim boyunca buna karşılık gelen tüm diğer noktaları işaretlersek de aynı sonuca ulaşırız. Eğik karelerin yeni düzeni aynen önceki gibidir fakat dönmeksizin, diğer bir deyişle *öteleme* gibi bir hareketle bir miktar hareket etmiştir. Basit olması için başlangıç noktamızı orijinal modeldeki köşelerden biri olarak seçebiliriz (*bkz.* Şekil 2.4).

Eğik karenin alanının, daha küçük iki karenin alanları toplamına eşit olma zorunluluğu açık olmalı; aslında işaretlemelerle bu daha büyük kareyi yeniden bölerek oluşturulacak parçalar, eğik kareler üzerinde herhangi bir başlangıç noktası seçilerek daha küçük iki kareyi oluşturacak şekilde, döndürmeksizin hareket ettirilebilirler (*örn.* Şekil 2.5). Dahası Şekil 2.4'te açıkça bellidir ki büyük eğik karenin kenar uzunluğu, diğer iki kenarının uzunluğu iki küçük karenin kenar uzunluklarına eşit olan dik açılı bir üçgenin hipotenüsüdür. Böylece Pisagor teoremini inşa etmiş olduk: hipotenüsün karesi diğer iki kenarın kareleri toplamına eşittir.

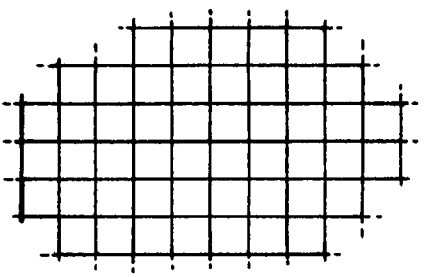
Yukarıdaki tez aslında bu teoremin basit bir kanıtının temel öğelerini temin eder ve dahası, bize teoremin doğru olması gerektiğine inanmamız için, yalın dürtü olmaksızın mantık basamaklarının adımlanmasıyla ulaşılacak bazı daha biçimsel tezler sayesinde bu kadar görünür olamayacak duruma ilişkin bir "neden" sunar. Bununla birlikte bu tezde içerilmiş üstü kapalı birtakım varsayımlar olduğu belirtilmelidir. Bunların küçük bir kısmını oluşturan varsayım Şekil 2.2'de hatta Şekil 2.6'da gösterilip açıkça kendini yineleyen düzende görünen karelerin aslında geometrik olarak



Şekil 2.4 Eğik karelerden oluşan kafesi bir öteleme yoluyla kaydırılabilir. Burada eğik kafesin köşeleri, eğik bir karenin kenar uzunluğunun, diğer iki kenar uzunluğu özgün karelerin kenar uzunluklarına eşit olan dik açılı bir üçgenin hipotenüsü olduğunu gösterecek şekilde iki kareli kafesin köşeleri üzerinde yer alıyor.



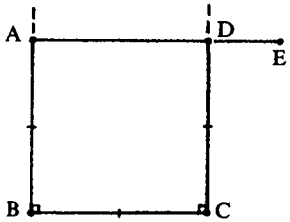
Şekil 2.5 Eğik kare, kendi üzerinde, gösterildiği gibi, herhangi bir başlangıç noktası seçilerek birbirleriyle iki küçük kareyi oluşturacak şekilde birleşen parçalara bölünür.



Şekil 2.6 Eşit karelerden oluşan tanıdık kafes. Var olduğunu nasıl biliriz?

mümkün oldukları, hatta daha kritik olarak bir *kare*nin geometrik olarak mümkün olduğu varsayımıdır! Her şeyin ötesinde bir "kare" ile neyi kastediyoruz? Normalde bir kareyi bütün kenarları birbirine eşit ve bütün açıları dik açı olan düz bir şekil olarak düşünürüz. Dik açı nedir? Birbirini herhangi bir noktada hepsi birbirine eşit dört açı oluşturacak şekilde kesen iki düz çizgi hayal edebiliriz. Bu eşit açıların her biri öyleyse, birer dik açıdır.

Gelin şimdi bir kare elde etmeye çalışalım. Şekil 2.7'deki gibi, ABC ve BCD'nin dik açılar olduğu ve D ve A'nın BC doğru parçasıyla aynı tarafta olduğu üç eşit AB, BC ve CD doğru parçalarını alın. Soru hemen gelir: AD diğer üç parçayla aynı uzunlukta mıdır? Dahası DAB ve CDA açıları da dik açı mıdır? Bu açılar birbirlerine şekildeki bir sol sağ simetrisiyle eşit ol-



Şekil 2.7 Bir kare oluşturmayı deneyin. AB = BC = CD olmak üzere ABC ve BCD'yi dik açılar olarak alın. Bunu DA'nın bu uzunluklara eşit olması ve DAB ve CDA'nın da dik açı olmaları mı izler?

malılar fakat onlar gerçekten dik açı mıdır? Bu, tek başına karelerin bize tanıdık olmaları nedeniyle ya da belki okul zamanlarından anımsayabileceğimiz, Öklit'in BA ve CD'nin "paralel" olması gerektiğini söyleyebilen bir ifadesi ve bir paralel çiftinin herhangi bir "kesen"inin bu iki paralelle buluştuğu noktalarda birbirine eşit açılara sahip olması gerektiğini söyleyen bir ifade nedeniyle açık görünür.

Buradan devamla DAB açısı, yukarıda belirtildiği üzere ADC açısına eşit olması yanı sıra, ADC'nin bütünler açısına (diğer bir deyişle Şekil 2.7'de ADE doğrusal olmak üzere EDC açısına) eşit olmak zorundadır. Bir açı (ADC) kendi bütünleyen açısına (EDC), yalnızca bir dik açıysa eşit olabilir. Ayrıca AD kenarının BC'yle aynı uzunluğa sahip olduğunu da kanıtlamamız gerekiyor fakat bu şimdi, örneğin BA ve CD paralellerinin keseninin özelliklerini takiben de elde ediliyor. Böylece dik açılardan oluşan karelerin gerçekten var olduklarını bu tür Öklitçi tezlerle kanıtlayabildiğimiz aslında doğrudur. Fakat burada gizlenen derin bir mesele mevcuttur.

2.2 Öklit'in önermeleri

Öklit kendi geometri kavramını oluştururken gösterimlerinin hangi varsayımlara dayandığını görmek için dikkate değer bir çaba harcadı.[2] Özelde, *aksiyomlar* olarak adlandırılan –temelde nokta, çizgi, vb şeylerle kastedilen tanımlamalar olacak şekilde kendinde kanıtlanmış doğrular olarak kabul edilmiş– kesin ifadeleri, geçerlilikleri daha az kesin görünen, yine de bizim geometri dünyamızın doğruları olarak kabul gören varsayımlardan, beş *önerme*den ayırt etmekte özenliydi. Bu varsayımlardan sonuncusu, Öklit'in beşinci önermesi olarak adlandırılanı diğerlerinden daha az açık olarak kabul edildi ve yüzyıllar boyunca onu, daha açık görü-

[2] Bununla birlikte bu derece özene rağmen Öklit'in çalışmasında, esasen bugün "topolojik" olarak adlandırdığımız, Öklit'e ve çağdaşlarına "sezgisel olarak apaçık" gibi görünen konularda çeşitli gizli varsayımlar arta kaldı. Bu değinilmeyen varsayımlar ancak yüzyıllar sonra, özelde 19. yüzyıl sonunda Hilbert tarafından yorumlandı. Takip eden bölümlerde bunları görmezden geleceğim.

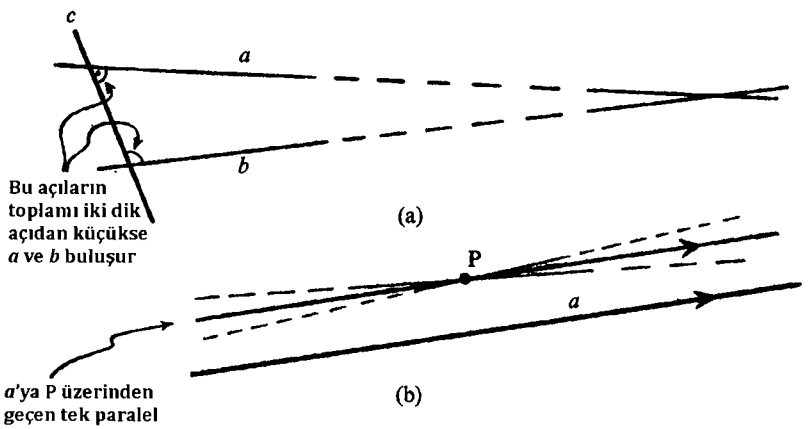
nen diğer önermeleri kullanarak kanıtlamanın bir yolunu bulmanın mümkün olması gerektiği düşünüldü. Öklit'in beşinci önermesi paralellik önermesidir ve burada bu alıştırmayı uygulayacağım.

Paralellik önermesini tartışmadan önce Öklit'in diğer dört önermesinin doğası üzerine yorum yapmaya değer. Önermeler, Öklit daha sonraki çalışmalarında üç–boyutlu uzayı ele almış olsa da (Öklitçi) düzlem geometrisiyle ilgileniyor. Onun düzlem geometrisinin temel elemanları noktalar, düz çizgiler ve çemberlerdir. Burada "düz çizgiyi" (ya da basitçe bir "doğru") her iki yönde de sınırsızca uzatılmış olarak ele alıyorum, aksi durumda bir "doğru parçası"ndan bahsedeceğim. Öklit'in *birinci* önermesi etkin biçimde, herhangi iki noktayı birleştiren (tek) bir doğru parçasının varlığını iddia eder. *İkinci* önermesi herhangi bir doğru parçasının sınırsızca (aralıksız) uzatılabilirliğini iddia eder. *Üçüncü* önermesi herhangi bir merkeze ve herhangi bir yarıçapa sahip bir çemberin varlığını iddia eder. Nihayet *dördüncü* önermesi tüm dik açıların birbirine eşitliğini iddia eder.[3]

Bu önermelerin bazıları, özellikle dördüncüsü modern bir bakış açısından biraz garip görülebilir fakat Öklit geometrisini temelleyen fikirlerin kökenini aklımızda tutmak zorundayız. Esasında o, idealize edilmiş katı cisimlerin hareketleri ve böyle idealize edilmiş bir katı cisim bir diğeriyle çakışmaya itildiğinde aklına gelen *eşleşme* kavramıyla ilgilendi. Bir cisim üzerindeki dik açının bir diğeri üzerindekiyle eşitliği, birinin dik açısını oluşturan kenarları diğerinin dik açısını oluşturan kenarların üzerine denk gelecek şekilde hareket ettirme olasılığıyla ilgiliydi. Dolayısıyla dördüncü önerme uzayın izotropik ve türdeş olduğunu iddia ediyor, öyle ki bir yerdeki bir şekil başka bir yerdeki bir şekille aynı, diğer bir deyişle eşleşik geometrik biçime sahip olabilirdi. Birinci önerme düz bir doğru parçasının basit doğasını aktarırken ikinci ve üçüncü önermeler uzamın, içinde "boşluklar" olmaksızın sınırsızca genişletilebilir olduğunu aktarıyordu. Öklit'in geometriye bakma biçimi bizim ona bugünkü bakma biçimimizden epey farklı olsa da, onun ilk dört önermesi günümüzün metrik uzay kavramını bütünsel bir türdeşlik, izotropik oluş ve kapsamının sonsuzluğuyla temel olarak özetledi. Aslında böylesi bir fotoğraf modern kozmolojiye göre, §27.11 ve §28.10'da göreceğimiz üzere gerçek evrenin oldukça büyük ölçekli uzamsal doğasıyla sıkı bir uyum gösterir.

O halde Öklit'in beşinci önermesi, paralellik önermesi nedir? Öklit'in onu esas olarak formüle ettiği haliyle bu önerme, bir düzlemdeki iki düz doğru parçası a ve b, her ikisi de başka bir düz doğru parçası c ile kesişi-

[3] *Bkz. örn.* Thomas, 1939.



Şekil 2.8 (a) Öklit'in paralellik önermesi. *a* ve *b* çizgileri bir üçüncü *c* çizgisinin, onunla buluştukları yerdeki iç açıların toplamı iki dik açıdan küçük olacak şekilde keseni durumundadırlar. Öyleyse *a* ve *b* sonuçta (yeterince uzatıldıkları varsayıldığında) birbirlerini kesecektir. (b) Playfair aksiyomu (eşdeğer): *a* düzlemdeki bir çizgi ve P, o düzlemde *a* üzerinde olmayan bir noktaysa şu halde, düzlemde P üzerinden geçen ve *a*'ya paralel olan tek bir çizgi vardır.

yorsa (bu durumda *c*, *a* ve *b*'nin *keseni* olarak adlandırılan şeydir) ve *c*'nin aynı tarafında oluşan iç açıların toplamı iki dik açıdan azsa, *a* ve *b*'nin, *c* tarafında yeteri kadar uzatıldıkları zaman herhangi bir yerde birbirlerini kesecekleri iddiasında bulunur (*bkz.* Şekil 2.8a). Bu önermenin eşdeğer bir biçimi (bazen *Playfair aksiyomu* olarak adlandırılır) herhangi düz bir çizgi ve bu çizgi üzerinde olmayan bir nokta için bu noktadan geçen ve çizgiye paralel olan tek bir düz çizgi olduğunu iddia eder (*bkz.* Şekil 2.8b). Burada "paralel" çizgiler aynı düzlemde birbiriyle kesişmeyen iki düz çizgidir (ve benim "çizgilerimin" Öklit'in "doğru parçalarına" oranla bütünüyle genişletilmiş olduklarını anımsayın).[2.1]

Paralellik önermesini elde ettiğimize göre bir karenin varlığı için gerekli özelliği inşa etmeye devam edebiliriz. Paralel bir düz çizgi çiftinin bir keseni onlarla, kesenin bir tarafında kalan iç açıların toplamı iki dik açıya eşit olacak şekilde buluşuyorsa çiftin çizgilerinin aslında birbirlerine paralel oldukları kanıtlanabilir. Dahası hemen denilebilir ki çifte ait herhangi başka bir kesen de aynı açı özelliğine sahip olur. Bu, temel olarak tam da yukarıdaki tezde verilmiş karemizi oluşturmamız için gereksinim duyduğumuz şeydir. Aslında görmekteyiz ki yapımızın gerçekten tüm

[2.1] Paralellik önermesinin Öklit biçimi doğru olduğunda bunu Playfair'in paralellerin tekliği sonucunun izlemesi gerektiğini gösterir.

açıları dik açı ve tüm kenarları eşit olan bir kareyi verdiğini göstermek için kullanmamız zorunlu olan tek şey paralellik önermesidir. Paralellik önermesi olmaksızın karelerin, tüm açılarının dik açı olması normal anlamında, gerçekten var olduklarını kanıtlayamayız.

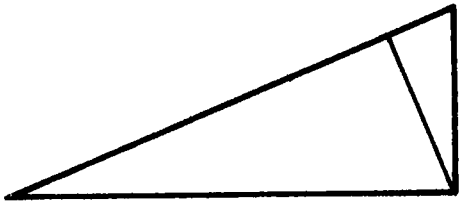
Kare gibi böylesine apaçık bir şeyin varlığına dair "titiz bir kanıt" sunmak üzere hangi kesin varsayımlara gereksinim duyulacağı üzerine kaygılanmak yalnızca bir matematiksel ukalalık meselesi gibi görülebilir. Kare hepimizin bildiği bu kadar tanıdık bir şekilken böyle ukalaca konularla gerçekten niçin ilgilenelim ki? Öklit'in aslında bu konular üzerine kaygılanmakta olağanüstü bir kavrayış gösterdiğini yakında göreceğiz. Özelde gerçek evrenin kozmolojik bir ölçeğinde fiziki "kareler"in var olup olmadıkları o kadar da netleşmiş bir mesele değildir. Bu bir gözlemleme meselesidir ve şu anki kanıtlar çelişkili görünüyor (*bkz.* §2.7 ve §28.10).

2.3 Pisagor teoreminin benzer–alanlar kanıtı

Paralellik önermesini *varsaymamanın* matematiksel önemine sonraki bölümde döneceğim. İlgili fiziki konular §18.4, §27.11, §28.10, ve §34.4'te yeniden incelenecek. Bununla birlikte bu konuları tartışmadan önce Pisagor teoreminin yukarıda söz verdiğim öteki kanıtına dönmek öğretici olacaktır.

Pisagor ifadesinin Öklit geometrisinde gerçekte doğru olduğunu görmenin en basit yollarından biri, verili dik açılı üçgenin, dik açının olduğu köşeden hipotenüse bir dikme çizilerek iki küçük üçgene bölünmesiyle oluşan düzenlemeyi ele almaktır (Şekil 2.9). Burada gösterilen üç üçgen mevcuttur: orijinal olan ve kendisi bölünerek oluşturulmuş diğer ikisi. Açıktır ki orijinal üçgenin alanı diğer iki küçüğünün alanları toplamıdır.

Şimdi, bu üç üçgenin hepsinin birbirine *benzer* olduğunu görmek basit bir meseledir. Bu hepsinin, farklı boyutlarda olsalar da, aynı *biçime* sahip oldukları anlamına gelir, diğer bir deyişle sabit bir hareketle birlikte düzenli genişleme ya da daralma yoluyla birbirlerinden elde edilirler. Bu her bir üçgenin bir şekilde kesinlikle aynı açılara sahip olmalarının sonucudur. İki küçük üçgenin her biri büyük olanla ortak bir açıya sahiptir ve her bir üçgenin bir açısı dik bir açıdır. Üçüncü açılar da, herhangi bir üçgendeki açıların toplamı her zaman aynı olduğu için aynı olmak zorundadır. Benzer düzlemsel şekillerin alanlarının, onlara karşılık gelen doğrusal boyutların kareleriyle orantılı olması genel bir özelliktir. Bu doğrusal boyutu, her bir üçgende onların en uzun kenarları olarak alabiliriz, diğer bir deyişle hipotenüsleri. Küçük üçgenlerin her birinin hipotenüsünün orijinal

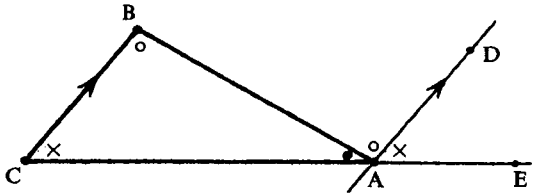


Şekil 2.9 Pisagor teoreminin benzer üçgenler kullanarak kanıtlanması. Dik açılı bir üçgen alın ve dik açının olduğu köşeden hipotenüse bir dikme inin. Şu halde özgün üçgenin bölündüğü iki üçgenin alanları toplamı yine özgün üçgenin alanına eşittir. Her üç üçgende benzerdir ve böylece alanları da sırasıyla hipotenüslerinin kareleriyle orantılıdır. Bunu Pisagor teoremi izler.

üçgenin (hipotenüs olmayan) kenarlarından biriyle aynı olduğunu not edelim. Böylece hemen (orijinal üçgenin alanının diğer ikisinin alanları toplamına eşit olduğu gerçeğinden hareketle) orijinal üçgende hipotenüsün karesinin diğer iki kenarın kareleri toplamına gerçekten eşit olduğu sonucu çıkarsanır: İşte Pisagor teoremi!

Bu tezde, yine, incelemeye gerek duyacağımız belirli bazı varsayımlar mevcuttur. Tezin önemli bir bileşeni bir üçgenin açıları toplamının her zaman aynı değere tekabül edeceği gerçeğidir. (Bu toplamın değeri elbette 180°'dir fakat Öklit onu "iki dik açı" olarak adlandırırdı. Daha modern "doğal" matematiksel tanımlama, bir üçgenin açıları toplamının, Öklit geometrisinde π olduğunu söylemektir. Bu, açının mutlak ölçüsü için derece işaretinin, "°", $\pi/180$ olarak sayıldığı (ve böylece $180° = \pi$ yazabildiğimiz) radyanı kullanmaktır. Alışıldık kanıt Şekil 2.10'da gösteriliyor. CA'yı E'ye kadar uzatıyor ve A üzerinden CB'ye paralel bir doğru, AD, çiziyoruz. Böylece, paralellik önermesini takiben, EAD ve ACB açıları birbirine ve ayrıca DAB ve CBA açıları da birbirine eşittir. EAD, DAB ve BAC açılarının toplamı π (ya da 180° ya da iki dik açı) olduğundan ACB, CBA ve BAC açılarının toplamı da öyle olmak zorundadır; kanıtlanması gerektiği gibi. Fakat burada paralellik önermesinin kullanıldığına dikkat edin.

Pisagor teoreminin bu kanıtı ayrıca benzer şekillerin alanlarının kendi ebatlarındaki herhangi bir doğrusal uzunlukla orantılı olduğu gerçeğini de kullanır. (Burada bu doğrusal uzunluğu temsilen her bir üçgenin hipotenüsünü seçtik.) Bu gerçek yalnızca –paralellik önermesi uyarınca oluşturduğumuz Şekil 2.9'daki üçgenler gibi– farklı boyutlarda benzer şekillerin gerçekten var olmalarına değil, aynı zamanda dikdörtgen olmayan biçimler için "alan"ı aslında nasıl tanımladığımızla ilintisi içinde bazı daha karmaşık konulara da dayanır. Bu genel konular limit alma işlemlerinin gerçekleştirilmesi aracılığıyla yerli yerine oturur fakat şu an için bu tür bir tartışma içine girmek istemiyorum. Soruna §§3.1–3'te dönülecek.



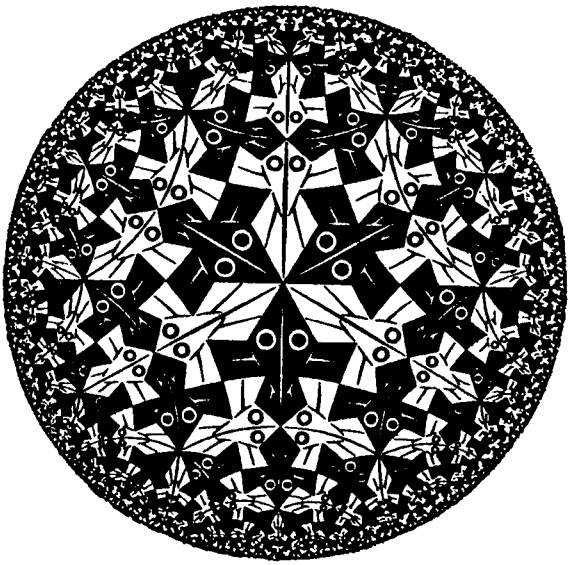
Şekil 2.10 ABC üçgeninin açıları toplamının π (= 180° = iki dik açı) olduğunun kanıtı. CA'yı E'ye kadar uzatın ve CB'ye paralel olan AD'yi çizin. Paralellik önermesi uyarınca EAD ve ACB birbirine ve DAB ve CBA'da birbirine eşittir. EAD, DAB ve BAC açılarını toplamı π'ye eşit olduğundan ACB, CBA ve BAC açılarının toplamı da öyledir.

Önceki bölümlerdeki tartışmaların önemli bir mesajı Pisagor teoreminin paralellik önermesine dayanır görünmesidir. Bu gerçekten böyle midir? Paralellik önermesinin yanlış olduğunu varsayın? Bu Pisagor teoreminin kendisinin de gerçekten yanlış olabileceği anlamına mı gelir? Böyle bir olasılık herhangi bir anlam ifade eder mi? Gelin paralellik önermesinin yanlış olarak kabul edilmesine gerçekten izin verildiği durumda ne olacağı sorusunu ele almaya çalışalım. Okulda öğrendiğimiz geometrinin bütünüyle altüst olduğu gizemli bir yapay inanç dünyasına giriyor gibi görünecek fakat aslında burada daha derin amaç bulacağız.

2.4 Hiperbolik geometri: konformal resim

Şekil 2.11'deki resme bir göz atın. Bu M.C. Escher'in *Circle Limit I* adı verilmiş tahta oymalarından birinin yeniden üretilmiş halidir. Aslında bu resim bize içinde paralellik önermesinin yanlış olduğu, Pisagor teoreminin geçersiz olduğu ve bir üçgenin açılarının toplamının π'ye eşit olmadığı bir tür –*hiperbolik* (bazen *Lobachevskici*) denen– geometrinin oldukça tam bir gösterimini sağlar. Dahası verili ebatlardaki bir şekil için, genelde, daha büyük bir ebatta benzer bir şekil mevcut değil.

Şekil 2.11'de Escher hiperbolik geometrinin, hiperbolik düzlemin tüm "evreninin" sıradan Öklitçi bir düzlem içindeki bir çember içine "sıkıştırıldığı" özel bir gösterimini kullandı. Çevredeki çember bu hiperbolik düzlem için "sınırsızlığı" temsil ediyor. Escher'in resminde balıkların çevredeki çembere yaklaştıkça oldukça sıkışık hale geldiklerini görebiliriz. Öte taraftan bunu bir göz yanılsaması olarak düşünmeliyiz. Bu balıklardan biri olduğunuzu hayal edin. Bu durumda isterseniz Escher'in resminin kıyısına ya da isterseniz onun merkezine yakın bir yerlerde olun tüm (hiperbolik) evren size benzer görünecektir. Bu geometrideki "uzaklık" kavramı daha önce gösterilmiş bulunan Öklitçi düzlemdekiyle uyuşmaz. Escher'in

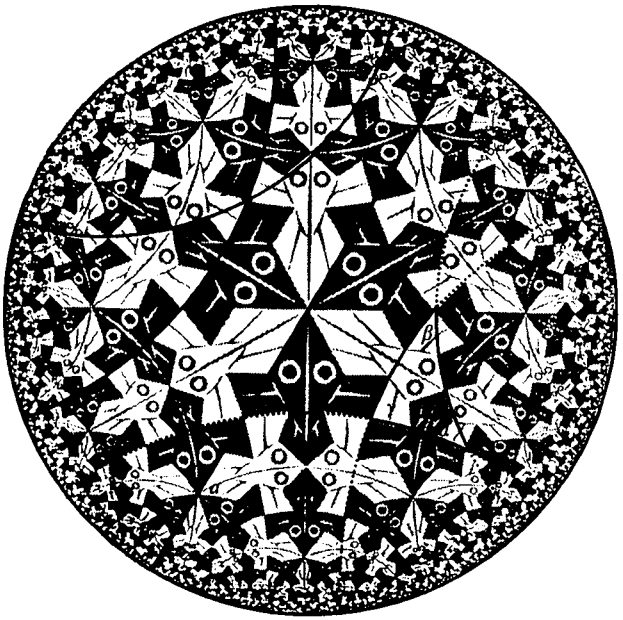


Şekil 2.11 M. C. Escher'in, hiperbolik düzlemin konformal gösterimini resmeden *Circle Limit I* adlı tahta oyma çalışması.

resmini kendi Öklitçi bakış açımızla değerlendirdiğimizde çemberin kenarındaki balıklar bize çok küçülüyormuş gibi görünür. Bununla birlikte beyaz ya da siyah balıklar kendi "hiperbolik" bakış açılarından, kendilerinin merkez yakınındakilerle tıpatıp aynı boyut ve biçimde olduklarını düşünür. Dahası balıklar bizim dışarıdan Öklitçi bakış açımıza göre çemberin kendisine git gide daha yaklaşır görünmelerine rağmen, o sınır kendi "hiperbolik" bakış açılarına göre hep sınırsızca uzakta kalır. Ne çevredeki çember ne de onun dışındaki herhangi bir "Öklit" uzay onlar için bir varlığa sahip. Onların bütün evreni bize kesinkes çemberin içinde yer alıyormuş gibi görünen şeyden oluşuyor.

Daha matematiksel terimlerle, hiperbolik geometriye ilişkin bu resim nasıl oluşturuldu? Öklitçi bir düzlem içinde herhangi bir çember düşünün. Bu çember içinde yer alan noktalar kümesi tüm hiperbolik düzlemdeki noktalar kümesini temsil etmektedir. Hiperbolik geometri uyarınca düz çizgiler, çevre çemberiyle –dik açıyla anlamına gelerek– *ortogonal olarak* buluşan Öklitçi çember parçalarıyla temsil edilmektedir. Şu halde iki eğrinin kesişme noktasında oluşan hiperbolik anlamdaki bir *açı* kavramının, iki eğrinin kesişme noktasında oluşan açının Öklitçi ölçüsüyle tam olarak benzer olduğunu görmekteyiz. Bu doğaya ilişkin gösterim *konformal** ola-

* Açıkorur –yn.



Şekil 2.12 Şekil 2.11'deki Escher resminin hiperbolik düz çizgiler (çevredeki çemberle ortogonal olarak buluşan Öklitçi çember ya da çizgiler) ve hiperbolik bir üçgenle birlikte gösterilmiş hali. Hiperbolik açılar Öklitçi olanlarla uyuşur. (Şekil 2.8b'de ifade edilmiş olan) paralellik önermesi açıkça ihlal edilmektedir ve bir üçgenin açıları toplamı π'den küçüktür.

rak adlandırılır. Bu nedenle Escher'in kullandığı hiperbolik geometrinin özel gösterimi bazen hiperbolik düzlemin *konformal modeli* olarak adlandırılır. (Buna ayrıca sıklıkla Poincaré diski de denir. Bu terminolojinin şüpheli tarihi gerekçelendirmesi §2.6'da tartışılacak.)

Şu anda hiperbolik geometrideki bir üçgenin iç açıları toplamının π'ye eşit olup olmadığını anlayabilecek bir konumda bulunuyoruz. Şekil 2.12'ye hızlı bir bakış bizi öyle olmadığından, biraz daha az bir şeye eşit olduğundan kuşkulanmaya sevk eder. Aslında hiperbolik geometrideki bir üçgenin açıları toplamı her zaman π'den azdır. Bunu, bir üçgenin açıları toplamına ilişkin "berrak" bir yanıt alamıyor görünmemiz nedeniyle hiperbolik geometrinin sevimsiz bir tür özelliği gibi değerlendirebiliriz. Bununla birlikte, aslında hiperbolik bir üçgenin açılarını topladığımızda ne olacağıyla ilgili özel olarak zarif ve kayda değer bir şey mevcuttur: eksiklik her zaman üçgenin alanıyla doğru orantılı. Daha açık olarak üçgenin üç açısını α, β ve γ olarak alırsak Δ üçgenin alanını ve C bir sabiti ifade etmek üzere, (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777, tarafından bulunan)

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = C\Delta$$

eşitliğini elde ederiz. Bu C sabiti uzunluk ve alan ölçümü için seçilmiş "birim"e bağlıdır. Her şeyi, her zaman $C = 1$ olacak şekilde ölçeklendirebiliriz. Aslında hiperbolik geometride bir üçgenin alanının bu kadar basit ifadelendirilebilmesi dikkat çekici bir gerçekliktir. Öklit geometrisinde bir üçgenin alanını basitçe açılar cinsinden ifade etmenin hiçbir yolu yoktur ve bir üçgenin alanının kenar uzunlukları cinsinden ifadesiyse çok daha fazla karışıktır.

Aslında iki nokta arasındaki hiperbolik *uzaklığın* nasıl tanımlandığını halen açıklamadığım için hiperbolik geometriyi bu konformal gösterim aracılığıyla açıklamayı tam olarak bitirmedim (ve "uzaklığın" ne olduğunu alanlar hakkında gerçekten konuşmaya başlamadan önce öğrenmek daha uygun olur). Size çember içinde yer alan A ve B noktaları arasındaki hiperbolik uzaklığa ilişkin bir ifade sunmama izin verin. Bu, P ve Q, A ve B'den geçen ve çevresel çembere ortogonal olan Öklitçi çemberin (diğer bir deyişle hiperbolik düz çizgi) ortogonal çemberle buluştuğu noktalar, ve "QA", vb Öklitçi uzaklıklar olmak üzere (*bkz.* Şekil 2.13),

$$\log \frac{QA \cdot PB}{QB \cdot PA} \text{'dir.}$$

Lambert'in alan denklemindeki C'yi dahil etmek isterseniz ($C \neq 1$ için) yukarıdaki uzaklık ifadesini yalnızca $C^{-1/2}$ (C'nin karekökünün tersi)[4] ile çarpın.[2.2] daha sonra açıklığa kavuşabileceğini umduğum bazı sebepler nedeniyle $C^{-1/2}$ niceliğine geometrinin *sözde yarıçapı* diyeceğim.

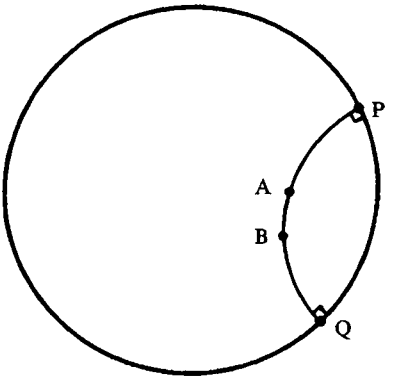
Yukarıdaki "log" (logaritma) denklemi gibi matematiksel ifadeler ürkütücü görünüyorsa lütfen endişelenmeyin. Bunları sadece şeyleri açıkça görmekten hoşlananlar için kullanıyorum. Yine de, ifadenin niçin işlediğini açıklamayacağım (*örn.* iki nokta arsındaki en kısa hiperbolik uzaklık, böyle tanımlandığında, aslında niçin düz bir hiperbolik çizgi üzerinden ölçülür ya da uygun şekilde niçin hiperbolik bir çizgi üzerindeki uzaklıklar toplanır).[2.3] Ayrıca "log" için özür dilerim fakat işin doğası budur. As-

---

[4] $C^{-1/2}$ gibi üslü ifadeler bu kitapta sıklıkla kullanılıyor. Not 1.2'de ifade edildiği üzere a^5, $a \times a \times a \times a \times a$ anlamına gelir ve buna bağlı olarak pozitif bir n tamsayısı için a'nın kendisiyle n kez çarpılmış hali a^n şeklinde yazılır. Bu gösterim negatif üslere genişletilir ve a^{-1}, $1/a$, a'nın tersi ve a^{-n}, $1/a^n$, a^n'in tersi, ya da eşdeğer olarak $(a^{-1})^n$'dir. §5.2'nin daha genel bir tartışması uyarınca $a^{1/n}$, bir a pozitif sayısı için, $(a^{1/n})^n = a$ ifadesini sağlayan (pozitif) sayı, "a"nın n'inci dereceden köküdür'(*bkz.* not 1.2). Dahası $a^{m/n}$, $a^{1/n}$'nin m'inci dereceden üssüdür.

[2.2] Niçin böyle olduğuna ilişkin basit bir sebep görebiliyor musunuz?

[2.3] Bu denkleme göre A, B ve C hiperbolik düz bir çizgi üzerindeki ardışık üç noktaysa



Şekil 2.13 Konformal gösterimde A ve B arasındaki hiperbolik uzaklık, QA, vb Öklitçi uzaklıklar, P ve Q, A ve B'den geçen Öklitçi çemberin çevrel çemberle ortogonal olarak buluştuğu yerdeki noktalar olmak üzere log (QA.PB/QB.PA)'dır.

lında bu bir *doğal logaritma* ve onun hakkında §§5.2,3'te söyleyeceğim epeyce şey olacak. Logaritmaların birçok farklı kapsamda önemli olmak yanında gerçekten çok güzel ve gizemli kavramlar (e sayısı gibi) oldukların ı keşfedeceğiz.

Hiperbolik geometrinin, böyle bir uzaklık tanımlamasıyla, paralellik önermesine gerek duyanlardan ayrı olarak Öklit geometrisinin tüm özelliklerine sahip olduğu görülüyor. Değişik biçimler ve ebatlarda üçgenler ve başkaca düzlemsel şekiller oluşturabilir ve onları etrafta Öklit geometrisindeki kadar özgürce, "bir bütün olarak" (hiperbolik biçim ve ebatlarını değişmekten alıkoyarak), iki şeklin "eşleşikliği" doğal kavramı oluşana dek, "eşleşiğin" tıpkı "birbirleriyle çakışana kadar bir bütün olarak etrafta hareket ettirilebilen" anlamına geldiği Öklit geometrisinde olduğu gibi hareket ettirebiliriz. Hiperbolik geometri uyarınca Escher'in tahta oymasındaki tüm beyaz balıklar gibi tüm siyah balıklar da aslında birbiriyle eşleşiktir.

2.5 Hiperbolik geometrinin diğer gösterimleri

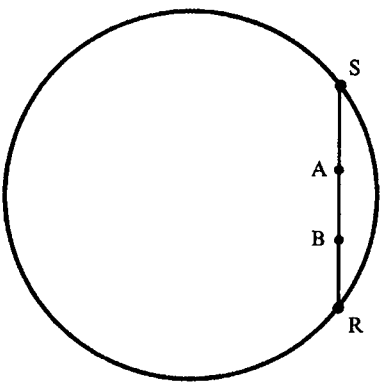
Elbette, beyaz balıkların tümü aynı biçim ve boyutta görünmez fakat bu onlara hiperbolik bir bakış açısı yerine Öklitçi bir bakış açısıyla bakıyor olmamız nedeniyle böyledir. Escher'in resmi hiperbolik geometrinin yalnızca özel bir Öklitçi *gösterimini* kullanır. Hiperbolik geometrinin kendisi herhangi bir özel Öklitçi gösterime bağlı olmayan daha soyut bir şeydir. Bununla birlikte aslında böylesi gösterimler, hiperbolik geometriyi

"AB", vb hiperbolik uzaklıkları "AB" + "BC" = "AC"yi sağlar ifadesini kanıtlayabilir misiniz, deneyin. Logaritmaların, §§5.2, 3'de log (ab) = log a + log b şeklinde açıklanmış genel özelliğini kullanabilirsiniz.

gözümüzde canlandırmanın bir yolunu, onu bize daha tanıdık ve daha "somut" görünen bir şeyle, Öklit geometrisiyle ilişkilendirerek sağladıkları için oldukça faydalıdır. Dahası böylesi gösterimler hiperbolik geometrinin tutarlı bir yapı olduğunu ve takiben paralellik önermesinin Öklit geometrisinin diğer yasaları kullanılarak kanıtlanamayacağını açık hale getirir.

Aslında hiperbolik geometrinin Öklitçi geometri biçiminde, Escher'in kullandığı konformal olandan daha belirgin başkaca gösterimleri mevcuttur. Bunlardan birisi *izdüşümsel* model olarak bilinendir. Burada tüm hiperbolik düzlem yine Öklitçi düzlemdeki bir çemberin içi olarak gösteriliyor fakat bu kez hiperbolik düz çizgiler (çembersel yaylar yerine) düz Öklit çizgileri olarak sunulur. Bununla birlikte bu besbelli sadeleştirme için ödenmesi gereken bir bedel söz konusudur çünkü hiperbolik açılar artık Öklitçi açılarla aynı değildir ve pek çok insan bu bedelin bir hayli yüksek olduğunu değerlendirecektir. İlgilenen okuyucular için bu gösterimde A ve B arasındaki hiperbolik uzaklık, R ve S uzatılmış düz çizgi AB'nin çevre çemberiyle kesişim noktaları olmak üzere, şu ifadeyle ($C = 1$ olarak alırsak bu daha önce konformal gösterim için elimizde olan ifadenin neredeyse aynısı olur) verilir (*bkz.* Şekil 2.14):

$$\frac{1}{2}\log\frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA}$$



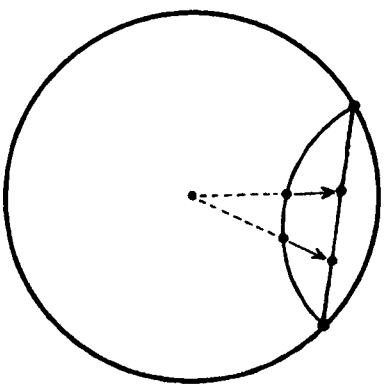
Şekil 2.14 İzdüşümsel gösterimde hiperbolik uzaklık denklemi artık, R ve S'nin, AB Öklit (diğer bir deyişle hiperbolik) düz çizgisinin çevre çemberiyle kesişim noktaları olduğu $\frac{1}{2}\log\{RA.SB/RB.SA\}$*'dır.*

Hiperbolik geometrinin bu gösterimi konformal olandan, merkezden radyal olarak dışarı doğru, R çevresel çemberin yarıçapı ve r_c konformal gösterimdeki bir noktanın çevresel çemberin merkezine olan Öklitçi uzaklığı olmak üzere,

$$\frac{2R^2}{R^2 + r_c^2}$$

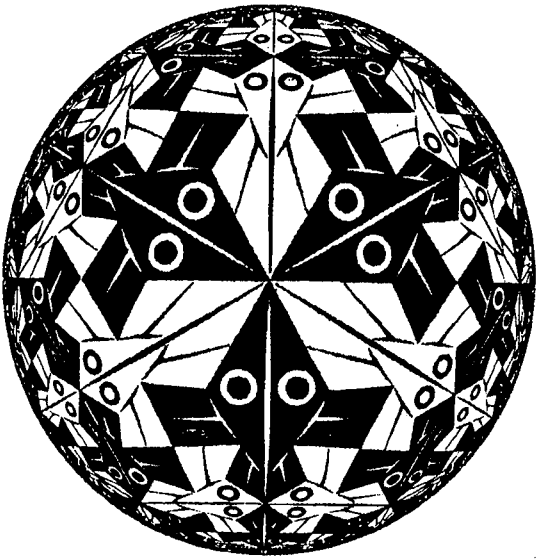
ifadesi ile verilen miktarda bir genişletme aracılığıyla elde edilebilir (*bkz.* Şekil 2.15).[2.4] Şekil 2.16'da, Şekil 2.11'deki Escher resmi bu formül kullanılarak konformal olandan izdüşümsel modele dönüştürüldü. (Ayrıntı kaybına rağmen Escher'in kusursuz sanatçılığı hâlâ belirgin.) Bu şekilde çekiciliği azalmış olsa da alışılmamış bir bakış açısı sunmaktadır!

Konformal ve izdüşümsel gösterimleri ilişkilendirmenin, hâlâ bu aynı geometrinin başka bir zekice gösterimi aracılığıyla daha doğrudan geometrik bir yolu mevcuttur. Bu üç gösterimin hepsi de becerikli İtalyan geometrici Eugenio Beltrami'nin (1835–1900) eseridir. Ekvator çizgisi, üstte verilmiş hiperbolik geometrinin izdüşümsel gösteriminin çevresel çemberiyle çakışan bir S küresini gözünüzün önüne getirin. Şimdi, S'in *kuzey yarı küresi* S^+'da, benim *yarı küresel* gösterim olarak adlandıracağım hiperbolik geometrinin bir gösterimini keşfedeceğiz. Şekil 2.17'ye göz atın. Düzlemdeki izdüşümsel gösterimden, yatay olarak ele alınan küre üzerindeki yeni olana geçmek için basitçe dikey olarak yukarıya yansıtma yaparız (Şekil 2.17a). Düzlemdeki hiperbolik düz çizgileri temsil eden düz çizgiler, S^+'da ekvator çizgisiyle ortogonal olarak buluşan yarı çemberler tarafından temsil edilir. S^+'daki gösterimden düzlemdeki konformal gösterimi elde etmek için şimdi *güney kutbundan* yansıtma yaparız (Şekil 2.17b). Bu, kendisine *stereografik izdüşüm* adı verilen ve bu kitapta daha sonra



Şekil 2.15 Konformal gösterimden izdüşümsel olanı elde etmek için merkezden R'nin çevresel çemberin yarıçapı ve r_c'nin konformal gösterimdeki merkezden olan uzaklık olduğu bir $2R^2 / (R^2 + r_c^2)$ çarpanıyla genişletin.

[2.4] Bunu gösterin. *İpucu*: Dilerseniz Şekil 2.17'de gösterilen Beltrami geometrisini kullanabilirsiniz.



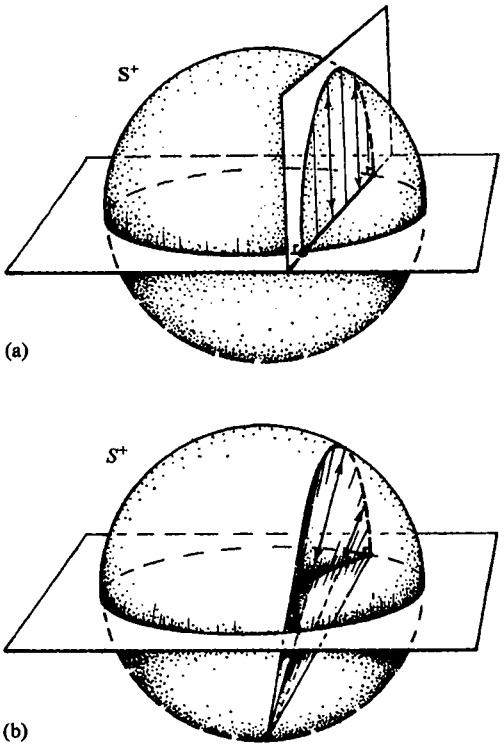
Şekil 2.16 Escher'in konformal gösterimden izdüşümsel olana dönüştürülmüş Şekil 2.11'deki resmi.

önemli işleve sahip olacak bir yöntemdir (*bkz.* §8.3, §18.4, §22.9, §33.6). Stereografik izdüşümün §8.3'te ele alacağımız iki önemli özelliği *konformal* oluşu ve küre üzerindeki çemberleri düzlem üzerindeki çemberlere (ya da istisna olarak düz çizgilere) göndermesidir.[2.5],[2.6]

Hiperbolik geometrinin Öklitçi uzay biçiminde ifade edilmiş çeşitli farklı modellerinin varlığı aslında bunların yalnızca hiperbolik geometrinin "Öklitçi modelleri" oldukları gerçeğini vurgulama görevine hizmet eder ve bunlar hiperbolik geometrinin gerçekten *ne olduğunu* söylüyormuş gibi ele alınamaz. Hiperbolik geometri tıpkı "Öklit geometrisi" gibi kendi "Platonik varlığı"na sahiptir (*bkz.* §1.3 ve Önsöz). Modellerin hiçbiri diğerleri tasarrufuna hiperbolik geometrinin "doğru" resmedilişi olarak ele alınamaz. Onun değerlendirdiğimiz gösterimleri kavrayışımız için çok kıymetlidir fakat en kıymetlisi en alışageldiğimiz olması nedeniyle sadece Öklitçi yapıdır. Hiperbolik geometrinin doğrudan bir deneyimlemesine sahip önsezili bir varlık alındığında onun için hiperbolik biçimdeki bir Öklit

[2.5] Stereografik yansıtmanın belirtilen bu iki özelliğini, hiperbolik geometrinin konformal gösterimini §2.4'te belirtilen şekliyle kullanarak Beltrami'nin yarı küresel gösterimin, hiperbolik "düz çizgiler" dikey yarı çemberler olmak üzere, konformal olduğunu gösterin.

[2.6] Bu iki özelliğin nasıl kanıtlandığını görebiliyor musunuz? *İpucu*: Çemberlerin durumunda, izdüşüm konisinin tam olarak ters eğimdeki iki düzlem tarafından kesildiğini gösterin.

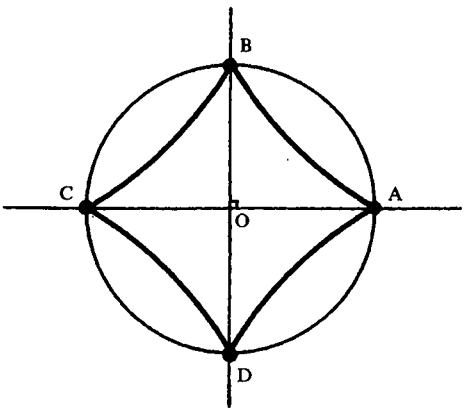


Şekil 2.17 Beltrami'nin hiperbolik geometrinin kendisine ait üç gösterimini ilişkilendiren geometrisi. (a) Yarıküresel gösterim (*kuzey yarıküre* S^+ üzerindeki konformal gösterim) ekvator diski üzerindeki izdüşümsel gösterime dikey olarak yansır. (b) Yarı küresel gösterim *güney kutbu*ndan ekvator üzerindeki konformal gösterime stereografik olarak yansır.

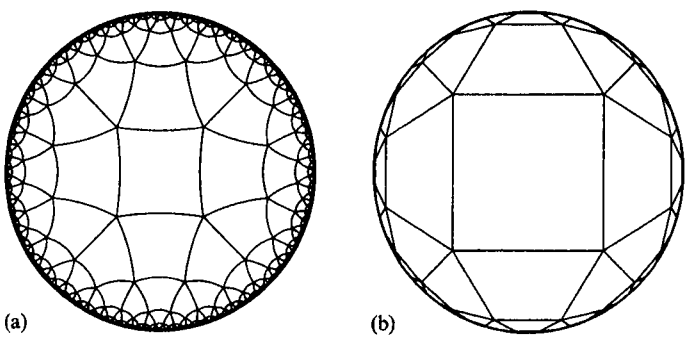
geometrisi modeli daha doğal bir yol olarak görülebilir. §18.4'te hiperbolik geometrinin başka bir modeliyle de fakat bu kez genel göreliliğin Minkowski geometrisi biçiminde karşılaşıyor olacağız.

Bu bölümü bitirmek için gelin hiperbolik geometride karelerin varlığı sorusuna geri dönelim. Hiperbolik geometride her ne kadar açıları dik olan kareler bulunmuyorsa da açılarının ölçüsü dik açıdan az olan daha genel bir biçimdeki "kareler" mevcuttur. Bu türde bir kare oluşturmanın en kolay yolu bir O noktasında dik açıyla kesişen iki düz çizgi çizmektir. Bizim "karemiz" artık, dört köşesi bu iki çizginin O merkezli bir çemberle kesişim noktaları (çembersel olarak alınmış) A, B, C, D olan dörtgendir. Şekil 2.18'e bakın. Şeklin simetrisi nedeniyle elde edilen ABCD dörtgeninin tüm kenarları birbirine eşittir ve dört açısı da birbirine eşit olmak zorundadır. Peki bu açılar dik açı mıdır? Hiperbolik geometride, hayır. Aslında

bir dik açıdan küçük olmak üzere dilediğimiz herhangi bir pozitif açı olabilirler fakat bir dik açıya eşit olamazlar. "Kare" (hiperbolik) ne kadar büyük olursa (başka bir deyişle yukarıdaki yapıda çember ne kadar büyük olursa) açıları o kadar küçük olur. Şekil 2.19a'da konformal modeli kullanarak her bir köşe noktasında (Öklitçi dört yerine) beş kare bulunan ve böylece açıları $\frac{2}{5}\pi$, ya da 72° olan hiperbolik karelerin bir kafesini gösterdim. Şekil 2.19'da aynı kafesi izdüşümsel modeli kullanarak gösterdim. Bunun Şekil 2.2'deki iki kareli kafes için gereken değişikliklere izin vermediği görülecektir.[2.7]



Şekil 2.18 Hiperbolik bir "kare", köşeleri O noktasından geçen iki dik hiperbolik düz çizgiyle O merkezli bir çemberin kesişim noktaları, A,B,C,D (çembersel olarak alınmış), olan hiperbolik bir dörtgendir. Simetri nedeniyle ABCD'nin dört kenarı da dört açısında olduğu gibi birbirine eşittir. Bu açılar dik değildir fakat $\frac{1}{2}\pi$'den küçük herhangi pozitif bir açıya eşit olabilirler.



Şekil 2.19 Hiperbolik uzayda, her bir köşede beş karenin, kare açıları $\frac{2}{5}\pi$, ya da 72° olacak şekilde buluştukları bir kafes. (a) Konformal gösterim. (b) İzdüşümsel gösterim.

[2.7] Aynı şeyi düzgün hiperbolik beşgen ve karelerle yapabiliyor musunuz, deneyin.

2.6 Hiperbolik geometrinin tarihsel görünümleri

Hiperbolik geometrinin keşfiyle ilgili birkaç tarihi yorum burada uygun olacaktır. Öklit'in temel ilkelerinin yaklaşık İÖ 300 yıllarında yayımlanmasının ardından çeşitli matematikçiler beşinci önermeyi diğer aksiyom ve önermelerden hareketle kanıtlama girişiminde bulundular. Bu çabalar 1733'de Jesuit Girolamo Saccheri'nin destansı çalışmasıyla tepe noktasına erişti. Saccheri'nin kendisi de sonuç olarak, paralellik önermesini, herhangi bir üçgenin iç açıları toplamının iki dik açıdan küçük olduğu hipotezinin bir çelişkiye yol açtığını gösterme yoluyla *kanıtlama*ya ilişkin yalnızca tamamlanmamış bir girişim oluşturan hayatının çalışmasını, bir hata olarak düşünmek zorunda kalmış görünür. Bunu ciddi mücadeleler ardından mantıksal olarak sonuçlandıramayıp görece zayıf biçimde şöyle bağladı:

> Dar açı hipotezi kesinlikle yanlıştır çünkü düz çizginin doğasına aykırıdır.[5]

"Dar açı" hipotezi Şekil 2.8'deki *a* ve *b* çizgilerinin bazen buluşmayacaklarını iddia eder. Gerçekte bu geçerlidir ve aslında hiperbolik geometri sonucunu verir!

Saccheri'nin göstermeye çalıştığı şeyin mümkün olmadığını etkin şekilde keşfedişi nasıl meydana geldi? Öklit'in beşinci önermesini kanıtlamak için Saccheri'nin önerisi, beşinci önermenin yanlış olduğuna ilişkin bir varsayımda bulunup sonra bu varsayımdan bir çelişki türetmekti. Bu yolla matematikte *çelişki yoluyla kanıtlama* (ya da Latince adıyla *reductio ad absurdum*) adı verilen –çok olası ki ilk kez Pisagor tarafından tanıtılan– ve bugüne dek ileri sürülmüş en gelenekselleşmiş ve faydalı ilkelerden birinin kullanımını önerdi. Bu işleme göre bir önermenin doğruluğunu kanıtlamak için önce önermenin *yanlış* olduğu varsayımında bulunulur ve daha sonra bu varsayımdan bazı çelişkiler doğduğu tartışılır. Böylesi bir çelişki bulunarak önermenin nihayetinde doğru olması gerektiği sonucu çıkarılır.[6] Çelişki yoluyla kanıtlama matematikte bugün sıklıkla uygulanan oldukça güçlü bir gerekçelendirme yöntemi sağlıyor. Seçkin matematikçi G. H. Hardy'den bir alıntı burada uygun olacaktır:

---

[5] Saccheri, önerme XXXIII, 1733.

[6] Matematikçilerin (görece küçük) bir azınlığı tarafından bağlı kalınan, "çelişki yoluyla kanıtlama" kuralının kabul edilmediği *sezgicilik* adı verilen bir bakış açısı mevcuttur. Buna itiraz, bu kuralın, sağlanmış olması için herhangi bir gerçek yapım olmaksızın bazen bazı matematiksel kavramların varlıklarına ilişkin bir önermeye yol açması bakımından *kurucu olmayan* bir kural olabileceğidir. Bu §16.6'da tartışılan bazı konularla ilişki içindedir. *Bkz.* Heyting, 1956.

> Öklit'in çok sevdiği *reductio ad absurdum* bir matematikçinin en iyi silahlarından biridir. Herhangi bir satranç hamlesinden çok daha iyi bir hamledir: bir satranç oyuncusu bir piyon ya da hatta ondan daha değerli bir taşı feda etmeyi önerebilir fakat bir matematikçi *oyunu* önerir.[7]

Bu önemli kuralın başkaca kullanımlarını daha sonra göreceğiz (*bkz.* §3.1 ve §§16.4,6).

Bununla birlikte Saccheri bir çelişki bulma girişiminde başarısız oldu. Bu nedenle beşinci önermeyle ilgili bir kanıt elde edemedi. Öte taraftan bu uğraşı içinde çok daha büyük bir şey buldu: Öklit'inkinden farklı yeni bir geometri; şu an *hiperbolik geometri* dediğimiz, §§2.4,5'te tartışılan geometri. Öklit'in beşinci önermesinin yanlış olduğu varsayımından gerçek bir çelişki yerine bir yığın tuhaf görünümlü, güç inanılır ama ilginç teorem türetti. Bu sonuçlar ne kadar tuhaf görünseler de hiçbiri gerçekte bir çelişki değildi. Şu an bildiğimiz üzere bu yöntemle Saccheri'nin, hiperbolik geometrinin, matematiksel anlamda böyle tutarlı bir yapının gerçekten bulunması anlamında var olması nedeniyle hakiki bir çelişki bulmasına olanak yoktu. §1.3'te yer alan terminolojide hiperbolik geometri Platon'un matematiksel biçimler dünyasını içerir. (Hiperbolik geometrinin fiziki gerçekliğine §2.7 ve §28.10'de değinilecek.)

Saccheri'den kısa süre sonra yüksek bir kavrayışa sahip matematikçi Johann Heinrich Lambert de (1728–1777) Öklit'in beşinci önermesinin yanlışlığı üzerinden, §2.4'te hiperbolik bir üçgenin alanını onun açıları cinsinden veren zarif sonucu da içeren birçok büyüleyici geometrik sonuç türetti. Lambert'in, en azından hayatının bir döneminde, Öklit'in beşinci önermesinin yadsınmasından belki de tutarlı bir geometri elde edilebileceği düşüncesini oluşturmuş olabileceği görülmektedir. Lambert'in tereddütlü gerekçesi, "sanal yarıçaplı bir küre" diğer bir deyişle "yarıçapının karesi" negatif olan bir küre üzerindeki geometrinin kuramsal olasılığını tasarlayabilmiş olmak gibi görünür. Lambert'in $\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = C\Delta$ denklemi α, β ve γ üçgenin açıları ve C ($-C$ şu anda hiperbolik düzlemin "Gauss eğimi" olmak üzere) bir sabit olmak üzere, hiperbolik bir üçgenin alanını, Δ, verir. Bu eşitlik Thomas Hariot'a (1560–1621) ait, daha önceden bilinen, R yarıçaplı bir küre üzerinde büyük çember yaylarıyla[8] çizilen küresel bir üçgenin alanı, Δ, için oluşturulmuş olan $\Delta = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ denklemiyle temelde aynı görünür (*bkz.* Şekil 2.20).[2.8] Lambert'in denklemini tekrar elde etmek için

---

[7] Hardy, 1940, s.34.

[8] Büyük çember yayları bir kürenin yüzeyindeki "en kısa" (jeodezi) eğrilerdir; kürenin merkezinden geçen düzlemlerde yer alırlar.

[2.8] Bu küresel üçgen denklemini temel olarak yalnızca simetri tezlerini ve kürenin toplam

$$C = -\frac{1}{R^2}$$

ifadesini kullanmalıyız. Fakat hiperbolik geometri için gerekli olduğu üzere C'ye pozitif değerini vermek için kürenin yarıçapının sanal (diğer bir deyişle negatif bir sayının karekökü) olmasına ihtiyaç duyarız. R'nin sanal bir nicelik olan $(-C)^{-1/2}$ ifadesiyle verildiğine dikkat edin. Bu, §2.4'te gerçek $C^{-1/2}$ ifadesi için sunulmuş olan "sözde yarıçap" terimini açıklar. Aslında Lambert'in işlemi bizim daha modern bakış açılarımızdan (*bkz.* bölüm 4 ve §18.4) mükemmel olarak doğrulanır ve bunu öngörmüş olmasından dolayı onun harika kavrayışına işaret eder.

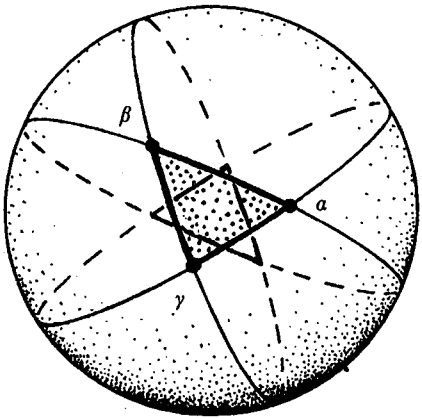
Bununla birlikte Lambert'in Öklitçi olmayan geometriyi ilk kez oluşturmuş olma onurunu reddetmek ve Öklit'inkinden farklı olarak paralellik önermesinin yanlış olduğu tümüyle tutarlı bir geometriyi (yaklaşık yarım yüzyıl sonra) berrak bir kabulleniş noktasına getiren ilk kişinin (bana göre biraz haksız biçimde) büyük matematikçi Carl Friedrich Gauss olduğu fikrinde olmak geleneksel bakış açısıdır. Gauss, son derece dikkatli bir adam olarak ve böylesi bir açığa vurmanın yol açabileceği tartışmaların kaygısı içinde bulgularını yayımlamadı ve kendine sakladı.[9] Gauss'un onun üzerine çalışmaya başlamasından bir 30 yıl kadar sonra hiperbolik geometri bağımsız olarak, Macar János Bolyai (1829'da) ve özellikle yaklaşık 1826'da Rus topçu birliği mensubu Nikolay İvanoviç Lobaçevski'nin içlerinde olduğu başka bazıları tarafından yeniden keşfedildi; hiperbolik geometri bu sebeple sıklıkla *Lobaçevskici* geometri olarak adlandırılır.

Hiperbolik geometrinin yukarıda açıkladığı özel izdüşümsel ve konformal gerçekleştirilişleri Eugenio Beltrami tarafından bulundu ve §2.5'te değinilen yarı küresel olanının da içlerinde olduğu bazı diğer zekice gösterimlerle birlikte 1868'de yayımlandı. Buna rağmen, Poincaré'nin 1882'de yeniden keşfettiği bu konformal gösterim Beltrami'nin orijinal çalışmasından (modelin önemli uygulamalarını büyük ölçüde Poincaré'nin

---

alanının $4\pi R^2$ olduğu gerçeğini kullanarak kanıtlamaya çalışın. *İpucu*: Bir kürenin, küre üzerinde tamamen zıt olan bir nokta çiftini birleştiren iki büyük çembersel yay tarafından sınırlandırılmış bir parçasının alanını bulmakla başlayın; sonra kesin, yapıştırın ve simetri tezlerini kullanın. Şekil 2.20'yi aklınızda tutun.

9 Jeodezi konularıyla profesyonel olarak ilgilenen Gauss'un fiziki uzaydaki Öklit geometrisinden ölçülebilir sapmalar olup olmadığını gerçekten belirlemeyi denemiş olup olmayabileceği bir tartışma konusudur. Gerçekten denemiş olsa bile Öklitçi olmayan geometri konularında iyi bilinen ağzı sıkılığı nedeniyle, özellikle (şimdi bildiğimiz üzere) modern kuram uyarınca etkinin küçüklüğünden kaynaklı olarak başarısız olma zorunluluğu nedeniyle, bilinmesine izin vermesi olası değildi. Var olan fikir birliği, onun uzayın değil dünyanın eğriliği ile ilgilenerek "yalnızca jeodezi yaptığını" kabul eder görünüyor. Bununla birlikte ben onun ayrıca Öklit geometrisiyle ilgili herhangi bir önemli tutarsızlık arayışında olmadığına inanmayı biraz güç buluyorum; *bkz.* Fauvel ve Gray, 1987.



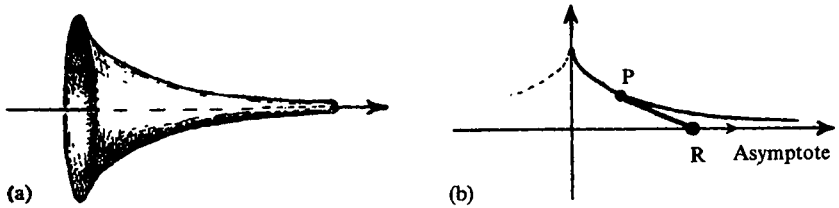
Şekil 2.20 Küresel bir üçgenin alanı için Hariot denklemi, α, β, γ açılar olmak üzere $\Delta = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$'dir. Hiperbolik bir üçgen için Lambert denklemi $C = -1/R^2$'yi içerir.

geliştirmesi nedeniyle) daha iyi bilindiği için genellikle "Poincaré modeli" olarak adlandırılır.[10] Zavallı yaşlı Beltrami'nin izdüşümsel gösterimi benzer şekilde bazen "Klein gösterimi" olarak adlandırılır. Matematikte, matematiksel bir kavrama normalde atfedilen ismin onun gerçek kâşifiyle aynı olmaması çok da sıradışı değildir. En azından bu durumda konformal gösterimi Poincaré *yeniden* bulmuştur (1871'de Klein'ın izdüşümsel olanı bulması gibi). Matematikte adı bir sonuca atfedilmesine rağmen söz konusu sonuçtan haberi bile olmayan matematikçiler mevcuttur![11]

Beltrami'nin tanınmasına neden olan hiperbolik geometri gösterimi yine de 1868'de bulduğu başka bir gösterimdir. Bu bir *sözde küre* (*bkz.* Şekil 2.21) olarak bilinen belirli bir yüzey üzerindeki geometriyi temsil eder. Yüzey, ilk olarak Isaac Newton tarafından 1676'da incelenen traktris eğrisini kendi "asimptotu" etrafında çevirerek elde edilir. Asimptot, eğrinin yaklaştığı, eğri sonsuza doğru uzaklaşırken ona asimptotik (sonuşmaz) olarak teğet haline gelen düz bir çizgidir. Burada asimptotun kaba yapıdaki yatay bir düzleme çizilmiş olduğunu hayal etmek durumundayız. Bir ucu nokta benzeri ağır bir yükün olduğu P noktasında olan ve diğer ucu R

[10] "Poincaré yarı düzlemi" denilen gösterim de orijinal olarak Beltrami'ye aittir; *bkz.* Beltrami, 1868.

[11] Bu, (diğer taraftan başka matematikçilerin çalışmalarını çok sık olarak öngörmüş olan) büyük Gauss'un kendisine de uymuş gibi görünüyor. "Gauss haritası"nın kullanımı yoluyla zarif bir şekilde kanıtlanabilen, şimdilerde "Gauss–Bonnet" teoremi adı verilen önemli bir topolojik matematiksel teorem mevcuttur fakat teoremin kendisi aslında Blascke'ye ait ve az önce bahsedilen zarif kanıtlama işlemi ise Olinde Rodrigues tarafından bulunmuş görünür. Ne sonuç ne de kanıtlama işlemi Gauss ya da Bonnet'e ait görünür. Değişik metinlerde doğru şekilde alıntılanan daha temel bir "Gauss–Bonnet" teoremi mevcuttur, *bkz.* Willmore, 1959, ayrıca Rindler, 2001.



Şekil 2.21 (a) Bir *sözde küre*. Bu kendi asimptotu etrafında çevrilerek elde edilir. (b) Bir traktris oluşturmak için, üzerinde hafif, pürüzsüz şekilde düz, sert bir çubuğun sürüklendiği düzlemin yatay olduğunu hayal edin. Çubuğun bir ucu nokta benzeri sürtünmeli bir P yükü iken diğer ucu R, (düz) bir asimptot boyunca ilerler.

noktasından asimptot boyunca ilerleyen hafif, düz ve sert bir çubuk düşünmeliyiz. Bu durumda P noktası bir traktris çizer. Ferdinand Minding 1839'da sözde kürenin kendine özgü sabit bir negatif geometrisi olduğunu buldu ve Beltrami bunu hiperbolik geometrinin ilk modelini inşa etmekte kullandı. Beltrami'nin sözde küre modeli, matematikçileri, hiperbolik uzaklığın ölçüsü yüzey üzerindeki Öklitçi uzaklıkla uyuştuğu için hiperbolik geometri düzleminin tutarlılığına inandıran model olarak görünüyor. Bununla birlikte model hiperbolik geometrinin tümünü, Beltrami'nin diğer modellerinin yaptığı gibi tek seferde göstermek yerine onu yalnızca yerel olarak yansıtması nedeniyle biraz kullanışsızdır.

2.7 Fiziki uzayla ilişki

Hiperbolik geometri yüksek boyutlarda da mükemmel şekilde iyi işler. Dahası konformal ve izdüşümsel modellerin ikisinin de yüksek–boyutlu türevleri mevcuttur. Üç–boyutlu hiperbolik geometri için çevresel bir çember yerine elimizde çevresel bir küre bulunur. Sonsuz üç–boyutlu geometri bu sonlu Öklit küresinin iç kısmı tarafından temsil edilir. Geri kalan esasen daha önce elimizde olanlardır. Konformal gösterimde bu üç–boyutlu hiperbolik geometrideki düz çizgiler çevresel küreyle ortogonal olarak buluşan Öklit çemberleri şeklinde gösterilir; açılar Öklit ölçüleriyle ve uzaklıklar iki–boyutlu durumdaki aynı denklemle verilir. İzdüşümsel modelde hiperbolik düz çizgiler Öklitçi düz çizgilerdir ve uzaklıklar yine iki–boyutlu durumdaki aynı denklemle verilir.

Kozmolojik boyutlardaki gerçek evrenimiz ne durumdadır? Onun uzamsal geometrisinin Öklit geometrisi olmasını mı bekleriz ya da o örneğin §§2.4–6'da incelediğimiz dikkate değer (fakat üç boyut içindeki) hiperbolik geometri gibi başka bazı geometrilerle daha yakından bağdaşabilir

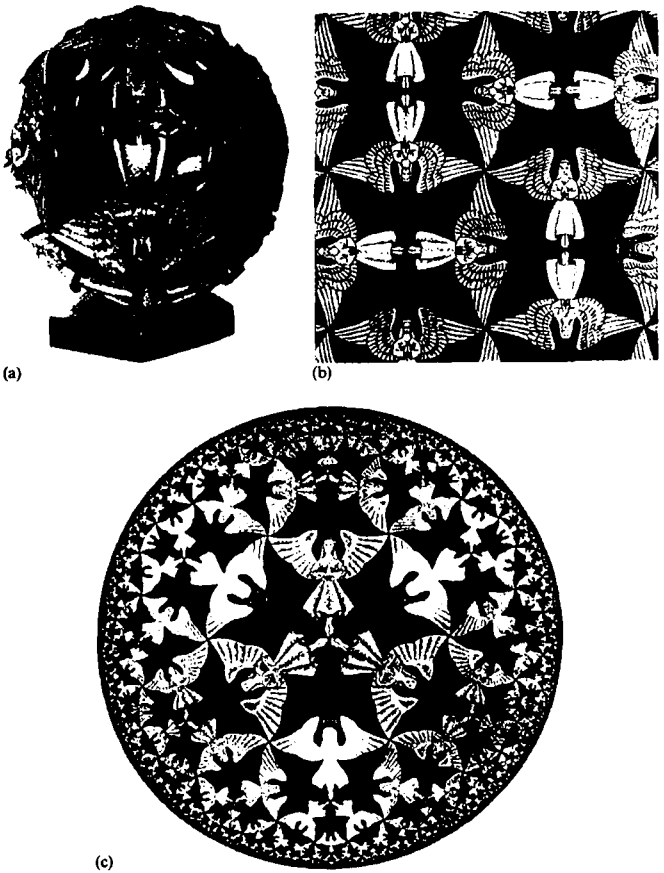
mi? Bu aslında ciddi bir sorudur. Einstein'ın (§17.9 ve §19.6'da geleceğimiz) genel göreliliğinden biliyoruz ki Öklit'in geometrisi fiziki uzayın gerçek geometrisine yalnızca (olağanüstü derecede eksiksiz) bir yaklaşıklık tahminidir. Bu fiziki geometri maddi yoğunluğun varlığı nedeniyle küçük düzensizlik dalgacıklarına sahip olarak tamamen düzenli dahi değildir. Yine de, çarpıcı biçimde, bu dalgacıklar kozmologların bugün ulaşabildiği en iyi gözlemsel kanıtlar uyarınca kayda değer kesinlikte bir dereceye kadar (*bkz.* §27.13 ve §§28.4–10) ortalama oluşturur görünmekte ve gerçek evrenin uzamsal geometrisi düzenli (türdeş ve izotropik; *bkz.*§27.11) bir geometriyle olağanüstü biçimde yakından bağdaşır görünmektedir. Öklit'in en azından ilk dört önermesi zaman testi karşısında etkileyici biçimde ayakta kalmış görünür.

Burada bir açıklama gereklidir. Temel olarak türdeşlik (her noktada aynı) ve izotropi (her yönde aynı) koşullarını sağlayan, Öklit, hiperbolik ve eliptik olarak adlandırılan üç tip geometri mevcuttur. Öklit geometrisi bizim için (yaklaşık 2300 yıldır) tanıdıktır. Hiperbolik geometri bu bölümdeki temel ilgi alanımız oldu. Peki eliptik geometri nedir? Eliptik düzlem geometrisi esasen bir kürenin yüzeyine çizilmiş şekillerle karşılanan geometridir. Lambert'in hiperbolik geometriye §2.6'daki yaklaşımıyla ilgili tartışmada şekillenmiştir. Escher'in eliptik, Öklit ve hiperbolik durumlardaki, her üç durum için de benzer bir melekler ve şeytanlar mozaik döşeme çalışması kullandığı ve üçüncüsünün Şekil 2.11'e ilginç bir alternatif oluşturduğu sunuşları için sırasıyla şekiller 2.22a, b ve c'ye bakın. (Eliptik geometrinin ayrıca üç–boyutlu bir çeşidi ve küredeki bütünüyle zıt noktaların aynı noktayı temsil eder gibi değerlendirildiği çeşitleri de mevcuttur. Bu konular biraz daha ayrıntılı olarak §27.11'de tartışılacak.) Bununla birlikte eliptik durumun Öklit'in ikinci ve üçüncü önermelerini (aynı zamanda birincisini de) ihlal ettiği söylenebilir. Bu nedenle sınırlı boyutta (ve bir nokta çiftini birden fazla doğru parçasının birleştirdiği) bir geometridir.

Öyleyse evrenin büyük–ölçekli uzamsal geometrisinin gözleme dayalı konumu nedir? Doğrusunu söylemek gerekirse bunu, son zamanlarda Öklit'in başından beri haklı olduğuna ve beşinci önermesinin doğruluğuna ilişkin geniş ölçüde duyurulmuş iddialar olmasına rağmen henüz bilmiyoruz; böylece ortalama olarak alınan uzamsal geometri aslında bizim "Öklitçi" dediğimiz geometri olmaktadır.[12] Diğer taraftan uzamsal evren için

[12] Evrenin etraflı yapısı için temel kanıt bir bütün olarak §§27.7, 10, 11, 13, §§28.5, 10 ve §30.14'te tartışılacak olan *kozmik mikrodalga ardalan ışınımının* (CMB) [*cosmic microwave background radiation*] detaylı bir analizinden elde edilir. Temel bir kaynak de Bernardis vd., 2000; daha eksiksiz, daha yeni bilgi için *bkz.* Netterfield vd., 2001 (BOOMERanG'la ilgi-

bütünlüklü bir hiperbolik geometriye oldukça kararlı bir şekilde işaret eden kanıt da mevcuttur.[13] Dahası bazı kuramcılar eliptik durumu uzun süre savundular ve bu kesinlikle Öklitçi durumu desteklemek için savunulan o aynı kanıt tarafından reddedilmedi (*bkz.* §34.4'ün son kısımları).



Şekil 2.22 Escher tarafından melekler ve şeytanlar mozaik döşeme çalışması kullanılarak gösterilen düzenli düzlem geometrisinin üç basit türü. (a) Eliptik durum (pozitif eğrilik), (b) Öklit durumu (sıfır eğrilik) ve (c) Hiperbolik durum (negatif eğrilik); konformal gösterimde (Escher'in *Circle Limit IV*'ü Şekil 2.17'yle karşılaştırılmalıdır).

lenen). Ayrıca *bkz.* Hanany vd., 2000 (MAXIMA'yla ilgilenen) ve Halverson vd., 2001 (DASI'yla ilgilenen).

[13] Kuramsal destekleyiciler için *bkz.* Gurzadyan ve Torres, 1997 ve Gurzadyan ve Kocharyan, 1994 ve gerçek CMB verilerinin yerini tutan çözümleme için Gurzadyan ve Kocharyan, 1992 (COBE verisi için) ve Gurzadyan vd., 2002,2003 (BOOMERanG verisi için ve WMAP verisi için 2004).

Okuyucunun fark edeceği gibi konu hâlâ anlaşmazlıklarla ve beklenebileceği gibi çoğunlukla öfkeli tartışmalarla dolu. Kitaptaki ilerleyen bölümlerde bu bağlantıda ortaya konmuş görüşlerin oldukça büyük bir kısmını göstermeye çalışacağım, ve diğerleri nezdinde mümkün olduğunca adil olmaya çalışırken hiperbolik durum lehine olan kendi görüşümü gizlemeye yeltenmeyeceğim.

Bereket versin, benim gibi hiperbolik geometrinin zarafetinden ve ayrıca modern fiziğin görkeminden etkilenenler için bu muhteşem geometriye ilişkin modern fiziki evren kavrayışımızın tartışmasız temeli olacak başka bir rol söz konusudur. Modern görelilik kuramı uyarınca *hızların* uzayı, eski Newtoncı kuramda sağlanan, Öklitçi olandan ziyade kesinlikle üç–boyutlu hiperbolik bir geometridir (*bkz.*§18.4). Bu bize göreliliğin bazı bulmacalarını anlamamızda yardımcı olur. Örneğin bir binanın yanından kıyaslanabilir bir hızla ileri doğru hareket eden bir araçtan ışık hızına yakın bir hızla fırlatılan bir cisim hayal edin. Binaya göre bu cisim yine de ışık hızını hiçbir zaman aşamaz. Bu olanaksızmış gibi görünse de §18.4'te hiperbolik geometri aracılığıyla doğrudan bir açıklamaya kavuşacağını göreceğiz. Yine de bu büyüleyici konular sonraki bölümlere kadar beklemek zorunda.

Peki ya hiperbolik geometride başarısız olduğunu gördüğümüz Pisagor teoreminden ne haber? Belirli Pisagorcu ödüllerin bu en önemlilerini gelecek kuşaklara mı terk etmeliyiz? Pek sayılmaz çünkü hiperbolik geometri – ve aslında hiperbolik geometriyi düzensizce eğilmiş bir yolla genelleyen (Einstein'ın genel görelilik kuramının ana iskeletini oluşturarak; *bkz.* §13.8, §14.7, §18.1 ve §19.6) tüm "Riemanncı" geometriler– küçük uzaklıkların limitinde sağlanan Pisagor teoremine yaşamsal biçimde bağlıdır. Dahası onun devasa etkisi matematik ve fiziğin engin alanlarına yayılmaktadır (*örn.* kuantum mekaniğinin "üniter" metrik yapısı, *bkz.*§22.3). Bu teorem, bir anlamda "geniş" uzaklıklar yerine geçiriliyor olması gerçeğine rağmen orijinal olarak ileri sürüldüğü durumu devasa şekilde aşan bir uygulama alanı bularak geometrinin küçük ölçekli yapısı için merkezi kalmaya devam etmektedir.

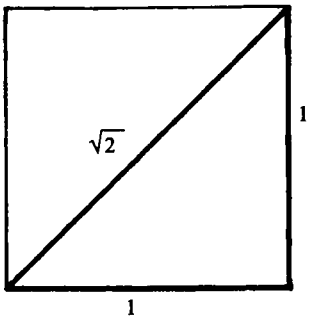
3

FİZİKİ DÜNYADA SAYI TÜRLERİ

3.1 Pisagorcu felaket mi?

Şimdi Saccheri'nin, Öklit'in beşinci önermesini kanıtlama girişiminde kullanmak için büyük gayretle denediği o ilkeye, çelişki yoluyla kanıtlama konusuna geri dönelim. Klasik matematikte bu ilkenin başarıyla *uygulandığı* pek çok örnek mevcuttur. Bu örneklerin en ünlülerinden biri Pisagorculara kadar uzanır ve bu onları büyük oranda sıkıntıya sokan matematiksel bir konuya yol açmıştır. Çıkarsanan şuydu. Karesi tam olarak 2 sayısına eşit olan rasyonel bir sayı (diğer bir deyişle bir kesir) bulunabilir mi? Yanıt hayır olarak gündeme gelir ve birazdan göstereceğim matematiksel iddia aslında böyle herhangi bir rasyonel sayının olmadığıdır.

Pisagorcular bu keşifle neden bu derece sıkıntıya girdiler? Bir kesirin, diğer bir deyişle rasyonel bir sayının, iki tamsayı (ya da bütün sayı) a ve b'nin, b sıfırdan farklı olmak üzere a/b oranı olarak ifade edilebildiği bir şey olduğunu anımsayın. (Kesir tanımı tartışması için *bkz.* Önsöz.) Pisagorcular başlangıçta tüm geometrilerinin rasyonel sayılar biçiminde ölçülebilen uzunluklar olarak ifade edilebileceğini ummuşlardı. Rasyonel sayılar görece, sonlu basit terimlerle anlaşılan ve açıklanabilir basit niceliklerdir; yine de dilediğimiz kadar küçük ya da büyük uzaklıkları belirtmekte kullanılabilirler. Tüm geometri rasyonel sayılarla yapılabilse bu her şeyi görece basit ve kolay kavranabilir hale getirirdi. Öte taraftan "irrasyonel" sayı kavramı sonsuz sayıda işlem gerektirir ve bu durum eskiler için (haklı olarak) dikkate değer derecede güçlük oluşturmuştu. Karesi 2 olan hiçbir rasyonel sayı olmayışı gerçeğinde niçin bir güçlük mevcuttur? Bu Pisagor teoreminin kendisinden ileri gelir. Öklit geometrisinde kenar uzunluğu bir olan bir kareye sahipsek, bu karenin köşegen uzunluğu, karesi $1^2 + 1^2 = 2$'ye eşit olan bir sayıdır (*bkz.* Şekil 3.1). Bir karenin köşegen uzunluğunu ifade edebilen gerçel hiçbir sayı yoksa bu geometri için felaket niteliğinde olur. Pisagorcular başlangıçta, basitçe bütün sayıların oranları biçiminde açıklanabilecek bir "gerçel sayı" kavramını oluşturmayı denediler. Bunun niçin işlemeyeceğini görelim.



Şekil 3.1 Pisagor teoremine göre birim kenar uzunluğuna sahip bir karenin köşegeni $\sqrt{2}$ 'dir.

Konu

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

denkleminin pozitif olarak ele aldığımız a ve b tamsayıları için neden hiçbir çözümü olmadığını görmektir. Çelişki yoluyla kanıtlamayı böylesi a ve b sayılarının var olamayacağını kanıtlamakta kullanacağız. Bu durumda tersinden böylesi bir a ve b'nin var olduğunu varsaymaya çalışıyoruz. Yukarıdaki denklemin iki tarafını da b^2 ile çarparak

$$a^2 = 2b^2$$

elde ederiz ve açıkça $a^2 > b^2 > 0$ sonucunu çıkarırız. Şu halde denklemin sağ tarafındaki $2b^2$ ifadesi çifttir ve bu nedenle a da (herhangi tek bir sayının karesi de tek olacağından, tek değil) çift olmak zorundadır. Dolayısıyla pozitif bir c tamsayısı için $a = 2c$ olur. Yukarıdaki denklemde kare alma işlemini a yerine 2c koyarak gerçekleştirirsek

$$4c^2 = 2b^2$$

elde ederiz ve her iki tarafı ikiye böldüğümüzde,

$$b^2 = 2c^2$$

ifadesine ulaşır ve buradan da $b^2 > c^2 > 0$ sonucunu çıkarırız.[1] Bu a'nın yerini b ve b'nin yerini c'nin alması dışında daha önce göstermiş olduğumuz denklemin tıpatıp aynısıdır. İlgili tamsayıların şu anda önceki durumlarından daha küçük olduklarını not edin. Şu halde bu işlemi,

$$a^2 > b^2 > c^2 > d^2 > e^2 > \ldots,$$

olacak ve tüm bu tamsayıların pozitif olacağı şekilde

[1] Bu kitapta sıklıkla kullanılan >, <, ≥, ≤ notasyonları sırasıyla (gramatik olarak uygunca ifade edilmiş) "büyüktür", "küçüktür", "büyük eşittir", "küçük eşittir" anlamındadır.

$$a^2 = 2b^2,\ b^2 = 2c^2,\ c^2 = 2d^2,\ d^2 = 2e^2,\ \ldots,$$

bitmeyen bir denklemler serisi elde edene kadar tekrar tekrar yineleyebiliriz. Bununla birlikte pozitif tamsayıların herhangi bir azalan serisi, bu serinin bitimsiz olduğu gerçeğiyle çelişerek bir sona gelmek zorundadır. Bu daha önce varsaymış olduğumuz, karesi 2'ye eşit olan rasyonel bir sayı mevcuttur ifadesiyle çelişir. Bunu da, kanıtlanmaya çalışıldığı üzere böyle bir rasyonel sayı yoktur ifadesi izler.[2]

Yukarıda yer alan argümandaki belli noktalar belirtilmelidir. İlk olarak matematiksel kanıtın normal işlemleriyle uyum halinde, sayıların, ya "apaçık" olarak ele alınan ya da önceden oluşturulmuş belirli özelliklerine başvurulmuştur. Örneğin, bir tek sayının karesinin her zaman tek olacağı ve dahası bir tamsayının tek olmadığı durumda çift olacağı gerçeğinden yararlandık. Ayrıca pozitif tamsayıların kesin olarak azalan her serisinin, bir sona gelmek zorunda olduğu temel gerçeğini kullandık.

Bir kanıtlama işlemine konu olacak kesin varsayımları tanımlamanın önemli olabilmesinin bir nedeni, hatta bu varsayımların bazıları kusursuzca "apaçık" olsalar da, matematikçilerin sıklıkla, kanıtın kendisinin başlangıç olarak ilgilenebileceğinden farklı başkaca türdeki birimlerle ilgilenmeleridir. Bu diğer birimler aynı varsayımları sağlarlarsa böylece kanıt hâlâ elde edilir ve kanıtlanmış iddia, bu diğer birimler için de geçerli olacağından başlangıçta algılandığından daha büyük bir genelliğe sahip olarak görülecektir. Diğer taraftan gerekli varsayımlardan bazıları bu alternatif birimlerin sağlanmasında başarısız olurlarsa iddia bu birimler için yanlışlanabilir. (Örneğin paralellik önermesinin §2.2'de verilmiş Pisagor teoremini, aslında hiperbolik geometri için yanlış olan teoremi kanıtlamada kullanıldığının farkına varmak önemlidir.)

Yukarıdaki argümanda başlangıç birimleri tamsayılardır ve biz tamsayı bölümleri olarak oluşturulmuş sayılarla, rasyonel sayılarla, ilgilenmekteyiz. Bu tür sayılardaki asıl durum hiçbirinin karesinin 2 olmadığıdır. Bununla birlikte yalnızca tamsayı ve rasyonel sayılardan başka tür sayılar da mevcuttur. Aslında 2 için bir karekökü gereksinimi, antik Yunan zamanındaki tüm dileklerine rağmen, daha önceleri kabullenmeye hazırlan-

---

[2] Bazı okuyucular a/b'nin "en sade terimli halinde" olmasını (diğer bir deyişle a ve b'nin ortak çarpanı olmamasını) talep ederek başlayan açıkça yetersiz bir argümanın fark etmiş olabilirler. Bununla birlikte bu durum, kusursuz şekilde doğru olsa da, gösterilmesi gereken bu tür en sade terim halindeki bir ifadenin her zaman var olduğunu varsayar. Verili bir A/B kesirinin en sade terimli ifadesini bulmak (dolaylı olarak ya da açık şekilde, diyelim ki Öklit algoritması olarak bilinen işlemi kullanarak verilmiş benzer gerekçelendirmeyi daha karmaşık olarak içerir; *bkz.* Hardy ve Wright, 1945, s. 134 metinde; Davenport, 1952, s. 26; Littlewood, 1949, bölüm 4; ve Penrose, 1989, bölüm 2.

mış oldukları tek türdeki sayıların, tamsayılar ve rasyonel sayıların sınırları dışına ilerlemeye zorladı. Kendilerini yönlenmiş buldukları türdeki sayı, bizim şu an "gerçel sayı" dediğimiz bir sayıydı: bugün (her ne kadar antik Yunanlar için bu tarz bir gösterim mümkün olmadıysa da) bitimsiz bir ondalık ilerlemesi biçiminde ifade ettiğimiz bir sayı. Gerçekte 2 esasen (şimdi yazdığımız gibi)

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887 2....$$

olarak nitelenen gerçel bir karekök sayıya sahiptir. Bu tür "gerçel" sayıların fiziki konumlarını sonraki bölümde daha yakından ele alacağız.

Merakımız gereği, 2'nin karekökünün var olmayışına ilişkin yukarıdaki kanıtın gerçel sayılarda (ya da aynı şeye denk gelecek şekilde gerçel sayı oranlarında) niçin başarısızlığa uğradığını sorabiliriz. Argüman boyunca "tamsayı" yerine "gerçel sayı" koyarsak ne olur? Temel fark pozitif gerçellerin (ya da hatta kesirlerin) kesin olarak azalan herhangi bir serisinin bir sona gelmek zorunda oluşunun doğru olmamasıdır ve argüman o noktada çürür.[3] (Örneğin sonlanmayan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$, serisini ele alın.) "Tek" ve "çift" gerçel sayının bu bağlamda ne olduğuna ilişkin endişelenilebilir. Gerçekte argüman şu aşamada hiçbir zorlukla karşılaşmaz çünkü herhangi gerçel bir a için her zaman $a = 2c$ denlemini sağlayan gerçel bir c mevcut olduğundan, diğer bir deyişle gerçel sayılarda 2'yle bölünme her zaman mümkün olduğundan, *tüm* gerçel sayılar "çift" sayılmak durumundadır.

3.2 Gerçel sayı sistemi

Geometrinin (Öklit) fikirleri uygun biçimde geliştirilecekse Yunanların rasyonel sayıların farkına varmaya zorlanmış olmaları yetmez. Bugünlerde, belirli bir geometrik nicelik yalnızca rasyonel sayılar biçiminde basitçe ölçülemediğinde, gereksiz yere kaygılanmıyoruz. Bunun sebebi bir "gerçel sayı" kavramının bize çok tanıdık olmasıdır. Her ne kadar hesap makinelerimiz, sayıları yalnızca sınırlı bir sayı basamağı biçiminde gösteriyor olsa da bunu kolaylıkla, hesap makinesinin sınırlı bir nesne oluşu gerçeği nedeniyle bize dayatılan bir yaklaşıklık tahmini olarak kabul ederiz. İdeal

[3] "Gerçel rasyoneller" (diğer bir deyişle gerçel bölümleri) her şeye rağmen yine de gerçel sayılar olduklarından yukarıdaki kanıtta gerçel sayıları kullanmanın bir şekilde kuşkulu olduğu itirazı elbette yükseltilebilir. Bununla birlikte bu az önce söylenmiş olanı geçersiz kılmaz. Başlangıçtaki argümanda a ve b'nin kendilerinin rasyoneller olarak değil tamsayılar olarak alındıkları da belirtilebilir çünkü a ve b yalnızca rasyonelse argüman, sonucun kendisi hâlâ doğru bile olsa, "azalan diziler" kısmında başarısızlığa uğrardı.

matematiksel (Platonik) sayının, ondalık ilerlemenin kesinlikle süresiz biçimde devam etmesini gerektirebileceğini kabule hazırlıklıyız. Elbette bu çoğu kesrin ondalık gösterimlerinde de geçerlidir, örneğin;

$$\frac{1}{3} = 0{,}333333333\ldots,$$
$$\frac{29}{12} = 2{,}416666666\ldots,$$
$$\frac{9}{7} = 1{,}285714285714285,$$
$$\frac{237}{148} = 1{,}60135135135\ldots.$$

Bir kesir için ondalık ilerleme her zaman, basamakların sınırsız dizisinin belirli bir noktadan sonra süresizce yinelenen bir sonlu diziden oluştuğu şekilde, *sonuç olarak periyodik*tir. Yukarıdaki örneklerde yinelenen diziler sırasıyla 3, 6, 285714 ve 135'tir.

Ondalık ilerleme antik Yunanlar için mümkün değildi fakat onlar karmaşık sayıları kabullenmeye ilişkin kendi yollarına sahiptiler. Gerçekte benimsedikleri, sayıları bugün kendisine *sürekli kesirler* denen şey biçiminde bir gösterim sistemiydi. Burada bunun tüm ayrıntılarını irdelemeye gerek yok fakat bazı özet yorumlar uygun olacaktır. Bir sürekli kesir,[4] $a, b, c, d, \ldots$'nın pozitif tamsayılar olduğu sonlu ya da sonsuz bir $a + (b + (c + (d + \cdots)^{-1})^{-1})^{-1}$ ifadesidir;

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

1'den büyük herhangi bir rasyonel sayı böyle bir ifadeyi *sonlandırıcı* olarak yazılabilir (anlam bulanıklığından kaçınmak üzere normalde son tamsayının 1'den büyük olmasına gerek duyarız), *örn.* $52/9=5+(1+(3+(2)^{-1})^{-1})^{-1}$:

$$\frac{52}{9} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

ve 1'den küçük bir pozitif rasyonel sayı için yalnızca ifadedeki ilk tamsayıyı sıfır olarak alırız. Rasyonel olmayan gerçel bir sayıyı ifade etmek için

---

[4] Üstünkörü bir bakışla $a + (b + (c + (d + \cdots)^{-1})^{-1})^{-1}$ gibi ifadeler görece tuhaf görünebilir. Oysa onlar antik Yunan düşünüşü bağlamında (Yunanlar bu belirli gösterimi kullanmadıkları halde) oldukça doğaldırlar. *Öklit algoritması* işlemine not 3.2'de bir kesrin en sade terim biçimini bulma bağlamında değinildi. Öklit algoritması (çözüldüğünde) bu tür bir sürekli kesir ifadesine kesin şekilde yol açar. Yunanlar bu aynı işlemi iki geometrik uzunluğun oranına uygularlardı. En genel durumda sonuç burada ele alınan türde bir *sonsuz* sürekli kesir olurdu.

sürekli kesir ifadesini basitçe[3.1] sonsuza dek devam ettiririz. Bazı örnekler şunlardır:[5]

$$\sqrt{2} = 1 + (2 + (2 + (2 + (2 + \cdots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1},$$
$$7 - \sqrt{3} = 5 + (3 + (1 + (2 + (1 + (2 + (1 + (2 + \cdots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1},$$
$$\pi = 3 + (7 + (15 + (1 + (292 + (1 + (1 + (1 + (2 + \cdots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}.$$

Bu sonsuz örneklerin ilk ikisinde görülen doğal sayı dizileri, diğer bir deyişle ilk durumda 1, 2, 2, 2, 2, ... ve ikinci durumda 5, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ..., nihai olarak periyodik olma özelliğindedir (ilk durumda süresiz biçimde tekrar eden 2 ve ikinci durumda süresiz biçimde tekrar eden 1, 2.)[3.2] Yukarıda belirtildiği üzere, tanıdık ondalık gösterimde, (sonlu ya da) sonuç olarak periyodik ifadelere sahip olanların *rasyonel* sayılar olduğunu anımsayın. Diğer taraftan şu halde, rasyonel sayıların her zaman sonlu bir tanımlamaya sahip oluşunu Yunan "sürekli kesir" gösteriminin gücü olarak dikkate alabiliriz. Bu bağlamda sorulması gereken doğal bir soru şudur: hangi sayılar *sonuç olarak periyodik* bir sürekli kesir gösterimine sahiptir? Bildiğimiz kadarıyla ilk olarak büyük 18. yüzyıl matematikçisi Joseph G. Lagrange tarafından kanıtlanan, gösterimleri sürekli kesirler biçiminde olan ve *ikinci dereceden irrasyoneller*[6] olarak adlandırılan sayıların, sonuç olarak periyodik olduklarına ilişkin teorem dikkate çekicidir.

İkinci dereceden bir irrasyonel nedir ve onun Yunan geometrisindeki önemi nedir? O, a ve b'nin kesir olduğu ve b'nin bir tam kare olmadığı,

---

[3.1] Bu genişlemeleri olası tamlık derecesine dek elde etmek üzere ("√" ve "x^{-1}" tuşlarına sahip olduğunuzu varsayıyorum) hesap makinenizi kullanın. π = 3,141592653589793... olarak kabul edebilirsiniz. *İpucu*: Her sayının tamsayı kısmını not edip çıkarın ve kalanın tersini oluşturun.

5 Sürekli kesirlerle ilgili (kanıtlarla birlikte) daha fazla bilgi için Davenport'un (1952) 4. bölümde verilmiş zarif açıklamasına bakın. Bazı bakımlardan gerçel sayıların sürekli kesir gösteriminin ondalık ilerleme biçimindeki normal olandan, modern matematiğin §§2.24,25'te tartışılmış olan hiperbolik geometri de dahil olmak üzere çok farklı alanlarında uygulamalar bularak, daha derin ve ilginç olduğu belirtilebilir. Öte taraftan sürekli kesirler pratik hesaplamalar için o kadar da uygun değildir; geleneksel ondalık gösterimin kullanılması çok daha kolaydır.

[3.2] Bu iki sürekli kesir ifadesinin sonuçta periyodik olduğunu varsayarak temsil ettikleri sayıların sol taraftaki nicelikler olmak zorunda olduklarını gösterin. *İpucu*: Bu niceliğin sağlamak zorunda olduğu ikinci dereceden bir denklem bulun ve not 3.6'ya başvurun.

6 İkinci dereceden irrasyoneller, A sıfırdan farklı olmak üzere ve çözümleri, gerçel sayılar aleminde kalmak için B^2'nin $4AC$'den büyük olması gereken $-\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}$ ve $-\frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}$ ifadeleriyle elde edilen genel bir $Ax^2 + Bx + C = 0$ ikinci derece denklemin çözümünde ortaya çıktıkları için böyle adlandırılır. A, B ve C tamsayı ya da rasyonel sayıysa ve denklemin rasyonel bir çözümü yoksa, aslında çözümler ikinci dereceden irrasyoneldir.

$$a + \sqrt{b}$$

biçiminde yazılabilen bir sayıdır. Böylesi sayılar Öklit geometrisinde önemlidirler çünkü onlar cetvel pergel çizimlerinde* en dolaysız şekilde karşılaşılan irrasyonel sayılardır. (§3.1' de bizi ilk kez $\sqrt{2}$ problemini ele almaya yöneltmiş Pisagor teoremini ve doğrudan yukarıdaki biçimdeki diğer sayılara yönelten diğer basit Öklitçi uzunlukların çizimlerini anımsayın.)

İkinci dereceden irrasyonellerin belirli örnekleri, $a = 0$ ve b'nin (kare–olmayan) doğal bir sayı (ya da 1'den büyük bir rasyonel) olduğu koşullardakilerdir:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \ldots .$$

Bu tür bir sayının sürekli kesir gösterimi özel olarak çarpıcıdır. Onu sürekli kesir olarak tanımlayan doğal sayılar dizisi tuhaf bir tipik özelliğe sahiptir. Bir A sayısıyla başlar ve hemen $B, C, D, \ldots, D, C, B$ gibi bir "palindromik" diziyle devam eder ve daha sonra gelen $2A$'yı takiben $B, C, D, \ldots, D, C, B, 2A$ dizisiyle devam ederek kendini süresiz olarak yineler. Kendisiyle ilgili dizinin

$$3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \ldots$$

olduğu $\sqrt{14}$ sayısı iyi bir örnektir. Burada A = 3 ve palindromik $B, C, D, \ldots, D, C, B$ dizisi üç terimli 1, 2, 1 dizisidir.

Antik Yunanlar bunun ne kadarını biliyorlardı? Her şeye ilişkin titiz kanıtlardan yoksun olmuş olmalarına rağmen bunların büyük bir kısmını, çok olası ki yukarıda açıkladığım şeylerin *tümünü* (Lagrange teoremi de dahil olmak üzere) biliyorlardı. Bunun çoğunu Platon'un çağdaşı Theaetetos kurmuş görünüyor. Bu bilginin Platon'un diyalektiğinde[7] sergilenen (yukarıda değinilen palindromik dizilerin yinelenmesini de içeren) birtakım kanıtlarının olduğu bile görülüyor.

İkinci derece irrasyonelleri dahil etmek, bize Öklit geometrisine uygun sayılara giden bazı yollar açsa da gereken her şeyi yapmaz. Öklit'in onuncu (ve en zor) kitabında $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ (a ve b pozitif rasyoneller olmak üzere) biçimindeki sayılar ele alınır. Genel olarak bunlar ikinci derece irrasyonel değildir, fakat yine de cetvel pergel çizimlerinde ortaya çıkarlar. Böylesi

---

* ruler-and-compass constructions: uzunluklar, açılar ve diğer geometrik şekillerin yalnızca idealize edilmiş bir cetvel ve pergel kullanılarak çizilmesi işlemi. –çn.

[7] Profesör Stelios Negrepontis beni bu kanıtın Theaetetos-the Sophist-the Politikos "üçleme"sinin üçüncüsü olan the Statesman (= Politikos) adlı Platonik diyalogda bulunduğuna dair bilgilendirdi. *Bkz.* Negrepontis, 2000.

geometrik çizimler için yeterli niteliğe sahip sayılar, doğal sayıların toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve karekök alma gibi bir dizi tekrar eden işlemden geçmesi yoluyla oluşturulabilen sayılardır. Bununla birlikte yalnızca bu sayılarla işlem yapmak son derece karmaşıklaşır ve bu sayılar Öklitçi geometrinin cetvel pergel çizimlerinde kullanılmak için hâlâ oldukça sınırlıdırlar. Bütünüyle genel olan sonsuz sürekli kesir ifadelerine alan açma cesur adımını atmak –bir adımın ne kadar cesur olduğu konusuna esasen §§16.3–5'te değinilecek– çok daha fazla tatmin edicidir. Bu, Yunanlara Öklit geometrisine uygun oldukları anlaşılan sayıları açıklamanın bir yolunu sundu.

Bu sayılar aslında modern terminolojideki "gerçel sayılar"dır. Bu tür sayıların bütünüyle tatmin edici bir tanımı 19. yüzyıla kadar bulunmuş olarak kabul edilmese de, Platon'un öğrencilerinden biri olan antik Yunan büyük matematikçi ve astronom Eudoksos konuyla ilgili esas fikirleri daha İÖ 4. yüzyılda elde etmişti. Eudoksos'un fikirlerine ilişkin birkaç şey söylemek yerinde olacak.

İlk olarak Öklit geometrisinde sayıların doğrudan uzunluklar yerine uzunluk *oranları* biçiminde ifade edilebildiğini not edelim. Bu şekilde belirli hiçbir uzunluk birimine ("inç" ya da Yunan "dactylos"u gibi) gerek duyulmadı. Dahası uzunluk oranlarıyla, bu oranların birbirleriyle ne sıklıkta çarpılabileceğine ilişkin (üçten fazla uzunluğun birbirleriyle çarpılması durumunda çok boyutlu "hiper hacimler"e ilişkin belirgin ihtiyacı karşılamamakla birlikte) bir kısıtlama da olmaz. Eudoksos kuramındaki ilk adım bir $a : b$ uzunluk oranı diğer bir $c : d$ oranından *daha büyük* olduğunda buna ilişkin bir kriter temin etmekti. Bu kriter şuydu: a uzunluğunun, kendi kendine M kez eklendiğinde kendine N kez eklenen b uzunluğunu aşacağı ve aynı zamanda d'nin, kendi kendine N kez eklendiğinde kendine M kez eklenen c'yi aşacağı şekilde iki M ve N pozitif tamsayısı mevcuttur.[3.3] Benzer bir kriter $a : b$'nin $c : d$'den *daha küçük* olduğu durumu ifade etmek için de geçerlidir. Bu oranların eşitliği durumu için kriterlerin ikisi de geçersizdir. Bu tür oranlarla ilgili incelikli "eşitlik" kavramıyla Eudoksos gerçekte, "gerçel bir sayı"ya ilişkin uzunluk oranları biçiminde soyutlanmış bir kavrama sahip olmuştu. O ayrıca bu tür gerçel sayıların toplanma ve çarpılmaları üzerine kurallar da sundu.[3.4]

Bununla birlikte bir gerçel sayıya ilişkin Yunan görüşüyle modern olan arasındaki temel bir bakış açısı farkı vardı çünkü Yunanlar sayı sistemini bize fiziki uzaydaki *uzaklık* kavramı biçiminde temel olarak "verilmiş" ka-

[3.3] Bunun neden işe yaradığını görebiliyor musunuz?

[3.4] Bunları nasıl formüle etmek gerektiğini görebiliyor musunuz?

bul ediyorlardı ve böylece sorun bu "uzaklık" ölçülerinin gerçekte nasıl davrandıklarını saptamaya çalışmaktı. "Uzayın" kendisi de, bu uzayın içinde yer alan gerçek fiziki nesneler Platonik ideal düzeyine kaçınılmaz olarak erişemeseler dahi, Platonik bir mutlak görünümünde olabilirdi.[8] (Bununla birlikte §17.9 ve §§19.6,8'de Einstein'ın genel görelilik kuramının şimdilerde uzay ve madde üzerine olan bu bakış açısını nasıl temel bir şekilde değiştirdiğini görüyor olacağız.)

Örneğin kuma çizilmiş bir kare ya da mermerden yontulmuş bir küp gibi fiziki bir nesne, antik Yunanlar tarafından Platonik ideale makul ya da bazen mükemmel bir yaklaşıklık tahmini olarak değerlendirilebiliyordu. Yine de bu tür bir nesne buna rağmen yalnızca bir yaklaşıklık tahmini sağlamaz. Platonik biçimlere yönelik bu tür yaklaşıklık tahminlerinin ardında –böylece görünmüş olan– uzayın kendisi yatar: Platonik bir gerçekliğin dolaysız bir gerçekleştirilişi olarak dikkate alınabilecek olan soyut ya da kavramsal bir varoluş. Bu ideal geometrideki uzaklık ölçüsü *saptanacak* bir şeydir; bu nedenle, bu ideal gerçel sayı kavramını, *verili* olduğu varsayılan Öklitçi bir uzaydan çıkarmaya çalışmak uygun olur. Gerçekte Eudoksos'un yapmayı başardığı şey budur.

Bununla birlikte 19 ve 20. yüzyıllarda matematiksel sayı kavramının fiziki uzayın doğasından ayrı durması gerektiği görüşü ortaya çıktı. Matematiksel olarak Öklit'inkinden farklı tutarlı geometrilerin varlıkları gösterilmiş olduğundan, bu durum matematiksel "geometri" kavramının mutlaka fiziki uzayın varsayılan doğasından çıkarılması gerekliliğinde ısrar etmeyi yersiz kıldı. Dahası, temelde bulunan bu varsayılmış "Platonik fiziki geometri"nin ayrıntılı doğasını mükemmel olmayan fiziki nesnelerin davranışları biçiminde saptamak, olanaksız değilse de, çok zor olabilirdi. "Geometrik uzaklığın", ona göre tanımlanacağı sayıların doğasını bilmek için, örneğin, belirsiz derecede küçük ve de büyük uzaklıkların her birinde ne olduğunu bilmek gerekir. Bu sorular bugün bile açık ve net çözümlerden yoksundur (ve bunlara sonraki bölümlerde yeniden yöneleceğim). Böylece, sayı doğasını doğrudan fiziki ölçülerle ilgili olmayan bir biçimde geliştirmek çok daha uygundu. Bu nedenle Richard Dedekind ve Georg Cantor, gerçel sayıların "ne olduğu"na ilişkin fikirlerini, geometriyle doğrudan ilgili olmayan kavramların kullanımı aracılığıyla geliştirdiler.

Dedekind'ın gerçel sayı tanımı rasyonel sayıların sonsuz kümeleri biçimindeydi. Temelde rasyonel sayıların, hem pozitif hem negatif (ve sıfır), büyüklüklerine göre düzenlendiklerini düşünürüz. Bu düzenlemenin, 0'ın

---

[8] Uzayın doğası üzerine antik Yunan düşünüşünün bir açıklaması için *bkz.* Sorabji, 1983, 1988.

ortada, negatif rasyonellerin sola, pozitif rasyonellerin sağa doğru belirsiz olarak ilerler durumda gösterilerek, soldan sağa doğru meydana geldiğini hayal edebiliriz. (Bu yalnızca zihinde canlandırma amacına yöneliktir; aslında Dedekind'ın işlemi bütünüyle soyuttur.) Dedekind bu görüntüyü temiz biçimde ikiye bölen ve solda kalanların tümünün sağda kalanlardan küçük olduğu bir "kesik" hayal eder. Kesiğin "bıçak ağzı" gerçek bir rasyonel sayıya "isabet" etmeyip arada bir yere denk geldiğinde bunun *irrasyonel* bir gerçel sayı tanımladığını söyleriz. Daha doğru bir ifadeyle bu durum, solda kalanların gerçek hiçbir en büyük üyesi ve sağda kalanların gerçek hiçbir en küçük üyesi olmadığında meydana gelir. Bu tür kesikler biçiminde tanımlanan "irrasyoneller" sistemi, zaten elimizde olan rasyonel sayılar sistemine eklendiğinde *gerçel sayıların* tüm ailesi elde edilir.

Dedekind'ın işlemi basit tanımlamalar yoluyla doğrudan, gerçel sayılar için toplama, çıkarma, çarpma ve bölme kurallarına götürür. Dahası, ileri gidip daha önce gördüğümüz sonsuz sürekli kesir

$$1 + (2 + (2 + (2 + (2 + \cdots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$$

ya da sonsuz toplam

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

türündeki şeylere gerçel sayı anlamları atfedilebilmesi aracılığıyla, *limiti* tanımlamaya olanak sağlar. Aslında ilki bize $\sqrt{2}$ sayısını, ikincisi de $\frac{1}{4}\pi$'yi verir. Limit alabilme yeteneği pek çok matematiksel kavram için temeldir ve gerçel sayılara kendi özel gücünü kazandıran şey de budur.[9] (Okuyucu "limit alma işlemlerine" duyulan ihtiyacın, alanların §2.3'te belirtildiği üzere, genel olarak tanımlanması için bir gereklilik olduğunu anımsayabilir.)

3.3 Fiziki dünyadaki gerçel sayılar

Burada geçerken değinilecek derin bir konu mevcuttur. Matematiksel fikirlerin gelişiminde, fiziki dünyanın davranışlarını kusursuzca yansıtan matematiksel yapıları bulmak için her zaman önemli bir başlangıç itici kuvveti var olmuştur. Bununla birlikte fiziki dünyanın kendisini, açık ve net matematiksel kavramların fiziki dünyadan uygun şekilde dolaysızca çıkarılabileceği kesin bir titizlikle incelemek normalde olası değildir. Bunun yerine gelişme, matematiksel kavramların, bütünüyle öznenin kendisi

[9] *Bkz.* Hardy, 1914; Conway, 1976; Burkill, 1962.

içinden kaynaklanır görünen, kendilerine ait bir "momentuma" sahip olma eğiliminde olmaları nedeniyle gerçekleşir. Matematiksel fikirler gelişir ve çeşitli türde problemlerin oluştuğu görülür. Bunların bazıları (bir karenin köşegen uzunluğunu bulma probleminde olduğu gibi), problemin formüle edilişi esnasında kullanılmış kavramlar biçimindeki orijinal matematiksel kavramların esaslı bir genişlemesine yol açabilir. Böylesi genişlemeler bize dayatılıyor gibi görülebilir ya da uygunluk, tutarlılık ya da matematiksel zarafet konuları gibi görünen yollarla oluşabilir. Böylece matematiğin gelişimi başlangıçta ulaşmak için kurulmuş olduğu amaçtan, diğer bir deyişle basit olarak fiziki davranışı yansıtma amacından uzaklaşmış görünebilir. Buna rağmen matematiksel tutarlılık ve zarafete yönelik bu itki bizi, fiziki dünyayı ilkin ele aldıklarımızdan çok daha derin ve geniş kapsamlı olarak yansıttığını anladığımız matematiksel yapı ve kavramlara ulaştırır. Bu, Doğanın kendisinin de sanki insanın matematiksel düşünüşünü yönlendiren aynı türde tutarlılık ve zarafet kriterleri tarafından yönlendiriliyor olmasına benzer.

Gerçel sayı sisteminin kendisi bunun bir örneğidir. Dolaysız olarak Doğadan elde edeceğimiz, büyük ölçeklere gelişigüzel şekilde genişletilecek fiziki bir "uzaklık" kavramının varlığına ilişkin hiçbir kanıta sahip değiliz; belirsiz olarak küçük seviyede uygulanabilecek bu tür bir kavrama ilişkin kanıtımız da yetersizdir. Aslında "uzaydaki noktaların", gerçel sayı uzaklıklarını tam bir kesinlik içinde kullanan bir geometriyle uyum içinde gerçekten var olduklarına ilişkin hiçbir kanıt mevcut değildir. Öklit zamanında, bu tür Öklitçi "uzaklıkların" dışarıya, diyelim ki 10^{12} m'nin[10] ötesine ya da içeriye 10^{-5} m kadar küçüklüğe genişletilmesi tartışmasını bile destekleyecek çok kısıtlı kanıt mevcuttu. Matematiksel olarak gerçel sayı sisteminin tutarlılığı ve zarafeti tarafından yönlendiriliyor olmamıza rağmen güncellenmiş geniş kapsamlı ve başarılı fiziki kuramlarımızın tümü hâlâ bu eski "gerçel sayı" kavramına yapışıktır. Bunu Öklit zamanında kullanılan kanıtla yapıyor oluşumuzun küçük bir gerekçelendirmesi var-

---

[10] Bir "milyon milyon" için "10^{12}" bilimsel gösterimi notlar 1.2 ve 2.4'te açıklandığı üzere *üsler*den yararlanır. Bu kitapta "milyon" ve özellikle "milyar" gibi sözlü terimleri kullanmaktan, çok daha açık bilimsel gösterimi tercih ederek kaçınacağım. "Milyar" sözcüğü, daha eski (daha mantıklı) Birleşik Krallık kullanımında diğer Avrupa dillerinin çoğuyla uyum içinde 10^{12}'ye karşılık gelirken Amerikan kullanımında, şu an genel olarak Birleşik Krallık'ta da benimsenen, 10^{9}'un karşılığı olduğundan özel olarak kafa karıştırıcıdır. 10^{-6} gibi ("milyonda bir"e karşılık gelen) negatif üsler de burada normal bilimsel gösterimle uyum içinde kullanılmaktadır.

[10] 10^{12} m uzaklığı dünya güneş aralığının yaklaşık 7 katıdır. Her ne kadar Öklit zamanında bilinmemiş ve görece daha küçük olarak tahmin edilmiş olsa da bu uzaklık, kabaca Jüpiter gezegenine olan uzaklıktır.

mış gibi gözükse de, gerçel sayı sistemine olan bağlılığımız ödüllendirilir görünmektedir. Kozmolojiyle ilgili geliştirdiğimiz başarılı modern kuramlarımız bize şimdi gerçel sayı uzaklıkları menzilimizi, parçacık fiziği kuramlarımızın kesinliği bu menzili içe doğru 10^{-17} ya da daha azma genişletmeye izin verirken, 10^{26} m ya da daha fazlasına genişletmeye izin verir. (Bir değişim meydana gelebileceğinin ciddi şekilde iddia edilmiş olduğu tek ölçek, bundan bile 18 büyüklük basamağı küçük düzey, diğer bir deyişle bazı ileriki tartışmalarımızı kuvvetlice belirleyecek kuantum kütleçekimin "Planck ölçeği" denilen 10^{-35} metre düzeyidir; *bkz.* §§31.1, 6–12, 14 ve §32.7.) Gerçel sayı sisteminin geçerlilik menzilinin, Öklit zamanında uygun görünen, küçüğünden büyüğüne toplamda yaklaşık 10^{17}'den kuramlarımızın bugünkü dolaysız sonucu olarak, 10^{26} gibi bir çarpan dolayısıyla muazzam bir büyümeyi ifade eden 10^{43}'e kadar genişlemiş olması, matematiksel idealleştirmeleri kullanmamıza ilişkin dikkat çekici bir gerekçelendirme olarak değerlendirilebilir.

Gerçel sayı sisteminin fiziki geçerliliğine ilişkin bundan epeyce fazlası da mevcuttur. İlk olarak alanların ve hacimlerin de gerçel sayı ölçülerinin kusursuzca uygun olduğu nicelikler olduğunu göz önüne almalıyız. Hacim ölçüsü bir uzaklık ölçüsünün küpüdür (ve alan bir uzunluğun karesidir). Bu nedenle hacim söz konusu olduğunda yukarıdaki ilgili menzilin kübünü ele alabiliriz. Öklit zamanında bu bize $(10^{17})^3 = 10^{51}$ dolayında bir menzil verirdi; bugünün kuramları içinse en azından $(10^{43})^3 = 10^{129}$. Dahası halihazırdaki başarılı kuramlarımız uyarınca gerçel sayı tanımlamalarına gereksinim duyan başkaca fiziki ölçüler de mevcuttur. Bunların en kayda değeri zamandır. Görelilik kuramı uyarınca bunun, bize (17. bölümdeki irdelemelerimizin konusu olacak) *uzayzamanı* sunması için uzaya eklenmesi gerekir. Uzayzaman hacimleri dört boyutludur ve zamana ait menzilin de ele aldıklarımızla, en azından 10^{172} gibi bir toplam vererek birleştirilme gerekliliği dikkate alınabilir. İleriki irdelemelerimizde (*bkz.* §27.13 ve §28.7), bazı durumlarda (diyelim ki tamsayılar yerine) gerçel sayıların kullanımının zorunluluğu gerçekten açık olmasa da, bundan bile çok daha büyük bazı gerçel sayıların önümüze geleceğini göreceğiz.

Fiziki kuram için daha önemlisi, Arşimet'le başlayıp Galilei ve Newton'dan geçerek Maxwell, Einstein, Schrödinger, Dirac ve diğerlerine değin, gerçel sayı sisteminin kritik bir rolü, *kalkülüsün* standart formüle edilişinde gerekli iskeleti sunması olmuştur (*bkz.* 6. bölüm). Başarılı dinamik kuramların tümü kendi formülasyonları için kalkülüsün kavramlarına gereksinim duydu. Şu an kalkülüse yönelik geleneksel yaklaşım, kendisi olabilmek için gerçellerin *sonsuz küçük* doğasına gereksinim duyar. Söylenen odur ki ölçeğin küçük ucunda, kural olarak yararlanılan şey, ger-

çel sayıların bütün bir menzilidir. Kalkülüsün fikirleri, hız, momentum ve enerji gibi diğer fiziki kavramların altında yatar. Bu nedenle gerçel sayı sistemi, tüm bu nicelikleri açıklamamız için de başarılı fiziki kuramlarımıza temel bir biçimde dahil olur. Burada, daha önce §2.3 ve §3.2'de alanlarla bağlantısı içinde değinildiği üzere, gerçel sayı sisteminin küçük ölçekli yapısının sonsuz küçük limitine başvurulmaktadır.

Yine de hâlâ, gerçel sayı sisteminin, fiziki gerçekliğin kendi en derin düzeyinde açıklanması için gerçekten "doğru" olup olmadığını sorabiliriz. 20. yüzyılın başlarında kuantum mekaniksel fikirler sunulmaya başlandığında, belki de fiziki dünyanın en küçük ölçeğindeki ayrık ya da tanecikli bir doğasına tanıklık etmeye başlıyor olduğumuz hissi mevcuttu.[11] Enerji görünüşe göre yalnızca ayrık yığınlar –ya da "kuanta"– içinde var olabilirdi ve "hareket" ve "spin"in fiziki nicelikleri yalnızca temel bir birimin katları içinde meydana gelir görünüyordu (klasik *hareket* kavramı için *bkz.* §§20.1,5 ve onun kuantum karşılığı için *bkz.*§26.6; *spin* için *bkz.* §§22.8–12). Bu nedenle değişik fizikçiler dünyanın, en küçük seviyede ayrık işlemlerin tüm hareketlere hükmettiği, alternatif bir resmini oluşturma girişiminde bulundular.

Bununla birlikte, kuantum mekaniğini şu an anladığımız üzere, bu kuram bize uzay, zaman ya da enerjiye ilişkin, kendi en küçük seviyelerinde (*bkz.* bölümler 21 ve 22, özel olarak §22.13'ün son cümlesi), ayrık ya da tanecikli bir doğa olduğu görüşünü dayatmaz (ya da hatta yönlendirmez). Yine de bize, aslında, kuantum mekaniğinin bunu kendi standart formülasyonunda kesinlikle ima etmemesi gerçeğine karşın, temelde Doğaya ilişkin böylesi başat bir ayrıklık olabileceği fikri kaldı. Örneğin büyük fizikçi Erwin Schrödinger herhangi temel bir uzamsal ayrıklığa yönelik bir değişikliğin gerçekten gerekli olabileceğini iddia edenlerin ilkiydi:[12]

> Matematikçilere günümüzde oldukça tanıdık gelen bir *sürekli menzil* fikri, bizim tarafımızdan ulaşılabilir olana ilişkin çok aşırı, devasa bir kestirimdir.

Bu iddiayı Doğanın ayrıklığıyla ilgili eski bir Yunan düşünüşüyle ilintilendirdi. Yayımlanmış son sözlerinde Einstein da ayrık olarak temellenen ("cebirsel") bir kuramın geleceğin fiziği için izlenecek yol olabileceğini ileri sürdü:[13]

> Gerçekliğin niçin sürekli bir alan gibi gösterilemeyeceğine ilişkin iyi gerekçeler sunulabilir. ... Kuantum olgusu ... gerçekliğin açıklan-

[11] *Örn., bkz.* Russell, 1927, bölüm 4.

[12] Schrödinger, 1952, s. 30–31.

[13] *Bkz.* Stachel, 1993.

> ması için saf cebirsel bir kuram bulma girişimine yol açmalıdır. Fakat kimse bu tür bir kuramın temelinin nasıl elde edileceğini bilmiyor.[14]

Diğerleri[15] de bu tür fikirler peşinde koştular, *bkz.* §33.1. 1950'lerin sonunda ben de, *spin*in kuantum mekaniksel ayrık doğasının fiziğe yönelik *tümleşik* (diğer bir deyişle gerçel sayı temellilik yerine ayrık) bir yaklaşım için temel yapı taşı olarak alındığı, "spin ağları" kuramı olarak adlandırdığım bir düzen ileri sürerek bu tarz bir şey denedim. (Bu düzen §32.6'da kısaca açıklanacak.) Bu belirli doğrultu üzerindeki düşüncelerim kapsamlı bir kurama dönüşmediyse de (fakat sonradan, bir dereceye kadar "burgaç kuramı" içinde şekli değiştirilmiş hale geldi, *bkz.* §33.2) spin ağları kuramı şimdi başkaları tarafından *kuantum kütleçekimi*n temel sorununa hücum etmek üzere başat proglamlardan birinin içine aktarıldı.[16] 32. Bölüm'de bu çeşitli fikirlerle ilgili kısa açıklamalar vereceğim. Yine de denenmiş ve test edilmiş fiziki kuramın bugün desteklediği gibi, geçmiş 24 yüzyıl boyunca olduğu üzere, gerçel sayılar fiziki dünyaya ilişkin anlayışımızın hâlâ temel bir bileşenini oluşturmaktadır.

3.4 Doğal sayılar fiziki dünyaya gereksinim duyar mı?

Dedekind'ın gerçel sayılara ilişkin yukarıda, §3.2'deki yaklaşımında *rasyonel sayıların* halihazırda "anlaşılmış" olduğu ön varsayımında bulundum. Aslında tamsayılardan rasyonellere geçiş zor bir adım değildir; rasyoneller tamsayıların yalnızca oranlarıdır (*bkz.* Önsöz). Öyleyse tamsayıların kendilerinden ne haber? Bunlar fiziki fikirlerde mi temellenir? Fiziğe yönelik önceki iki paragrafta dillendirilmiş ayrık yaklaşımlar, negatif sayıların tamsayılara dahil edilmesi yoluyla, kesinlikle *doğal say*ı (diğer bir deyişle "sayma sayısı") kavramımıza ve onun genişletilmesine dayanır. Negatif sayılar Yunanlar tarafından gerçek "sayılar" olarak dikkate alınmadılar, öyleyse gelin irdelemelerimize ilkin doğal sayıların fiziki konumlarını sorgulayarak devam edelim.

Doğal sayılar şu anda 0, 1, 2, 3, 4, vb ile gösterdiğimiz niceliklerdir, diğer bir deyişle negatif olmayan tamsayılardır. (Her ne kadar antik Yunanlar "sıfır"ı gerçek bir sayı olarak tanımadılarsa da modern işlem bu listeye matematiksel bakış açısına uygun olarak sıfırı eklemeyi gerektirir. Bu ta-

---

[14] Einstein, 1955, s. 166.

[15] *Örn., bkz.* Snyder, 1947; Schild, 1949; Ahmavaara, 1965.

[16] Ashtekar, 1986; Ashtekar ve Lewandowski, 2004; Smolin, 1998, 2001; Rovelli, 1998, 2003.

nıma, Hindistan'ın, 7. Yüzyılda Brahmagupta ve 9. Ve 12. Yüzyıllarda sırasıyla Mahavira ve Bhaskara adlı Hindu matematikçilerini beklemek zorundaydı. Doğal sayıların rolü belirli ve açıktır. Onlar aslında, geometri ya da fiziğin yasalarının ne olabileceğiyle ilgili temel bir role sahip en basit "sayma sayılarıdır". Doğal sayılar, en belirginleri *toplama* (*örn.* 37 + 79 = 116) ve *çarpma* (37 × 79 = 2923) olan ve doğal sayı çiftlerine yeni doğal sayılar oluşturmak üzere birleşme olanağı sunan belirli tanıdık işlemlere tabidir. Bu işlemler dünyanın geometrik doğasından bağımsızdır.

Bununla birlikte doğal sayıların, fiziki dünyanın gerçek doğasından bağımsız bir anlamı ya da aslında varlığı olup olmadığı sorusunu gündeme getirebiliriz. Doğal sayılar kavramımız belki de evrenimizde, zamanda var olan, makul şekilde iyi tanımlı ayrık nesnelerin varlığına bağlıdır. Neticede doğal sayılar ilk olarak, şeyleri saymak istememiz sonucu gündeme gelir. Öte taraftan bu, evrende "sayılmaya" uygun, ayırt edilebilen kalıcı "şeylerin" gerçekten varoluşuna bağlı görünür. Diğer taraftan evrenimizi, nesne sayılarının sürekli değişme eğilimine sahip olduğu bir yer olarak düşünmeyi deneyin. Böyle bir evrende doğal sayılar gerçekten "doğal" kavramlar olur muydu? Dahası belki de evren gerçekten yalnızca, öyle olması durumunda "doğal" sayıların kendilerinin de bir noktada bir sona gelebileceği, sonlu sayıda "şey" içeriyor. Hatta kafamızda, yalnızca şekilsiz ve niteliksiz bir maddeden oluşmuş, tam da sayısal ölçüm kavramının özünde uygun görülmeyebileceği bir evren bile canlandırabiliriz. "Doğal sayı" kavramı bu tür evrenlerin açıklanmasıyla bir biçimde ilgili midir?

Durum, böyle bir evrenin sakinlerinin, matematiksel bir "doğal sayı" kavramımıza rastlamayı zor buluyor olmaları olsa bile bu tür temel kavramlar için önemli bir rol var olmadığını hayal etmek yine de güçtür. Saf matematikte doğal sayıların sunulabileceği çeşitli biçimler mevcuttur ve nihayetinde bunlar fiziki evrenin gerçek doğasına bağlı görünmez. Temelde, oyuna dahil edilmesi gereken kavram, fiziki evrenin belirli yapısıyla herhangi zorunlu bir biçimde ilgili görünmeyen bir soyutlama olarak "küme"dir. Aslında bu soruyla ilgili belirli birtakım incelikler mevcuttur; bu konuya daha sonra (§16.5'te) döneceğim. An itibariyle bu tür incelikleri görmezden gelmek uygun olacak.

Doğal sayıların yalnızca soyut küme kavramı kullanılarak sunulabildiği (Cantor tarafından öngörülen ve seçkin matematikçi John von Neumann tarafından geliştirilen) bir yolu ele alalım. Bu "sıra sayıları" olarak adlandırılan sayıları tanımlamaya olanak sağlar. İçlerindeki en basit küme "sıfır kümesi" ya da "boş küme" olarak adlandırılır ve hiçbir eleman içermeme gerçeği ile karakterize edilir. Boş küme genellikle ∅ sembolüyle gösterilir ve kıvrımlı parantezin bir kümeyi, ele alınan belirli kümenin pa-

rantez içindeki niceliklere kendi elemanları olarak sahip olduğu bir kümeyi betimlemek için kullanıldığı şu tanımı yazabiliriz

$$\varnothing = \{\ \}.$$

Bu durumda parantez içinde hiçbir şey yoktur ve bu nedenle tanımlanmış küme aslında boş kümedir. $\varnothing$ sembolünü 0 doğal sayısıyla bağdaştıralım. Şimdi daha da ilerleyebilir ve tek elemanı $\varnothing$ olan bir küme, diğer bir deyişle $\{\varnothing\}$ kümesini tanımlayabiliriz. Bu kümenin,$\{\varnothing\}$, boş kümeyle, $\varnothing$, aynı küme olmadığını anlamak önemlidir. $\varnothing$ kendi başına hiçbir şeye sahip değilken $\{\varnothing\}$ kümesi *bir* elemana sahiptir; $\{\varnothing\}$. $\{\varnothing\}$ sembolünü 1 doğal sayısıyla bağdaştıralım. Sonraki adımda iki elemanı az önce rastladığımız iki küme, $\varnothing$ ve $\{\varnothing\}$ olan, 2 doğal sayısıyla bağdaştıracağımız yeni $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ kümesini tanımlarız. Daha sonra 3'ü şu ana kadar rastladığımız üç işlem toplamıyla, şöyle ki $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ kümesiyle ve 4'ü, elemanları yine daha önce rastladığımız kümeler olan $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$ kümesiyle bağdaştırır ve böyle devam ederiz. Bu doğal sayıları bir tanımlama konusu olarak genelde düşünüş şeklimiz olmayabilir fakat matematikçilerin konuya girebildiği yollardan biridir. (Bunu Önsözdeki tartışmayla kıyaslayın.) Dahası bu bize en azından, doğal sayılar gibi şeylerin[17] yalnızca soyut "küme" kavramı kullanılarak gerçek anlamda hiçlikten çıkarsanabileceğini gösteriyor. Sırasıyla sıfır, bir, iki, üç, vb, eleman içeren soyut (Platonik) matematiksel kavramların, kümelerin, her bir doğal sayı için bir küme olacak şekilde, evrenin gerçek fiziki doğasından oldukça bağımsız olan sonsuz bir dizisini elde ediyoruz. Şekil 1.3'te gözümüzün önüne, Platonik matematiksel kavramlar için, bu durumda doğal sayıların kendileri için bir tür bağımsız "varoluş" getirdik. Yine de bu "varoluş" görünüşte, fiziki evrenin doğasına ilişkin ayrıntılara herhangi bir gönderme olmaksızın yalnızca hayal gücümüzün işlemesi tarafından anımsanabilmiş ve kesinlikle erişilebilir olmuştur. Dahası Dedekind'ın yapısı, bize gerçel sayıların tüm sistemini "oluşturmaya" olanak vererek[18] bu tür "saf zihinsel" işlemin nasıl daha ileri taşınabileceğini, dünyanın gerçek fiziki doğasına hâlâ herhangi bir gönderme olmaksızın gösterir. Yine de yukarıda belirtildiği üzere "gerçel sayılar" aslında dünyanın gerçek yapısıyla, "ilk gizem"in gizemli doğasını resmeden Şekil 1.3'te çizilmiş olduğu üzere, dolaysız bir ilişkiye sahipmiş gibi görünür.

---

[17] Burada sonlu halde sunulan "sayma sayısı" kavramı, en küçükleri tüm sonlu sayma sayılarının düzenli bütünü olan Cantor'un "ω"sı olmak üzere *sonsuz* sayma sayılarına da genişler.

[18] Bununla birlikte bu "oluşturma" kavramı çok da kesin anlamda anlaşılmamalıdır. §16.6'da herhangi bir sayısal işlemle ulaşılamayan bazı gerçel sayıların (aslında çoğunun) mevcut olduğunu görüyor olacağız.

3.5 Fiziki dünyadaki ayrık sayılar

Hafif biçimde önden gittiğimi sanıyorum. Dedekind'ın yapısının, doğrudan doğal sayılardan değil *rasyonel* sayı kümelerinden yararlandığını anımsayabiliriz. Yukarıda belirtildiği üzere doğal sayı kavramını bir kez elde edince rasyonel bir sayıyla neyi kastettiğimizi "tanımlamak" güç değildir. Öte taraftan ara bir adım olarak bir doğal sayı ya da bir doğal sayının *negatifi* olan bir *tamsayı* kavramını tanımlamak (sıfır kendisinin negatifi olmak üzere) uygun olur. Resmi anlamda "negatif"in tanımını vermenin herhangi bir zorluğu yoktur: kabaca söylemek gerekirse, (sıfır dışında) her bir doğal sayıya "–" şeklinde yazılan bir "sembol" iliştiriyoruz ve toplama, çıkarma, çarpma ve bölmenin (0 ile bölme hariç) tüm aritmetik kurallarını tutarlı şekilde tanımlıyoruz. Bununla birlikte bu durum, negatif bir sayının "fiziki anlamı" sorusunu gündeme getirmez. Örneğin bir yerde eksi üç adet inek bulunduğunu söylemenin ne anlamı olabilir?

Sanırım, doğal sayıların kendilerinden farklı olarak, fiziki nesnelere ait negatif bir sayı kavramına yönelik belli herhangi bir fiziki içeriğin olmadığı açıktır. Negatif tamsayılar örneğin banka hesapları ve diğer finansal işlemlerle ilgili kesinlikle son derece değerli bir düzenleyici role sahiptir. Peki *fiziki* dünyayla doğrudan ilişkileri mevcut mudur? "Doğrudan ilişki" dediğimde, ilgili ölçülerin, bir yöndeki bir uzaklık ölçüldüğünde pozitif sayılırken ters yönde ölçülen aynı uzaklığın negatif sayılması örneğindeki gibi (ya da zaman için de benzer şekilde, geçmişe doğru genişletilen zamanların negatif sayılması gibi), negatif tamsayılar olarak göründüğü koşulları kastetmiyorum. Bunun yerine, ele alınan niceliğin yönle (ya da zamanla) ilgili herhangi bir görünümü olmaması anlamında *skaler* nicelikler olan sayıları kastediyorum. Bu koşullarda, bu, doğrudan fiziki ilişkiye sahip hem pozitif hem de negatif tamsayı sistemi durumu gibi görünür.

Tamsayı sisteminin aslında doğrudan fiziki ilişkiye sahip görünür oluşunun geçen yüz yıllarda açık hale gelişi dikkat çekici bir gerçektir. Bir fiziki niceliğin, miktarı tamsayılarla uygun şekilde belirlenmiş görünen ilk örneği *elektrik yükü*dür.[19] Bilindiği kadarıyla herhangi ayrık bir yalıtık cismin elektrik yükü niceliği aslında belirli bir değerin integral katları biçiminde, pozitif, negatif ya da sıfır olarak, diğer bir deyişle proton üzerindeki (ya da protondakinin negatifi olan elektron üzerindeki) yük olarak be-

[19] 1874'te temel elektrik yükünü ilk kez (kabaca) kestirmiş olan İrlandalı fizikçi George Johnstone Stoney 1891'de bu temel birim için "elektron" deyimini buldu. Amerikalı fizikçi Robert Andrews Millikan 1959'da elektrik yüklü cisimler üzerindeki yükün, iyi tanımlı bir değerin (elektron yükü) tamsayı katları olarak geldiğini kesin olarak gösteren ünlü "yağ damlası" deneyini tasarladı.

lirlenir.[20] Şimdilerde protonların, "kuarklar" adı verilen daha küçük (ve ek olarak "gluonlar" denen yüksüz) parçacıklardan oluşmak anlamında, bileşik yapılı nesneler olduklarına inanılır. Her bir protonda sırasıyla $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ elektrik yükü değerlerine sahip üç kuark bulunur. Bu yük bileşenleri toplandığında proton için bütünde 1 değerini verir. Kuarklar temel parçacıklarsa temel yük birimi daha önce elimizde görünenin üçte biridir. Yine de elektrik yükünün tamsayılar biçiminde ölçülüyor olması hâlâ geçerlidir fakat şimdi bu bir proton yükünün üçte biri olan tamsayı çarpanıdır. (Kuarklar ve gluonların modern parçacık fiziğindeki rolleri §§25.3–7'de tartışılacak.)

Elektrik yükü *toplamsal kuantum sayı* olarak adlandırılan şeyin yalnızca bir örneğidir. Kuantum sayıları Doğanın parçacıklarını niteleme işlevi gören niceliklerdir. Burada bir tür gerçel sayı olarak ele alacağım böylesi bir kuantum sayısı onun değerini ancak bileşik bir varlık için türetmek üzere onu oluşturan parçacıklardan her birinin değerini, elbette yukarıda belirtilmiş proton ve onun kuark bileşenleri durumunda olduğu gibi işaretleri de hesaba katarak basitçe toplarsak "toplamsal" olur. Şu anki fizik bilgimizin durumuna göre bilinen tüm toplamsal kuantum sayıların[21] nicelikleri aslında genel olarak gerçel sayılarla ya da negatif değerlerin de gerçek olarak meydana geleceği şekilde doğal sayılarla değil tamsayı sistemleri biçiminde belirlenir.

Gerçekte 20. yüzyıl fiziğine göre, fiziki kavramların negatif bir sayısından bahsetmenin anlamlı *olduğu* belirli bir görüş mevcuttur. Büyük fizikçi Paul Dirac 1929–1931 yılları arasında, (sonradan anlaşıldığı üzere) her bir tür parçacığa karşılık gelen, toplamsal kuantum sayısı değerinin orijinal parçacığın sahip olduğu değerin tam olarak negatifine eşit olduğu bir *karşı–parçacık* bulunduğunu belirten karşı–parçacıklar kuramını ileri sürdü; *bkz.* §§24.2, 8. Bu nedenle tamsayılar sistemi (negatifler de dahil olarak) aslında fiziki evrenle açık bir ilişkiye, tamsayıların matematik, ticaret ve pek çok diğer insan eyleminde büyük değer bulduğu pek çok yüzyıla karşın yalnızca 20. yüzyılda açık hale gelen bir ilişkiye sahip görünür.

Bununla birlikte bu kritik noktada önemli bir niteleme yapılmalıdır. Karşı–protonun bir anlamda negatif bir proton olduğu doğru ise de o ger-

---

[20] R. A. Lyttleton ve H. Bondi 1959'da proton ve elektron yüklerindeki 10^{18}'de bir düzeyindeki hafif bir farklılığın evrenin genişlemesinde hesaba katılabileceğini ileri sürdüler (bunun için *bkz.* §§27.11, 13 ve bölüm28.) *Bkz.* Lyttleton ve Bondi, 1959. Yazık ki bir süre sonra bu kurama dair bir tür uyuşmazlık olduğu çeşitli deneylerle kanıtlandı. Yine de bu fikir yaratıcı düşünmenin mükemmel bir örneğini sundu.

[21] Burada "toplamsal" kuantum sayılarını, fizikçilerin §5.5'te geleceğimiz "çarpımsal" dediklerinden ayırıyorum.

çekte "eksi bir, (–1), proton" değildir. Bunun nedeni işareti tersine çevirme işleminin yalnızca *toplamsal* kuantum sayılarıyla ilgili olmasıdır, oysa ki modern fizik kuramında *kütle* kavramı toplamsal değildir. Bu konu biraz daha ayrıntılı olarak §18.7'de açıklanacak. "Eksi bir proton"un, kütlesi sıradan bir protonun kütle değerinin negatifi olan bir karşı–proton olması gerekir. Öte taraftan gerçek bir fiziki parçacığın kütlesinin negatif olmasına izin verilmez. Bir karşı–proton sıradan bir protonla aynı, pozitif bir kütleye sahiptir. Daha ileride, kuantum alan kuramındaki görüşler uyarınca kütlenin (ya da daha doğru olarak enerji) negatif olabileceği, "sanal" parçacıklar olarak adlandırılan şeylerin var olduğunu göreceğiz. "Eksi bir proton" aslında sanal bir karşı–proton olur. Bununla birlikte sanal bir parçacık, bir "gerçek parçacık" gibi bağımsız bir varlığa sahip değildir.

Şimdi rasyonel sayılar hakkındaki ilgili soruyu soralım. Bu sayı sistemi fiziki evrenle herhangi dolaysız bir ilişki buldu mu? Bilindiği kadarıyla durumun bu olmadığı görülür, en azından geleneksel kuram söz konusu olduğunda. Rasyonel sayılar ailesinin yardımcı olduğu bazı fiziki tuhaflıklar[22] mevcuttur fakat bunların rasyonel sayılar için herhangi temel bir fiziki rol açığa çıkardığını iddia etmek zor olur. Öte taraftan rasyonellerin, temel kuantum mekaniksel olasılıklarda (her biri yalnızca sınırlı sayıda olasılık içeren, muhtemelen alternatifler arasında bir seçimi temsil eden rasyonel bir olasılık) belirli bir rolü var olabilir. Bu tarz bir şey spin ağları kuramında, §32.6'da kısaca açıklanacağı üzere bir rol oynar. Şimdilik bu fikirlerin uygun konumları belirsizdir.

Kabul edilen kuram uyarınca, evrenin işleyişinde temel bir rol oynadığı görülen farklı türde sayılar yine de mevcuttur. Bunların en önemli ve çarpıcı olanı, görünüşte gizemli olan ve genellikle "i" harfiyle gösterilen $\sqrt{-1}$ niceliğinin ortaya konup gerçel sayı sistemine eklendiği *karmaşık sayılar*dır. İlk olarak 16. yüzyılda rastlanmış ve yüzyıllarca kuşkuyla ele alınmış olan karmaşık sayıların matematiksel faydası, matematik camiasını, bu sayılar matematiksel düşünüşümüzün vazgeçilmez, hatta sihirli bir bileşeni haline gelene dek adım adım hep daha yüksek bir derecede derinden etkiledi. Hatta şu anda bunların yalnızca matematik için temel olmadıklarını biliyoruz: bu tuhaf sayılar ayrıca fiziki evrenin en küçük düzeylerindeki işlemlere ilişkin olağanüstü ve temel bir rol oynar. Bu, merak etmeye ilişkin bir sebeptir ve hatta, matematiksel fikirlerle fiziki evrenin daha derin işlemleri arasındaki yakınsamaya ilişkin, bu bölüm boyunca ele aldığımız gerçel sayı sisteminden daha çarpıcı bir örnektir. Şimdi de bu dikkat çekici sayılara gelelim.

---

[22] Örneğin "kesirli kuantum Hall etkisi"nde rasyonel sayıların kilit bir rol oynadığı görülür, *bkz., örn.* Fröhlich ve Pedrini, 2000.

4

SİHİRLİ KARMAŞIK SAYILAR

4.1 Sihirli "i" sayısı

–1'in bir karekökü olabilmesi nasıl mümkün olur? Pozitif bir sayının karesi her zaman pozitiftir ve negatif bir sayının karesi de yine pozitiftir (ve 0'ın karesi yine 0'dır, bu nedenle burada bize pek de yararlı değildir). Karesi gerçekten negatif olan bir sayı bulabilmemiz olanaksız görünür. Yine de bu, daha önce 2'nin rasyonel sayılar sistemi içinde bir karekökü olmadığını doğruladığımız türde bir durumdur. O durumu kendi sayı sistemimizi rasyonellerden daha büyük bir sisteme genişleterek çözdük ve gerçeller sistemi üzerinde anlaştık. Belki aynı numara yeniden işler.

Aslında işleyecek. Gerçekte yapmamız gereken rasyonellerden gerçellere geçişte yaptığımızdan çok daha kolay ve daha az zorlayıcı bir şeydir. (Raphael Bombelli bu işlemi, Gerolamo Cardano'nun karmaşık sayılarla 1545 tarihli *Ars Magna*'sındaki özgün karşılaşmasını takiben 1572'de *L'Algebra* adlı çalışmasında ortaya koymuştur.) Tüm yapmamız gereken, karesi –1'e eşit, "i" denilen basit bir nicelik ileri sürmek ve onu, gerçel sayılarla olan birleşimlerinde

$$a + ib$$

biçiminde ifadeler oluşturmasına olanak verecek şekilde gerçeller sistemine eklemlemektir. Herhangi bu tür bir birleşime *karmaşık sayı* denir. Karmaşık sayıların nasıl toplandığını görmek kolaydır: önceki biçimle (orijinal ifademizdeki a ve b'nin yerlerini alan $a+c$ ve $b+d$ gerçel sayılarıyla) aynı şekilde:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Peki ya çarpma? Bu da neredeyse aynı kolaylıktadır. Gelin $a + ib$ ile $c + id$'nin çarpımını bulalım. Öncelikle bu katsayıları, ifadeyi genişletmek üzere cebirin temel kurallarını kullanarak çarparız:[1]

[1] Bu kurallar için *bkz.* alıştırma [4.2]

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + aid + ibid$$
$$= ac + i(bc + ad) + i^2bd.$$

Öte taraftan $i^2 = -1$ olduğundan ifadeyi yine orijinal $a + ib$ ifademizle aynı biçimde fakat $ac - bd$, a'nın ve $bc + ad$, b'nin yerini alacak şekilde tekrar yazabiliriz:

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad).$$

İki karmaşık sayıyı birbirinden çıkarmak da yeterince kolaydır fakat ya bölme işlemi? Temel aritmetikte sıfır olmayan herhangi bir gerçel sayıyla bölme yapma olanağımız olduğunu anımsayın. Gelin şimdi $a + ib$ karmaşık sayısını $c + id$ karmaşık sayısına bölmeye çalışalım. İkinci karmaşık sayıyı, c ve d gerçel sayılarının ikisinin de aynı anda sıfır olamayacağı anlamına gelmek üzere sıfırdan farklı seçmek zorundayız. Bu nedenle $c^2 + d^2 > 0$ ve böylece $c^2 + d^2 \neq 0$. Bu durumda $c^2 + d^2$ ile bölme yapabiliriz.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

ifadesinin doğruluğunu kontrol etmek (ifadenin her iki tarafını $c + id$ ifadesiyle çarparak) dolaysız bir alıştırmadır.[4.1] Bu da daha önceki genel biçimdedir ve dolayısıyla yine bir karmaşık sayıdır.

Karmaşık sayılarla oynamaya alıştığımızda $a + ib$'yi şeylerin bir çifti, diğer bir deyişle a ve b denilen iki gerçel sayı olarak düşünmekten vazgeçip onu kendinde bir bütün gibi düşünürüz ve karmaşık sayının tümünü göstermek üzere tek bir harf, diyelim ki z, kullanabiriz; $z = a + ib$. Cebirin tüm normal kurallarının karmaşık sayılarda da geçerli olduğu kontol edilebilir.[4.2] Gerçekte tüm bunlar, gerçel sayılarla ilgili her şeyi kontrol etmekten çok daha kolaydır. (Bu kontrol için, daha önce kendimizi cebirin kurallarının kesirler için geçerli olduğuna ikna ettiğimizi düşünürüz ve daha sonra kuralların gerçel sayılar için de işlediğini göstermek üzere Dedekind'ın "kesikler"ini kullanmamız gerekir.) Bu bakış açısından kesirlerin gerçellere doğru çok daha karışık olan genişletme işlemi antik Yunan zamanı sonrası sorgulanmaksızın genel olarak kabul edilmişken, karmaşık sayılara uzunca bir süre şüpheyle bakılması epey olağandışı görünür.

Bu şüphe, büyük olasılıkla karmaşık sayıların, insanların kendilerine herhangi açık bir şekilde fiziki dünyadan yola çıkılarak sunulmuş olma-

---

[4.1] Bunu yapın.

[4.2] İlgili kuralların $w + z = z + w$, $w + (u + z) = (w + u) + z$, $wz = zw$, $w(uz) = (wu)z$, $w(u + z) = wu + wz$, $w + 0 = w$, $w1 = w$ olduğunu kontrol edin.

ması nedeniyle meydana çıktı. Gerçel sayıların durumunda, uzaklık, zaman ve diğer fiziki nicelikler bu tür sayıların gerekliliğini şart koşar görünmüştü; oysa karmaşık sayılar yalnızca, daha önce bildiklerinden daha geniş bir kapsama sahip sayılar arzu eden matematikçilerin hayal güçlerinin sonucu olarak keşfedilmiş birimler şeklinde görünmüştü. Bununla birlikte §3.3'ten, matematiksel gerçel sayıların fiziki uzunluk ya da zaman kavramlarıyla olan bağlantısının daha önce olduğunu düşündüğümüz kadar açık olmadığını anımsamalıyız. Bir Dedekind kesiğinin ufak ayrıntılarını dolaysız olarak göremeyiz ya da gelişigüzel şekilde büyük ya da küçük zaman ya da uzunlukların doğada gerçekten var oldukları açık değildir. "Gerçel sayılar" olarak adlandırılanın, karmaşık sayılar kadar matematikçilerin hayal güçlerinin ürünü olduğu iddia edilebilir. Buna rağmen karmaşık sayıların doğayla, gerçeller kadar, belki de daha fazla, gerçekten dikkat çekici bir birliği olduğunu bulmalıyız. Bu sanki Doğanın kendisinin, karmaşık sayılar sisteminin kapsam ve tutarlılığından etkilenmemiz kadar etkilenmiş ve kendi dünyasının en ufak düzeyindeki kusursuz işlemleri bu sayılara emanet etmiş olması gibidir. Bunun nasıl işlediğini bölümler 21–23'te görüyor olacağız.

Dahası karmaşık sayıların yalnızca kapsamı ve tutarlılığına vurgu yapmak bu sisteme haksızlık olur. Bana göre yalnızca "sihir" olarak bahsedilebilecek bir şey daha söz konusudur. Bu bölümün geri kalanında ve sonraki iki bölümde okuyucuya bu sihre ait kendine özgü bir şeyi aktarmaya çabalayacağım. Daha sonra bölümler 7–9'da bu karmaşık sayı sihrinin bazı en çarpıcı ve beklenmedik belirtilerine yeniden tanıklık edeceğiz.

Karmaşık sayıların bulunması üzerinden geçen dört yüzyılda yavaş yavaş pek çok sihirli nitelik açığa çıktı. Oysa bu, matematik içinde bulunduğu fark edilmiş bir sihirdir ve aslında yalnızca gerçellerin kullanımı yoluyla erişilemeyecek bir yarar ve matematiksel bir kavrayış sağlar. Fiziki dünyanın onunla ilgilenmesini beklemeye ilişkin herhangi bir sebep yoktu. Bu sayıların Cardano ve Bombelli'nin çalışmaları yoluyla ortaya koyulmalarından 350 yıl kadar sonra karmaşık sayıların sihrinin fark edilmesi yalnızca onların matematiksel rolleri yoluyla olanaklı oldu. Karmaşık sayılara ilişkin kuşkularını dillendiren herkes için, 20. yüzyılın son üç çeyreğindeki fiziğe göre dünyanın davranışlarını, onun en küçük ölçeğinde yöneten yasaların esasen karmaşık sayı sistemi tarafından yönetildiğini öğrenmek büyük bir sürpriz oldu.

Bu konular kitabın sonraki bazı kısımlarının (özellikle bölümler 21–23'ün) odağı olacak. Şimdilik karmaşık sayıların fiziki sihirlerini daha sonraya bırakarak onların bazı matematiksel sihirlerine yoğunlaşalım. Tüm yaptığımızın, aritmetiğin normal yasalarının korunması iddiasıyla

birlikte –1'in bir karekökü olduğunu iddia etmek olduğunu ve bu iddiaların tutarlı şekilde karşılandığını doğruladığımızı anımsayın. Bu oldukça adil bir şekilde yapılmış bir şey gibi görünür. Fakat şimdi sihir şerefine!

4.2 Denklemleri karmaşık sayılarla çözmek

Devam eden kısımda, öncekinden bir miktar daha fazla matematiksel gösterim ortaya koymayı gerekli görüyorum. Bunun için özür dilerim. Bununla birlikte belirli miktar gösterim kullanmaksızın önemli matematiksel fikirleri aktarmak pek de olanaklı değil. Bu şeylerden rahatsız pek çok okur olacağının farkındayım. Bu tür okurlara önerim esasen yalnızca sözcükleri okuyup denklemleri anlamaya çalışmakta çok fazla zahmete girmemeleridir. En azından çeşitli denklemlerin üzerinden atlayıp devam edin. Aslında bu kitaba, özellikle ileriki bazı bölümlere dağıtılmış oldukça ciddi bir sayıda matematiksel ifade mevcut olacaktır. Tahminimce, bütün ifadelerin ayrıntılı olarak gerçekten ne anlama geldiğini anlamak için küçük bir girişimde bile bulunsanız kavrayışın belirli görünümleri nihayetinde ortaya çıkmaya başlayacaktır. Böyle umuyorum çünkü karmaşık sayıların sihri özelde kıymet vermeye değer bir mucizedir. Matematiksel gösterimlerin üstesinden gelebiliyorsanız öylesi çok daha iyi.

Öncelikle diğer sayıların karekökleri olup olmadığını sorabiliriz. –2'ye ne dersiniz örneğin? Kolay. $i\sqrt{2}$ karmaşık sayısının karesi kesinlikle –2'dir, aynı şekilde $-i\sqrt{2}$ sayısının da. Dahası herhangi pozitif bir a gerçel sayısı için $i\sqrt{a}$'nın karesi, $-i\sqrt{a}$'nın karesinde olduğu gibi $-a$'ya eşittir. Bunda gerçek bir sihir yok. Peki ya (a ve b'nin gerçel olduğu) genel $a + ib$ karmaşık sayısı?

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

karmaşık sayısının (ve negatifinin de) karesinin $a + ib$ olduğunu buluruz.[4.3] Böylece yalnızca tek bir niceliğe (diğer bir deyişle –1) bir karekök eklemiş olmamıza rağmen sonuçta oluşan sistemdeki her sayının otomatik olarak bir kareköke sahip olduğunu bulmuş oluruz! Bu, rasyonellerden gerçellere geçişte olandan epeyce farklıdır. O durumda, rasyoneller sistemine yerleştirilmiş $\sqrt{2}$ niceliği tek başına bizi hemen hemen hiçbir yere götürmemişti.

Elbette bu daha başlangıç. Küp kökler, beşinci derece kökler, 999. derece kökler, π. derece kökler, ya da hatta i. derece kökler üzerine sorular

[4.3] Bunu kontrol edin.

sorabiliriz. Mucizevi olarak, hangi karmaşık kökü seçersek seçelim ve onu hangi karmaşık sayıya uygularsak uygulayalım (0 hariç), bu problemin her zaman bir karmaşık sayılı çözümü mevcuttur. (Aslında, normalde problemin, yakında göreceğimiz üzere çok sayıda farklı çözümü mevcuttur. Yukarıda karekökler için iki çözüm elde ettiğimizi, z karmaşık sayısının karekökünün negatifinin yine aynı z'nin bir karekökü olduğunu, belirttik. Daha yüksek dereceli köklerde daha fazla çözüm mevcuttur; *bkz.* §5.4.)

Yine de hâlâ karmaşık sayı sihrinin yüzeyini kazıyoruz. Az önce ileri sürdüğüm şeyi yapmak (karmaşık sayıya ait bir logaritma kavramını, birazdan bölüm 5'te göreceğimiz üzere, bir kez elde ettiğimizde) gerçekten oldukça basittir. Gerçekte

$$1 - z + z^4 = 0$$

ya da

$$\pi + iz - \sqrt{417}\, z^3 + z^{999} = 0$$

gibi polinom denklemlerinin karmaşık sayı çözümlerine sahip olma zorunluluğunu iddia eden "cebirin temel kuramı" olarak adlandırılan kuram bir miktar daha dikkat çekicidir. Daha açık olarak, a_0 ,a_1, a_2, a_3, ..., a_n'nin a_n sıfırdan farklı olmak üzere verili karmaşık sayılar olduğu

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n = 0$$

biçimindeki herhangi bir denklemin bir çözümü her zaman mevcut olacaktır.[2] (Burada n, seçmeye özen gösterdiğimiz istediğimiz kadar büyük herhangi bir pozitif tamsayı olabilir.) Karşılaştırmak için gerçekte belirli bir

$$1 + z^2 = 0$$

denklemine basitçe bir çözüm bulmayı ortaya koyduğumu anımsayabiliriz. Geri kalanın tümünü *özgürce* elde ederiz!

Daha fazla ilerlemeden önce, Cardano'nun 1539 dolaylarında karmaşık sayılarla ilk karşılaştığı ve onlarda var olan sihirli özelliklerin başka bir görünümüne ait bir ipucu yakaladığında ilgilenmiş olduğu problemden

---

[2] Bu z'nin tek değişken olduğu herhangi bir karmaşık polinomun doğrusal çarpanlarına ayrılmasının dolaysız bir sonucudur,[4.6]

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = a_n(z'b_1)(z'b_2) \ldots (z'b_n)$$

ve normalde "cebirin temel kuramı" olarak adlandırılan şey *bu* ifadedir.

[4.6] Dipnot 2'ye bağlı alıştırma. Bunu gösterin. *İpucu*: Bu polinom, $z = b$ ifadesi verili denklemi çözdüğü herhangi bir zaman, $z - b$'ye "bölünürse" geride kalan hiçbir artan olmadığını gösterin.

bahsetmeye değer. Bu problem gerçekte, (gerçel) ***kübik*** bir denklemin (diğer bir deyişle yukarıdaki $n = 3$) genel çözümü için bir ifade bulmaktı. Cardano genel kübik denklemin basit bir dönüşümle

$$x^3 = 3px + 2q$$

biçimine indirgenebildiğini buldu. Buradaki p ve q gerçel sayı olmalıdır ve denklemde z yerine x'in kullanımına şu anda karmaşık sayı çözümleri yerine gerçel sayı çözümleriyle ilgilendiğimizi belirtmek için yeniden döndüm. Cardano'nun tüm çözümü 1539'da Niccoló Fontana'dan ("Tartaglia") öğrenmiş olduğu daha önceki bir kısmi çözümden, her ne kadar bu kısmi çözüm (hatta tüm çözüm bile) daha önce (1526'dan önce) Scipione del Ferro tarafından bulunmuş olsa da, geliştirilmiş görünmekteydi.[3] Cardano (del Ferro) çözümü,

$$w = (q^2 - p^3)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere, esasen (modern gösterimle yazılmış haliyle) şuydu:

$$x = (q + w)^{\frac{1}{3}} + (q - w)^{\frac{1}{3}}$$

Şimdi bu denklem,

$$q^2 \geq p^3$$

ise gerçel sayılar sistemi içinde hiçbir temel soruna yol açmaz. Bu durumda denklemin yalnızca bir gerçel çözümü, x, mevcuttur ve aslında bu yukarıda verildiği üzere Cardano(del Ferro) çözümü tarafından doğru olarak ortaya konur. Bununla birlikte ***indirgenemez durum*** olarak adlandırıldığı şekilde,

$$q^2 < p^3$$

ise böylece, şimdi ***üç*** adet gerçel çözüm olmasına rağmen denklem ***negatif*** $q^2 - p^3$ sayısının karekökünü içerir ve karmaşık sayıları dahil etmeksizin çözülemez. Aslında Bombelli'nin (1572 tarihli *L'Algebra*'sının 2. bölümünde) daha sonra gösterdiği üzere kendimizi karmaşık sayıları kabul etmeye ikna edersek bu durumda üç gerçel çözümün tümü de denklem tarafından

[3] Hikayeye göre Tartaglia, Cardano'ya kısmi çözümünü yalnızca Cardano'nun gizlilik yemini etmesi koşuluyla açıklamıştı. Bu yüzden Cardano çok daha genel olan çözümünü bu yemini bozmaksızın yayımlayamadı. Bununla birlikte, daha sonra 1543'te Bologna'ya yaptığı bir yolculukta Cardano del Ferro'nun ölümünden sonra ortaya çıkan tezlerini inceledi ve kendini del Ferro'nun mevcut önceliğine ikna etti. Bunun onu, tüm bu sonuçları 1545'te Ars Magna'da (Tartaglia ve del Ferro'nun ikisine de teşekkür ederek) yayımlamak üzere serbest bıraktığını düşündü. Tartaglia aynı fikirde olmadı ve çekişme çok acı sonuçlar doğurdu. *Bkz.* Wykes, 1985.

doğru şekilde ifade edilir.[4] (Bu anlamlı gelir çünkü ifade bize, iki karmaşık sayının birbirleriyle toplanmaları sayesinde, i'li terim içeren kısımların toplamada sadeleşip geriye gerçel sayılı bir yanıt bırakmasına olanak sunar.)[5] Bununla ilgili gizemli olan şey, problem her ne kadar karmaşık sayılarla hiçbir ilişkisi yokmuş gibi gözükse de, –denklem gerçel katsayılara sahip ve tüm çözümleri (bu "indirgenemez" durumda) gerçel olmak üzere– denklemin bize sırf gerçel sayılı çözümlerle dönmeye olanak verebilmesi için karmaşık sayılar dünyasının görünüşte yabancı bölgesi boyunca yolculuk etmemiz gerekmesidir. Kendimizi düz ve dar "gerçel" yolla sınırlasaydık elimiz boş dönerdik. (İronik biçimde, orijinal denklemin *karmaşık* çözümleri yalnızca, denklemin bu karmaşık yolculuğu içermesinin mutlaka gerek*me*diği durumlarda meydana gelebilir.)

4.3 Üslü serinin yakınsaması

Bu dikkat çekici gerçeklere karşın karmaşık sayı sihri içinde hâlâ fazla yol almadık. Gelecek çok daha fazlası mevcut! Örneğin karmaşık sayıların değersiz olduğu bir alan *üslü seri* olarak adlandırılan şeyin davranışına ilişkin bir anlayış sunar. Üslü bir seri

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

biçiminde *sonsuz* bir toplamdır. Bu toplam sonsuz sayıda terim içerdiğinden durum serinin, onun terimlerini toplamaya ne kadar devam edersek edelim belirli bir sonlu değere ulaşmaması demek olan, *ıraksaması* olabilir. Bir örnek olarak ($a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 1, \ldots$ olarak aldığım)

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

serisini ele alın. $x = 1$ olarak alırsak, daha sonra terimleri art arda toplayarak

$$1, \qquad 1 + 1 = 2, \qquad 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$1 + 1 + 1 + 1 = 4, \qquad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5, \text{ vb}$$

elde ederiz ve serinin belirli bir sonlu değere ulaşmasının hiçbir olanağı olmadığını, böylece *ıraksak* olduğunu görürüz. Hatta $x = 2$'yi denediğimizde her bir terim daha büyük hale geldiğinden işler daha da karışır; terimleri art arda topladığımızda

---

[4] Daha fazla bilgi için *bkz.* van der Waerden, 1985.

[5] Bunun sebebi, birbirinin karmaşık eşleniği olan iki sayıyı topluyor olmamızdır ve bu tür bir toplam daima gerçel bir sayıdır. *Bkz.* §10.1.

$$1,\ 1+4=5,\ 1+4+16=21,\ 1+4+16+64=85,\ \text{vb}$$

açıkça ıraksayan bir seri elde ederiz. Diğer taraftan $x=\frac{1}{2}$ koyarsak

$$1,\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{85}{64},\ \text{vb}$$

elde ederiz ve bu sayıların sınırlayıcı $\frac{4}{3}$ değerine sürekli daha yakın hale geldiği bir sonuç ortaya çıkar, böylece bu defa seri *yakınsaktır*.

Serinin $x=1$ ve $x=2$ değerleri için kaçınılmaz olarak ıraksayıp $x=\frac{1}{2}$ değeri içinse $\frac{4}{3}$ değerini verecek şekilde yakınsamasının altında yatan nedeni değerlendirmek, bir anlamda, çok da zor değildir. Bunun için tüm serinin toplamının yanıtını açıkça yazabiliriz ve böylece

$$1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots=(1-x^2)^{-1}$$

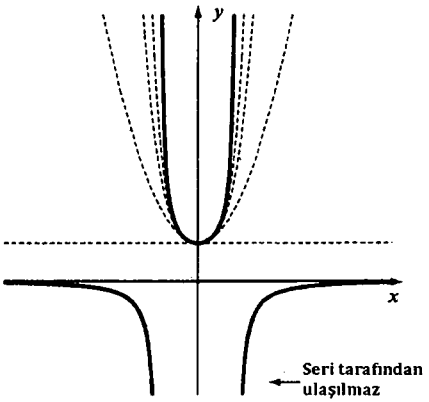
buluruz.[4.4] $x=1$ değerini yerine koyduğumuzda bu yanıtı, "sonsuz"[6] anlamına gelen $(1-1^2)=0^{-1}$ olarak buluruz ve bu bize serinin, x'in o değeri için neden ıraksamak zorunda olduğuna ilişkin bir anlayış sağlar. $x=\frac{1}{2}$ değerini yerine koyduğumuzda yanıt $\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$ olur ve seri yukarıda belirtildiği gibi gerçekten bu belirli değere yakınsar.

Tüm bunlar oldukça makul görünüyor. Peki ya $x=2$ olduğunda? Bu halde açık denklemle elde edilen bir "yanıt", her ne kadar bu değeri serinin terimlerini basitçe toplayarak elde edemiyor görünsek de, mevcuttur; $(1-4)^{-1}=-\frac{1}{3}$. Bu yanıtı elde edemeyiz çünkü $-\frac{1}{3}$ negatifken biz yalnızca pozitif terimleri birbirleriyle topluyoruz. Serinin ıraksamasının nedeni, $x=2$ olduğunda her bir terimin aslında $x=1$ olduğu durumda kendisine karşılık gelen terimden daha büyük olması ve böylece $x=2'$ nin ıraksaklığının $x=1$'in ıraksaklığını izlemesidir. $x=2$ olduğunda durum "yanıt"ın gerçekten sonsuz olması değil fakat bu yanıta doğrudan seriyi toplama girişimiyle ulaşamamamızdır. Şekil 4.1'de serinin art arda gelen terimlerinin kısmi bir toplamını $(1-x^2)^{-1}$ "yanıt"ıyla birlikte çizdim ve burada x'in -1 ve $+1$ değerleri arasında kalmasının kesin olarak[7] sağlanması şartıyla, kısmi toplamları gösteren eğrilerin aslında bu yanıtla, $(1-x^2)^{-1}$, beklediğimiz üzere yakınsadığını görebiliriz. Bununla birlikte bu aralık dışında seri basit olarak ıraksar ve aslında herhangi bir sonlu değere de ulaşmaz.

[4.4] Bu ifadenin nasıl kontrol edileceğini görebiliyor musunuz?

[6] Not 2.4'ten 0^{-1}'in $\frac{1}{0}$, diğer bir deyişle "bir bölü sıfır", anlamına gelmesi gerektiğini anımsayın. Bu, kural dışı "$0^{-1}=\infty$ "işleminin "sonucu"nu ifade etmek için uygun bir "stenodur".

[7] "Kesin olarak", bitiş değerlerinin aralığa dahil olmaması anlamına gelir.



Şekil 4.1 Serinin $(1-x^2)^{-1}$ için sırasıyla $1, 1+x^2, 1+x^2+x^4, 1+x^2+x^4+x^6$ olan kısmi toplamları, $|x|<1$ için $(1-x^2)^{-1}$'e yakınsayan ve $|x|>1$ için ıraksayan şekilde göstererek çizilir.

Küçük bir arasöz olarak daha sonra bizim için önemli olacak belirli bir konuya burada değinmek yararlı olacak. Şu soruyu soralım: yukarıdaki ifadede $x = 2$ koyarak elde ettiğimiz denklem,

$$1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \cdots = (1-2^2)^{-1} = -\frac{1}{3},$$

gerçekten bir anlam ifade eder mi? Büyük 18. yüzyıl matematikçisi Leonhard Euler sık sık bu tür denklemleri not ederdi ve serilerin "yakınsaması" ve benzeri konularla ilgili o ilk zamanlarda hiçbir şeyin uygun şekilde anlaşılmamış olması gerekçesiyle mazur görülebilecekken, bu tür saçmalıklara sadık kaldığı için onunla kibarca alay etmek moda haline geldi. Aslında serilerle ilgili hassas matematiksel işlem, Augustin Cauchy ve diğerlerinin çalışmalarına, 18. yüzyıl sonları ve 19. yüzyıl başlarına kadar ortaya çıkmadı. Dahası, bu hassas işlem uyarınca yukarıdaki denklem resmen "anlamsız" olarak sınıflandırılır. Yine de, Euler'in bu doğaya sahip açık saçmalıkları not ederken ne yaptığını gerçekten bildiği ve kendilerine göre, yukarıdaki denklemin "doğru" sayılmasını gerektiren anlamların mevcut olduğu değerlendirmesini yapmanın önemli olduğunu düşünüyorum.

Matematikte, birisine ait denklemlerin ifade ettiği kesin ve tam anlam aslında mutlak derecede açık olmak zorundadır. Bununla birlikte sonuçta daha derin kavrayışlara yol açabilecek "sahne arkasında geçen olaylara" duyarsız olmamak da eşit derecede önemlidir. Kesin olarak mantıklı görünen, örneğin pozitif $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \cdots$ terimlerinin toplamının $-\frac{1}{3}$ olmasının mümkün olmaması gerçeği gibi şeylere çok katı şekilde bağlı kalmak nedeniyle, bu tür derin kavrayışlara ait görüşü yitirmek kolaydır.

Yerinde bir örnek olarak $x^2 + 1 = 0$ denklemine ait gerçel bir çözüm bulma mantıklı saçmalığını anımsayalım. Çözüm mevcut değildir; yine de bu şekilde bırakırsak karmaşık sayıların ortaya konmasıyla sağlanan derin kavrayışların tümünü ıskalarız. Benzer bir uyarı $x^2 = 2$ için rasyonel bir çözüm bulma saçmalığı için de geçerlidir. Gerçekte yukarıdaki sonsuz seriye ait $-\frac{1}{3}$ yanıtına matematiksel bir anlam vermek tamamen olanaklıdır fakat bize neye izin verilip neye verilmediğini söyleyen kurallarla ilgili dikkatli olunmak zorundadır. Amacım bu tür konuları burada ayrıntılı olarak tartışmak değil[8] fakat bu doğaya sahip ıraksak serilere modern fizikte, özellikle kuantum alan kuramı alanında sıkça rastlanıldığına işaret edilebilir (özellikle *bkz.* §§26.7, 9 ve §§31.2, 13). Bu şekilde elde edilen "yanıtlar"ın gerçekten anlamlı ve dahası gerçekten doğru olup olmadıklarına karar vermek oldukça hassas bir konudur. Aslında bazen bu tür ıraksak ifadeler üzerinde oynama yaparak son derece eksiksiz yanıtlar elde edilir ve bunlar ara sıra gerçek fiziki deneyle kıyaslanarak çarpıcı biçimde doğrulanırlar. Diğer taraftan çoğu kez bu kadar şanslı olunmaz. Bu hassas konular günümüzün fizik kuramlarında önemli rollere sahiptir ve kendilerini değerlendirme girişimlerimizle oldukça ilgilidir. Burada acil önemi olan konumuz, bu tür açık biçimde anlamsız ifadelere dayandırılabilen "anlam"ın sıklıkla, zorunlu bir şekilde karmaşık sayıların özelliklerine bağlı oluşudur.

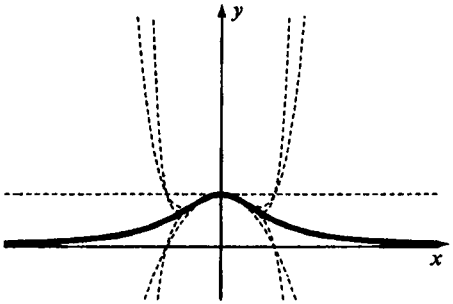
Şimdi serilerin yakınsaması konusuna geri dönelim ve karmaşık sayıların resme nasıl girdiğini görmeyi deneyelim. Bunun için $(1 - x^2)^{-1}$'den yalnızca bir parça farklı bir $(1 + x^2)^{-1}$ fonksiyonunu dikkate alalım ve ona ait hassas bir üslü sayı genişlemesi olup olmadığını görmeye çalışalım. Şu an tam yakınsama daha olanaklı görünüyor çünkü $(1 + x^2)^{-1}$ ifadesi gerçel sayıların tüm aralığı boyunca pürüzsüz ve sonlu kalıyor. Aslında $(1 + x^2)^{-1}$ için daha sade görünümlü ve daha önce elimizde olandan yalnızca bir parça, birbirini takip eden terimlerin yalnızca işaretlerinde olan bir farka sahip bir üslü seri mevcuttur;[4.5]

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots = (1 + x^2)^{-1}.$$

Şekil 4.2'de seriye ait kısmi toplamları, tıpkı önceki gibi, art arda gelen beş terime kadar, $(1 + x^2)^{-1}$ yanıtıyla birlikte çizdim. Şaşırtıcı görünen şey kısmi toplamların yanıta hâlâ yalnızca kesinlikle -1 ve $+1$ değerleri arasındaki aralıkta yakınsamasıdır. Yanıt sonsuza hiç gitmese bile bu aralığın dışında bir ıraksama elde eder görünürüz. Bunu açık olarak daha

[8] Daha fazla bilgi için *örn. bkz.* Hardy, 1940.

[4.5] Bu iki seri arasındaki basit ilişki için temel bir neden görebiliyor musunuz?



Şekil 4.2 Kısmi toplamlar $1, 1 - x^2, 1 - x^2 + x^4$ *ve* $1 - x^2 + x^4 - x^6$ *benzer şekilde çizildi ve fonksiyonun* $x = \pm 1$*'de kusursuzca iyi tanımlanmış olması gerçeğine rağmen yine* $|x| < 1$ *iken yakınsama ve* $|x| > 1$ *iken ıraksama mevcuttur.*

önce kullandığımız üç değeri, $x = 1$, $x = 2$ ve $x = \frac{1}{2}$ kullanarak test edebiliriz ve önceki gibi yakınsamanın yalnızca, yanıtın tüm serinin toplamı için $\frac{4}{5}$ sınırlayıcı değeriyle birlikte doğru olarak ortaya çıktığı, $x = \frac{1}{2}$ durumunda meydana geldiğini buluruz:

$$x = 1: \quad 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \text{vb},$$

$$x = 2: \quad 1, -3, 13, -51, 205, -819, \text{vb},$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad 1, \frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{51}{64}, \frac{205}{256}, \frac{819}{1024}, \text{vb}.$$

İlk durumdaki "ıraksaklığın", gerçekten sonsuza ıraksamamalarına rağmen hiç durulmayan kısmi toplamların basit bir hatası olduğunu not edelim.

Bu nedenle tek başına gerçel sayılar söz konusu olduğunda seriyi gerçekten toplamakla serinin sonsuzluktaki toplamını göstermesi gereken "yanıt"a dolaysız geçiş arasında kafa karıştırıcı bir uyuşmazlık mevcuttur. Önceki durumda sıkıntının ortaya çıktığı yerlerde kısmi toplamlar, sonsuz toplamın farzedilen yanıtı, $(1 + x^2)^{-1}$, bu yerlerde hiç de fark edilebilir herhangi bir özellik göstermemesine rağmen "uçuşa geç"er (ya da daha çok çılgın gibi aşağı ve yukarı sallanır). Gizemin çözümü, ilgimizi gerçel değerlerle sınırlamak yerine karmaşık değerleri incelersek bulunacaktır.

4.4 Caspar Wessel'in karmaşık düzlemi

Burada ne olduğunu görmek için karmaşık sayıların Öklit düzlemindeki standart *geometrik* gösterimini kullanmak önemli olacaktır. Caspar Wessel 1797'de, Jean Robert Argand 1806'da, John Warren 1828'de, ve de Carl Friedrich Gauss 1831'den önce, her biri bağımsız olarak, karmaşık sayılarda toplama ve çarpma işlemleriyle ilgili açık geometrik yorumlarda

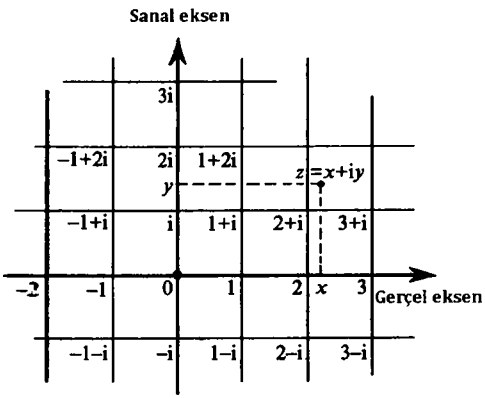
bulundukları *karmaşık düzlem* fikrini ele aldılar (*bkz.* Şekil 4.3). Şekil 4.3'te x ekseninin yatay olarak sağa, y ekseninin düşey olarak yukarıya gittiği bir şekilde standart Kartezyen eksenleri kullandım.

$$z = x + iy$$

karmaşık sayısı düzlemde (x, y) Kartezyen koordinatlı bir nokta olarak gösterildi.

Şimdi karmaşık $z = x + iy$ sayısında $y = 0$ olan özel bir durum olarak gerçel bir x sayısını düşünelim. Bu durumda diyagramımızdaki x ekseninin *gerçel sayı doğrusu*nu (diğer bir deyişle düz bir çizgi boyunca doğrusal olarak düzenlenmiş gerçel sayılar bütününü) temsil ettiğini düşünürüz. Böylece karmaşık düzlem bize, gerçel sayılar sisteminin karmaşık sayı sistemi bütünü haline gelmek için dışa doğru nasıl genişlediğine ilişkin doğrudan resimli bir gösterim sunar. Bu gerçel sayı doğrusu sıklıkla karmaşık düzlemdeki "gerçel eksen" olarak adlandırılır. Buna bağlı olarak y ekseni "sanal eksen" olarak adlandırılır ve i'nin bütün gerçel çarpanlarından oluşur.

Şimdi gelin üslü seriler biçiminde göstermeye çalıştığımız iki fonksiyonumuza geri dönelim. Bunları x gerçel değişkeninin fonksiyonları, $(1 - x^2)^{-1}$ve $(1 + x^2)^{-1}$, olarak aldık fakat şimdi bunları karmaşık bir z değişkenine de uyacak şekilde genişleteceğiz. Bunu yapmakta herhangi bir sorun yoktur ve genişlemiş fonksiyonları sırasıyla basitçe $(1 - z^2)^{-1}$, $(1 + z^2)^{-1}$ olarak yazarız. İlk gerçel fonksiyon, $(1 - x^2)^{-1}$, durumunda "ıraksama" sıkıntısının nerede başladığını ayırt edebildik çünkü fonksiyon iki yerde, $x = -1$ ve $x = +1$*tekil*dir (sonsuz hale gelme anlamında); fakat $(1 + x^2)^{-1}$'de bu iki yerde aslında gerçek hiçbir tekillik görmedik. Bununla birlikte karmaşık z değişkeni söz konusu olunca bu iki fonksiyonun



Şekil 4.3 $z = x + iy$ 'nin karmaşık düzlemi. (x, y) Kartezyen koordinatlarında, yatay olarak sağa uzanan x ekseni gerçel eksen, düşey olarak yukarı uzanan y ekseni sanal eksendir.

birbirleriyle çok daha fazla eşit halde olduklarını görürüz. $(1 - z^2)^{-1}$'nin, orijine, gerçel eksen üzerinde birim uzaklıkta olan iki yerde, $z = \pm 1$'de tekilliklere sahip olduğunu not ettik; fakat şimdi $(1 - z^2)^{-1}$'nin de orijine sanal eksen üzerinde birim uzaklıkta olan iki yerde, ($1 + z^2 = 0$ olduğundan) $z = \pm i$, tekilliklere sahip olduğunu görürüz.

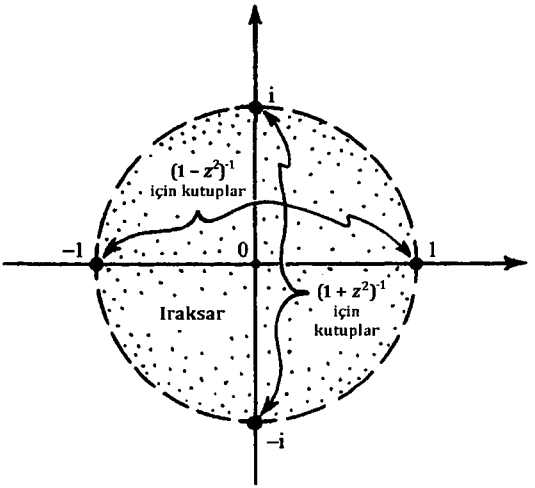
Peki ama bu karmaşık tekilliklerin, ilgili üslü serilerin ıraksama yada yakınsama sorunuyla ne ilgisi var? Bu sorunun çarpıcı bir yanıtı mevcuttur. Şu anda üslü serilerimizi gerçel değişken x'ten daha çok karmaşık değişken z'nin fonksiyonları olarak düşünüyoruz ve serilerin, z'nin karmaşık düzlemde bulunduğu yere göre yakınsadığı ya da ıraksadığı konumları sorgulayabiliriz. Herhangi bir üslü seri

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

için dikkat çekici genel yanıt,[9] karmaşık düzlemde *yakınsaklık çemberi* denilen 0 merkezli bir çemberin, karmaşık sayı z kesinlikle çember dışında yer alıyorsa seri, z'nin o değeri için ıraksarken, kesinlikle çember içinde yer aldığında z'nin o değeri için serinin yakınsaması özelliğine sahip bir çemberin mevcut oluşudur. (Serinin z gerekte çember üzerindeyken yakınsayıp yakınsamaması bir şekilde, her ne kadar §§9.6, 7'de geleceğimiz konularla ilintili olsa da, burada ilgilenmeyeceğimiz hassas bir konudur.) Bu ifadeye serilerin, yakınsaklık çemberi sıfır yarıçapa daraltıldığında z'nin sıfır olmayan tüm değerleri için ıraksadığı ve çember sonsuz yarıçapa genişletildiğinde tüm z'ler için yakınsadığı iki sınırlayıcı durumu dahil ediyorum. Verili belli bir fonksiyon için yakınsaklık çemberinin aslında nerede olduğunu bulmak üzere fonksiyonun tekilliklerinin karmaşık düzlemin neresinde konumlandıklarını görmeye çalışırız ve merkezi orijinde, $z = 0$, olup iç bölgesinde hiçbir tekillik barındırmayan en büyük çemberi (diğer bir deyişle orijine en yakın tekillik boyunca) çizeriz.

Az önce ilgilendiğimiz özel $(1 - z^2)^{-1}$ ve $(1 + z^2)^{-1}$ durumlarındaki tekillikler, (karşıt biçimde görünen bazı polinomlar kaybolduğunda ortaya çıkan) *kutuplar* denilen basit bir türdedir. Burada bu kutupların tümü orijine birim uzaklıkta bulunur ve her iki durumda da yakınsaklık çemberinin orijin etrafındaki birim çember olduğunu görürüz. Çemberin gerçel eksenle buluştuğu yerler her iki durumda da aynıdır; $z = \pm 1$'le gösterilen iki nokta (*bkz.* Şekil 4.4). Bu, iki fonksiyonun aynı alanda neden yakınsayıp ıraksadığını açıklar; basitçe gerçel değişkenlerin fonksiyonları olmalarından kaynaklanan özelliklerinin ortaya koymadığı bir gerçek. Böylece karmaşık sayılar bize, üslü serilerin, onların gerçel değişkenli yapılarının

[9] *Örn. bkz.* Priestly, 2003, s.71 –"yakınsaklık yarıçapı"yla ilgili olarak– ve Needham, 2002, s. 67, 264.



Şekil 4.4 Karmaşık düzlemde $(1-z^2)^{-1}$ ve $(1+z^2)^{-1}$ fonksiyonları, ilki için kutupları $z = \pm 1$'de ve ikincisi içinse $z = \pm i$' de olan ve ikisi de orijine aynı (birim) uzaklıktaki aynı yakınsaklık çemberine sahiptir.

basit olarak dikkate alınmasıyla erişilebilir olmayan davranışlarıyla ilgili derin kavrayışlar sağlar.

4.5 Mandelbrot kümesininin oluşturulması

Bu bölümü bitirmek üzere gelin yakınsaklık/ıraksaklık konusunun başka bir türüne göz atalım. Bu, *Mandelbrot kümesi* olarak bilinen, §1.3'te bahsedilen ve Şekil 1.2'de gösterilen olağanüstü yapının oluşumunun temelinde yatar. Aslında bu, kümenin olağanüstü karışıklığı dikkate alınırsa, yalnızca Wessel'in karmaşık düzleminin şaşırtıcı biçimde basit bir yolla tanımlanabilen bir alt kümesidir. Tüm yapmamız gereken, c'nin seçilmiş karmaşık bir sayı olduğu, yinelenen yer değiştirme işlemlerini,

$$z \longmapsto z^2 + c,$$

incelemektir. c' yi karmaşık düzlemde bir nokta olarak düşünür ve $z = 0$ ile başlarız. Daha sonra bu dönüşümü *yineleriz* (diğer bir deyişle durmadan tekrar tekrar uygularız) ve z noktasının düzlemde nasıl davrandığına bakarız. Sonsuza doğru uzaklaşıyorsa, c noktası beyaz renkle gösterilmelidir. Hiçbir şekilde sonsuza doğru uzaklaşmadan herhangi sınırlı bir bölgede geziniyorsa bu durumda c siyah renkle gösterilmelidir. Siyah bölge bize Mandelbrot kümesini verir.

Bu işlemi biraz daha ayrıntılı açıklayalım. Yineleme ne şekilde devam eder? İlk olarak c'yi sabitleriz. Sonra bir z noktası alır ve z'nin $z^2 + c$ olacağı şekilde dönüşümü uygularız. Sonra bunu yeniden uygular, böylece

$z^2 + c$'deki "z" yerine, $z^2 + c$ koyarız ve $(z^2 + c)^2 + c$ elde ederiz. Daha sonra $z^2 + c$'deki "z" yerine $(z^2 + c)^2 + c$ koyarız ve böylece ifademiz $((z^2 + c)^2 + c)^2 + c$ haline gelir. Yine $z^2 + c$'deki "z" yerine, $((z^2 + c)^2 + c)^2 + c$ koyarak $(((z^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c$ elde eder ve bu şekilde devam ederiz.

Şimdi $z = 0$ ifadesiyle başlayıp yinelemeyi bu şekilde yaptığımızda ne olacağına bakalım. (Yukarıdaki ifadelerde basitçe $z = 0$ koyabiliriz.) Bu durumda

$$0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \ldots$$

dizisini elde ederiz. Bu bize karmaşık düzlemdeki noktaların bir ardıllığını verir. (Bu tür şeylerle bir bilgisayarda, bağımsız her bir karmaşık c sayısı seçimi için, yukarıdaki cebirsel ifadeleri kullanmak yerine sırf sayısal olarak çalışılabilir. Hesaplamayla ilgili olarak her defasında aritmetik yenilemeyi yapmak çok daha "ucuzdur".) Bu durumda verili herhangi bir c değeri için iki şeyden biri söz konusu olabilir: (i) dizinin noktalarının sonuç olarak, dizinin *sınırsız* oluşu anlamına gelmek üzere, orijinden gittikçe daha büyük aralıklarla uzaklaşması, ya da (ii) her bir noktanın, dizinin *sınırlı* oluşu anlamına gelmek üzere, karmaşık düzlemde orijinden sabit bir uzaklıkta (diğer bir deyişle orijin merkezli bir çember içinde) bulunması. Şekil 1.2a'da, siyah bölgenin tümü Mandelbrot kümesinin kendisi olmak üzere, siyah bölgeler c'ye ait sınırlı bir dizi veren konumlarken (ii), beyaz bölgeler c'ye ait sınırsız durumdaki konumlardır (i).

Mandelbrot kümesindeki karmaşıklık, yinelemeli dizinin sınırlı kalabilmesinin çok çeşitli ve sıklıkla büyük oranda karışık yollarının var oluşu gerçeğinden kaynaklanır. Düzlem etrafında çeşitli karmakarışık biçimlerde serpiştirilen döngülerin ve çeşitli türde "neredeyse" döngülerin ayrıntılı kombinasyonları mevcut olabilir fakat bu kümenin olağanüstü karışıklığının nasıl meydana geldiğiyle ilgili herhangi bir ayrıntıyı ve karmaşık analizle sayı kuramının nereye dahil olduğunu anlamaya çalışmak bizi büyük oranda alan dışına çıkarır. İlgili okuyucu daha fazla bilgi ve resim için Peitgen ve Reichter, 1986 ile Peitgen ve Saupe, 1988'e başvurabilir (ayrıca *bkz.* Douady ve Hubbard, 1985).

5

LOGARİTMALARIN, ÜSLERİN VE KÖKLERİN GEOMETRİSİ

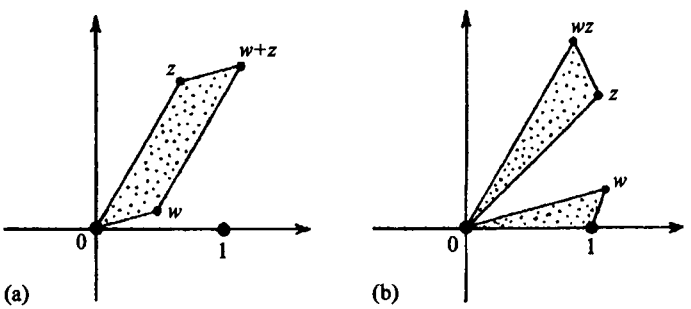
5.1 Karmaşık cebirin geometrisi

Önceki bölümün sonunda tartışılan karmaşık sayı sihrine ilişkin görünümler pek çok incelik içerir, o halde biraz geri çekilelim ve sihrin bazı daha temel fakat yine de eşit derecede esrarengiz ve önemli parçalarına göz atalım. İlk olarak §4.1'de rastladığımız toplama ve çarpma kurallarının karmaşık düzlemde geometrik olarak nasıl gösterildiğine bakalım. Bunları sırasıyla Şekil 5.1a ve b'de çizildiği üzere *paralelkenar* yasası ve *benzer üçgen* yasası biçiminde gösterebiliriz. Özellikle, w ve z genel karmaşık sayıları için $w + z$ ve wz'yi gösteren noktalar sırasıyla şu iddialarla belirlenir:

$0, w, w + z, z$ *bir paralelkenarın köşeleridir*

ve

köşeleri $0, 1, w$ *ve* $0, z, wz$ *olan üçgenler benzerdir.*



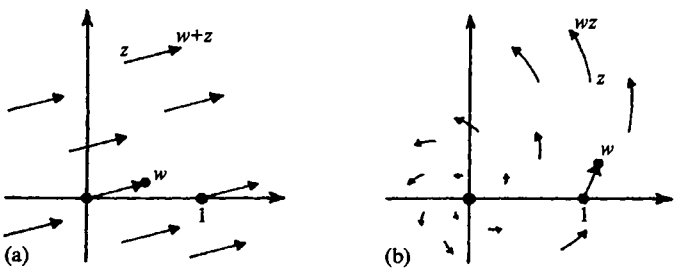
Şekil 5.1 Karmaşık sayı cebirinin temel yasalarının geometrik açıklaması. (a) Toplamanın paralelkenar yasası: $0, w, w + z, z$ noktaları bir paralelkenarın köşelerini verir. (b) Çarpmanın benzer üçgen yasası: köşeleri $0, 1, w$ ve $0, z, wz$ olan üçgenler benzerdir.

(Burada düzenlenme ve uyumun normal eğilimleri benimseniyor. Bununla demek istediğim şu ki; paralelkenar etrafında döngüsel olarak ilerleriz ve böylece w'dan $w + z$'ye kadar olan doğru parçası 0'dan z'ye kadar olan doğru parçasına paraleldir, vb, dahası iki üçgen arasındaki benzerlik ilişkisinde içerilmiş herhangi bir "yansıma"ya gerek yoktur. Ayrıca üçgen ya da paralelkenarların çeşitli biçimlerde bozulduğu özel durumlar mevcuttur.)[5.1] İlgilenen okuyucu bu kuralları trigonometri ve dolaysız hesaplamayla sınayabilir.[5.2] Bununla birlikte bu şeylere, ayrıntılı hesaplamanın önüne geçen ve daha derin kavrayışlara olanak sağlayan başka türlü bir bakış da mevcuttur.

Gelin toplama ve çarpmayı, tüm karmaşık düzlemi kendisine gönderen değişik *gönderimler* (ya da "dönüşümler") biçiminde ele alalım. Verili herhangi bir karmaşık w sayısı, rasgele bir z karmaşık sayısına uygulandığında sırasıyla w'yu z'ye ekleyecek ve w'nun z ile çarpımını alacak işlemler olarak bir "toplama gönderimi"ni ve bir "çarpma gönderimi"ni tanımlar;

$$z \longmapsto w + z \text{ ve } z \longmapsto wz.$$

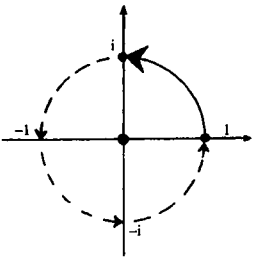
Toplama gönderiminin, karmaşık düzlemi boyut ya da biçiminde herhangi bir döndürme ya da değişim olmaksızın (*dönüşümle* ilgili bir örnek için *bkz.* §2.1), 0 orijinini w noktasının yerine alarak basitçe kaydırdığını görmek kolaydır; *bkz.* Şekil 5.2a. Paralelkenar yasası temelde bunun bir yeniden ifadelendirilmesidir. Peki ya çarpma gönderiminden ne haber? Bu orijini sabit bırakıp biçimleri koruyan ve 1'i w noktasına gönderen bir dönüşüm sağlar. Genel durumda (yansımasız) bir döndürmeyle düzenli bir ge-



Şekil 5.2 (a) "$+w$" toplama gönderimi 0'ı w'ya göndererek karmaşık düzlemin bir dönüşümüne olanak sağlar. (b) "$\times w$" çarpma gönderimi 1'i w'ya göndererek karmaşık düzlemin bir döndürülmesi ve genişlemesine (ya da daralmasına) olanak sağlar.

[5.1] Çeşitli olasılıkları inceleyin.

[5.2] Bunu yapın.



Şekil 5.3 Karmaşık düzlemde "i ile çarpma" belirli işlemi "dik açı kadar döndürme" geometrik dönüşümü olarak gerçekleştirilir. "Gizemli" $i^2 = -1$ işlemi görünür kılınır.

nişlemeyi (ya da daralmayı) birleştirir; *bkz.* Şekil 5.2b.[5.3] Benzer üçgen yasası bunu etkin biçimde gösterir. Bu gönderim bizim için §8.2'de özel bir öneme sahip olacak.

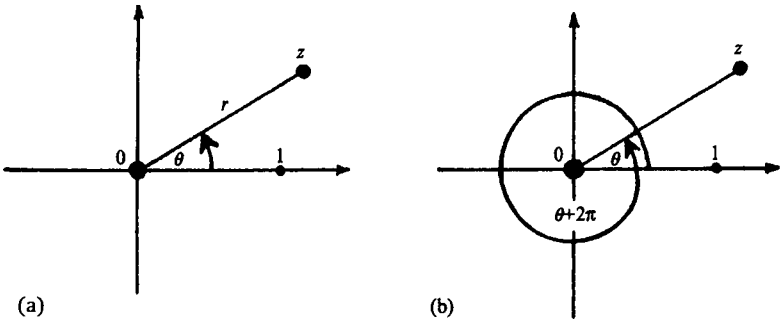
Belirli $w = i$ durumunda, çarpma göderimi basit olarak bir dik açı $(\frac{1}{2}\pi)$ kadar sağdan (saat yönünün tersine) bir döndürmedir. Bunu iki kez uygularsak orijinde basit bir yansıma olan π kadar bir döndürme elde ederiz; diğer bir deyişle bu her bir karmaşık z sayısını kendi negatifine gönderen bir çarpma gönderimidir. Bu bize "gizemli" $i^2 = -1$ denkleminin grafikle gösterilen bir gerçekleştirilişini sunar (Şekil 5.3). "i'yle çarpma" işlemi geometrik dönüşüm olarak "bir dik açı kadar döndürme" biçiminde gerçekleşir. Bu şekilde bakılınca, bu işlemin "karesi"nin (diğer bir deyişle iki kez yapma), "negatifini alma" işlemindeki aynı etkiyi verme gerekliliği o kadar da gizemli görünmez. Elbette bu, karmaşık cebirin bu kadar iyi işlemesine ilişkin nedenle ilgili sihir ve gizemi ortadan kaldırmaz. Ya da bize bu sayıların açık fiziki rollerinden bahsetmez. Örneğin şu soru sorulabilir: niye yalnızca bir düzlemde döndürülsün, üç boyuttan ne haber? Bu soruların çeşitli görünümlerine özellikle §§11.2, 3, §18.5, §§21.6, 9, §§22.2, 3, 8–10, §33.2, ve §34.8'de yöneleceğim.

Düzlemde yer alan bir karmaşık sayıyı açıklarken düzlemdeki bir nokta için standart Kartezyen koordinatları, (x, y), kullandık fakat alternatif olarak kutupsal koordinatları, $[r, \theta]$, kullanabilirdik. Burada pozitif gerçel r sayısı, orijine olan *uzaklığı* ve θ açısıysa orijinden z noktasına çizilen çizgiyle gerçel eksen arasında oluşan ve saat yönüne ters yönde ölçülen *açıyı* belirtir; *bkz.* Şekil 5.4a. Bazen

$$r = |z|$$

şeklinde yazılan r niceliği karmaşık z sayısının *modülü* ve θ ise onun *argümanı* (ya da bazen kuantum kuramında *fazı*) olarak adlandırılır. $z = 0$

[5.3] Bunu ayrıntılı hesaplama ve trigonometri olmaksızın göstermeye çalışın. *İpucu*: Bu karmaşık düzlemin "doğrusal" yapısının korunduğunu gösteren, $w(z_1 + z_2) = wz_1 + wz_2$, ve bir dik açı boyunca döndürmenin, diğer bir deyişle dik açıların korunduğunu gösteren, $w(iz) = i(wz)$ "dağılma yasası"nın bir sonucudur.



Şekil 5.4 (a) Kartezyen (x, y)'den kutupsal $[r, \theta]$'ya geçerken elimizde, modül, $r = |z|$, orijine olan uzaklık ve argüman, θ, orijinden z noktasına çizilen çizgiyle gerçel eksen arasında oluşan ve saat yönüne ters yönde ölçülen açı olmak üzere $z = x + iy = re^{i\theta}$ ifadesi mevcuttur. (b) $-\pi < \theta \leq \pi$'de ısrar etmezsek, θ'ya 2π''in her türlü tamsayı katını ekleyerek z'nin orijin etrafında pek çok kez dolanmasına olanak sağlayabiliriz.

durumunda θ'yı dert etmemiz gerekmez fakat r'yi hâlâ orijine olan uzaklık, bu durumda basit olarak $r = 0$ veren uzaklık, olarak tanımlayabiliriz.

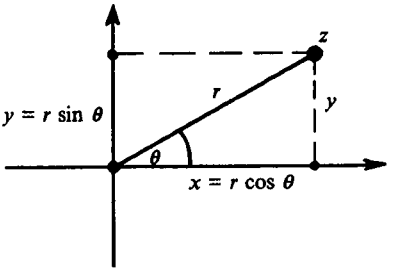
Kesinlik için θ'nın belirli bir aralıkta, örneğin (standart bir düzen olan) $-\pi < \theta \leq \pi$ aralığında yer almasında ısrarcı olabiliriz. Alternatif olarak argümanı yalnızca, kendisine herhangi bir şeyi etkilemeksizin 2π'nin tamsayı katlarını eklememize izin verilen belirsizlikte bir şey olarak düşünebiliriz. Bu, açıyı ölçerken bize orijin etrafında her iki yönde de dilediğimiz çoklukta dolanmaya izin verme meselesidir (*bkz.* Şekil 5.4b). (Bu ikinci bakış açısı gerçekte daha derin olanıdır ve birazdan bizim için bazı anlamları olacaktır.) Şekil 5.5'ten ve temel trigonometriden, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ çok değerli $\tan^{-1}$ fonksiyonunun belirli bir değerini ifade etmek üzere,

$$x = r\cos\theta \text{ ve } y = r\sin\theta$$

ve tersinden

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ve } \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

olduğunu görmekteyiz. (Tüm trigonometri bilgisini unutmuş okuyucular için; ilk iki denklem yalnızca bir açıya ait sinüs ve kosinüs tanımlarının dik açılı bir üçgen yardımıyla yeniden ifade edilişidir: r hipotenüs olmak üzere "bir açının kosinüsü komşu kenarının hipotenüse bölümü" ve "bir açının sinüsü karşı kenarın hipotenüse bölümüdür"; sonraki ikisi Pisagor teoremini ifade eder ve ters biçimde "bir açının tanjantı karşının komşuya bölümüdür." $\tan^{-1}$'in bölüm şeklinde ters değil tanjantın *ters fonksiyonu* olduğu belirtilmelidir; böylece yukarıdaki $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ denklemi $\tan\theta = y/x$ yerine kullanılır. Son olarak $\tan^{-1}$'de, θ'ya 2π'nin her türlü tam-



Şekil 5.5 Karmaşık bir sayının Kartezyen ve kutupsal biçimleri arasındaki bağıntı: $x = r\cos\theta$ *ve* $y = r\sin\theta$ *ve tersinden* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *ve* $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

sayı katı eklenebildiği halde denklemin hâlâ geçerli oluşunda belirsizlik mevcuttur.)[45]

5.2 Karmaşık logaritma fikri

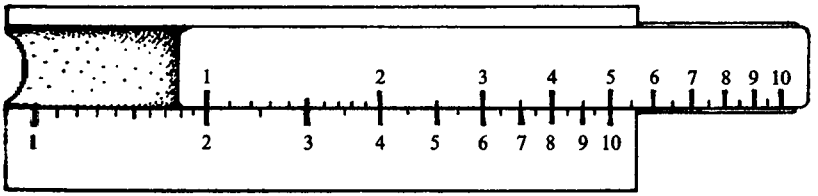
Şu halde iki karmaşık sayının çarpımına ilişkin "benzer üçgen yasası", Şekil 5.1'de gösterildiği haliyle, iki karmaşık sayıyı çarptığımızda onların argümanlarını toplayıp modüllerini çarpmamız gerçeği biçiminde yeniden ifade edilebilir.[5.4] Burada argümanlara ilişkin yasa söz konusu olduğu oranda *çarpmayı toplamaya dönüştürdüğümüz* çarpıcı gerçeğini not edin. Bu gerçek kaydırma kuralıyla gösterildiği üzere (Şekil 5.6) *logaritma* kullanımının temelidir (iki sayının çarpımlarının logaritması onların logaritmaları toplamına eşittir: $\log ab = \log a + \log b$) ve bu özellik ilk zamanlar hesaplama uygulamalarında temel bir öneme sahip olmuştu.[46] Çarpma işlemimizi yapmak için şimdi elektronik hesap makineleri kullanıyoruz. Bu, bir kaydırma kuralı ya da log cetvelleri kullanmaktan çok daha hızlı ve kesin olmasına rağmen güzel ve son derece önemli logaritmalı işlemlerin dolaysız deneyimini edinmezsek kavrayışımıza ilişkin belirleyici derecede önemli bir şeyi kaybederiz. Logaritmaların, karmaşık sayılarla ilişki içinde oynayacağı derin bir role sahip olduğunu göreceğiz. Aslında karmaşık bir sayının argümanı, belirli, açık bir anlamda, gerçekten bir logaritmadır. Bunun nasıl meydana geldiğini anlamaya çalışacağız.

---

[45] Ayrıca trigonometrik fonksiyonlar $\cot\theta = \cos\theta/\sin\theta = (\tan\theta)^{-1}$, $\sec\theta = (\cos\theta)^{-1}$, ve $\mathrm{cosec}\,\theta = (\sin\theta)^{-1}$ da trigonometrik fonksiyonların "hiperbolik" biçimleri, $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $\tanh t = \sinh t/\cosh t$, vb gibi not edilmeli. Bu işlemlerin terslerinin, §5.1'deki "$\tan^{-1}(y/x)$" gibi cot–1, sinh–1, vb tarafından gösterildiğini de not edin.

[5.4] Bunu ayrıntılandırın.

[46] Logaritmalar 1614'te John Neper (Napier) tarafından ortaya kondu ve 1624'te Henry Briggs tarafından uygulamalı hale getirildi.



Şekil 5.6 Kaydırma kuralı sayıları logaritmalı bir ölçek üzerinde gösterir ve böylece çarpmanın, uzaklıkların, $\log_b(p \times q) = \log_b p + \log_b q$ denklemi uyarınca toplanması yoluyla ifade edilmesini sağlar. (2 ile çarpma gösterilmektedir.)

Ayrıca §4.2'deki, karmaşık sayıların köklerini almanın temel olarak karmaşık logaritmaları anlama meselesi olduğu savını anımsayın. Karmaşık logaritmalar ve trigonometri arasında çarpıcı bazı ilişkiler olduğunu keşfedeceğiz. Tüm bunların nasıl bir araya geldiklerini görmeye çalışalım.

İlk olarak sıradan logaritmalar hakkındaki bir şeyi anımsayalım. Logaritma, "bir sayıyı bir üsse yükseltme" ya da *üs alma* işleminin tersidir. "Bir üsse yükseltme" işlemi toplamayı çarpmaya dönüştüren bir işlem*dir*. Bunun nedeni nedir? Herhangi bir (sıfır olmayan) b sayısını alın. O halde, m ve n pozitif tamsayılar olduğunda, her iki tarafın da b sayısının $m + n$ katını temsil ettiği açık olduğundan, hepsinin bir arada çarpılmasını ifade eden

$$b^{m+n} = b^m \times b^n$$

denklemini not edin. Yapmamız gereken, m ve n'nin pozitif tamsayılar olması zorunluluğu olmayacak fakat herhangi bir karmaşık sayı olabileceği şekilde bir genelleme yapma yolu bulmaktır. Bu amaçla, karmaşık z sayısı için "z üssüne yükseltilen b"nin doğru tanımını bulmamız gerekiyor ve yukarıdaki aynı denklemin, $b^{w+z} = b^w \times b^z$, w ve z üsleri karmaşık sayı olduğunda da geçerli olmasını istiyoruz.

Aslında bu amaçla yapılacak işlem bir dereceye kadar, Pisagor'dan başlayarak, Eudoksos'un çalışması yoluyla Brahmagupta üzerinden Cardano ve Bombelli zamanına (ve sonrasına) kadar yapıldığı gibi pozitif tamsayılardan adım adım karmaşık sayılara, §4.1'de gösterildiği şekilde ulaşmaya yol açan tüm bir genelleme tarihini yansıtır. Önce, başlangıç olarak "b^z" kavramı, z pozitif bir tamsayı olduğunda, basit şekilde z adet b'nin hep birlikte çarpılması, $b \times b \times \cdots \times b$, olarak anlaşılır; özelde, $b^1 = b$. Sonra z'nin sıfır olmasına, $b^{w+z} = b^w \times b^z$ eşitliğinin sağlanması için, b^0'ın 1'e eşit,$b^0 = 1$,olacak şe kilde tanımlanma gereksiniminin farkında olarak izin veririz. Daha sonra z'yi negatif kabul eder ve $z = -1$ durumu için, aynı sebep nedeniyle, b^{-1}'in b'nin tersi (diğer bir deyişle $1/b$) ve bir n

doğal sayısı için b^{-n}'in, b^{-1}'in n'inci üssü olması gerektiğini anlarız. Daha sonraysa z'nin bir kesir olduğu durumları, n pozitif bir tamsayı olmak üzere $z = 1/n$ durumundan başlayarak genellemeye çalışırız. $b^w \times b^z = b^{w+z}$'ye ilişkin yinelenen uygulama bizi $(b^z)^n = b^{zn}$ sonucuna ulaşmaya sevk eder; böylece z yerine, $z = 1/n$ koyarak $b^{1/n}$'in, b'nin n'inci dereceden kökü olduğu gerçeğini elde ederiz.

Bunu, b sayısının pozitif alınmış olmasını sağlayarak gerçel sayılar alemi içinde yapabiliriz. Bu durumda $b^{1/n}$'yi, b'nin n'inci dereceden biricik pozitif kökü olarak alabiliriz ve b^z'yi herhangi bir $z = m/n$ rasyonel sayısı için eşsiz olarak, b'nin n'inci dereceden kökünün m'inci dereceden üssü şeklinde ve buradan devamla herhangi bir gerçel z sayısı için de aynı şekilde tanımlayarak devam edebiliriz. Bununla birlikte b negatif kabul edilirse $z = \frac{1}{2}$'de, $\sqrt{b}$, i'nin devreye girmesini gerektireceğinden ve karmaşık sayılara giden kaygan bir yokuşta olduğumuzdan karşımıza bir pürüz çıkar. O yokuşun dibinde büyülü karmaşık dünyamızı buluruz, öyleyse canlanalım ve tüm yokuşu inelim.

b^p'ye ait, tüm karmaşık sayılar p, q ve b ($b \neq 0$ olmak üzere) için geçerli olacak

$$b^{p+q} = b^p \times b^q$$

şeklinde bir tanıma gereksinim duyarız. Böylece b *tabanlı logaritmayı* $f(z) = b^z$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonun tersi olarak tanımlamayı umabiliriz;

$$w = b^z \text{ olduğunda } z = \log_b w\text{'dur.}$$

Bu durumda,

$$\log_b(p \times q) = \log_b p + \log_b q$$

eşitliğini beklemeliyiz ki bu logaritma kavramı çarpmayı gerçekten toplamaya dönüştürsün.

5.3 Çoklu değerlilik, doğal logaritmalar

Temelde doğru olmasına rağmen bunu yapmakla ilgili (birazdan nasıl başa çıkılacağını göreceğimiz) belli teknik güçlükler mevcuttur. İlk sırada b^z'nin "çok değerli" oluşu gelir. Bu, genel olarak b^z'nin anlamına ilişkin çok farklı yanıtlar olması demektir. Ayrıca $\log_b w$'de de ek bir çok değerlilik mevcuttur. b^z'nin çok değerliliğini daha önce z'nin kesirli değerlerinde gördük. Örneğin $z = \frac{1}{2}$ ise, bu durumda "b^z", $t^2 = t \times t = b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = b^1 =$

b ilintisine gereksinim duyulduğundan, "karesi b olan bir t niceliği" anlamına gelmek durumundadır. Bir t sayısı bu özelliği sağlarsa aynı şekilde $-t$'de ($(-t)\times(-t) = t^2 = b$ olduğundan) sağlayacaktır. $b \neq 0$ ifadesini varsaydığımızda $b^{1/2}$ için (normalde $\pm\sqrt{b}$ şeklinde yazılan) iki ayrı yanıta sahip oluruz. Daha genel bir ifadeyle, n pozitif bir tamsayı olduğunda, 1, 2, 3, 4, 5, ... , $b^{1/n}$ için n adet ayrı yanıtımız olur. Aslında n'nin (sıfırdan farklı) rasyonel bir sayı olduğu her durumda sınırlı sayıda yanıta sahip oluruz. n'nin irrasyonel olduğu durumlardaysa kısa süre sonra göreceğimiz üzere sınırsız sayıda yanıtımız olur.

Bu belirsizliğin üstesinden nasıl gelinebileceğini görmeye çalışalım. Yukarıda, *doğal logaritma tabanı* olarak bahsedilip "e" temel sayısı olarak adlandırılmış özel bir b seçimi yaparak başlayacağız. Bu, belirsizlik sorunumuzu ortadan kaldıracaktır. e'ye ait bir tanım olarak elimizde ünlem işaretlerinin faktöriyelleri temsil ettiği, diğer bir deyişle

$$n! = 1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$$

olmak üzere $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, vb olan şu ifade bulunur:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2{,}7182818285\ldots$$

$f(z) = e^z$ ile tanımlanan fonksiyon, *üstel* fonksiyon olarak adlandırılır ve bazen "exp" şeklinde yazılır; z'ye uygulandığında "z üssüne yükseltilen e" olarak, bu "üs" yukarıda e için ifade edilen seride yapılan basit değişiklikle tanımlanmış

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

olarak, düşünülebilir. Aslında bu önemli üslü seri z'nin tüm değerleri için yakınsar (böylece sonsuz bir yakınsaklık çemberine sahiptir, *bkz.* §4.4). Sonsuz toplam $b = e$ olduğunda "b^z" deki belirsizlikle ilgili özel bir seçenek sunar. Örneğin $z = \frac{1}{2}$ olduğu durumda seri bize $-\sqrt{e}$ yerine belirli pozitif $+\sqrt{e}$ niceliğini verir. Aslında $z = \frac{1}{2}$'nin, karesi e olan bir $e^{1/2}$ niceliğini veriyor oluşu, bu seri ile tanımlanmış haliyle,[5.5] e^z'nin gerçekte her zaman, $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = e^1 = e$ olacak şekilde, gerekli

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

"toplamadan çarpmaya" özelliğine sahip olması gerçeğinin sonucudur.

[5.5] Bunu dolaysız olarak seriden kontrol edin. İpucu: Tamsayı üslerle ilgili "binom teoremi" $(a+b)^n$'deki $a^p b^q$ ifadesinin katsayısınınn$!/p!\,q!$ olduğunu iddia eder.

Bize belirsiz olmayan bir logaritma sunması için gelin, e^z'nin, üstel fonksiyonun *tersi* biçiminde ifade edilen şu tanımı kullanmaya çalışalım:

$$w = e^z \text{ ise } z = \log w.$$

Bu *doğal* logaritma olarak adlandırılır (ve fonksiyonu bir taban sembolü kullanmaksızın basit olarak "log" şeklinde yazacağım).[47] Yukarıdaki toplamadan çarpmaya özelliği sonucu, bir "çarpmadan toplamaya" kuralı umarız:

$$\log ab = \log a + \log b.$$

e^z'nin bu tür bir tersinin mutlaka var olacağı çıkarımı doğrudan doğruya görünür değildir. Bununla birlikte aslında sonuçta, 0'dan farklı herhangi bir w karmaşık sayısı için, sonuçta $\log w = z$ tanımı yapabileceğimiz bir z'nin, $w = e^z$ olacak şekilde, her zaman mevcut olduğunu görürüz. Buna rağmen burada bir bityeniği mevcut: birden fazla yanıt söz konusudur.

Bu yanıtları nasıl ifade ederiz? $[r, \theta]$, w'nun kutupsal gösterimiyse, bu durumda ona ait z logaritmasını sıradan Kartezyen biçimde ($z = x + iy$), $\log r$ pozitif gerçel bir sayının sıradan doğal logaritması, gerçel üstel sayının tersi, olmak üzere

$$z = \log r + i\theta,$$

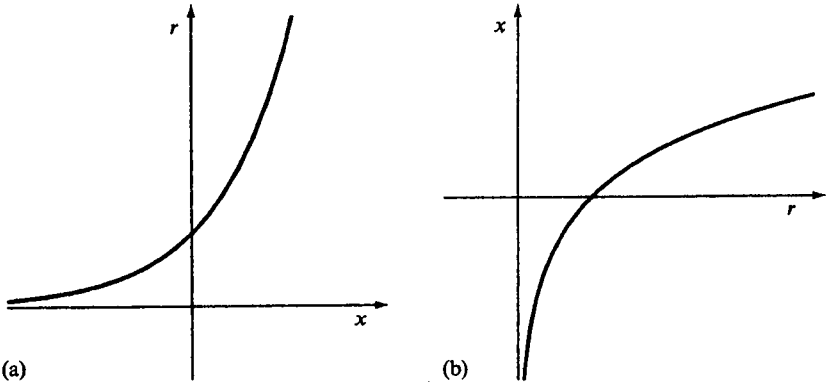
biçiminde yazabiliriz. Neden? Bu tür gerçel bir logaritma fonksiyonunun var olduğu Şekil 5.7'de sezgisel olarak açıktır. Şekil 5.7a'da $r = e^x$'in grafiğini görmekteyiz. Ters fonksiyon $x = \log r$'nin grafiğini, Şekil 5.7b'de olduğu gibi, elde etmek için yalnızca eksenleri çeviririz. $z = \log w$'nun gerçel kısmının yalnızca sıradan bir gerçel logaritma oluşu pek de şaşırtıcı değildir. Bir şekilde daha dikkat çekici olan şey, [48]z'nin sanal kısmının karmaşık w sayısının argümanı olan θ açısı oluşudur. Bu gerçek bir karmaşık sayının argümanının aslında yalnızca bir logaritma biçimi olduğuna ilişkin yorumumu daha belirgin kılar.

Karmaşık bir sayının argümanının tanımıyla ilgili bir anlam bulanıklığı olduğunu anımsayın. θ'ya 2π'nin her türlü tamsayı katını ekleyebiliriz ve bu durumda sonuç hep aynı olur (Şekil 5.4b'yi anımsayın). Buna göre, $w = e^z$ bağıntısında, verili herhangi bir w seçimine karşılık pek çok farklı z çözümü mevcut olur. Bu tür bir z aldığımızda olası başka bir çözüm de, n seçmeyi dilediğimiz herhangi bir tamsayı olmak üzere, $z + 2\pi i n$'dir. Bu nedenle w logaritması, $2\pi i$'nin herhangi bir tamsayı katının eklenmesine

---

[47] Doğal logaritma ayrıca sıklıkla "ln" şeklinde de yazılır.

[48] Buraya kadar oluşturulmuş olandan "$i\theta$"nın, $z = \log r + i\theta$ ifadesindeki $i\theta$'nın gerçel bir katı olmaması gerektiği sonucunu çıkaramayız. Bu, matematiksel hesap gerektirir.



Şekil 5.7 Pozitif gerçel bir r sayısının logaritmasını elde etmek için (a) $r = e^x$ grafiğini dikkate alın. r'nin tüm pozitif değerlerine ulaşılır, böylece resmi çevirerek (b) pozitif r değerleri için ters $x = \log r$ fonksiyonunun grafiğini elde ederiz.

bağlı olarak, bulanıktır. Bunu, ilgili logaritma seçimlerinin uygun şekilde yapıldığından emin olarak $\log ab = \log a + \log b$ türündeki ifadelerle birlikte aklımızda tutmak zorundayız.

Karmaşık logaritmanın bu özelliği gelinen aşamada yalnızca tuhaf bir sıkıntı kaynağı olarak görünür. Bununla birlikte bu durum, §7.2'de göreceğimiz üzere, karmaşık sayılarla ilgili bazı en güçlü, kullanışlı ve sihirli özelliklerin mutlak olarak merkezinde yer alır. Karmaşık analiz kritik bir biçimde buna bağlıdır. Şimdilik yalnızca anlam bulanıklığının doğasını değerlendirmeyi deneyelim.

$\log w$'daki bu bulanıklığı anlamanın bir başka yolu

$$e^{2\pi i} = 1$$

şeklindeki çarpıcı denkleme dikkat etmektir. Buradan hareketle yazılabilecek $e^{z+2\pi i} = e^z = w$, vb, ifadesi, $z + 2\pi i$'nin de w'nun, z kadar gerçek bir logaritması olduğunu gösterir (böylece bunu dilediğimiz kadar tekrar edebiliriz). Yukarıda ki eşitlik (beş temel sayıyı, 0, 1, i, π ve e, oldukça gizemli bir ifadede birleştiren)[5.6] ünlü *Euler denklemi*yle,

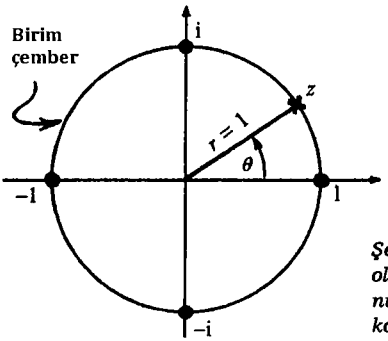
$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

yakından ilintilidir.

Bu özellikleri en iyi, $z = \log r + i\theta$ifadesinin üstel fonksiyonunu,

$$w = e^z = e^{\log r + i\theta} = e^{\log r} e^{i\theta} = re^{i\theta}$$

[5.6] Buradan hareketle $z + \pi i$'nin $-w$'nun bir logaritması olduğunu gösterin.



Şekil 5.8 Karmaşık sayıların birim modülünden oluşan birim çember. Cotes–Euler denklemi bunu gerçel θ için $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ *olarak ortaya koyar.*

ifadesini elde etmek üzere aldığımızda anlayabiliriz. Bu, herhangi bir karmaşık w sayısının, daha önce $[r, \theta]$ şeklinde göstermiş olduğum, kutupsal biçiminin daha belirgin olarak

$$w = re^{i\theta}$$

şeklinde yazılabileceğini gösterir. Bu biçimde, iki karmaşık sayıyı çarptığımızda modüllerinin çarpımlarını ve argümanlarının toplamlarını aldığımız ($re^{i\theta}se^{i\phi} = rse^{i(\theta+\phi)}$, böylece, $\theta + \phi$'den 2π çıkarmanın hiçbir değişikliğe yol açmayacağını akılda tutarak, θ ve ϕ toplanırken r ve s çarpılır), Şekil 5.1b'deki benzer üçgen yasasıyla üstü kapalı olarak ifade edildiği gibi, açıktır. Bundan böyle $[r, \theta]$ gösterimini kullanmayı bırakıp onun yerine yukarıda gösterilen ifadeyi kullanacağım. $r = 1$ ve $\theta = \pi$ olduğunda -1 elde etmemize ve Şekil 5.4a'daki geometriyi kullanarak yeniden yukarıdaki ünlü Euler denklemine, $e^{\pi i} + 1 = 0$, ulaştığımıza; $r = 1$ ve $\theta = 2\pi$ olursa $+1$ elde edip ve $e^{2\pi i} = 1$ sonucuna ulaştığımıza dikkat edin.

$r = 1$ ifadesinin geçerli olduğu çember karmaşık düzlemde *birim çember* olarak adlandırılır (*bkz.* Şekil 5.8). Yukarıdaki ifadeye göre bu, gerçel θ için $w = e^{i\theta}$ ile tanımlanır. Bu ifadeyi, daha önce verilen $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ ifadeleriyle karşılaştırdığımızda, şu anda $w = x + iy$ niceliğine eşit olan gerçel ve sanal kısımlar için, aslında trigonometrinin temellerini karmaşık üstel fonksiyonların çok daha basit özellikleriyle kapsayan verimli "(Cotes–) Euler denklemi"nü[49]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

elde ederiz.

Temel durumlarda bunun nasıl işlediğini görelim. Özellikle, basit $e^{a+b} = e^a e^b$ ifadesi gerçel ve sanal kısımlar biçiminde açıldığında hemen,

[49] Cotes (1714), eşdeğer $\log(\cos\theta + i\sin\theta) = i\theta$ denklemine sahipti. Euler'in $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ifadesi 30 yıl sonra ortaya çıkmış görünüyor. Bkz., Euler, 1748.

çok daha karışık görünümlü (bazı okuyuculara iç karartıcı şekilde tanıdık geleceğine şüphe olmayan)

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

ifadelerini verir.[5.7]

Aynı şekilde örneğin $e^{3i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3$ ifadesi açıldığında bunu hızlıca

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

ifadeleri takip eder.[50, 5.8] Aslında bir biçimde bu tür karışık denklemlerin dolaysız biçimde basit karmaşık sayılı ifadelerden türemesiyle ilgili bir büyü mevcuttur.

5.4 Karmaşık üsler

Gelin şimdi w^z'yi (ya da daha önce yazıldığı haliyle b^z'yi) tanımlama sorununa dönelim. Bunun gibi bir şeyi, ($e^{z\log w} = \left(e^{\log w}\right)^z$ ve $e^{\log w} = w$ ifadelerinin geçerli olacaklarını beklediğimizden)

$$w^z = e^{z\log w}$$

yazarak başarabiliriz. Şunu da belirtmeliyiz ki, $\log w$'daki bulanıklık nedeniyle olası başka bir yanıt elde etmek için $\log w$'ya $2\pi i$'nin herhangi bir tamsayı katını ekleyebiliriz. Bu, seçili herhangi belirli bir w^z'yi $e^{z2\pi i}$'yle dilediğimiz sıklıkta çarpıp bölebileceğimiz ve sonuç olarak yine olası bir "w^z" yanıtı alacağımız anlamına gelir. Bunun, genel durumda vereceği nokta dizilimini karmaşık düzlemde görmek eğlencelidir. Bu durum, Şekil 5.9'da gösteriliyor. Noktalar iki eşit açılı spiralin kesişim noktalarında bulunuyor. (Eşit açılı ya da *logaritmik* bir spiral, düzlemdeki bir noktadan yansıyan ve düz çizgilerle sabit bir açı oluşturan bir eğridir.)[5.9]

Dikkatli olmazsak bu anlam bulanıklığı bizi her türde sorunla karşı karşıya bırakabilir.[5.10] Bu sorunlardan kaçınmanın en iyi yolu, w^z gösteri-

---

[5.7] Bunu sınayın.

50 Burada kullanışlı (fakat bir şekilde mantıksız) $(\cos\theta)^3$ için $\cos^3\theta$, vb, gösterimini kullanıyorum. Sıklıkla $\arccos\theta$ biçiminde de gösterilen $\cos^{-1}\theta$'daki (daha mantıklı) gösterime ilişkin tutarsızlığa dikkat edilmeli. $\sin n\theta + i\cos n\theta = (\sin\theta + i\cos\theta)^n$ denklemi bazen "De Moivre teoremi" olarak da bilinir. Roger Cotes'un (*bkz.* not 5.5) çağdaşı Abraham De Moivre, $e^{i\theta} = \sin\theta + i\cos\theta$ ifadesini onunla birlikte keşfeden kişi olarak da bilinir.

[5.8] Bunu yapın.

[5.9] Kaç adet yol olduğunu gösterin. Ayrıca tüm özel koşulları bulun.

[5.10] Şu "paradoksu" çözün: $e = e^{1+2\pi i}$, böylece $e = \left(e^{1+2\pi i}\right)^{1+2\pi i} = e^{1+4\pi i-4\pi^2} = e^{1-4\pi^2}$.

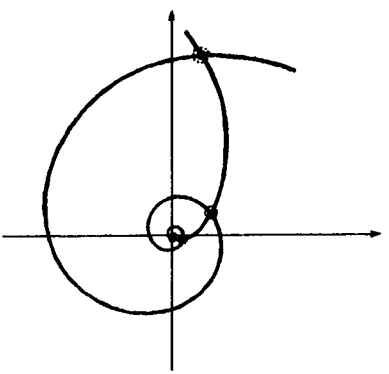
minin, yalnızca *özel* bir $\log w$ *seçimi belirtildiğinde* kullanılması kuralının benimsenmesi olarak görünüyor. (Özel e^z durumundaki sessiz uzlaşı her zaman belirli $\log e = 1$ seçimini yapmaktadır. Böylece e^z standart gösterimi daha genel w^z gösterimiyle uyumludur.) Bu seçim $\log w$ için bir kez belirlendiğinde w^z, z'nin tüm değerleri için anlam bulanıklığı olmayacak biçimde tanımlanır.

Bu noktada, daha önce bu bölümde değinilen ("$\log_b$"'yle gösterilen fonksiyon) "b tabanlı logaritma"yı tanımlayacaksak $\log b$'ye ilişkin de bir belirlemeye gerek duyduğumuz belirtilmelidir çünkü $z = \log_b w$'yu tanımlamak için belirsiz olmayan bir $w = b^z$'ye gerek duyarız. Böyle olsa bile, $\log_b w$ elbette, $2\pi i/\log b$'nin her tür tamsayı katını $\log_b w$'ye ekleyebileceğimiz şekilde çok değerli olacaktır.[5.11]

Geçmişte bazı matematikçilerin büyük oranda ilgisini çekmiş bir merak konusu i^i niceliğidir. Bu "elde edilebilecek oranda sanal" olarak görülebilirdi. Buna rağmen gerçek yanıtı, $\log i = \frac{1}{2}\pi i$ şeklindeki ifadeyi tanımlayarak[5.12]

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i\frac{1}{2}\pi i} = e^{-\pi/2} = 0{,}207879576\ldots$$

olarak buluruz. Ayrıca $\log i$'nin başkaca tanımlamalarıyla belirlenen pek çok farklı yanıt da mevcuttur. Bunlar yukarıdaki niceliği, n herhangi bir tamsayı olmak üzere, $e^{2\pi n}$'yle çarparak (ya da eşdeğer olarak yukarıdaki niceliği, n pozitif ya da negatif bir tamsayı olmak üzere, $4n + 1$ biçimindeki bir üsse yükselterek)[5.13] elde edilir. i^i'nin *tüm* değerlerinin aslında gerçel sayı olması çarpıcıdır.



Şekil 5.9 w^z'nin ($= e^{z \log w}$) farklı değerleri. $2\pi i$'nin her tür tamsayı katı, w^z'yi $e^{z2\pi i}$ ile çarpıp böleceğimiz şekilde $\log z$'ye eklenebilir. Genel durumda bunlar karmaşık düzlemdeki (her biri orijinden geçen düz çizgilerle sabit bir açı oluşturan) iki eşit açılı spiralin kesişimleri olarak gösterilir.

[5.11] Bunu gösterin.

[5.12] Bu niçin olanaklı bir tanımlamadır.

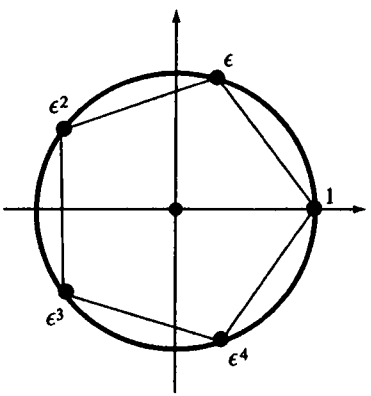
[5.13] Bunun niçin geçerli olduğunu gösterin.

Gelin w^z gösteriminin $z = \frac{1}{2}$ için nasıl işlediğini görelim. İki $\pm\sqrt{w}$ niceliğini bir anlamda "$w^{1/2}$" olarak gösterebilmeyi umuyoruz. Aslında bu iki niceliği basit şekilde, ilk olarak $\log w$ için bir değer tanımlayarak ve ikinci değeri de ilk değere $2\pi i$ ekleyip tanımlayarak elde ederiz. Bu $w^{1/2}$'deki bir işaret değişikliğiyle sonuçlanır (Euler denkleminin $e^{\pi i} = -1$ olması nedeniyle). Benzer şekilde, $\log w$'nin art arda gelen farklı değerleri tanımlanıp, n, 3, 4, 5, ... olduğunda $z^n = w$ için n sayıdaki tüm çözümleri $w^{1/n}$ niceliği olarak üretebiliriz.[5.14] Daha genel olarak, z, §4.2'de ima edilmiş sıfır olmayan herhangi bir karmaşık sayı olmak üzere, sıfır olmayan karmaşık bir w sayısının z'inci dereceden kökleri sorusuna dönebiliriz. Bu tür z'inci dereceden bir kökü $w^{1/z}$ biçiminde ifade edebiliriz ve genelde buna ilişkin, $\log w$ için yapılan seçimin tanımlanmasına bağlı olarak sonsuz sayıda alternatif değer elde ederiz. $\log w^{1/z}$'ye ilişkin doğru tanımlanmış, diğer bir deyişle $(\log w)/z$'yle verilen bir seçimle aslında $\left(w^{1/z}\right)^z = w$ ifadesini elde ederiz. Daha genel olarak, bir kez $\log w$'ye ilişkin (sağ taraf için) bir tanımlama yaptığımızda, $\log w^a$'yı (sol taraf için) $a \log w$ olarak tanımlama zorunluluğunda olduğumuz

$$(w^a)^b = w^{ab}$$

ifadesini belirtiriz.[5.15]

$z = n$ pozitif bir tamsayı olduğunda işler daha basittir ve n adet kök elde ederiz. Bu koşulda, $w = 1$ olduğunda özel bir ilgi durumu oluşur. Böylece $\log 1$'in art arda gelen olası bazı değerlerini, diğer bir deyişle 0, $2\pi i$, $4\pi i$, $6\pi i$, ... değerlerini belirterek, $1^{1/n}$'nin olası değerleri için $1 = e^0$, $e^{2\pi i/n}$, $e^{4\pi i/n}$, $e^{6\pi i/n}$, ... elde ederiz. Bunları $\epsilon = e^{2\pi i/n}$ olmak üzere 1, ϵ, ϵ^2, ϵ^3, ... olarak yazabiliriz. Karmaşık düzlem bağlamında, birim çember etrafında



Şekil 5.10 Birim çember etrafında eşit olarak yerleşmiş birin n'inci dereceden kökleri, $e^{2\pi r i/n}$ ($r = 1, 2, ..., n$), düzenli bir n-kenarlının köşelerini verir. Burada $n = 5$'tir.

[5.14] Ayrıntılandırarak açıklayın.

[5.15] Bunu gösterin.

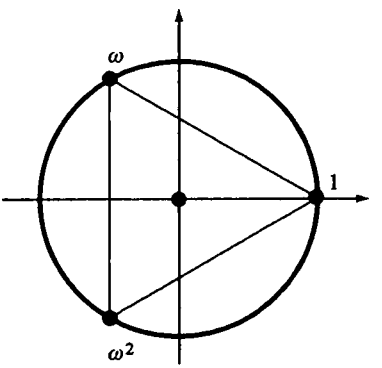
eşit olarak yerleşmiş, *birin n'inci dereceden kökleri* olarak adlandırılan n nokta elde ederiz. Bu noktalar düzenli bir n–kenarlının köşelerini oluşturur (*bkz.* Şekil 5.10). (log 1 için yapılan $-2\pi i$, $-4\pi i$,$-6\pi i$, vb, seçimlerinin yalnızca, aynı n'inci derece kökleri ters biçimde verdiğine dikkat edin.)

Verili bir n için birin n'inci derece kökleri *sonlu çarpımsal grup*, ya da daha belirli bir biçimde *döngü grubu* $\mathbb{Z}_n$ (*bkz.* §13.1) olarak adlandırılan bir şeyi oluşturduğunu gözlemlemek ilgi çekicidir. Herhangi ikisini birbiriyle çarpıp bir diğerini elde edebilme özelliği gösteren n sayıda niceliğe sahibiz. Ayrıca birini diğerine bölüp bir üçüncüsünü de elde edebiliriz. Bir örnek olarak $n = 3$ durumunu dikkate alalım. Şu halde $\omega = e^{2\pi i/3}$ olmak üzere 1, ω ve ω^2 şeklinde üç eleman elde ederiz (böylece $\omega^3 = 1$ ve $\omega^{-1} = \omega^2$'dir). Bu sayılar için aşağıdaki basit çarpma ve bölme tablosuna sahibiz:

$\times$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

$\div$	1	ω	ω^2
1	1	ω^2	ω
ω	ω	1	ω^2
ω^2	ω^2	ω	1

Bu belirli sayılar karmaşık düzlemde eşkenar bir üçgenin köşeleri olarak gösterilir. ω ile çarpma işlemi üçgeni saat yönünün tersine $\frac{2}{3}\pi$ kadar (diğer bir deyişle 120°), ω^2 ile çarpma işlemiyse saat yönünde $\frac{2}{3}\pi$ kadar döndürür; bölme için dönme ters yönde gerçekleşir (*bkz.* Şekil 5.11).



Şekil 5.11 Birin 1, ω, ω^2 küp köklerinin eşkenar üçgeni. ω ile çarpma saat yönü tersine,ω^2 ile çarpmaysa saat yönünde 120° döndürür.

5.5 Modern parçacık fiziğiyle bazı ilişkiler

Bu türde sayılar, *çarpımsal* bir *kuantum sayısının* olası koşullarını sağlayarak modern parçacık fiziğiyle ilintilidir. §3.5'de parçacık fiziğindeki toplamsal (skaler) kuantum sayılarının, bilindiği kadarıyla, tamsayılar tarafından değişmez şekilde kuantize oldukları gerçeğini yorumladım. Çarpımsal kuantum sayılarının da bir miktar örneği mevcuttur ve bunlar birin n'inci dereceden kökleri biçiminde kuantize görünür. Geleneksel parçacık fiziğindeki bu tür niceliklerin yalnızca birkaç örneğini biliyorum ve bunların çoğunda durum pek ilgi çekici olmayan $n = 2$ örneğidir. $n = 3$ için açık bir durum ve $n = 4$ içinse olası bir durum söz konusudur. Ne yazık ki çoğu durumda kuantum sayısı evrensel değildir, bir diğer deyişle o, tüm parçacıklara kalıcı şekilde uygulanamaz. Bu gibi durumlarda kuantum sayısına yalnızca bir *yaklaşıklık tahmini* olarak değineceğim.

Dönüşüm çarpanı olarak adlandırılan nicelik $n = 2$ durumundaki (yaklaşık olarak) çarpımsal bir kuantum sayısıdır. (Ayrıca $n = 2$ için pek çok açıdan dönüşüm çarpanıyla benzer, *g–dönüşüm çarpanı* gibi, başkaca yaklaşık nicelikler de mevcuttur. Bunları burada tartışmayacağım.) Bileşik bir sisteme ilişkin dönüşüm çarpanı kavramı kendi temel oluşturucu parçacıkları tarafından (çarpımsal olarak) inşa edilir. Bu tür oluşturucu bir parçacığın dönüşüm çarpanı çift olabilir, bu durumda parçacığın aynadaki yansıması (uygun bir anlamda) kendisiyle aynıdır; alternatif olarak parçacığın dönüşüm çarpanı tek olabilir ve bu durumda aynadaki yansıması kendisinin karşı–parçacığıdır (*bkz.*§3.5, §§24.1–3, 8 ve §26.4). Ayna yansıması ya da karşı–parçacık elde etme kavramı "karesi bir olan" bir şey olduğu (diğer bir deyişle bunu iki kez yapmak bizi başladığımız yere götüreceği) için kuantum sayısı, gelin bunu ϵ olarak adlandıralım, $\epsilon^2 = 1$ özelliğine sahip olmak ve böylece,$n = 2$ olmak üzere (diğer bir deyişle $\epsilon = +1$ ya da $\epsilon = -1$), bir "birin n'inci dereceden kökü" olmak zorundadır. Bu kavram yalnızca yaklaşıktır çünkü dönüşüm çarpanı "zayıf etkileşimler" denen şeye göre korunan bir nicelik değildir ve aslında bu nedenle belirli parçacıklara ilişkin iyi tanımla bir dönüşüm çarpanı olmayabilir (*bkz.* §§25.3, 4).

Dahası normal tanımlamalarda dönüşüm çarpanı kavramı yalnızca *bozonlar* olarak bilinen parçacıklar ailesi için geçerlidir. Kalan parçacıklar başka bir aileye aittir ve *fermiyonlar* olarak bilinir. Bozonlar ve fermiyonlar arsındaki ayrım çok önemli fakat biraz karışık bir ayrımdır ve buna daha sonra §§23.7, 8'de geleceğiz. (Bir ortaya koyuş biçiminde bu, parçacığın durumunu bütünüyle 2π kadar (diğer bir deyişle 360° boyunca) sürekli şekilde döndürdüğümüzde ne olduğuyla ilgilidir. Bu tür bir döndür-

me sonrasında yalnızca bozonlar kendi orijinal durumlarını bütünüyle geri kazanır. Fermiyonlar söz konusu olduğunda orijinalliği geri kazanmak için bu tür bir döndürme iki kez yapılmalıdır. *Bkz.* §11.3 ve §22.8.) "Bir bozon ve bir fermiyon bir fermiyon oluşturur"ken, "iki fermiyonun bir bozon oluşturması" ve "iki bozonun da bir bozon oluşturması"nda bir anlam mevcuttur. Bu durumda çarpımsal kuantum sayısının fermiyon/bozon doğasını açıklamak için -1 sayısını bir fermiyona ve $+1$ sayısını da bir bozona atayabiliriz ve $n = 2$ durumunda başka bir çarpımsal kuantum sayısına sahibiz. Bilindiği kadarıyla bu nicelik *kesin* bir çarpımsal kuantum sayısıdır.

Bana öyle görünüyor ki fermiyonlara da uygulanabilecek bir dönüşüm çarpanı kavramı, bu, geleneksel bir terminoloji gibi görünmemesine rağmen mevcuttur. Bu, $n = 4$ olan birleşik bir çarpımsal kuantum sayısı vermek üzere fermiyon/bozon kuantum sayısıyla birleşmelidir. Bir fermiyon için dönüşüm çarpanının değeri $+i$ ya da $-i$ olmalıdır ve bu durumda ona ait çift ayna yansıması 2π'lik bir döndürme etkisine sahip olur. Bir bozon için dönüşüm çarpanı değeri önceki gibi ± 1 olur.

$n = 3$ olduğu durumda değindiğim çarpımsal kuantum sayısını *kuarklık* olarak adlandıracağım. (Bu standart bir terminoloji değildir ve bu kavrama bir kuantum sayısı olarak değinmek hiç de alışılmış değildir fakat parçacık fiziğinin günümüzdeki kavranışına ilişkin önemli bir görünümü içerir.) §3.5'te, *hadronlar* (protonlar, nötronlar, π–mezonlar, vb) olarak bilinen "güçlü şekilde etkileşen" parçacıkların *kuarklardan* (*bkz.* §25.6) oluştuklarını kabul eden modern bakış açısına değindim. Bu kuarklar elektrik yükleri için elektron yükünün değil fakat bu yükün üçte birinin tamsayı katları olan değerlere sahiptir. Bununla birlikte kuarklar ayrı tekil parçacıklar olarak var olamazlar ve onlara ait bileşikler ayrı tekillikler olarak yalnızca, onların bileşik yükleri toplamı elektron yükü biriminde bir tamsayıya eşit olursa var olabilirler. q, elektron yükünün negatifi biçiminde ölçülmüş elektrik yükü değeri olsun (böylece elektronun kendisi için, elektron yükü normal uzlaşıda negatif sayılmak üzere $q = -1$ ifadesine sahibiz). Kuarklar için $q = \frac{2}{3}$ ya da $q = -\frac{1}{3}$; karşı–kuarklar için $q = \frac{1}{3}$ ya da $q = -\frac{2}{3}$'tür. Böylece kuarklık için çarpımsal kuantum sayısını $e^{-2q\pi i}$ olarak alırsak onun 1, ω ve ω^2 değerlerini aldığını görürüz. Bir kuark için kuarklık ω ve bir karşı–kuark için ω^2 olur. Bir parçacık kendi başına kuarklığı yalnızca 1'se var olabilir. §5.4'le uyumlu olarak kuarklığın derecesi $\mathbb{Z}_3$ döngü grubunu oluşturur. (§16.1'de ek bir "0" elemanı ve bir toplama kavramıyla bu grubun $\mathbb{F}_4$ *sonlu alanı*na nasıl genişletilebildiğini göreceğiz.)

Bu bölümde ve bir öncekinde karmaşık sayıların sihrine ilişkin bazı matematiksel görünümleri sergiledim ve onlara ait uygulamaların yalnızca küçük bir bölümüne değindim. Buna rağmen karmaşık sayıların, onları bir matematik öğrencisiyken öğrendiğimde tümü içinde en sihirli bulduğum görünümlerinden (7. bölümde verilen) daha bahsetmedim. Daha sonraki yıllarda bu sihrin daha da çarpıcı görünümleriyle karşılaştım ve bunlardan biri (9. bölümün sonunda açıklanan), öğrenciyken beni en çok etkileyen birinin tuhaf bir şekilde tamamlayıcısıydı. Bununla birlikte bu şeyler *kalkülüsün* belirli temel kavramlarına bağlıdır, öyleyse okuyucuya bu sihirle ilgili bir şeyler aktarmak için öncelikle temel kavramlarla ilgili bir şeyler söylemek gerekecek. Bunu yapmanın elbette ek bir nedeni de mevcuttur. Kalkülüs, fiziğin uygun şekilde kavranması için kesin olarak temeldir.

6

GERÇEL SAYI ANALİZİ

6.1 Güvenilir bir fonksiyonu oluşturan nedir?

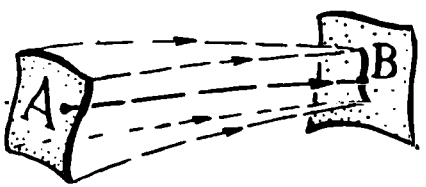
KALKÜLÜS ya da çok daha gelişkin adıyla *matematiksel analiz* iki temel bileşenden oluşur: *türev alma* ve *integral alma*. Türev alma hız, ivme, eğri ve alanların eğim ve eğrilikleri, vb'yle ilgilenir. Bunlar şeylerin değişim oranlarıdır ve tekil noktaların en küçük komşuluklarındaki yapı ya da davranış biçiminde *yerel olarak* tanımlanan niceliklerdir. Diğer taraftan integral almaysa alanlar, hacimler, kütleçekim merkezleri ve bu genel doğadaki pek çok diğer şeyle ilgilenir. Bunlar şu ya da bu biçimdeki *bütünlük* ölçüsü içeren şeylerdir ve yalnızca tekil noktaların yerel ya da sonsuz küçük komşuluklarında olan şeyler yoluyla tanımlanmazlar. *Kalkülüsün temel teoremi* olarak adlandırılan dikkat çekici gerçek bu bileşenlerin esasen her birinin bir diğerinin *tersi* oluşudur. Matematiksel çalışmanın bu iki önemli alanının birbirleriyle birleşmesini ve anlayış ve hesaplama tekniğiyle ilgili yapının oluşumuna olanak sağlayan şey büyük oranda bu gerçektir.

Matematiksel analizin, temellerini İÖ 3. yüzyıl dolaylarında yaşamış Arşimet'e uzanan düşünceler yardımıyla 17. yüzyılda Fermat, Newton ve Leibniz'den alan bu konusu "kalkülüs" olarak adlandırılır çünkü o aslında, aksi halde kavramsal olarak baş edilmesi zor olacak problemlerin sıklıkla, çoğu kez yalnızca yoğun miktarda derinlikli düşünüş çabası olmadan uygulanabilecek görece basit birkaç kuralın izlenmesi yoluyla "otomatik şekilde" çözülebildiği bir tür hesaplama tekniği yapısıdır. Bu analizde yine de, türev alma ve integral alma işlemleri arasında, hangisinin "kolay" hangisinin "zor" olduğuna bağlı olarak çarpıcı bir karşıtlık mevcuttur. İşlemleri bilinen fonksiyonlar içeren açık denklemlere uygulamak söz konusu olduğunda "kolay" olan türev alma, "zor" olan integral almadır ve pek çok durumda ikincisini açık bir şekilde gerçekleştirmek hiç de olası olmayabilir. Diğer taraftan denklemler fonksiyonlar biçiminde verilmeyip sayısal verilerin dizilmiş listeleri biçiminde sunulduğu durumda "kolay"

olan integral alma, "zor" olan türev almadır ve ikincisi sıradan yöntemle kelimenin tam anlamıyla hiç de olası değildir. Sayısal teknikler genellikle yaklaşıklık tahminleriyle ilgilidir fakat ayrıca şeylerin gerçek kuramdaki bu görünümüyle yakın bir benzerlik mevcuttur ve bu koşullarda türev alma gerçekleştirilemezken gerçekleşebilir olan yine integral almadır. Bunun bir bölümünü anlamaya çalışalım. Konu gerçekte bir "fonksiyon"la esasen ne ifade edildiğiyle ilgilidir.

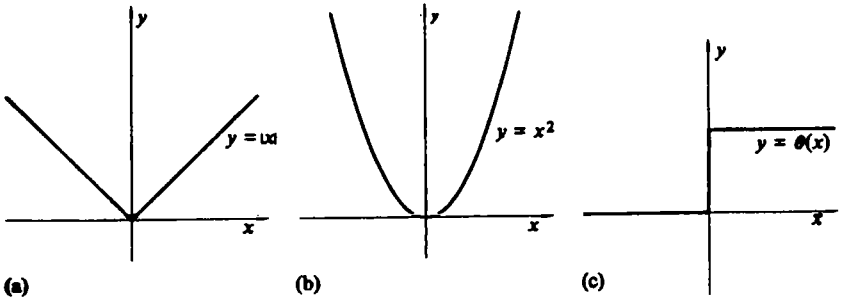
Euler'e ve 17. ve 18. yüzyılın diğer matematikçilerine göre bir "fonksiyon" açık şekilde x^2 ya da $\sin x$ ya da $\log(3 - x + e^x)$ gibi açıkça yazılabilen ya da belki integral alma içeren bir denklemle tanımlanan bir şey ya da açık şekilde verilmiş bir üslü seri gibi bir şey anlamına gelirdi. Bugünlerde fonksiyonu, *tanım kümesi* olarak adlandırılan sayıların (ya da daha genel birimlerin) bir A dizisinin fonksiyonun *görüntü kümesi* olarak adlandırılan başka bir B dizisine "dönüştürüldüğü" "dönüşümler" biçiminde düşünmek tercih edilir (*bkz.* Şekil 6.1). Buradaki temel nokta, fonksiyonun B görüntü kümesinin bir elemanını A tanım kümesinin her bir elemanına atayabilir oluşudur. (Fonksiyonu, sonrasında yalnızca hangi sayıya ulaştığına bağlı olarak B'ye ait belirli bir sayı üreten, A'ya ait bir sayıyı "incelemek" gibi düşünün.) Bu tür fonksiyon yalnızca bir "arama tablosu" olabilir. Fonksiyonun eylemini belirgin olarak açık bir şekilde ifade eden makul görünümlü bir "denklem"in varlığına ilişkin herhangi bir gereklilik yoktur.

Bazı örnekleri ele alalım. Şekil 6.2'de basit üç fonksiyonun,[1] diğer bir deyişle x^2, $|x|$ ve $\theta(x)$'in grafiğini çizdim. Her durumda tanım ve görüntü kümesi uzayları *gerçel sayıların*, genellikle $\mathbb{R}$ sembolüyle gösterilen bütünlüğüdür. "x^2" ile gösterdiğim fonksiyon, incelediği gerçel sayının basitçe karesini alır. "$|x|$" ile gösterilen (*mutlak değer* olarak adlandırılan)



Şekil 6.1 Tanım kümesinin (sayılardan ya da başka birimlerden oluşan bir A dizisi) görüntü kümesine "dönüştürüldüğü", "dönüşüm" biçiminde bir fonksiyon. A'nın farklı elemanlarının B'deki aynı değeri alabilmelerine ve B'nin bazı elemanlarının boşta kalabilmelerine rağmen A'nın her bir elemanı B'deki belirli bir elemana atanır.

[1] Burada hafif biçimde "notasyonun yanlış kullanımı"nı benimsiyorum, örneğin; x^2 teknik olarak fonksiyondan daha çok fonksiyonun *değerini* gösterir. Fonksiyonun kendisi x'i x^2'ye dönüştürür ve Alonzo Church'ün lambda calculus'ü uyarınca, 1941, $x \longmapsto x^2$ ya da $\lambda x[x^2]$'yle gösterilebilir.



Şekil 6.2 (a) $|x|$, (b) x^2 ve (c) $\theta(x)$ fonksiyonlarının grafikleri; tanım ve görüntü kümesi her bir durumda gerçel sayılar sistemidir.

fonksiyon x negatif değilse yine x sonucunu verir fakat x negatifse $-x$ sonucunu verir; böylece $|x|$ fonksiyonu hiçbir zaman negatif olmaz. "$\theta(x)$" fonksiyonu x negatifken 0 ve x pozitifken 1'dir; ayrıca $\theta(0) = \frac{1}{2}$ tanımını yapmak da alışıldıktır. (Bu fonksiyon Heaviside *basamak fonksiyonu* olarak adlandırılır; belki de, dünyanın radyo iletişimi için son derece önemli olan atmosferik "Heaviside katmanı"nı ilk dile getiren kişi olarak daha iyi tanınan Oliver Heaviside'ın başka bir önemli matematiksel etkisi için *bkz.* §21.1.) Bunların her biri sözcüğün bu modern anlamında mükemmel derecede iyi birer fonksiyondur fakat Euler[2] $|x|$ ya da $\theta(x)$'i sözcüğün *kendisine* göre olan anlamı uyarınca bir "fonksiyon" olarak kabul etmede güçlük çekmişti.

Bu nereden kaynaklanabilir? Bir olasılık, $|x|$ ve $\theta(x)$ ile ilgili olan sıkıntının şu gibi şeylerin fazlasıyla mevcut olmasından kaynaklandığını düşünmektir: "x falan filansa bu durumda vesaire vesaireyi ele alın, diğer taraftan x falan filansa ..." ve fonksiyona ait "hoş bir eşitlik" yoktur. Bununla birlikte bu durum bir parça muğlaktır ve bir denklem olarak kabul edilen $|x|$'te gerçekten nasıl bir sorun olduğunu her durumda merak edebiliriz. Dahası $|x|$'i bir kez kabul ettiğimizde $\theta(x)$ için (her ne kadar denklemin, $\theta(0)$ için sağduyuya dayanan doğru bir değer elde edip etmediğini, denklem sonuç olarak $\theta/0$ değeri vereceğinden, merak etsek de) bir *eşitlik* yazabiliriz:[6.1]

---

[2] Bu bölümde bir fonksiyon kavramı söz konusu olduğunda Euler'in inanışının ne olmuş olabileceğine sıklıkla değineceğim. Bununla birlikte değindiğim "Euler"in gerçekten kuramsal ya da idealize edilmiş bir birey olduğunu açık olarak ifade etmeliyim. Herhangi belirli bir durumda gerçek Leonhard Euler'in bakışının ne olduğuyla ilgili dolaysız hiçbir bilgiye sahip değilim. Diğer taraftan kendi "Euler"ime dayandırdığım görüşler gerçek Euler'in açıklamış olduğu türde görüşlerle çok da ilgisiz görünmemektedir. Euler hakkında daha fazla bilgi için *bkz.* Boyer, 1968; Thiele, 1982; Dunham, 1999.

[6.1] Bunu ($x = 0$'ı ihmal ederek) gösterin.

$$\theta(x) = \frac{|x| + x}{2x}.$$

Konuya ilişkin dahası $|x|$'teki sıkıntı, ona ait açık ifadenin "hoş" olmayışından ziyade onun "pürüzsüz" olmayışıdır. Bunu Şekil 6.2a'nın ortasındaki "açıda" görmekteyiz. Bu açının varlığı $|x|$'i $x = 0$'da iyi tanımlı bir *eğime* sahip olmaktan alıkoyar. Şimdi bu kavramla uzlaşmaya çalışalım.

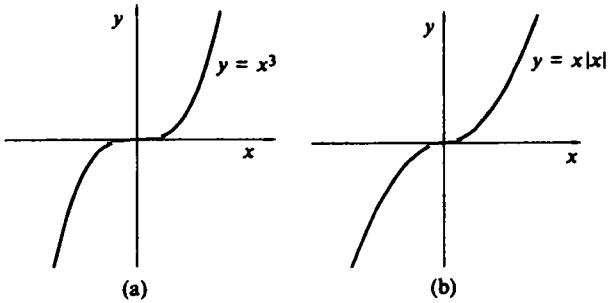
6.2 Fonksiyonların eğimleri

Yukarıda değinildiği üzere türevle ilgili kalkülüsün ilgilendiği şeylerden birisi esasen "eğimler"in bulunmasıdır. Şekil 6.2a'da gösterildiği üzere $|x|$'in grafiğinde açıkça görüyoruz ki fonksiyon, tuhaf açımızın bulunduğu orijinde tek bir eğime sahip değildir. Orijinde var olan bu sıkıntı nedeniyle $|x|$ orijinde *türevlenebilir* değildir ya da aynı anlama gelmek üzere orada *pürüzsüz* değildir deriz. Buna kaşın x^2 fonksiyonu Şekil 6.2b'de gösterildiği üzere her yerde mükemmel şekilde iyi tanımla tek eğime sahiptir. Aslında x^2 her yerde türevlenebilirdir.

Şekil 6.2c'de gösterilen $\theta(x)$ fonksiyonundaki durum $|x|$'te olduğundan da kötüdür. $\theta(x)$'in orijinde ($x = 0$) hoş olmayan bir "sıçrama" yaptığına dikkat edin. Bu durumda $\theta(x)$ orijinde *süreksiz*dir deriz. Buna karşın hem x^2 hem de $|x|$ her yerde *sürekli*dir. $|x|$'in orijindeki tuhaflığı süreklilikten değil türevlenebilirlikten kaynaklanan bir kusurdur. (Süreklilik ve pürüzsüzlük kusurları farklı şeyler olmalarına rağmen aslında birazdan göreceğimiz gibi karşılıklı olarak bağlı kavramlardır.)

Sanırım bu kusurların hiçbiri Euler'i memnun etmezdi, bunlar $|x|$ ve $\theta(x)$'in niçin "uygun" fonksiyonlar sayılmadıklarına ilişkin sebepler sunar görünmekteydi. Şimdiyse Şekil 6.3'te gösterilen iki fonksiyonu ele alalım. İlki, x^3, herhangi bir kişiye ait kriterlere göre kabul edilebilirdir; fakat ikincisine, $x|x|$ ifadesiyle tanımlanabilen ve x negatif değilken x^2, x negatifken $-x^2$ olan fonksiyonu gösteren şekle ne demeli? Çıplak gözle bakıldığında iki grafik de "pürüzsüz" ve birbirlerine oldukça benzer görünür. Aslında ikisi de sıfır denilen orijindeki eğim için mükemmel derecede iyi birer değere sahiptir ve sözcüğün en dolaysız anlamıyla her yerde "türevlenebir"dir. Yine de $x|x|$ kesinlikle Euler'i tatmin edecek türde "hoş" bir fonksiyon olarak görünmez.

$x|x|$'te "yanlış" olan bir şey orijinde iyi tanımlı bir *eğrilik* bulunmamasıdır ve eğrilik kavramı kesinlikle türevlenebilir kalkülüsün ilgilendiği bir şeydir. Gerçekte eğrilik, iki kez türev alma anlamına gelen, "ikinci derece türev" olarak adlandırılan şeyi içeren bir kavramdır. Aslında $x|x|$ fonksiyonu orijinde *iki kez türevlenebilir* değildir deriz. İkinci ve daha yüksek dereceden türevlere §6.3'te geleceğiz.



Şekil 6.3 (a) x^3ve (b) $x|x|$'nin (diğer bir deyişle $x \geq 0$ iken x^2 ve $x < 0$ iken $-x^2$) grafikleri.

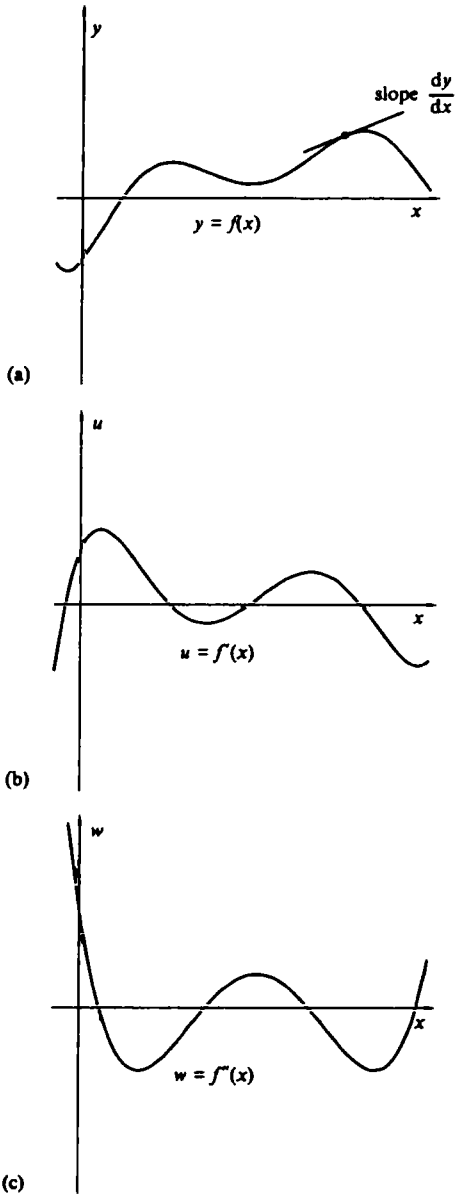
Bunları anlamlandırmaya başlamak üzere türev alma işleminin gerçekte ne yaptığını görmeye gereksinim duyacağız. Bunun için bir *eğim*in nasıl ölçüldüğünü bilmemiz gerekir. Bu, Şekil 6.4'te gösteriliyor. $f(x)$ olarak adlandıracağım oldukça tipik görünümlü bir fonksiyon çizdim. Şekil 6.4a'daki eğri, Kartezyen bir tanımlamada alışılageldiği şekilde, y koordinatının değerinin yüksekliği ve x'in değerinin yatay uzaklığı ölçtüğü $y = f(x)$ bağıntısını resmeder. Eğrinin belirli bir p noktasındaki eğimini, eğrinin *tanjant çizgisi* boyunca ilerlediğimizde ona p noktasında değecek şekilde, y koordinatındaki artışın x koordinatındaki artışa bölünmesi biçiminde gösterdim. ("Tanjant çizgisinin" teknik tanımı uygun limit alma işlemlerine bağlıdır fakat buradaki amacım bu tür teknik ayrıntıları sunmak değil. Umuyorum ki okuyucu acil amaçlarımızla ilgili sezgisel açıklamalarımı yeterli bulacaktır.)[3] Eğimin değeri için standart gösterim dy/dx'tir (ve "dy bölü dx olarak telaffuz edilir). dy'yi eğri üzerinde y'nin değerindeki çok minik bir artış olarak ve dx'i de x değerinde buna karşılık gelen minik artış olarak düşünebiliriz. (Burada teknik doğruluk, bu minik artışların her biri 0'a doğru azaldığından, "limite" gitmemizi gerektirir.)

Şimdi bu eğimi her bir p noktasında, x koordinatının olası farklı seçimleri için (x'e karşı) işaretleyen başka bir eğriyi ele alabiliriz; *bkz.* Şekil 6.4b. Yine bir Kartezyen tanımı kullanıyorum fakat bu kez düşey olarak çizilen y yerine dy/dx'tir. Yatay uzaklık hâlâ x ile ölçülmektedir. Burada çizilen fonksiyon genellikle $f'(x)$ şeklinde adlandırılır ve $dy/dx = f'(x)$ olarak yazabiliriz. dy/dx'i *y'nin x'e göre türevi* olarak adlandırılırız ve $f'(x)$ fonksiyonuna *$f(x)$'in türevi*[4] deriz.

---

[3] Ayrıntı için *bkz.* Burkill, 1962.

[4] f fonksiyonunun türevi kesinlikle f' fonksiyonudur; x noktasındaki f' değerini dolaysızca x noktasındaki f değerinden elde edemeyiz. *Bkz.* not 6.1.

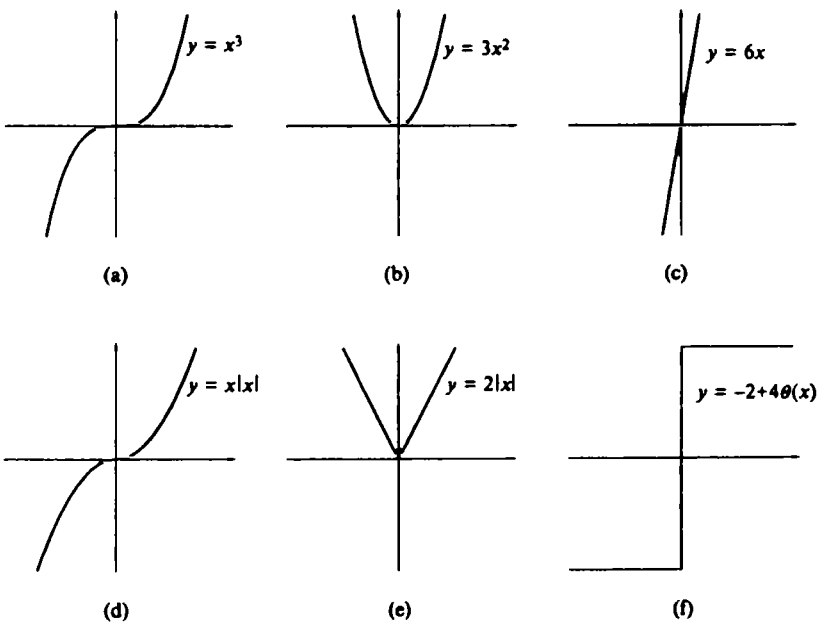


Şekil 6.4 (a) $y = f(x)$, (b) $u = f'(x)$ $(= dy/dx)$ ve (c) ikinci derece türev $f''^{(x)} = d^2y/dx^2$'in Kartezyen çizimi. ($f'(x)$'in x ekseniyle buluştuğu yerde $f(x)$'in yatay eğime sahip olduğuna ve $f''(x)$'in x ekseniyle buluştuğu yerde bir bükülme noktasına sahip olduğuna dikkat edin.)

6.3 Yüksek dereceli türevler; C^∞–pürüzsüz fonksiyonlar

Şimdi ikinci türevi aldığımızda ne olduğunu görelim. Bu, Şekil 6.4b'deki eğri için, u'nun dy/dx yerine kullanıldığı $u = f'(x)$'i gösteren eğim fonksiyonuna bakmamız anlamına gelir. Şekil 6.4c'de du/dx'in x'e karşı grafiği olan bu ikinci derece eğim fonksiyonunu daha önce dy/dx'te yaptığım aynı yolla çizdim. Böylece du/dx bize ikinci eğri $u = f'(x)$'in eğimini sunar. Bu bize orijinal fonksiyon $f(x)$'in ikinci türevi denen şeyi verir ve bu genellikle $f''(x)$ şeklinde yazılır. du/dx niceliğindeki u yerine dy/dx ifadesini koyduğumuzda y'nin x'e göre, (biraz mantığa aykırı şekilde) d^2y/dx^2 şeklinde yazılan ("d kare y bölü dx kare" şeklinde telaffuz edilen) *ikinci dereceden türevini* elde ederiz.

Orijinal $f(x)$ fonksiyonunun yatay bir eğime sahip olduğu yerlerde x değerlerinin $f'(x)$'in x ekseniyle buluştuğu yerlerdeki x değerleriyle aynı olduğuna dikkat edin (bu durumda bu x değerleri için dy/dx yok olur). $f(x)$'in (yerel) bir maksimum ya da minimum edindiği yerler, bir fonksiyonun (yerel olarak) en büyük ve en küçük değerlerini bulmakla ilgilendiğimizde önemli olan konumlarda meydana gelir. Ya ikinci derece türev



Şekil 6.5 (a), (b), (c) Sırasıyla x^3, birinci türevi $3x^2$ ve ikinci türevi $6x$'in grafikleri. (d), (e), (f) Sırasıyla $x|x|$, birinci türevi $2|x|$ ve ikinci türevi $-2 + 4\theta(x)$'in grafikleri.

$f''(x)$'in x ekseniyle buluştuğu yerlerle ilgili durum nedir? Bunlar $f(x)$'in *eğriliği*nin yok olduğu yerlerde meydana gelir. Genel olarak, bu noktalar $y = f(x)$ eğrisinin "bükümler"inin eğrinin bir tarafından diğerine doğru değiştiği *bükülme noktası* adı verilen yerdedir. (Gerçekte $f''(x)$'in esasen $y = f(x)$'le tanımlanan eğrinin eğriliğini "ölçtüğünü" söylemek doğru olmaz; gerçek eğrilik genellikle $f''(x)$'ten çok daha karmaşık bir ifade[5] yoluyla ortaya konur fakat bu ifade $f''(x)$' içerir ve eğrilik, $f''(x)$ ne zaman yok olursa o zaman yok olur.)

Şimdi de yukarıda ele alınmış olan benzer görünümlü iki fonksiyonumuz, x^3 ve $x|x|$'i göz önüne alalım. Şekil 6.5a, b ve c'de x^3 ve onun birinci ve ikinci türevlerini, Şekil 6.4'te $f(x)$ fonksiyonu ve Şekil 6.5d, e ,f'de $x|x|$ için yaptığım şekilde çizdim. x^3 durumunda birinci ya da ikinci türevle ilgili hiçbir süreklilik ya da pürüzsüzlük probleminin olmadığını görürüz. Gerçekte birinci türev $3x^2$ ve ikinci türev $6x$'ten hiçbiri Euler'i bir an bile endişelendirmezdi. (Birazdan bu açık ifadeleri nasıl elde ettiğimizi göreceğiz.) Bununla birlikte $x|x|$ durumunda, ilk türev için Şekil 6.2a'daki "açı"ya oldukça benzer bir şey ve ikinci türev için Şekil 6.2c'ye çok benzeyen bir "basamak fonksiyonu" davranışı buluruz. İlk türev için pürüzsüzlük ve ikinci türev içinse süreklilik kusuruna sahibiz. Euler bunlarla ilgili hiç de endişelenmezdi. Bu ilk türev esasen $2|x|$ ve ikinci türevse $-2 + 4\theta(x)$'tir. (Aşırı titiz okuyucularım aslında orijinde türevi alınamayan $2|x|$ fonksiyonunun "türev"ini bu kadar emin şekilde yazmamam gerektiği şikâyetini dile getirebilirler. Doğru fakat bu yalnızca bir kaçamak: bunun bütünlüklü gerekçelendirmesi 9. bölüm sonunda sunulacak kavramların kullanılmasıyla başarılabilir.)

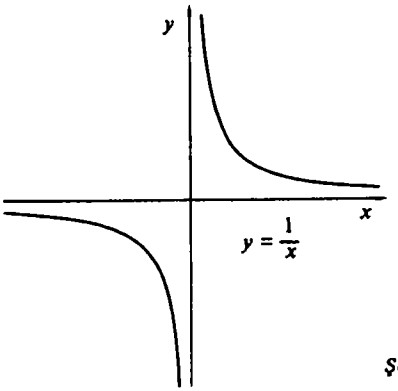
Bu tür pürüzsüzlük ya da süreklilik kusurlarının, pek çok türev hesaplanana kadar ortaya çıkmadığı fonksiyonlar oluşturulabileceğini kolayca hayal edebiliriz. Aslında, n dilediğimiz büyüklükte olabilecek şekilde alabileceğimiz pozitif bir tamsayı olmak üzere, $x^n|x|$ biçimindeki fonksiyonlar hileyi başarıya ulaştıracaktır. Bu türde bir şeyle ilgili matematiksel terminolojide, (tanım kümesinin her bir noktasında) n kez türevlenebilirse $f(x)$ fonksiyonu için C^n*–pürüzsüz* denir ve fonksiyonun n'inci türevi süreklidir.[6] Gerçekte $x^n|x|$ fonksiyonu, orijinde C^n–pürüzsüzdür fakat C^{n+1}–pürüzsüz değildir.

Euler'i memnun etmek için n ne kadar büyük olmalıdır? Öyle görünüyor ki o, *herhangi* belirli bir n değerinde durmaya razı olmazdı. Euler'in

---

[5] İsimlendirmek gerekirse, $f''(x)/[1+ f^2]^{3/2}$.

[6] Gerçekte bu, türevlenebilirliğin teknik tanımlaması sürekliliği de gerektirdiğinden, n'inciye kadar olan ve onu da içeren tüm türevlerin sürekli olması gerektiği anlamına gelir.



Şekil 6.6 $\frac{1}{x}$*'in grafiği.*

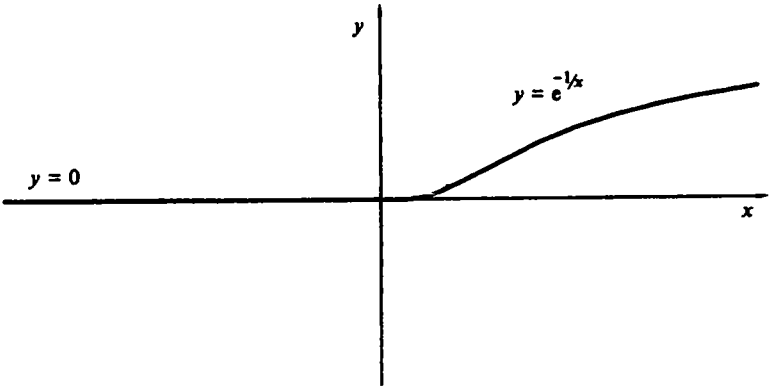
onaylayarak onurlandırdığı türde bir fonksiyonun türevini dilediğimiz kadar almak kesinlikle olası olmalıdır. Bu durumu kapsamak için matematikçiler bir fonksiyondan, o fonksiyon pozitif *her* tamsayı n için C^n–pürüzsüzse, C^∞–*pürüzsüz* olarak bahsettiler. Diğer bir biçimde açıklarsak bir C^∞–pürüzsüz fonksiyon dilediğimiz kadar çok türevlenebilir olmalıdır.

Tahminimize göre Euler'in fonksiyon kavramı C^∞–pürüzsüzlük talep ederdi. En azından fonksiyonlarının, tanım kümesindeki çoğu yerde C^∞–pürüzsüz olmasını bekleyeceğini hayal edebiliriz. Şu halde $1/x$ fonksiyonuna ne demeli? (*Bkz.* Şekil 6.6.) Bu orijinde kesinlikle C^∞–pürüzsüz değildir. Modern anlamda bir fonksiyon için bile orijinde *tanımlı* değildir. Yine de bizim Eulerimiz $1/x$'i bu soruna rağmen kesinlikle yeterli bir "fonksiyon" olarak kabul ederdi. Her şeye rağmen bununla ilgili basit bir doğal görünümlü denklem mevcuttur. Euler'in, fonksiyonlarının tanım kümesindeki *her* noktada C^∞–pürüzsüz olmasıyla bu derece ilgilenmeyeceği ("tanım kümesiyle" ilgili hiç endişelenmediğini varsayarak) düşünülebilir. Belki de tuhaf ya da ona benzer noktalarda yanlış giden işler önem ifade etmez. $|x|$ ve $\theta(x)$ için işler yalnızca $1/x$'te olduğu gibi aynı "tuhaf noktada" yanlış gitti. Öyle görünüyor ki tüm çabalarımıza rağmen, uğruna mücadele ettiğimiz, bir fonksiyona ilişkin "Eulerci" kavramı hâlâ yakalayamadık.

Başka bir örneği ele alalım. Şu kurallarla tanımlanan $h(x)$ fonksiyonunu dikkate alın:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ iken,} \\ e^{-1/x} & x > 0 \text{ iken.} \end{cases}$$

Bu fonksiyonun grafiği Şekil 6.7'de gösteriliyor. Bu kesinlikle pürüzsüz bir fonksiyon gibi görünmektedir. Gerçekte *oldukça* pürüzsüzdür. Gerçel



Şekil 6.7 C^∞–pürüzsüz olan $y = h(x)$ fonksiyonunun ($x \leq 0$ iken $= 0$ ve $x > 0$ iken $= e^{-1/x}$) grafiği.

sayıların tüm tanım kümesi boyunca pürüzsüz. (Bunun kanıtlanması bir üniversite matematik dersinde yapılacak türde bir şeydir. Bunu kendim de bir öğrenciyken becerdiğimi hatırlıyorum.[6.2] Bu şekilde tanımlanmış bir fonksiyonun mutlak pürüzsüzlüğüne karşın Euler'in ondan yüz çevirmesi kesinlikle hayal edilebilir. Bu, açık olarak Euler'in anladığı anlamdaki "bir fonksiyon" değildir. Orijindeki "arızayı" gidermek için ne pürüzsüzlükte bir yapıştırma işi yapılmış olursa olsun yalnızca "birbirine tutturulmuş iki fonksiyon"dur. Buna karşın, Euler'e göre $\frac{1}{x}$, sürekli bile olmayıp yalnızca pürüzsüz bırakıldığı yerde (Şekil 6.6), orijindeki iğrenç bir "sivri uç" tarafından iki parçaya ayrılmış olması gerçeğine rağmen tam da bir fonksiyon*dur*. Bizim Euler'imize göre $h(x)$ gerçekten $|x|$ ya da $\theta(x)$'ten daha iyi değildir. O durumlarda, çok daha adi yapıştırma işleriyle de olsa (ve $\theta(x)$'te yapıştırılmış parçalar birbirinden ayrı düşmüş görünse de) açık olarak "birbirine yapıştırılmış iki fonksiyon"a sahiptik.

6.4 "Eulerci" fonksiyon kavramı?

Ayrı fonksiyonların bir yama işinin karşıtı olarak yalnızca tek bir fonksiyona sahip olmakla ilgili bu "Eulerci" kavramla nasıl uğraşacağız? $h(x)$ örneğinin açıkça gösterdiği gibi C^∞–pürüzsüzlük yeterli değildir. Bu konuyu çözümlemek için aslında tamamen iki farklı görünümlü yaklaşım olduğu görülmektedir. Bunlardan biri karmaşık sayıları kullanır ve dolaylı ifadeleriyle oldukça ciddi olsa da açıklanması yanıltıcı biçimde basittir.

[6.2] Altyapımız varsa bunu kanıtlamayı bir deneyin.

Fonksiyonumuz $f(x)$'in, karmaşık değişken z'nin bir $f(z)$ fonksiyonuna basitçe genişletilebilir olmasına gerek duyarız, öyle ki $f(z)$, karmaşık değişken z'ye göre yalnızca *bir kez* türevlenebilir olması gerekecek anlamda pürüzsüz olsun. (Böylece $f(z)$, karmaşık anlamda bir tür C^1–fonksiyonudur.) Bundan fazlasına gerek duymayışımız gerçek sihrin olağanüstü bir gösterimidir. $f(z)$ karmaşık z parametresine göre bir kez türevlenebilirse bu durumda dilediğimiz kadar çok türevlenebilir!

Karmaşık kalkülüs konusuna bir sonraki bölümde yeniden döneceğim. Bununla birlikte "Eulerci fonksiyon kavramı" sorununa ilişkin yalnızca gerçel sayıları kullanan başka bir çözüm yaklaşımı da mevcuttur ve bu §2.5'te karşılaştığımız üslü seri kavramını içerir. (Euler'in usta olduğu şeylerden biri de üslü serilerle uğraşmaktı.) Bu bölümde karmaşık türevlenebilirlik konusuna dönmeden önce üslü seriler sorununu ele almak yararlı olacak. Karmaşık türevlenebilirliğin yerel olarak üslü seri açılımlarının geçerliliğine eşdeğer olması gerçeği, karmaşık sayı sihrinin gerçekten muazzam parçalarından birisidir.

Bunların tümüne zamanı geldiğinde döneceğim fakat şimdilik gerçel sayı fonksiyonlarıyla çalışmaya devam edelim. Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun gerçekten bir üslü seri gösterimine sahip olduğunu düşünün:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \cdots$$

Şu halde $f(x)$'ten çıkarılacak, $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ katsayılarının ne olması gerektiğini bulacağımız yöntemler mevcuttur. Bu tür bir ilerlemenin var olması için $f(x)$'in C^∞–pürüzsüz olması gereklidir (yine de birazdan göreceğimiz gibi yeterli değildir), böylece sırasıyla $f(x)$'in birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, vb türevi olan yeni $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$, ..., vb fonksiyonlarına sahip olacağız. Gerçekte bu fonksiyonların yalnızca orijindeki ($x = 0$) değerleriyle ilgileneceğiz ve $f(x)$'in C^∞–pürüzsüzlüğüne yalnızca orada gerek duyacağız. $f(x)$ böylesi bir üslü seri açılımına sahipse bu durumda (bazen *Maclaurin serisi*[7] olarak da adlandırılan) sonuç şudur:[6.3]

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3!},\ a_4 = \frac{f''''(0)}{4!}, \ldots.$$

(§5.3'ten, $n! = 1\times2\times\ldots\times n$ bağıntısını anımsayın.) Ya diğer türlüsüne ne demeli? a'lar bu şekilde verildiğinde, toplamlarının (orijini kapsayan bir aralıkta) gerçekten $f(x)$'i vereceği sonucu çıkar mı?

---

[7] Orijin etrafındaki bu üslü seri açılımı geleneksel olarak (biraz tarihi hak teslimiyle) Maclaurin serisi diye bilinir; p noktası etrafındaki daha genel sonuç Brook Taylor'a, 1685–1731, dayandırılır, *bkz.* bölümün devamı.

[6.3] Bunu bölüm sonuna doğru verilen kuralları kullanarak gösterin.

Görünüşte dikişsiz olan $h(x)$'imize geri dönelim. Bu fikri kullanarak birleşme noktasında ($x = 0$) belki de bir defo bulabiliriz. $h(x)$'in gerçekten bir üslü seri açılımına sahip olup olmadığını görmeye çalışırız. Yukarıdaki ifadede $f(x) = h(x)$ alarak çeşitli $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ katsayılarını göz önüne alır ve serinin, x'in orijinin hemen solunda olduğu her durumda $h(x) = 0$ değeriyle uyuşması gerektiğinden bu katsayıların tümünün yok olduğunu fark ederiz. Aslında $e^{-1/x}$ için de tümünün, iki tarafta birbirleriyle eşleşerek gelen tüm türevleriyle birlikte sadeleştiğini buluruz ki, bu durum $h(x)$'in orijinde C^∞–pürüzsüz olmasının temeldeki sebebidir. Bununla birlikte bu bize üslü serinin, tüm terimler sıfır olduğu için (*bkz.* alıştırma 6.1) hiçbir biçimde geçerli olmadığını ve böylece toplamlarının gerçekte $e^{-1/x}$'e eşit olmadığını da söyler. Bu nedenle $x = 0$ ek yerinde bir defo mevcut*tur*: $h(x)$ fonksiyonu bir üslü seri biçiminde ifade edilemez. Bu durumda $h(x)$, $x = 0$'da analitik değildir deriz.

Yukarıdaki tartışmada aslında, *orijin etrafında* bir üslü seri açılımı denen şeye de atıfta bulunmuştum. Benzer bir tartışma fonksiyona ilişkin gerçel sayı tanım kümesinin herhangi bir noktası için de geçerlidir. Öyleyse bu durumda *orijini*, tanım kümesinde p gerçel sayısıyla tanımlanan belirli başka bir noktaya, yukarıdaki üslü seri açılımında x yerine $x - p$ koymak anlamına gelmek üzere, *kaydırmak* zorundayız. Böylece artık,

$$a_0 = f(p),\ a_1 = \frac{f'(p)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(p)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(p)}{3!}, \ldots$$

olmak üzere

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + a_3(x-p)^3 + \cdots$$

ifadesini elde ederiz. Buna *p etrafında* bir üslü seri denir. $f(x)$ fonksiyonu, $x = p$'yi kapsayan bir aralıkta bu tür bir üslü seri olarak ifade edilebilirse *p'de analitik*tir denir. $f(x)$, tanım kümesinin tüm noktalarında analitikse ona *analitik fonksiyon* ya da eşdeğer olarak C^ω–pürüzsüz fonksiyon deriz. Analitik fonksiyonlar açık bir anlamda C^∞–pürüzsüz fonksiyonlardan bile daha "pürüzsüz"dür. Ayrıca bunlar, yukarıda verilmiş $\theta(x)$, $|x|$, $x|x|$, $x^n|x|$ ya da $h(x)$ örneklerindeki biçimde, iki "farklı" analitik fonksiyonu birbirlerine yapıştırarak kaçınmanın olası olmayacağı türde bir özelliğe sahiptir. Euler analitik fonksiyonlardan memnun olurdu. Bunlar aslında "dürüst" fonksiyonlardır!

Yine de tüm bu üslü seriler uğraşmak için tuhaf şeylerdir; hatta yalnızca zihinde bile. Şeylere "karmaşık" biçimli bakış çok daha tasarruflu görünüyor. Dahası bu bize daha derinlikli bir kavrayış sağlıyor. Örneğin $\frac{1}{x}$,

$x = 0$'da analitik değildir fakat yine de hâlâ "bir fonksiyon"dur.[6.4] "Üslü seri felsefesi" bunu bize dolaysız olarak söylemez. Buna rağmen karmaşık sayı bakış açısına göre $\frac{1}{x}$, göreceğimiz üzere açıkça bir fonksiyondur.

6.5 Türev alma kuralları

Bu konuları tartışmaya başlamadan önce türevsel kalkülüsün bize gerçekten sunduğu harika kurallardan, fonksiyonların türevlerini neredeyse gerçekten hiç düşünmeden alabilmemize, elbette yalnızca aylar süren çalışmalar sonucunda olanak sağlayan kurallardan biraz bahsetmek yararlı olacak. Bu kurallar pek çok fonksiyonun türevini, özellikle üslü seriler biçiminde gösterildiklerinde dolaysız olarak nasıl yazacağımızı görmemizi sağlar.

Bir ara yorum olarak yukarıda x^3'ün türevinin $3x^2$ olduğunu belirttiğimi anımsayın. Bu basit fakat önemli bir denklemin özgün bir örneğidir: x^n'nin türevi

$$\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

şeklinde yazabildiğimiz nx^{n-1}'dir. (Bu denklemin neden geçerli olduğunu burada açıklamam dikkatimizi epeyce dağıtır. Gerçekte gösterilmesi o kadar da zor değildir ve ilgilenen okuyucu gerekli her şeyi kalkülüs üzerine temel bir ders kitabında bulabilir.[8] Aklıma gelmişken, n'nin tamsayı olması gerekmez.) Bu denklemi ayrıca kullanışlı

$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

denklemiyle de ifade edebiliriz.[9] Üslü serilerin türevini almakla ilgili bilmemiz gereken çok fazla şey yok. Temel olarak başkaca iki şey söz konusudur. İlk olarak, fonksiyonların toplamlarının türevi onların türevleri toplamına eşittir:

$$\mathrm{d}[f(x) + g(x)] = \mathrm{d}f(x) + \mathrm{d}g(x).$$

Bu daha sonra fonksiyonların sonlu sayıda bir toplamına genişler.[10] İkin-

[6.4] e^{1/x^2} "tek fonksiyon"unu ele alın. Onun orijinde C^∞ olduğunu fakat analitik olmadığını gösterin.

[8] *Bkz.* Edwards ve Penny, 2002.

[9] An itibariyle karşılaştığınız ifadeleri yalnızca biçimsel olarak ele alın ya da hatta sizi daha mutlu edecekse zihinsel olarak "önceki haliyle dx'e böl"ün. Burada kullandığım notasyon §§12.3–6'da tartışılacak olan türevsel biçimlerle uyumludur.

[10] Bununla birlikte, bu kuralı bir üslü seride gerek duyduğumuz sonsuz sayıda terimin toplamına uygulamakla ilgili teknik bir ayrıntı mevcuttur. Bu ayrıntı kesin olarak olarak yakın-

cisi, bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi o sabitle fonksiyonun türevinin çarpımına eşittir:

$$\mathrm{d}\{af(x)\} = a\,\mathrm{d}f(x).$$

Bir "sabit"le x'e göre değişmeyen bir sayıyı kastediyorum. Üslü serideki $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ *katsayıları* sabittir. Bu kurallarla *herhangi bir* üslü serinin türevini dolaysızca alabiliriz.[6 5]

a'nın sabitliğini ifade etmenin başka bir yolu şudur:

$$\mathrm{d}a = 0.$$

Bunu akılda tutarak, hemen yukarıda verilmiş kuralın "Leibniz yasası"nın,

$$\mathrm{d}\{f(x)g(x)\} = f(x)\mathrm{d}g(x) + g(x)\mathrm{d}f(x),$$

gerçekten özel bir durumu ($g(x) = a$ olacak şekilde) olduğunu buluruz (ve herhangi bir doğal n sayısı için $\mathrm{d}(x^n)/\mathrm{d}x = nx^{n-1}$ ifadesi Leibniz yasasından çıkarılabilir).[6.6] Yararlı başka bir kural şudur:

$$\mathrm{d}\{f(g(x))\} = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

Son ikisi ve ilkinden, Leibniz yasasına $f(x)[g(x)]^{-1}$ koyarak

$$\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,\mathrm{d}f(x) - f(x)\,\mathrm{d}g(x)}{g(x)^2}$$

sonucunu çıkarabiliriz.[6.7] Bu kurallarla donanmış bir kimse, kuralların nasıl işlediğiyle ilgili gerçek bir *kavrayış* yolunda daha fazlasına gerek duymaksızın "türev alma uzmanı" haline gelebilir! Bu iyi bir kalkülüsün gücüdür.[6.8] Dahası yalnızca birkaç özel fonksiyonun türevlerine ilişkin bilgiyle[6 9] bir uzmandan daha fazlası da olunabilir. Yalnızca, girişken olmayan okuyucunun da uzman türevciler kulübünün "anlık bir üyesi" olabilmesi için temel örnekleri sunayım:[11,6 10]

---

saklık çemberi içinde yer alan x değerleri için görmezden gelinebilir; *bkz.* §2.5. *Bkz.* Priestly, 2003.

[6.5] §5.3'te e^x için verilen üslü seriyi kullanarak $\mathrm{d}e^x = e^x\,\mathrm{d}x$ eşitliğini gösterin.

[6.6] Bunu kanıtlayın.

[6.7] Bu sonucu türetin.

[6.8] $y = (1 - x^2)^4$ ve $y = (1 + x)/(1 - x)$ ifadeleri için $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$'i bulun.

[6.9] a sabit olmak üzere $\mathrm{d}(\log_a x)$, $\mathrm{d}(\log_x a)$ ve $\mathrm{d}x^x$ ifadelerini çözün.

[11] §5.1'den $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ve $\tan^{-1}$'in sırasıyla cos, sin ve tan fonksiyonlarının ters fonksiyonları olduğunu anımsayın. Böylece $\sin(\sin^{-1}x) = x$, vb'dir. Bu ters fonksiyonların "çok değerli fonksiyonlar" olduğunu aklımızda tutmalıyız fakat bununla birlikte $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ ve $-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ aralıklarındaki değerleri seçmek olağandır.

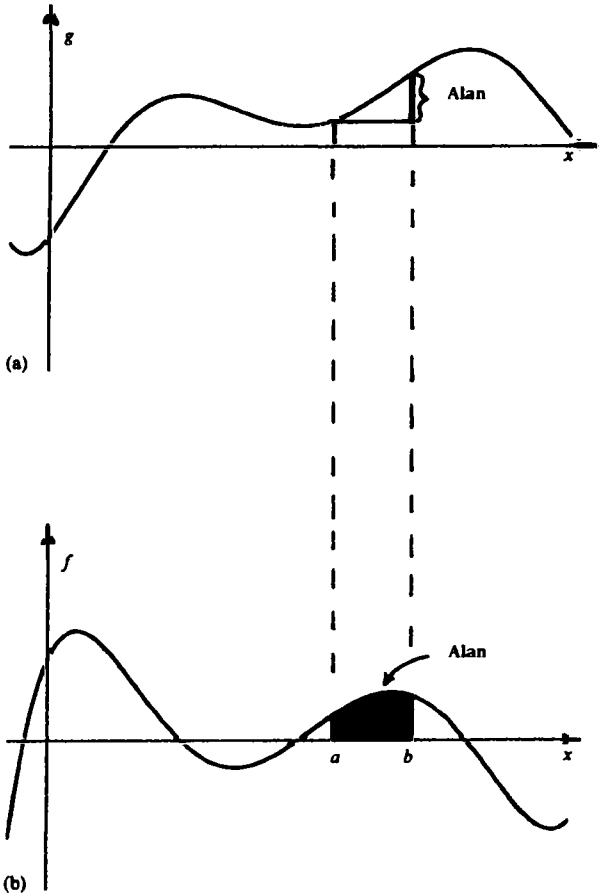
$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(e^x) &= e^x \mathrm{d}x, \\
\mathrm{d}(\log x) &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\mathrm{d}(\sin x) &= \cos x \, \mathrm{d}x, \\
\mathrm{d}(\cos x) &= -\sin x \, \mathrm{d}x, \\
\mathrm{d}(\tan x) &= \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}, \\
\mathrm{d}(\sin^{-1} x) &= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \\
\mathrm{d}(\cos^{-1} x) &= \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \\
\mathrm{d}(\tan^{-1} x) &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Bunlar, bölümün başında değinilen noktayı, açık denklemler verildiğinde türev alma işleminin "basit" oluşunu örnekliyor. Elbette bununla, bu işlemleri uykudayken bile yapabileceğinizi kastetmiyorum. "Kolay" diyerek anlatmak istediğim türev almanın uygulanması için hesaplamaya dayalı açık bir yöntemin var oluşudur. Bir ifadedeki her bir bileşenin türevinin nasıl alınacağını bilirsek, bu durumda kalkülüse ait yukarıda verilmiş yöntemler bize ifadenin bütününün türevini nasıl alabileceğimizi söyler. "Kolay" burada gerçekten, halihazırda bir bilgisayara girilebilmiş olan anlamındadır. Öte taraftan aksi yönde ilerlersek işler oldukça farklıdır.

6.6 İntegral alma

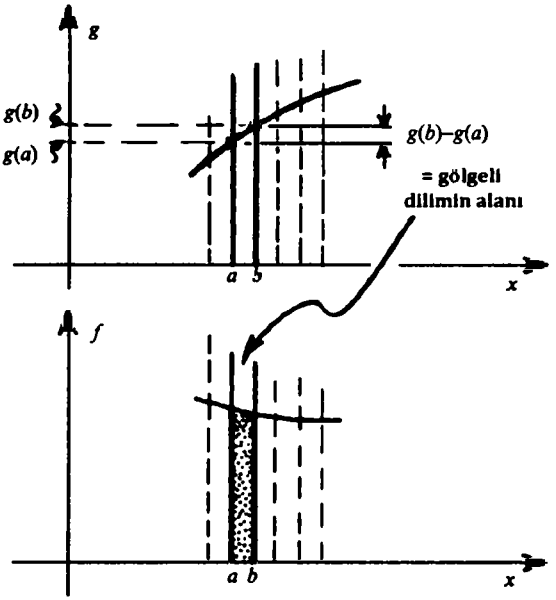
Bu bölümün başında belirtildiği gibi *integral alma* türev almanın tersidir. Bu $g'(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $g(x)$ fonksiyonu bulmak, diğer bir deyişle $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)$ denklemine bir $y = g(x)$ çözümü bulmak anlamına gelir. Bunu ortaya koymanın diğer bir yolu Şekil 6.4'te (ya da Şekil 6.5) aşağıya doğru hareket etmek yerine yolumuzu yukarıya doğru açmaya çalışırız. "Kalkülüsün temel teoremi"nin güzelliği odur ki, bu yöntem bize ardışık her bir eğri altındaki alanları nasıl hesaplayacağımızı söyler. Şekil 6.8'e bir göz atın. Alttaki $u = f(x)$ eğrisinin üstteki $y = g(x)$ eğrisinden elde edilebileceğini anımsayın çünkü $f(x)$, $g(x)$'in türevi olmak üzere, bu eğrinin eğim grafiğini gösterir. Bu daha önce elimizde olanın aynısıdır. Yine de önce alttaki eğriyle başlayalım. Üstteki eğrinin basitçe alttaki eğrinin altında kalan alanlara göndermede bulunduğunu keşfederiz. Biraz

[6.10] İlki için *bkz.* alıştırma [6.5]; ikincisini $\mathrm{d}(e^{\log x})$'ten; üçüncü ve dördüncüyü, karmaşık niceliklerin gerçeller gibi davrandığını varsayarak $\mathrm{d}e^{ix}$'ten; ve geri kalanları da, $\mathrm{d}(\sin(\sin^{-1} x))$, vb'yi kullanarak ve $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ifadesini dikkate alarak daha öncekilerden türetin.



Şekil 6.8 Kalkülüsün temel teoremi: Şekil 6.4a ve b'nin, aşağıya ilerlemek yerine yukarıya doğru ilerleyerek yeniden yorumlamşı. Üstteki eğri (a), alttaki eğrinin (b) altında kalan alanları, iki dik $x = a$ ve $x = b$ çizgisi, x ekseni ve alttaki eğriyle sınırlanmış alan, üst eğrinin bu iki x değerindeki yüksekliklerin farkı (işaretler hesaba katılarak), $g(b) - g(a)$ olmak üzere, gösteriyor.

daha açık olmak gerekirse: alttaki resimde sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ ile belirtilen iki dik çizgi alırsak bu durumda bu iki çizgi, x ekseni ve eğrinin kendisiyle sınırlanan alan üstteki eğrinin bu iki x değerindeki yüksekliklerı arasındaki farka eşit olacaktır. Elbette bu gibi konularda "işaretler"le ilgili dikkatli olmak zorundayız. Alttaki eğrinin x ekseninin altına indiği bölgelerde alanlar hesaba negatif olarak katılır. Dahası resimde, $a < b$ olarak ve üstteki eğride "yükseklikler arasındaki farkı" $g(b) - g(a)$ biçiminde kabul ettim. İşaretler $a > b$ durumunda tersine çevrilir.



Şekil 6.9 Çok küçük bir miktarda olacak şekilde $b > a$ olarak alın. Alttaki resimde komşu çizgiler $x = a$ ve $x = b$ arasındaki çok dar bir dilimin alanı esasen dilimin $b - a$ eniyle yüksekliğinin (x ekseninden eğriye kadar) çarpımıdır. Bu yükseklik üstteki eğrinin oradaki eğimidir, bu nedenle dilimin alanı, üstteki eğrinin a'dan b'ye yükseldiği nicelik, diğer bir deyişle $g(b) - g(a)$ olan bu eğim × dilimin enidir. Pek çok dar dilimi toplayarak alttaki eğrinin altında kalan geniş bir dilimin alanının üstteki eğrinin yükselişine karşılık gelen nicelik olduğunu buluruz.

Şekil 6.9'da eğimler ve alanlar arasında nasıl böyle ters bir ilişki bulunduğunu sezgisel olarak inanılır kılmaya çalıştım. b'nin a'dan çok küçük bir miktar daha büyük olduğunu düşünürüz. Böylece ele alınacak alan, alttaki resimde komşu iki çizgi $x = a$ ve $x = b$ tarafından sınırlanmış çok dar dilimdir. Bu alanın ölçüsü esasen dilimin minik eniyle (diğer bir deyişle $b - a$) onun yüksekliğinin (x ekseninden eğriye kadar) çarpımıdır. Bununla birlikte dilimin yüksekliği o noktada üstteki eğrinin eğimini ölçmek durumundadır. Bu durumda dilimin alanı, bu eğimin dilimin eniyle çarpımına eşittir. Öte taraftan üst eğrinin eğimiyle dilimin eninin çarpımı, üst eğrinin a'dan b'ye yükseldiği nicelik olan $g(b) - g(a)$ farkına eşittir. Böylece çok dar dilimler için alan, aslında belirtilen bu farkla ölçülür. Geniş dilimler çok sayıda dar dilimden oluşur biçimde kabul eder ve toplam alanı üstteki eğrinin tüm aralık boyunca ne kadar yükseldiğini ölçerek elde ederiz.

Burada ortaya koymam gereken önemli bir nokta mevcut. Alttaki eğriden üsttekine geçerken üstteki eğrinin tümünün ne kadar yükseğe yerleştirileceğiyle ilgili eşsiz olmama durumu söz konusudur. Yalnızca üstteki eğride yükseklikler arasındaki *farklar*la ilgiliyiz, bu durumda tüm eğriyi herhangi sabit bir miktarda yukarıya ya da aşağıya kaydırmak bir şey değiştirmeyecektir. Bu durum "eğim" yorumu bakımından da, üstteki eğrinin farklı noktalarındaki eğim, eğriyi daha önce yukarıya ya da aşağıya kay-

dırmışsak bu durumdakinin aynısı olacağı için, açıktır. Bizim analizimizde bu, $g(x)$'e bir C sabiti eklediğimiz durumda elde edeceğimiz fonksiyonun türevinin hâlâ $f(x)$ olduğu anlamına gelir:

$$\mathrm{d}(g(x) + C) = \mathrm{d}g(x) + \mathrm{d}C = f(x)\,\mathrm{d}x + 0 = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bu tür bir $g(x)$ fonksiyonu ya da eşdeğer biçimde rasgele seçilmiş bir C sabiti için $g(x) + C$, $f(x)$'in bir *belirsiz integrali* olarak adlandırılır ve bunu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + \text{sabit}$$

biçiminde yazarız. Bu, $\mathrm{d}[g(x) + \text{sabit}] = f(x)\mathrm{d}x$ bağıntısını ifade etmenin yalnızca bir diğer yoludur, böylece "$\int$" işaretini yalnızca "d" sembolünün tersi olarak düşünürüz. $x = a$ ve $x = b$ arasındaki belirli alanı istersek bu durumda *belirli integral* olarak adlandırılan şeyi istiyoruz demektir ve

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = g(b) - g(a)$$

yazarız. $f(x)$ fonksiyonunu bildiğimiz ve onun integrali $g(x)$'i elde etmek istediğimiz durumda, elimizde türev almada sahip olduğumuz açıklıkta kestirme kurallar mevcut değildir. Pek çoğu standart ders kitapları ve bilgisayar programlarında bulunabilen çok fazla numara bilinir fakat bunlar tüm durumlarla başa çıkmaya yetmez. Aslında daha önce kullanageldiğimiz açık standart fonksiyonlar ailesinin sıklıkla genişletilmesi gerektiği sonucuyla karşılaşırız ve bu yeni fonksiyonlar integral almanın sonuçlarını aktarmak üzere "icat edilmeli"dir. Aslında bunu zaten yukarıda verilmiş özel örneklerde görmüştük. Yalnızca x'in üslü kombinasyonlarından oluşan fonksiyonlara alışkın olduğumuzu düşünün. Genel bir x^n üslü ifadesi söz konusu olduğunda onun integralini $x^{n+1}/(n+1)$'i elde etmek üzere alabiliriz. (Bu yalnızca §6.5'teki denklemimizi n yerine $n+1$ koyarak kullanmaktır: $\mathrm{d}(x^{n+1})/\mathrm{d}x = (n+1)x^n$, $n = -1$ durumunda ne yapılacağıyla ilgili endişe duyuncaya kadar her şey yolundadır. Bu durumda beklenen $x^{n+1}/(n+1)$ yanıtının paydası sıfır olur ve bu çözüm çalışmaz. Öyleyse x^{-1}'in integralini nasıl alacağız? Şansımız var ki §6.5'teki listemizde bekleyen $\mathrm{d}(\log x) = x^{-1}$ denklemini fark ederiz. Bu durumda yanıt $\log x + \text{sabit}$ olur.

Bu kez şanslıydık! Durum öyle gelişti ki, logaritma fonksiyonuyla daha önce farklı bir sebeple çalışmıştık ve ona ait bazı özellikleri biliyorduk. Bununla birlikte farklı durumlarda yanıtımızı daha önceden bildiğimiz ve onun vasıtasıyla ifade edebileceğimiz hiçbir fonksiyon olmadığını da gö-

rebiliriz. Aslında integraller sıklıkla, yeni fonksiyonların kendileri aracılığıyla *tanımlan*acağı uygun araçlar sunar. Belirli integralin "zor"luğu bu anlamdadır.

Diğer taraftan açık ifadelerle o kadar da ilgili olmayıp verili fonksiyonların türevleri ya da integralleri olan fonksiyonların *varlığı* sorularıyla ilgiliysek bu durumda elimiz eskiye oranla daha güçlü demektir. Şimdi kusursuzca çalışan işlem integral almakken türev almak sorunlara yol açar. Bu işlemleri sayısal veriyle gerçekleştirirken de aynı şey söz konusudur. Temel olarak türev almayla ilgili sorun onun, kritik şekilde türevi alınacak fonksiyonun ince ayrıntılarına bağlı oluşudur. Türevi alınacak fonksiyonun açık bir ifadesine sahip değilsek bu durum bir sorun oluşturur. Diğer taraftan integral almaksa bu tür konulara karşı, integrali alınacak fonksiyonun bütünlüklü geniş doğasıyla ilgilenerek görece daha korunaklıdır. Gerçekte tanım kümesi "kapalı" $a \leq x \leq b$ aralığı olan sürekli herhangi bir fonksiyonun (C^0–fonksiyon) integrali, sonuç C^1 (diğer bir deyişle C^1–pürüzsüz) olmak üzere, alınabilir.[12] Bunun integrali sonuç C^2 olacak şekilde yeniden alınabilir, sonra bir C^3–pürüzsüz fonksiyon vererek yeniden alınır ve böylece devam eder. İntegral almak fonksiyonları hep daha pürüzsüz hale getirir ve bu şekilde süresiz olarak devam edebiliriz. Öte taraftan türev almaksa işleri yalnızca daha da kötüleştirir ve fonksiyonun "türevi alınamaz" hale geldiği belirli bir noktada bir sona ulaşır.

Yine de ayrıca, bu konulara türev alma işlemine süresiz biçimde devam edilecek şekilde olanak sağlayan yaklaşımlar mevcuttur. Buna zaten, $|x|$'in türevini, $|x|$ türevlenebilir olmasa bile, $\theta(x)$ sonucunu elde etmek üzere alma olanağını sağladığımda değinmiştim. Daha ileri gitmeyi deneyebilir ve $\theta(x)$'in orijinde sonsuz bir eğime sahip olması gerçeğine karşın onun türevini de alabiliriz. "Yanıt" Dirac[13] *delta fonksiyonu* denen şeydir; kuantum mekaniği matematiğinde dikkate değer önemdeki bir kavram. Delta fonksiyonu aslında hiç de, tanım kümesindekileri görüntülere dönüştürme anlamındaki alışıldık (modern) bir "fonksiyon" değildir. Delta fonksiyonu için orijinde hiçbir "değer" yoktur (orada yalnızca *sonsuz* olabilirdi). Yine de delta fonksiyonu, matematiksel kavramların çeşitli daha geniş sınıfları içinde, en bilineni *dağılımlar* olan, açık bir matematiksel tanım bulur.

Bunun için C^n–fonksiyonları kavramımızı n'nin negatif bir tamsayı olabileceği durumlara genişletmemiz gerekir. Bu durumda $\theta(x)$ fonksiyo-

---

[12] Tanım kümesindeki belirgin gereksinim *tıkız* adı verilen şeydir, *bkz.* §12.6. Aslında gerçel doğrusunun sonlu aralıkları bitim noktaları da dahil olmak üzere tıkızdır.

[13] Görünüşe bakılırsa Oliver Heaviside "delta fonksiyonu"nu da Dirac'tan çok yıllar önce ortaya koymuştu.

nu bir C^{-1}–fonksiyondur ve delta fonksiyonu C^{-2}'dir. Türev aldığımız her seferinde türevlenebilirlik sınıfını bir birim azaltmalıyız (diğer bir deyişle sınıf bir birim daha negatif hale gelir). Tüm bunlarla Euler'in "yeterli bir fonksiyon" kavramından gittikçe daha da uzaklaşıyor görünürüz ve Euler bize, yararlı görünüşleri gerçek olmadığı için bu tür şeylerle işimiz olmaması gerektiğini söyler görünür. Yine de zamanı gelince, karmaşık sayıların bizi bu noktada bir ironiyle hayrete düşürdüklerini göreceğiz; sihir hünerlerinin en iyilerinden biriyle ifade edilen bir ironiyle! Bu hünere tanıklık etmek için, bunun henüz uygun şekilde açıklayabileceğim bir şey olmaması nedeniyle, 9. bölümün sonuna kadar beklememiz gerekecek. Okur ilkin, başkaca harika sihirli bileşenlerle döşenen temel gereksinimlerin hazırlanması için benimle birlikte dişini sıkmalıdır.

7

KARMAŞIK SAYI ANALİZİ

7.1 Karmaşık pürüzsüzlük; holomorfik fonksiyonlar

Türev alma kavramını, işlem *karmaşık* $f(z)$ fonksiyonuna uygulandığında nasıl anlamalıyız? Konuyu bu kitapta tüm ayrıntısıyla açıklamaya girişmem kesinlikle uygun olmaz.[1] Bu tür ayrıntılara, §6.2'de gerçel bir fonksiyon için bile uygun şekilde değinmedim. Yine de en azından içeriğin özetini aktarmaya çalışabilirim. Sözü edilen, karmaşık türevlenebilirliğin başardığı şeyi gösteren temel argümanın oldukça seri bir taslağıdır. Daha sonra onun bazı şaşırtıcı bileşenleriyle ilgili biraz daha açık olacağım.

Temelde karmaşık türev alma için fonksiyonun görüntü kümesindeki herhangi bir z noktasında $w = f(z)$ karmaşık eğrisine ait bir "eğim" kavramı bulunmasına gerek duyarız. (Bu durumda hem $f(z)$ fonksiyonu hem de z değişkeni karmaşık değer alabilir.) Bu "eğim" kavramının tutarlı bir anlam ifade etmesi için z değişkenini z'nin karmaşık düzlemindeki farklı yönlerde hafifçe hareket ettirdiğimizde, $f(z)$'nin Cauchy–Riemann denklemleri[2] ($f(z)$'nin gerçel ve sanal kısımlarını da içeren ve gerçel ve sanal kısımlara göre alınan; *bkz.* §10.5) denen belirli bir çift denklemi sağlaması gerekir. Bu denklemler bizim için, karmaşık integral almayla ilgili oldukça dikkate değer bir şey saptar; tanımlanması gereken yeni bir integral alma kavramına olanak sağlayan ve adı *kontür integral alma* olan bir şey. Böylece, $f(z)$'nin n'inci derece türevi için bu kontür integral alma biçiminde güzel bir denklem ortaya konabilir. Birinci türeve bir kez sahip olduğumuzda yüksek dereceli tüm türevleri *özgürce* elde ederiz.

Daha sonra bu denklemi, bize $f(z)$ için ileri sürülen ve aslında $f(z)$'e yakınsadığını göstermemiz gereken bir Taylor serisinin katsayılarını sunması için kullanırız. Bunu başardığımızda $f(z)$ için, $f(z)$'nin kendisi boyunca tanımlı ve türevlenebilir olduğu karmaşık z–düzlemindeki herhangi

---

[1] Bu etkileyici konuları daha geniş geometrik ayrıntısıyla incelemek isteyen okuyuculara şiddetli önerim, Needham, 1997.

[2] Bunları §10.5'te, *kısmi türev* kavramı açıklandıktan sonra vereceğim.

bir çember içinde geçerli olan bir Taylor serisi ifadesine sahip oluruz. Böylece, karmaşık pürüzsüz olan herhangi bir karmaşık fonksiyonun zorunlu biçimde analitik olduğu büyülü gerçeği açığa çıkar.

Bu nedenle karmaşık analizde, önceki bölümde tanımlanan "$h(x)$" türü belirli C^∞–fonksiyonlarındaki "yapıştırma işleri"nin sınırlılıklarını fark etmekte hiçbir sorun yoktur. Karmaşık pürüzsüzlüğün gücü Euler'i kesinlikle memnun ederdi. (Ne yazık ki karmaşık pürüzsüzlüğün bu hayret verici gücü Euler'in ölümünden 38 yıl sonra 1821'de Augustin Cauchy tarafından ilk kez bulunup değeri anlaşıldığında gerçek Leonhard Euler için oldukça geçti.) Karmaşık pürüzsüzlüğün "Eulerci" fonksiyon kavramımız için gereken şeyi, üslü seri açılımlarının varlığının sunduğundan çok daha tutumlu bir yolla sunduğunu görürüz. Öte taraftan bu tür fonksiyonlara karmaşık bakış açısıyla bakmanın başka bir avantajı daha bulunmaktadır. Gerçel eğri $y = 1/x$'in birbiriyle gerçel x değerleri üzerinden "analitik olarak" birleşmemiş iki ayrı parçadan oluşması gerçeğine rağmen "tam bir fonksiyon" gibi görünen sıkıntılı "$1/x$"imizi anımsayın. Karmaşık bakış açısından açıkça görmekteyiz ki $1/z$ aslında tekil bir fonksiyondur. Fonksiyonun karmaşık düzlemde "yanlış gittiği" tek yer $z = 0$, orijindir. Bu tek noktayı karmaşık düzlemden ayırırsak elimizde hâlâ bağlantılı bir bölge bulunur. Gerçel doğrusunun $x < 0$ kısmı karmaşık düzlem boyunca bu doğrunun $x > 0$ kısmıyla bağlantılıdır. Böylece, gerçel sayı durumundakinden oldukça farklı olarak $1/z$ aslında birleşik bir karmaşık fonksiyondur.

Bu anlamda karmaşık pürüzsüz (karmaşık analitik) olan fonksiyonlara *holomorfik* denir. Holomorfik fonksiyonlar sonraki pek çok tartışmamızda oldukça önemli bir rol oynayacak. Onların önemini 8. bölümde konformal dönüşümler ve Riemann alanlarıyla ve 9. bölümde (titreşim kuramının temelinde yer alan) Fourier serisiyle bağlantılı olarak göreceğiz. Kuantum kuramında ve kuantum alan kuramında (§24.3 ve §26.3'te göreceğimiz üzere) önemli rolleri bulunmaktadır. Bu fonksiyonlar ayrıca yeni fiziki kuramların gelişimiyle ilgili bazı yaklaşımlara da temel oluşturur (özellikle burgaç kuramı, *bkz.* bölüm 33 ve sicim kuramında da önemli bir rolleri vardır, *bkz.* §§31.5,11,12).

7.2 Kontür integral alma

Burası §7.1'de işaret edilen matematiksel argümanları tüm ayrıntılarıyla açıklamanın yeri olmasa da yine de yukarıdaki taslağın üzerinde durmak aydınlatıcı olacaktır. Özelde okuyucuya kontür integralle ilgili,

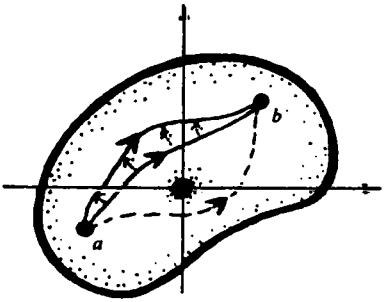
kendisinin §7.1'in gereksinimlerini karşılamak üzere kullanılabileceği biçime ilişkin bir kavrayış sunacak olan açıklamalar yararlı olacaktır. İlk olarak gerçel bir x değişkeni için önceki bölümde verilmiş belirli bir integrale ait notasyonu anımsayalım ve onun, $g'(z) = f(z)$ olmak üzere karmaşık bir z değişkenine uygulandığını düşünelim:

$$\int_a^b f(z)\mathrm{d}z = g(b) - g(a).$$

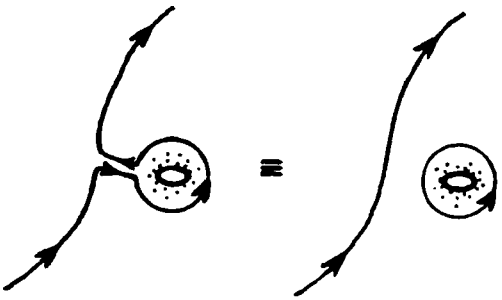
Gerçek durumda integral, gerçel doğrusundaki bir a noktasından yine aynı doğrudaki b noktasına kadar alınır. Gerçel doğru üzerinde a'dan b'ye gitmenin yalnızca bir yolu bulunur. Şimdi bunu bir karmaşık denklem olarak düşünün. Bu kez burada karmaşık düzlem üzerindeki iki nokta olarak a ve b mevcuttur. Şimdi a'dan b'ye yalnızca tek bir rota yoktur, bunun yerine a ile b'yi birleştiren pek çok farklı yol çizebiliriz. Cauchy–Riemann denklemlerinin bize söylediği şudur ki, integral alma işlemimizi bu tür bir yol üzerinde gerçekleştirirsek[3] bu durumda, fonksiyonun tanım kümesi içinde sürekli deformasyon yoluyla ilkinden elde edilebilecek herhangi başka bir yol üzerinde de aynı sonucu alırız. (*Bkz.* Şekil 7.1. Bu özellik §12.6'da açıklanan "dışsal kalkülüsün temel teoremi"nin basit bir örneğinin sonucudur.) Bazı fonksiyonlar için tanım kümesi içinde ($1/z$ durumunda $z = 0$ olmak üzere) bir "delik" mevcuttur, bu nedenle a'dan b'ye gitmenin esasen farklı birkaç yolu olabilir. "Esasen farklı" burada, yollardan birinin fonksiyonun tanım kümesi içinde kalarak sürekli biçimde bir diğerine deforme edilememesi gerçeğini kasteder. Böylesi durumlarda a'dan b'ye alınan integralin değeri değişik yollar için farklı yanıtlar verebilir.

Burada bir noktanın açıklanması (ya da daha çok düzeltilmesi) gereklidir. Bir yolun sürekli biçimde bir başkasına deforme edilmesinden bahsettiğimde matematikçilerin *homolog* deformasyonlar dedikleri şeyi kastediyorum, *homotopik* olanları değil. Homolog bir deformasyonda yolların bazı kısımlarının, ters yönde hareket ediyor olmaları koşuluyla birbirlerini elemeleri yasaldır. Bu tür izinli bir deformasyon örneği için *bkz.* Şekil 7.2. Bu şekilde birbirlerine deforme edilebilen iki yol için *aynı homoloji sınıfına ait* denir. Buna karşın homotopik deformasyonlar bu tür elemeye izin vermez. Bu tür elemenin yasak olduğu, birbirlerine deforme edilebilen yollar aynı *homotopi sınıfına* aittir. Homotopik eğriler her zaman homologtur fakat tersi zorunlu değildir. Homotopi ve homolojinin ikisi de

[3] Daha açık olmak gerekirse, f'nin $z = p(t)$'yle tanımlanan bir yol boyunca integrali, $p(u)$ yolun a başlangıç noktası ve $p(v)$ yolun b final noktası olmak üzere, $\int_u^v f(p(t))p'(t)dt = \int_a^b f(z)dz$, belirli integrali biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 7.1 *a*'dan *b*'ye giden farklı yollar. Holomorfik bir *f* fonksiyonunun bir yol üzerinde integralini almak *f*'in tanım kümesi içinde onu sürekli deforme etmek yoluyla kendisinden elde edilebilecek herhangi başka bir yol üzerindekiyle aynı yanıtı verir. Bazı fonksiyonlar için tanım kümesi içinde belirli deformasyonlara engel olan bir "delik" mevcuttur, böylece farklı yanıtlar elde edilebilir.



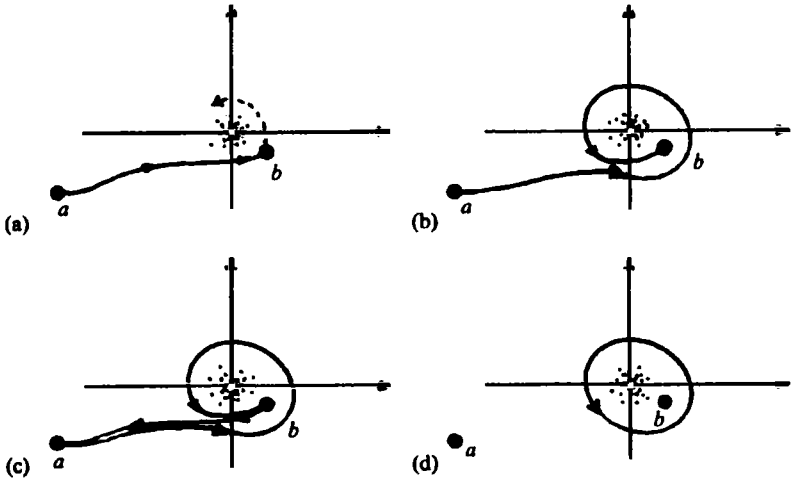
Şekil 7.2 Homolog bir deformasyonda yolların bazı kısımları, ters yönde hareket ediyor olmaları koşuluyla birbirlerini eler. Bu durum bazen ayrık ilmeklerin artmasını sağlar.

sürekli hareket altındaki eşdeğerlik le ilgilenir. Bu nedenle onlar *topoloji* konusunun bir bölümünü oluşturur. Topolojinin farklı görünümlerinin başka alanlarda önemli roller oynadığını daha sonra göreceğiz.

$f(z) = 1/z$ fonksiyonu gerçekte yollar homolog olmadığında kendisi için farklı yanıtların elde edil*diği* bir fonksiyondur. Logaritma hakkında zaten bildiğimiz şeyler nedeniyle bunun nasıl böyle olması gerektiğini görebiliriz. Geçen bölümün sonlarına doğru $\log z$'nin $1/z$'ye ait belirsiz bir integral olduğu belirtilmişti. (Aslında bu yalnızca gerçel bir x değişkeni için ortaya kondu fakat gerçel yanıtı elde eden aynı gerekçelendirme kendisine karşılık gelen karmaşık yanıtı da elde edecektir. Bu diğer açık denklemlerimiz için de geçerli olan genel bir kuraldır.) Böylece elimizde

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \log b - \log a$$

ifadesi bulunur. Bununla birlikte §5.3'ten, karmaşık bir logaritmanın farklı alternatif "yanıtlar"ı olduğunu anımsayın. Dahası sürekli şekilde bir yanıttan bir diğerini elde edebiliriz. Bunu göstermek için a'yı sabit tutup b'nin değişmesine izin verelim. Gerçekte b'nin orijin etrafında pozitif (diğer bir deyişle saat yönünün tersi) anlamda (*bkz.* Şekil 7.3a) sürekli biçimde bir kez dönmesine, kendi orijinal konumunu geri kazanacağı şekilde



Şekil 7.3 (a) $z^{-1}dz$'nin a'dan b'ye alınan integrali $\log b - \log a$ sonucunu verir. (b) a'yı sabitleyin ve b'nin orijin etrafında, yanıttaki $\log b$'yi $2\pi i$ kadar arttırarak saat yönünün tersine bir kez dönmesine izin verin. (c) Daha sonra orijinal rota üzerinden a'ya geri dönün. (d) Yolun bir kısmı a'dan elendiğinde, saat yönü tersine kapalı bir $\oint z^{-1}dz = 2\pi i$ kontür integraliyle karşı karşıya kalırız.

olanak sağlayacağız. §5.3'ten, $\log b$'nin sanal kısmının basitçe ona ait *argüman* (diğer bir deyişle b'nin gerçel pozitif eksenle oluşturduğu pozitif anlamda ölçülmüş açı; *bkz.* Şekil 5.4b) olduğunu anımsayın. Argüman bu hareket esnasında tam olarak 2π kadar artar ve böylece $\log b$'nin $2\pi i$ kadar arttığını buluruz (*bkz.* Şekil 7.3b). Bu nedenle integralimizin değeri, üzerinde integralin alınacağı yol orijin etrafında (pozitif anlamda) bir kez daha dolandığında $2\pi i$ kadar artar.

Bu sonucu, varlıkları karmaşık analizin karakteristik ve güçlü bir görünümü olan *kapalı kontürler* biçiminde de ifade edebiliriz. Gelin birinci ve ikinci yollarımız arasındaki farkı ele alalım, diğer bir deyişle ilk olarak ikinci yolu, daha sonraysa birinci yolu ters yönde hareket ettirelim (Şekil 7.3). Bu farkı homolog anlamda ele alıyoruz, böylece sürekli bir biçimde "geri dönen" ve arta kalanı düzelten parçaları eleyebiliriz. Sonuç orijin etrafında yalnızca bir kez dolanan kapalı bir yol; ya da *kontür*dür (*bkz.* Şekil 7.3d), ve ne a'nın ne de b'nin konumuyla ilgilenir. Bu, genellikle $\oint$ sembolüyle yazılan (kapalı) kontür integrale ilişkin bir örnektir ve burada

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

ifadesini buluruz.[7 1] Elbette bu sembolü kullanırken hangi gerçek kontürün, ya da hangi kontür homoloji sınıfının kullanıldığı konusunda dikkatli olmalıyız. Kontürümüz iki kez dolansaydı (pozitif anlamda), böylece $4\pi i$ yanıtını elde ederdik. Orijin etrafında ters yönde (diğer bir deyişle saat yönü) bir kez dolansaydı bu durumda yanıt $-2\pi i$ olurdu.

Bu tür kapalı bir kontür sayesinde anlamsız olmayan bir yanıt alma özelliğinin kritik bir biçimde karmaşık logaritmanın çok değerliliğine, yalnızca bir logaritmanın tanımındaki kullanışsızlık gibi görülebilecek bir özelliğe bağlı olması ilginçtir. Bunun yalnızca ilginç bir şey olmadığını birazdan göreceğiz. Gerçekte karmaşık analizin gücü kritik olarak ona bağlıdır. Takip eden iki paragrafta bu tür bir şeyin bazı üstü kapalı anlatımlarını özetleyeceğim. Umarım matematiğe ilgisi olmayan okuyucular, tartışmadan değerli bir şeyler elde edebilirler. Bunun, matematiksel tartışma doğasında hem gerçek hem de şaşırtıcı bir şeyler aktardığına inanıyorum.

7.3 Karmaşık pürüzsüzlükten üslü seriler

Yukarıda gösterilen ifade holomorfik bir fonksiyonun orijindeki değerini, orijini çevreleyen bir kontür etrafındaki bir integral biçiminde ifade eden ünlü *Cauchy denkleminin* (sabit $f(z) = 2\pi i$ fonksiyonu için) özel bir durumudur:[4]

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z}\,dz = f(0).$$

Burada $f(z)$, orijinde holomorfiktir ve kontür orijini çevreleyen herhangi bir ilmektir; ya da orijinin ortadan kaldırılmış haliyle, fonksiyonun tanım kümesindeki herhangi bir ilmeğin homologu olabilir. Bu nedenle fonksiyonun orijin*deki* durumunun bütünüyle, onun orijini *çevreleyen* bir noktalar kümesinde ne durumda olduğu tarafından belirlenmesi gerçeğiyle karşı karşıya geliriz. (Cauchy'nin denklemi temel olarak, küçük ilmeklerin limitinde alınmış yukarıdaki $\oint z^{-1}\,dz = 2\pi i$ ifadesiyle birlikte Cauchy–Riemann denklemlerinin bir sonucudur; fakat burada tüm ayrıntılarını ele almam uygun olmaz.)

Cauchy denkleminde $1/z$ kullanmak yerine n pozitif bir tamsayı olmak üzere $1/z^{n+1}$ kullanırsak, Cauchy denkleminin "yüksek dereceden" bir versiyonunu, $f(z)$'nin orijindeki n'inci derece türevi, $f^{(n)}(z)$, olduğu anlaşılan

[7.1] n, -1'den farklı bir tamsayı olduğunda niçin $\oint z^n\,dz = 0$ olmak zorundadır, açıklayın.

[4] Cauchy denklemidenkleminin doğru olması gerekliliğine ilişkin bir "sebep", $f(z)$'nin aslında $f(0)$*sabit* değeri olarak ele alınabilmesidir ve böylece durum §7.2'de çalışılmış olana indirgenir.

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = f^{(n)}(0)$$

ifadesini elde ederiz. ($n!$'i §5.3'ten anımsayın.) $f(z)$'e ilişkin üslü seriyi inceleyerek bu denklemin "doğru yanıt olması gerek"tiğini görebiliriz[7.2] fakat bu durum, üslü seri açılımının ya da hatta f'nin n'inci derece türevinin var olduğunu hâlâ bilmememiz nedeniyle, bu gerçeği kullanıp kullanmama sorusunu hak ediyor. Şu aşamada tüm bildiğimiz $f(z)$'nin, birden fazla kez türevlenebilir olduğunu bilmeksizin, karmaşık pürüzsüz olduğudur. Bununla birlikte bu denklemi basit olarak, orijindeki n'inci derece türevin *tanımını* sunan şey olarak kullanmaktayız. Bu "tanım"ı daha sonra

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \cdots$$

üslü serisindeki (*bkz.* §6.4) katsayılara ilişkin $a^n = f^{(n)}(0)/n!$ Maclaurin denklemine dahil edebiliriz ve bir parça uğraşla aslında bu serinin toplamının orijini kapsayan bir bölgede $f(z)$'ye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz. Bunun sonucu olarak fonksiyon orijinde, denklem tarafından ortaya konduğu üzere, gerçek bir n'inci derece türeve sahiptir.[7.3] Bu, orijini çevreleyen bir bölgedeki karmaşık pürüzsüzlüğün, aslında fonksiyonun orijinde gerçekten (karmaşık) analitik olduğunu (diğer bir deyişle holomorfik) ima edişini gösteren argümanın esas özünü içerir.

Elbette tüm bunlarda orijinle ilgili özel hiçbir şey mevcut değildir. Karmaşık düzlemdeki herhangi başka bir p noktasına ilişkin üslü seriler hakkında da aynı derecede konuşabilir ve §6.4'te yaptığımız gibi Taylor serisini kullanabiliriz. Bunun için orijini basitçe, Cauchy denklemi "kaymış orijin" biçiminde

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-p)}dz = f(p)$$

olmak üzere ve ayrıca n'inci derece türev ifadesini şimdi kontürün karmaşık düzlemdeki p noktasını çevrelediği biçimde

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz = f^{(n)}(p)$$

olmak üzere, p noktasıyla yer değiştiririz. Böylece karmaşık pürüzsüzlük, tanım kümesinin *her bir* noktasında analitiklik (holomorfiklik) anlamına gelir.

[7.2] Bunu, $f(z)$'ye ilişkin Maclaurin serisini integralde basit şekilde yerine koyarak gösterin.

[7.3] Bunların tümünü en azından biçimsel ifadeler düzeyinde gösterin; titiz gerekçelendirmeler hakkında endişelenmeyin.

Karmaşık pürüzsüzlük yerel olarak analitiklik anlamına geldiğinden, okuyucudan basit olarak sonuca güvenmesini talep etmek yerine argümanın temellerini ortaya sermeyi tercih ettim çünkü bu, matematikçilerin sonuçlarını sıklıkla elde edebildikleri biçime ilişkin muhteşem bir örnektir. Ne öncül ($f(z)$ karmaşık pürüzsüzdür) ne de sonuç ($f(z)$ analitiktir), kontür integral kavramına ya da bir karmaşık logaritmanın çok değerliliği kavramına ilişkin bir ipucu içerir. Yine de bu içerikler, yanıtı bulmanın doğru yoluna ilişkin asıl ipuçlarını sağlar. Herhangi bir "dolaysız" argümanın (ne olursa olsun), bunu nasıl başarabildiğini görmek zordur. Anahtar matematiksel oyunculuktur. Karmaşık logaritmanın özelliklerini çalışmak için aklımızı çelen şey, onun kendi doğasına ait cazibesidir. Bu kendine özgü ilgileniş görünüşe göre, logaritmanın diğer alanlardaki her türlü uygulamasından bağımsızdır. Aynısı, hatta daha da büyük bir oranda kontür integral alma için de söylenebilir. Topolojik serbestliğin mükemmel hassaslıktaki açık ifadelerle birleştiği basit algılayışta olağanüstü bir zarafet mevcuttur.[7.4] Bununla birlikte bu yalnızca zarafet değildir: kontür integral ayrıca, daha fazla karmaşık sayı sihri içeren pek çok farklı alanda oldukça güçlü ve kullanışlı bir matematiksel teknik sunar. Özelde, belirli integralleri hesaplamanın şaşırtıcı yollarına ve çeşitli sonsuz serilerin açık olarak toplanmasına öncülük eder.[7.5], [7.6] Matematiğin diğer alanlarında olduğu gibi ayrıca fizik ve mühendislikte de pek çok farklı uygulamaya sahiptir. Euler bundan tümüyle mest olurdu!

7.4 Analitik sürdürme

Şu anda, bir bölge boyunca karmaşık pürüzsüzlüğün o bölgenin herhangi bir noktasındaki bir üslü seri açılımının varlığına eşdeğer olduğuna

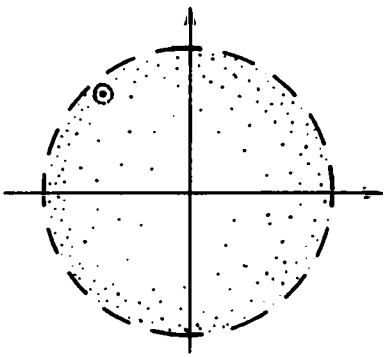
---

[7.4] $f(z)$ fonksiyonu kapalı bir Γ kontürü üzerindeki her yerde ve ayrıca f'nin deliklere sahip olduğu noktaların sonlu bir kümesi hariç Γ içinde holomorfiktir. $z = \alpha$'da n düzenindeki bir *kutbun*, $h(z)\alpha$'da düzenli olmak üzere $f(z)$'nin $h(z)/(z-\alpha)^n$ biçiminde olduğu yerde oluştuğunu §4.4'ten anımsayın. α kutbundaki *kalan* $h^{(n-1)}(\alpha)/(n-1)!$ olmak üzere, $\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\times$(bu kutuplardaki kalanların toplamı) olduğunu gösterin.

[7.5] $\int_0^\infty x^{-1}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}$ olduğunu $z^{-1}e^{iz}$ ifadesinin integralini, gerçel eksenin ($R > \epsilon > 0$ olmak üzere) $-R$'den $-\epsilon$'ye ve ϵ'den R'ye kadar olan iki kısmından ve üst yarı düzlemdeki, sırasıyla ϵ ve R yarıçaplarına sahip iki bağlayıcı yarı çember yayından oluşan kapalı bir Γ kontürü etrafında alarak ve daha sonra $\epsilon \to 0$ ve $R \to \infty$ olmasına izin vererek gösterin.

[7.6] $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ olduğunu $f(z) = z^{-2}\cot \pi z$ ifadesinin integralini büyük bir kontür etrafında, merkezi orijin ve kenar uzunluğu $2N + 1$ olan bir kare diyelim, alarak ve sonrasında $N \to \infty$ olmasına izin vererek gösterin. *İpucu*: Alıştırma [7.5]'i, $f(z)$'nin kutuplarını ve ona ait kalanları bularak kullanın. $f(z)$'nin Γ etrafındaki integralininneden $N \to \infty$ olduğunda 0 limit değerine yaklaştığını göstermeye çalışın.

ilişkin dikkat çekici sonuca sahibiz. Bununla birlikte bir "bölge"nin bu bağlamda ne anlama geldiğini biraz daha açık hale getirmeliyim. Teknik olarak matematikçilerin *açık* bölge dedikleri şeyi kastediyorum. Bunu, bir a noktası bölgenin içindeyse bu durumda iç kısmı da bu bölgede içerilen a merkezli bir çemberin mevcut olduğunu söyleyerek ifade edebiliriz. Bu durum pek anlaşılır olmayabilir; öyleyse birkaç örnek vereyim. Tekil bir nokta ne açık bir bölgedir ne de sıradan bir eğri. Bununla birlikte karmaşık düzlemde, orijine uzaklıkları kesin olarak birden az noktaların kümesi olan birim çemberin *iç kısmı* bir açık alandır. Bu, çember çevresine ne kadar yakın olursa olsun kesin olarak çemberin içinde olan herhangi bir noktanın, iç kısmı hâlâ kesinlikle birim çember içinde yer alan çok daha küçük bir çember tarafından çevrelenebilmesinden kaynaklanır (*bkz.* Şekil 7.4). Öte taraftan orijine uzaklıkları ya birden daha küçük *ya da* bire *eşit* noktalardan oluşan *kapalı disk*, artık çemberin çevresinin dahil olması ve çevre üzerindeki bir noktanın, merkezi o nokta üzerinde olup iç kısmı bölge içinde kalan bir çemberin varlığı özelliğine sahip olmaması nedeniyle açık bir bölge değildir.



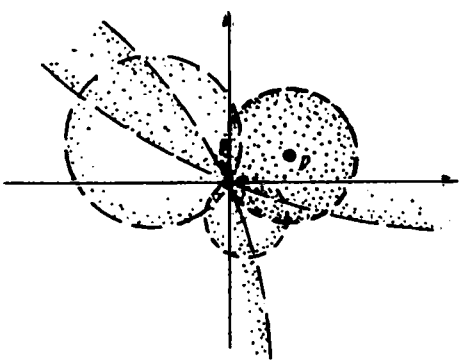
Şekil 7.4 $|x| < 1$ *açık birim diski. Çember çevresine ne kadar yakın olursa olsun kesin olarak içerde olan herhangi bir nokta iç kısmı hâlâ kesinlikle birim çember içinde yer alan çok daha küçük bir çember tarafından çevrelenir. Diğer taraftan bu durum kapalı* $|x| \leq 1$ *diski söz konusuyken sınır üzerindeki noktalar için işlemez.*

Gelin şimdi, D açık bir bölge olmak üzere holomorfik bir $f(z)$ fonksiyonunun *tanım kümesi*[5] D'yi ele alalım. D'nin her bir noktasında $f(z)$ fonksiyonu karmaşık pürüzsüz olmalıdır. Böylece yukarısıyla uyumlu olarak D'de herhangi bir p noktası seçtiğimiz durumda, p'yi içeren uygun bir bölge içinde $f(z)$'yi temsil eden p'ye ilişkin yakınsak bir üslü seriye sahip oluruz. Bu "uygun bölge" ne kadar büyüktür? Bu, belirli bir p söz konusu olduğunda üslü serinin tüm D için geçerli olmayacağı duruma eğilim gös-

[5] "Tanım kümesi" teriminin iki ayrı anlamı olması, konunun terminolojisine ilişkin sinir bozucu şeylerden biridir. Burada kastedil*memiş* olanı, "karmaşık düzlemde bileşik açık bölge"dir. Burada daha önceden olduğu gibi (*bkz.* §6.1) açık ya da bileşik olması zorunlu olmayan f fonksiyonunun tanımlandığı, karmaşık düzlem içindeki bölgeyi kastediyorum.

terecektir. §4.4'te açıklanan *yakınsaklık çemberi*ni anımsayın. Bu, merkezi p olan ve kesinlikle çember içinde kalan noktalar için üslü serinin yakınsayacağı fakat kesin olarak çember dışında kalan z noktaları için böyle olmayacak türde bir çemberdir. $f(z)$'nin bir q noktasında bir *tekilliğe*, diğer bir deyişle $f(z)$'nin karmaşık pürüzsüz kalırken genişletilemeyeceği bir noktaya sahip olduğunu düşünün. (Örneğin $q = 0$ orijini, $f(z) = 1/z$ fonksiyonunun bir tekilliğidir; *bkz.* §7.1. Tekillik bazen fonksiyondaki bir "tekil nokta" olarak da adlandırılır. *Düzenli* bir nokta yalnızca, fonksiyonun tekil olmayıp bu nedenle holomorfik olduğu bir yerdir.) Böylece yakınsaklık çemberi iç kısmında q'yu içerecek kadar büyük olamaz. Bu durumda, genellikle hiçbir çember D'yi örtemezken, D'nin tümünü birlikte örten (genelde sonsuz sayıda) yakınsaklık çemberlerinden oluşmuş bir yama işine sahibiz. $f(z) = 1/z$ durumu konuyu örneklemektedir (*bkz.* Şekil 7.5). Tanım kümesi D burada, orijini çıkarılmış haldeki karmaşık düzlemdir. D içinde bir p noktası seçersek yakınsaklık çemberininin, merkezi p olan ve orijinden geçen çember olduğunu buluruz.[7.7] Tüm D bölgesini örtmek için bu tür sonsuz sayıda çembere gerek duyarız.

Bu bizi önemli *analitik sürdürme* konusuna yöneltir. Bir D tanım kümesinde holomorfik bir $f(z)$ fonksiyonuna sahip olduğumuzu ve şu soruyu ele aldığımızı düşünün: D'yi, $f(z)$'nin de holomorfik olarak D 'ne genişleyeceği biçimde daha büyük bir D bölgesine genişletebilir miyiz? Örneğin $f(z)$ bize kendi belirli yakınsaklık çemberi dahilinde yakınsak bir üslü seri biçiminde verilmiş olabilir ve $f(z)$'yi o çember dışına genişletmek isteyebiliriz. Bu çoğu kez olanaklıdır. §4.4'te, yakınsaklık çemberi birim çember olan, yine de yalnızca +i ve −inoktaları çıkarılmış haliyle tüm k

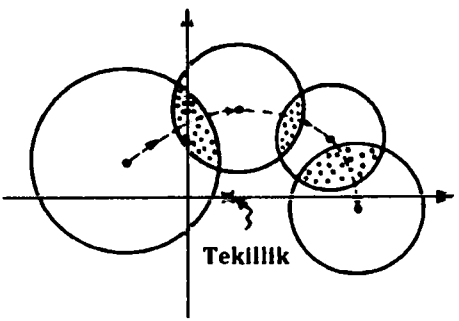


Şekil 7.5 $f(z) = 1/z$ için D tanım kümesi orijini çıkarılmış haldeki karmaşık düzlemdir. D'de herhangi bir p'ye ilişkin yakınsaklık çemberinin merkezi p'dedir ve çember orijinden geçer. D'nin tümünü örtmek için bu tür çemberlerden oluşan bir yama işine gerek duyarız.

[7.7] $f(z) = 1/z$ için p noktasına ilişkin üslü seri nedir?

karmaşık düzlem üzerinde holomorfik olan $(1+z^2)^{-1}$ fonksiyonuna doğal bir genişlemeye sahip $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$ serisini ele almıştık. Böylece bu durumda fonksiyon aslında analitik olarak ilk başta üzerinde verili olduğu tanım kümesinin çok ötesine genişletilebilir.

Burada fonksiyon için açık bir denklem yazabildik fakat bu diğer durumlarda bu kadar kolay olmayabilir. Buna rağmen kendisi uyarınca, analitik sürdürmenin sıklıkla uygulanabildiği genel bir yöntem mevcuttur. Holomorfik $f(z)$ fonksiyonu için yerel olarak geçerli olan bir üslü seri ifadesinin bilindiği küçük bir bölgeden başlamayı düşünebiliriz. Daha sonra, fonksiyonda, farklı noktalarda temellenen üslü serilerin yinelenen kullanımıyla ilerleyerek devam edip bir yol boyunca dolaşabiliriz. Bunun için yol üzerindeki bir nokta dizisini kullanırız ve sırasıyla bu noktaların her biri için art arda gelecek şekilde bir dizi üslü seri ifadesi alırız. Bu, art arda gelen yakınsaklık çemberlerinin iç bölgelerinin çakıştırılması sağlanabilirse çalışacaktır (*bkz.* Şekil 7.6). Bu işlem uygulandığında sonuçtaki fonksiyon eşsiz bir şekilde, fonksiyonun ilk bölgedeki ve izlenen yol üzerindeki değerleriyle belirlenir.



Şekil 7.6 Holomorfik bir fonksiyon bir nokta dizisiyle ilgili bir dizi üslü seri ifadesi kullanarak analitik olarak sürdürülebilir. Bu, art arda gelen yakınsaklık çemberlerinin çakışıklığını varsayarak bağlantılı yol üzerinde eşsiz biçimde ilerler.

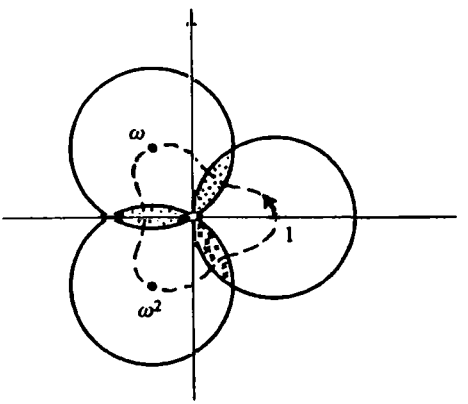
Bu nedenle holomorfik fonksiyonlarla ilgili analitik sürdürme sürecinde gösterildiği üzere dikkate değer bir "katılık" mevcuttur. Öte taraftan gerçel C^∞–fonksiyonları durumunda fonksiyonun ne yapması gerektiğiyle ilgili olarak (§6.3'ün, tüm negatif x değerleri için sıfır olduktan sonra birdenbire ortadan kaybolan pürüzsüz biçimde yamalanmış $h(x)$ fonksiyonundaki gibi) "fikir değiştirilmesi" olanaklıydı. Holomorfik fonksiyonlarda bu durum söz konusu olamaz. Fonksiyon bir kez kendi orijinal bölgesinde sabitlendiğinde ve yol da sabitlendiğinde fonksiyonun nasıl genişletileceğiyle ilgili hiçbir seçenek söz konusu değildir. Aslında aynı durum gerçel değişkenli bir gerçel analitik fonksiyon için de doğrudur. Onlar ayrıca benzer bir "katılığa" da sahiptir fakat şimdi yolla ilgili de pek fazla seçe-

nek yoktur. Yalnızca gerçel doğrusu üzerindeki yönlerden biri ya da diğer olabilir. Karmaşık fonksiyonlarda analitik sürdürme, iki boyutlu düzlemdeki yola ilişkin bu serbestlik nedeniyle daha ilginç olabilir.

Örneklemek üzere eski dostumuz $\log z$'yi ele alın. Orijinde bir tekilliğe sahip olduğundan, onun etrafında kesinlikle hiçbir üslü seri açılımı yoktur. Bununla birlikte istersek onu $p = 1$ noktası etrafında

$$\log z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \cdots$$

serisini[7.8] elde etmek üzere genişletebiliriz. Yakınsaklık çemberi merkezi $z = 1$ noktasında olan birim yarıçapa sahip çemberdir. Orijini saat yönünün tersine dolanan bir yol üzerinde bir analitik sürdürme gerçekleştirdiğimizi düşünelim. Seçtiğimiz taktirde art arda gelen 1, ω, ω^2 ve yeniden 1 noktaları etrafında, böylece orijini bir kez çevreleyip başlangıç noktasına dönerek alınan üslü seriyi kullanabiliriz (*bkz.* Şekil 7.7). Burada birin, birim çember etrafına düzenli şekilde yerleştirilmiş üç küp kökünü, 1, $\omega = e^{2\pi i/3}$ ve $\omega^2 = e^{4\pi i/3}$, §5.4'te tartışıldığı gibi kullandım; orijin etrafındaki rota eşkenar bir üçgen olarak değerlendirilebilir. Alternatif olarak bir parça daha az tutumlu olan 1, i, −1, −i ve 1 noktalarını kullanabilirdim. Her iki durumda da fonksiyonun kendisine ilişkin açık yanıtı, $\log z$'yi zaten bildiğimizden üslü seriyi çözmeye gerek yok. Sorun elbette, fonksiyon ilerlerken onu, tek biçimde izleyerek orijin etrafında bir kez döndüğümüzde başladığımız değerden farklı bir değere genişlettiğimizi bulmamızdır. Her nasılsa biz dolanırken fonksiyona $2\pi i$ eklenir. Orijin etrafında ters



Şekil 7.7 $z = 1$*'den başlayıp* $f(z) = \log z$*'yi orijini saat yönüne ters olarak dolanan bir yol üzerinde (art arda gelen noktalar,* 1, ω, ω^2 *ve 1;* $\omega = e^{2\pi i/3}$*etrafında genişleterek) analitik olarak izleyin.*$2\pi i$*'nin* f*'e eklendiğini görürüz.*

[7.8] Bu seriyi türetin.

yönde ilerlemeyi seçseydik, bu durumda başladığımız fonksiyondan $2\pi i$ çıkarıldığını bulmamız gerekirdi. Bu nedenle analitik sürdürmenin eşsizliği oldukça eşsiz bir şey olabilir ve kesinlikle seçilen yola bağlı olabilir. $\log z$'den daha karışık "çok değerli" fonksiyonlar için fonksiyona yalnızca bir sabit ($2\pi i$ gibi) eklemekten çok daha ayrıntılı bir şeyle karşılaşabiliriz.

Bir yorum olarak, analitik sürdürme kavramının, onları bazı açıklamalarımda işe koşmanın yararlı olduğunu düşünmem gerçeğine rağmen, özel olarak üslü serilere gönderme yapma gerekliliği olmadığına işaret etmeye değer. Örneğin, sayı kuramında muazzam öneme sahip, *Dirichlet serisi* olarak adlandırılan başka bir seri sınıfı mevcuttur. Bunların en önemlisi

$$\zeta(z) = 1^{-z} + 2^{-z} + 3^{-z} + 4^{-z} + 5^{-z} + \cdots$$

sonsuz toplamıyla tanımlanan[6] ve z'nin gerçel kısmı 1'den büyük olduğunda $\zeta(z)$ ile gösterilen holomorfik fonksiyona yakınsayan (*Euler–*) *Riemann zeta fonksiyonu*dur.[7] Bu fonksiyonun analitik sürdürmesi onu, $z = 1$ noktası çıkarılmış haldeki karmaşık düzlemin tümünde eşsiz (ve "tek değerli") olarak tanımlar. Belki de bugün çözülmemiş matematiksel problemlerin en önemlisi bu analitik olarak genişletilmiş zeta fonksiyonunun *sıfırlarıyla*, diğer bir deyişle $\zeta(z) = 0$ çözümleriyle ilgilenen *Riemann hipotezi*dir. $\zeta(z)$'nin, $z = -2, -4, -6, \ldots$ için sıfır olduğunu göstermek oldukça kolaydır; bunlar gerçel sıfırlardır. Riemann hipotezi kalan tüm sıfırların $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ doğrusu üzerinde yer aldığını, diğer bir deyişle $\zeta(z)$'nin, yalnızca z'nin gerçel kısmı $\frac{1}{2}$'ye eşit olursa (z negatif çift bir tamsayı olmadıkça) sıfır olacağını ileri sürer. Güncel tüm sayısal deliller bu hipotezi desteklemekte fakat ona ilişkin asıl gerçek bilinmemektedir. Ona ait, asal sayılar kuramına ilişkin temel anlatımlar bulunmaktadır.[8]

---

[6] Bu seriyle sıradan bir seri, örneğin $(-z) + (-z)^2 + (-z)^3 + \cdots = -z(1+z)^{-1}$, arasındaki tuhaf "baş aşağı" ilişkiye dikkat edin.

[7] Zeta fonksiyonu ilk olarak Euler tarafından ele alındı fakat fonksiyonun karmaşık düzleme genişletilmesini içeren temel çalışması nedeniyle normal olarak Riemann'a atfedildi.

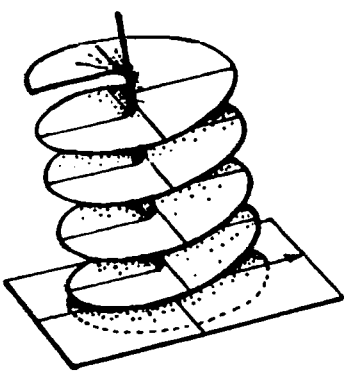
[8] ζ–fonksiyonu ve Riemann hipotezi üzerine daha fazla bilgi için *bkz.*, Apostol, 1976; Priestley, 2003.Popüler açıklamalar için *bkz.*, Derbyshire, 2003; du Sautoy, 2003; Sabbagh, 2002; Devlin, 1988, 2002.

8

RIEMANN YÜZEYLERİ VE KARMAŞIK DÖNÜŞÜMLER

8.1 Riemann yüzeyi fikri

Logaritma fonksiyonunun, ya da herhangi diğer bir "çok değerli fonksiyon"un bu analitik sürdürmesinin ne olduğuyla ilgili *Riemann yüzeyleri* denilen şeyler biçiminde bir kavrayış biçimi mevcuttur. Riemann'ın fikri, bu tür fonksiyonları karmaşık düzlemin basitçe bir alt kümesi olmayan fakat çok yapraklı bir bölge şeklindeki bir tanım kümesi üzerinde tanımlanmış olarak düşünmekti. $\log z$ durumunda bunu karmaşık düzleme doğru bir tür düşey olarak düzleştirilmiş spiral rampa şeklinde resmedebiliriz. Şekil 8.1'de bunu göstermeye çalıştım. Logaritma fonksiyonu karmaşık düzlemin bu çok yapraklı sarmal versiyonu üzerinde tek değerlidir çünkü orijin etrafında dolandığımız ve logaritmaya $2\pi i$ eklenmesi gereken her seferde kendimizi tanım kümesinin bir başka yaprağı üzerinde buluruz. Artık logaritmanın farklı değerleri arasında hiç çelişki yoktur çünkü tanım kümesi, bir Riemann yüzeyi örneği olan, bu daha da genişletilmiş sarmal uzaydır; karmaşık düzlemin kendisinden ince biçimde ayrı bir uzay.



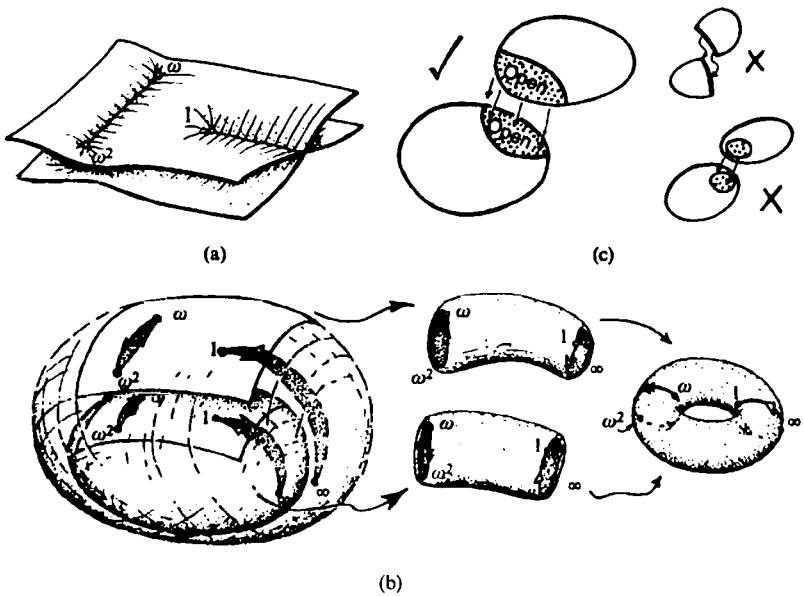
Şekil 8.1 **log** *z için düşey olarak düzleştirilmiş spiral bir rampa şeklinde resmedilen Riemann yüzeyi.*

Bu fikri sunan Bernhardt Riemann en ünlü matematikçilerden biriydi ve kısa yaşamında, 1826–66, bu gezegendeki matematiksel düşünüşün gidişatını temelden değiştiren çok miktarda matematiksel fikir ileri sürdü. Bu kitapta onun, Einstein'ın genel görelilik kuramını temelleyen katkısına benzer bazı diğer katkılarıyla (ve Riemann'ın farklı türdeki katkılarının en önemlilerinden birine 7. bölüm sonunda değinildi) daha sonra karşılaşacağız. Riemann, sonradan bir "Riemann yüzeyi" olarak adlandırılan kavramı sunmadan önce matematikçiler, en basit örneği logaritma olan "çok değerli fonksiyonlar"la nasıl uğraşılacağıyla ilgili anlaşmazlık içindeydiler. Daha özenli olmak adına pek çoğu bu fonksiyonları, benim kişisel olarak yakışıksız bulduğum bir yolla ele alma gereği hissettiler. (Bu arada bu, Riemann'ın konu hakkında çığır açan tezi üzerinden neredeyse yüz yıl geçmesine rağmen hâlâ, üniversitede bana onları nasıl ele almam gerektiğiyle ilgili öğretilen yolun aynısıydı.) Özelde, logaritma fonksiyonunun tanım kümesi orijinden çıkıp sonsuza giden bir doğru tarafından gelişigüzel bir biçimde "kes"ilir. Kendi düşünüşüme göre bu görkemli bir matematiksel yapının ölümcül bir biçimde sakatlanmasıydı. Riemann bize şeyleri farklı biçimde düşünmemiz gerektiğini öğretti. Holomorfik fonksiyonlar sabit bir tanım kümesinden belirli bir görüntü kümesi uzayına dönüştüren şimdinin alışılmış bir "fonksiyon" kavramıyla sıkıntılı bir şekilde bir arada bulunur. Gördüğümüz üzere holomorfik bir fonksiyon analitik sürdürmeyle "kendine ait bir bilince sahip"tir ve kendine ait tanım kümesinin ne olması gerektiğine, bizim ona başlangıçta ayırmış olabileceğimiz karmaşık düzlem bölgesine aldırmaksızın kendisi karar verir. Biz fonksiyonun tanım kümesinin, fonksiyonla ilişkili Riemann yüzeyi tarafından temsil edilmesi gerektiğini hesaba katarken, tanım kümesi zamanından önce verilmez; o, bize tanım kümesinin aslında hangi Riemann yüzeyi olduğunu söyleyen fonksiyonun açık biçiminin kendisidir.

Kısa süre içinde çeşitli türdeki diğer Riemann yüzeyleriyle karşılaşıyor olacağız. Bu güzel kavram matematiksel fiziğe yeni bir temel bulma modern girişimlerinin bazılarında, en dikkat çekici olarak sicim kuramında (§§31.5,13) fakat ayrıca burgaç kuramında da (§§33.2,10) önemli bir rol oynar. Gerçekte, $\log z$ için olan Riemann yüzeyi bu tür yüzeylerin en basitlerinden biridir. Bu bize depoda bizim için ne olduğuyla ilgili yalnızca bir ipucu veriyor. z^a fonksiyonu kendisine ait Riemann yüzeyi bakımından $\log z$'den biraz daha ilginçtir fakat yalnızca karmaşık a sayısı rasyonel bir sayı olduğunda. a irrasyonel olduğunda z^a'ya ait Riemann yüzeyi $\log z$'ye ait olanla tıpatıp aynı yüzeye sahiptir fakat en basit terimli ifadesi $a = m/n$ olan rasyonel bir a için sarmal yapan yapraklar n turun ardından

yeniden bir araya toplanır.[8.1] Tüm bu örneklerde orijin $z = 0$, bir *dallanma noktası* olarak adlandırılır. Yapraklar sonlu sayıdaki bir n turun ardından (m ve n ortak bir çarpana sahip olmamak üzere $z^{m/n}$ durumundaki gibi) bir araya toplanırsa dallanma noktası *sonlu düzene* sahiptir ya da n *düzeni*ndedir deriz. Herhangi bir sayıda tur ardından ($\log z$ durumunda olduğu gibi) bir araya gelmediklerinde dallanma noktası *sonsuz düzene* sahiptir deriz.

$(1 - z^3)^{1/2}$ benzeri ifadeler bize düşünce için daha fazla besin sunar. Fonksiyon burada $z = 1$, $z = \omega$ ve $z = \omega^2$'de ($\omega = e^{2\pi i/3}$ olmak üzere, *bkz.* §5.4, §7.4), üç dallanma noktasına sahiptir, böylece $1 - z^3 = 0$ olur ve "sonsuzda" başka bir "dallanma noktası" mevcuttur. Bir tam tur dolandığımızda her bir tekil dallanma noktasının yakın komşuluklarında kalarak



Şekil 8.2 (a) $(1 - z^3)^{1/2}$ için iki yapraktan, 1, ω ve ω^2'de (ve ayrıca ∞) 2 düzenindeki dallanma noktalarıyla Riemann yüzeyi oluşturulması. (b) $(1 - z^3)^{1/2}$ için Riemann yüzeyinin topolojik olarak bir torus olduğunu görmek için (a)'nın düzlemlerini ω'dan ω^2'ye ve 1'den ∞'a dek kesilmiş, eş oklar biçiminde tanımlı yarıklara sahip iki Riemann küresi olarak düşünün. Bunlar bir torus vermek üzere uygun şekilde yapıştırılmış topolojik silindirlerdir. (c) Bir Riemann yüzeyi oluşturmak için koordinat uzayının yamalarını, burada karmaşık düzlemin açık parçaları, birbirine yapıştırabiliriz. Yamalar arasında (açık küme) çakışmalar olmalıdır (ve birleştirildiğinde, yukarıdaki son örnekteki gibi, "Hausdorff dallanması olmayan" hiçbir dallanma olmamalıdır; *bkz.* Şekil 12.5b, §12.2).

[8.1] Nedenini açıklayın.

(ve "sonsuz" için bu yalnızca çok büyük bir çember etrafında hareket etmek anlamına gelir) fonksiyonun onlar etrafında işaret değiştirdiğini buluruz ve yeniden dolanıldığında fonksiyon orijinal değerine geri döner. Böylece dallanma noktalarının tümünün 2 düzenine sahip olduğunu görürüz. Birbirine Şekil 8.2a'da göstermeye çalıştığım biçimde yamalanmış iki yapraklı Riemann yüzeyine sahibiz. Şekil 8.2b'de birtakım topolojik bükülmeler kullanarak Riemann yüzeyinin gerçekte topolojik olarak bir simitin (ya da bir tatlı Amerikan poğaçasının)* yüzeyi olan fakat dallanma noktalarının kendilerine karşılık dört minik deliğe sahip bir *torus* topolojisinde olduğunu gösterme girişiminde bulundum. Aslında delikler açık olarak (dört tekil noktayla) doldurulabilir ve sonuçtaki Riemann yüzeyi böylece tam bir torus topolojisine sahip olur.[8 2]

Riemann'ın yüzeyleri, çeşitli biçimlerde eğilmiş olarak düşünülebilen bir uzam olan fakat *yerel olarak* (diğer bir deyişle noktalarının tümünün yeterince küçük bir komşuluğunda) bir parça olağan Öklitçi uzaya benzeyen genel bir *manifold* kavramının ilk örneklerini sundu. Manifoldlarla daha ciddi şekilde 10 ve 12. bölümlerde karşılaşıyor olacağız. Manifold kavramı modern fiziğin pek çok farklı alanında oldukça önemlidir. En çarpıcı olanı, Einstein'ın genel göreliliğinin temel bir kısmını oluşturmasıdır. Manifoldlar bir miktar farklı yamanın, §6.3'ün sonundaki $h(x)$ fonksiyonundaki durumun aksine birbirlerine dikiş izine gerçekten rastlanmayacak biçimde yapıştırılmış hali olarak düşünülebilir. Yama işleminin izsiz doğası, bir yamayla diğeri arasında her zaman uygun bir (açık küme) çakışma olduğundan emin olmak yoluyla başarılır (*bkz.* 8.2c ve ayrıca §12.2, Şekil 12.5).

Riemann yüzeyleri durumunda manifold, karmaşık düzlemin tüm yüzeyi oluşturan farklı "yapraklar"ına karşılık gelen çeşitli yamalarının birbirlerine yapıştırlmasıyla oluşur. Sonunda yukarıdaki gibi, sonlu düzendeki dallanma noktalarından gelen bazı tekil nokta kayıpları biçiminde bir kaç "delik"le karşılaşabiliriz fakat bu kayıp noktaların yerleri yukarıdaki gibi her zaman açık olarak doldurulabilir. Bununla birlikte diğer taraftan sonsuz düzendeki dallanma noktaları için işler daha karışık olabilir ve bu tür genel bir basit saptama yapılamaz.

Bir örnek olarak logaritma fonksiyonunun "spiral rampa" Riemann yüzeyini ele alalım. Bunu kağıt modeli biçiminde bir araya toplamanın bir yolu; (a) karmaşık düzlemin negatif olmayan gerçel sayılar çıkarılmış haliyle (b) karmaşık düzlemin pozitif olmayan gerçel sayılar çıkarılmış hali-

---

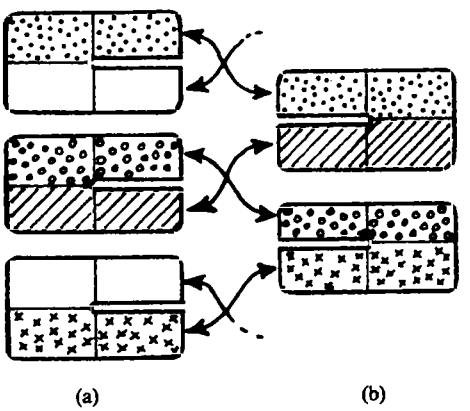
donut –çn.

[8.2] Şimdi $(1 - z^4)^{1/2}$ ifadesini deneyin.

nin kopyaları olan ve birbirini izleyen yamalarını art arda almaktır. Her bir (a)–yamasının üst yarısı diğer (b)–yamasının üst yarısıyla yapıştırılır ve her bir (b)–yamasının alt yarısı diğer (a)–yamasının alt yarısıyla yapıştırılır; *bkz.* Şekil 8.3. Orijinde ve ayrıca sonsuzda, sonsuz düzeninde bir dallanma noktası mevcuttur; fakat tuhaf biçimde spiral rampanın bütünü tam olarak tekil bir kayıp noktaya sahip bir küreye denktir ve bu noktanın yeri sıradan bir küre vermek üzere açık olarak doldurulabilir.[8.3]

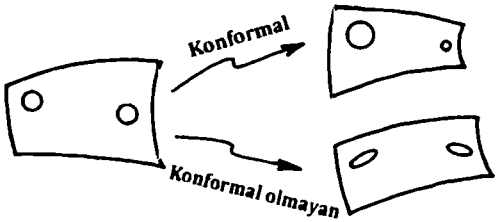
8.2 Konformal dönüşümler

Bir manifoldu bir araya toplarken, bir yamadan diğerine geçerken hangi yerel yapının korunması gerektiğini göz önünde bulundurmak durumundayız. Normalde gerçek manifoldlarla uğraşılır ve farklı yamalar (sabit bir boyuttaki) Öklitçi uzayın çeşitli (açık) çakışma bölgeleri boyunca birbirlerine yapıştırılmış parçalarıdır. Bir yamadan diğerine, eşleştirilmesi gereken yerel yapı normalde yalnızca bir süreklilik ya da pürüzsüzlük konusudur. Bu konu §10.2'de tartışılacak. Bununla birlikte Riemann yüzeyleri durumunda *karmaşık* pürüzsüzlükle ilgileniriz ve §7.1'den, bunun *Cauchy–Riemann* denklemlerini içeren oldukça karışık bir konu olduğunu anımsarız. Her ne kadar şimdiye dek açıkça görmemiş olsak da (onlara §10.5'te geleceğiz) bu denklemlerde kodlanmış yapının geometrik anlamını kavramaya çalışmak uygun olacak. Geniş bir uygulama alanına sahip matematiksel kavramlara ulaşmayı sağlayan, dikkat çekici zarafet, esneklik ve güce sahip bir yapıdır bu.



Şekil 8.3 **log** *z'ye ilişkin Riemann yüzeyini, (a) karmaşık düzlemin negatif olmayan gerçel sayılar çıkarılmış haliyle (b) karmaşık düzlemin pozitif olmayan gerçel sayılar çıkarılmış halinin birbirini izleyen yamalarını art arda alarak oluşturabiliriz. Her bir (a)–yamasının üst yarısı diğer (b)–yamasının üst yarısıyla yapıştırılır ve her bir (b)–yamasının alt yarısı diğer (a)–yamasının alt yarısıyla yapıştırılır.*

[8.3] Bunun nasıl meydana geldiğini görebiliyor musunuz? İpucu: w (= $\log z$) değişkenine ait Riemann küresini düşünün; *bkz.* §8.3.

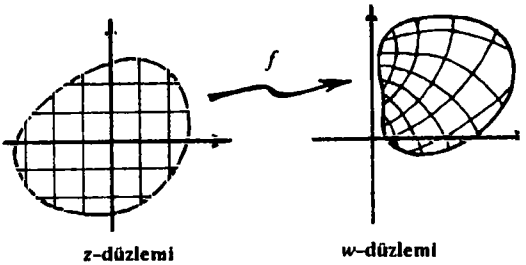


Şekil 8.4 Konformal bir dönüşümde küçük (sonsuz küçük) çemberler genişletilebilir ya da daraltılabilir fakat elipsler oluşturacak biçimde bozulamaz.

Kavram *konformal geometri*dir. Kabaca söylersek konformal geometride boyutla değil, sonsuz küçük ölçekteki şekil anlamına gelmek üzere, şekille ilgileniriz. Düzlemin (açık) bir bölgesinden diğerine yapılan konformal dönüşümde sonlu boyuttaki şekiller genellikle bozulur fakat *sonsuz küçük* şekiller korunur. Bunun düzleme çizilmiş küçük (sonsuz küçük) çemberlere uygulandığını düşünebiliriz. Konformal bir dönüşümde bu çemberler genişletilebilir ya da daraltılabilir fakat küçük elipsler oluşturacak biçimde bozulamaz. *Bkz.* Şekil 8.4.

Konformal bir dönüşümün neye benzeyebileceğine ilişkin bir kavrayış elde etmek için M. C. Escher'in, §2.4'te açıklandığı üzere (Beltrami'nin Poincaré diski), hiperbolik düzlemin Öklitçi düzlemdeki konformal bir gösterimini sunan Şekil 2.11'de verilmiş resmine bakın. Hiperbolik düzlem oldukça simetriktir. Özelde, Escher resminin merkez bölgesindeki şekilleri, sınırlayıcı çemberin hemen içinde yer alıp kendilerine karşılık gelen şekillerle değiştiren dönüşümler mevcuttur. Bu tür bir dönüşümü, sınırlayıcı çemberin iç bölgesini kendisiyle değiştiren Öklitçi düzlemin konformal bir hareketi olarak sunabiliriz. Açıktır ki böylesi bir dönüşüm genellikle, tekil şekillerin boyutlarını (ortadakiler kenara yakın olanlardan çok daha büyük olduklarından) korumaz fakat şekiller kabaca korunur. Şeklin bu korunması, incelenen her bir şeklin ayrıntısı küçüldükçe daha da yanlışsız bir hale gelir ve böylece aslında *sonsuz küçük* şekiller tümüyle değişmemiş olarak kalır. Okuyucu belki de hafifçe değişik bir nitelemeyi daha yararlı bulacaktır: eğriler arasındaki *açılar* konformal dönüşümlerce değiştirilmez. Bu, bir dönüşümün konformal doğasını niteleyen şeydir.

Konformal özelliğin bir $f(z)$ fonksiyonunun karmaşık pürüzsüzlüğüyle (holomorfiklik) ne ilgisi bulunur? Karmaşık pürüzsüzlüğe ilişkin geometrik bağlamdan sezgisel bir fikir elde etmeye çalışacağız. Bir f fonksiyonuna ilişkin "dönüşüm" bakış açısına dönelim ve $w = f(z)$ bağıntısını z karmaşık düzlemindeki belirli bir bölgenin (f fonksiyonunun tanım kümesi),w karmaşık düzlemine (görüntü kümesi) bir dönüşümüne olanak sağladığını düşünelim; *bkz.* Şekil 8.5. Şu soruyu sorarız: hangi yerel geometrik



Şekil 8.5 $w = f(z)$ dönüşümü,z karmaşık düzleminde açık bölgeli bir tanım kümesine ve w karmaşık düzleminde açık bölgeli bir görüntü kümesine sahiptir. f'nin holomorfikliği bu konformal ve yansımasız oluşa denktir.

özellik bu dönüşümü holomorfik olarak niteler? Çarpıcı bir yanıt söz konusudur. f'nin holomorfikliği aslında *konformal* ve *yansımasız* olma (yansımasız, ya da *yönelim–korunmalı*, dönüşümde korunan küçük şekillerin yansıtılmadığı, diğer bir deyişle "çevril"mediği anlamına gelmek üzere, *bkz.* §12.6'nın sonu) gönderimine denktir.

$w = f(z)$ dönüşümümüzdeki "pürüzsüzlük" kavramı, dönüşümün sonsuz küçük limitte nasıl davrandığıyla ilgilidir. İlk olarak gerçel durumu düşünün ve gelin $y = f(x)$ grafiği Şekil 6.4'te gösterilen, §6.2'nin gerçel $f(x)$ fonksiyonunu yeniden inceleyelim. f fonksiyonunun grafiği herhangi bir noktada iyi tanımlı bir tanjanta sahipse, fonksiyon o noktada *pürüzsüz*dür. Tanjantı, eğriye o noktada gittikçe derecesi artan bir büyütme uygulandığını düşünerek resmedebiliriz. Büyütmenin derecesi arttırıldığında, eğri pürüzsüz olduğu sürece o noktadan geçen düz bir çizgiye gittikçe, sonsuz büyütme limitinde tanjant çizgisiyle özdeş hale gelecek şekilde daha fazla benzer. Karmaşık pürüzsüzlüğe ilişkin durum benzerdir fakat şimdi bu fikri z düzleminden w düzlemine dönüşüme uygulayalım. Bu dönüşümün sonsuz küçük doğasını incelemek için, herhangi bir düzlemdeki bir z noktasının yakın komşuluğunu diğer bir düzlemdeki w'nun yakın komşuluğuna dönüştürmeyi resmetmeye çalışalım. Noktanın yakın komşuluğunu incelemek için z'nin yakın komşuluğunu ve ona karşılık gelen w komşuluğunu aynı devasa katsayıyla büyütmeyi düşünürüz. Genişletilmiş z komşuluğunun genişletilmiş w komşuluğuna dönüşümü limitte, düzlemin basit biçimde doğrusal bir dönüşümü olacaktır fakat holomorfik olması gerekirse temelde bunun §5.1'de çalışılmış dönüşümlerden biri olması gerekir. Bunu en genel durumda (bir miktar değerlendirmeyle), z'nin komşuluğundan w'nun komşuluğuna gerçekleşen dönüşümün, bir döndürmeyle düzenli bir genişlemeyi (ya da daralmayı) basitçe birleştirdiği çıkarımı izler; *bkz.* Şekil 5.2b. Bu demek oluyor ki, küçük şekiller (ya da açılar) yansıma olmaksızın, dönüşümün aslında konformal ve yansımasız olduğunu göstererek korunur.

Gelin birkaç basit örneğe göz atalım. Daha önce §5.1'de ele alındığı üzere (*bkz.* Şekil 5.2), sabit bir b'nin z'ye eklenmesi ya da z'nin sabit bir a ile çarpılması yoluyla sağlanan dönüşümlere ilişkin çok özel durumlar, açıktır ki holomorfiktir ($z + b$ ve az şüphe götürmez biçimde türevlenebilirdir) ve ayrıca açıktır ki konformaldir. Bunlar

$$w = az + b$$

bileşik (türdeş olmayan doğrusal) dönüşümüne ilişkin genel durumun özel örnekleridir. Bu tür dönüşümler düzlemin düzenli genişlemelerle (ya da daralmalar) birleşmiş Öklitçi hareketlerini (yansıma olmaksızın) sağlar. Gerçekte bunlar, karmaşık z düzleminin bütününün, karmaşık w düzleminin bütününe olan biricik (yansımasız) konformal dönüşümlerdir. Dahası bunlar, gerçek çemberlerin, yalnızca sonsuz küçük çemberlerin değil, gerçek çemberlere ve gerçek çizgilerin gerçek çizgilere dönüştürülmesi gibi çok özgün bir özelliğe sahiptir.

Diğer bir basit holomorfik fonksiyon orijini çıkarılmış haldeki karmaşık düzlemi orijini çıkarılmış haldeki karmaşık düzleme dönüştüren

$$w = z^{-1}$$

ters fonksiyondur. Bu dönüşüm ayrıca çarpıcı biçimde, gerçek çemberleri gerçek çemberlere dönüştürür[8.4] (düz çizgileri çemberlerin özel bir durumu, sonsuz yarıçaplı çemberler olarak düşünürüz). Gerçel eksendeki bir yansımayla birlikte bu dönüşüm, *tersyüz etme* denilen şeydir. Bunu az önce ele alınan türdeş olmayan doğrusal dönüşümlerle birleştirdiğimizde, *çifte–doğrusal* ya da *Möbius* dönüşümü olarak adlandırılan daha genel

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

dönüşümünü elde ederiz.[8.5] Yukarıda söylenmiş olandan şu çıkar ki, bu dönüşümler ayrıca çemberleri çemberlere (düz çizgiler yine özel çemberler olarak değerlendirilmek üzere) dönüştürmelidir. Möbius dönüşümü aslında $-d/c$ noktası çıkarılmış haldeki karmaşık düzlemin bütününü, a/c çıkarılmış haldeki karmaşık düzleme dönüştürür. Bu hiç de önemsiz olmayan dönüşümü vermek üzere gerçekleştirilen işlem için $ad \neq bc$ ifadesine sahip olmalıyız (böylece pay, paydanın sabit bir katı olmaz).

z düzleminden çıkarılan noktanın "$w = \infty$" ifadesini veren değer ($z = -d/c$) ve buna uygun olarak w düzleminden çıkarılan noktanın "$z =$

[8.4] Bunu gösterin.

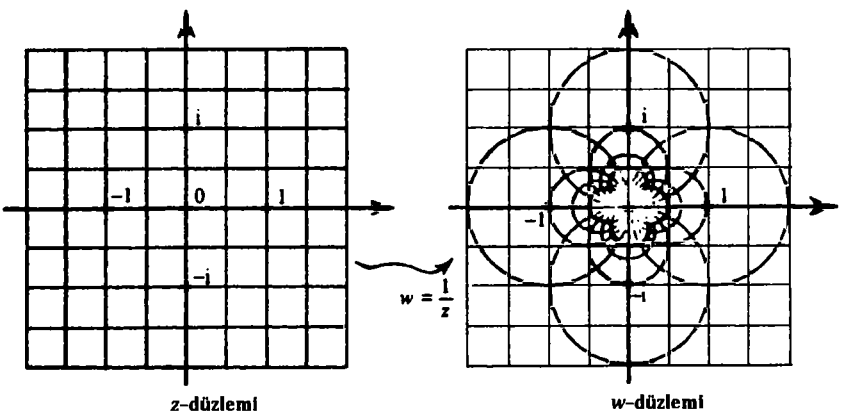
[8.5] $z \mapsto Az + B$, $z \mapsto z^{-1}$, $z \mapsto Cz + D$ dönüşümler dizisinin aslında çifte–doğrusal bir dönüşüme yol açtığını doğrulayın.

∞" ifadesi tarafından elde edilen değer ($w = a/c$) olduğuna dikkat edin. Aslında, bir "∞" niceliğini hem tanım hem de görüntü kümesine dahil etsek, tüm dönüştürme işlemi daha evrensel bir anlama kavuşurdu. Bu, tümü içindeki en basit (tıkız) Riemann yüzeyi hakkında düşünmenin bir biçimidir: az sonra göreceğimiz *Riemann küresi.*

8.3 Riemann küresi

Karmaşık düzleme basit olarak fazladan bir "∞" denilen noktayı eklemek, istenilen izsiz yapının ∞ komşuluğunda başka her yerde olduğu gibi geçerli oluşunu tümüyle anlaşılır kılmaz. Bu konuya yönelebilmenin yolu küreyi, birisi z düzlemi ve diğeri w düzlemi olan iki "koordinat yaması"ndan oluşturulmuş gibi değerlendirmektir. Kürenin iki noktası dışındaki tüm noktalarına (yukarıdaki Möbius dönüşümü tarafından ilintilendirilerek) hem bir z koordinatı hem de bir w koordinatı atanmıştır. Bir nokta yalnızca z koordinatına (w "sonsuz" olmak üzere) ve diğer bir noktaysa yalnızca w koordinatına (z "sonsuz" olmak üzere) sahiptir. Gerekli konformal yapıyı tanımlamak üzere ya z'yi ya w'yu ya da her ikisini birden kullanırız ve her ikisini kullandığımızda, yalnızca birini kullandığımız durumdakiyle aynı konformal yapıyı elde ederiz çünkü iki koordinat arasındaki ilişki holomorfiktir.

Aslında bunun için z ve w arasında, genel Möbius dönüşümünde olduğu gibi karışık bir dönüşüme gerek duymayız. Bu durum, $z = 0$ ve $w = 0$ olmak üzere,

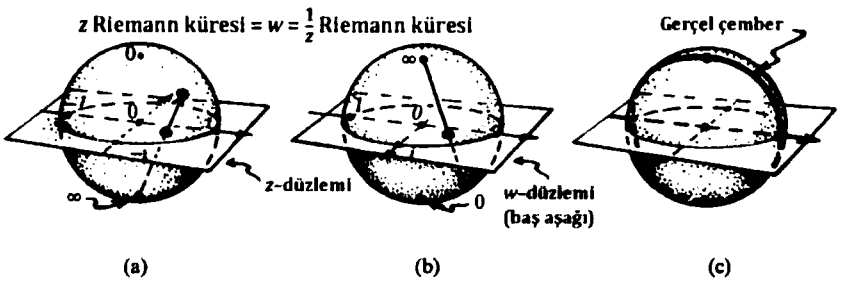


Şekil 8.6 Riemann küresini, karmaşık z ve w düzlemlerinden, $w = 1/z$ ve $z = 1/w$ yoluyla yamama. (Burada z ızgara çizgileri w düzleminde de gösterilir.) Çakışma bölgeleri yalnızca, her biri ters yama halinde "∞" değerini veren $z = 0$ ve $w = 0$ orijinlerini dışlar.

$$w = \frac{1}{z}, \qquad z = \frac{1}{w}$$

ifadeleriyle tanımlanan özellikle basit Möbius dönüşümünün her birinin, ters yama halinde ∞ değerini verdiğini düşünmeye yeter. Şekil 8.6'da bu dönüşümün, z'nin gerçel ve sanal koordinat çizgilerini nasıl dönüştürdüğünü gösterdim.

Tüm bunlar Riemann küresini oldukça soyut bir biçimde tanımlıyor. Şekil 8.7a'da gösterilen geometriyi işe koşarak Riemann küresinin bir "küre" olarak adlandırılmasının nedenini daha açık biçimde görebiliriz. z düzleminin bu geometrideki kürenin *ekvatoral düzlemini* temsil ettiğini kabul ettim. Kürenin noktaları güney kutbundan *stereografik izdüşüm* denilen şeyle düzlemin noktalarına dönüştürülür. Bu yalnızca, (içerisinde her şeyin meydana geldiğini düşündüğümüz) Öklitçi 3–uzayda güney kutbundan düzlemdeki z noktasına doğru düz bir çizgi çizdiğim anlamına gelir. Bu çizginin küreyle buluştuğu yer yine, küre üzerinde, karmaşık z sayısıyla gösterilen noktadır. Kürede ayrıca ek olarak, güney kutbunun kendisi olup $z = \infty$ ile gösterilen bir nokta daha mevcuttur. w'nun bu resme nasıl dahil olduğunu görmek için ona ait karmaşık düzlemi baş aşağı eklenmiş olarak düşünürüz ($w = 1$, i, -1, $-$i sırasıyla $z = 1$, $-$i,-1, i ile eşleşerek) ve artık stereografik olarak kuzey kutbundan izdüşüm alırız (Şekil 8.7b).[8.6] Stereografik izdüşümün önemli ve güzel özelliklerinden biri küre



Şekil 8.7 (a) Ekvatoru z (yatay) karmaşık düzlemindeki çemberle çakışan birim küre olarak Riemann küresi. Kürenin izdüşümü (stereografik olarak), $z = \infty$ ifadesini veren kendi güney kutbundan z düzlemine düz çizgiler boyunca alınır. (b) Ekvatoral düzlemin w düzlemi şeklinde baş aşağı fakat aynı gerçel eksene sahip halde gösterilen yeniden yorumu. Stereografik izdüşüm artık $w = 1/z$ olmak üzere kuzey kutbundan ($w = \infty$) alınır. (c) Gerçel eksen bu Riemann küresi üzerindeki, birim çembere benzeyen fakat yatay olarak değil dikey olarak çizilmiş büyük bir çemberdir.

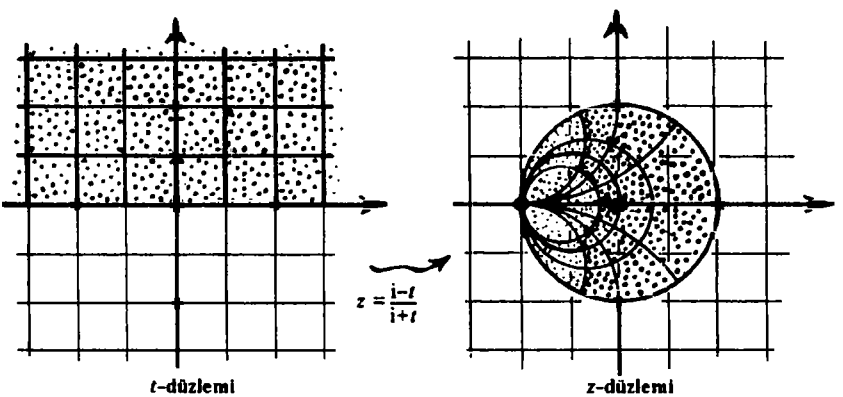
[8.6] Bu iki stereografik izdüşümün $w = z^{-1}$ ifadesiyle ilişkili olduğunu kontrol edin.

üzerindeki çemberleri düzlem üzerindeki çemberlere (ya da düz çizgilere) dönüştürmesidir.[1] Bu nedenle çifte–doğrusal (Möbius) dönüşümleri Riemann küresi üzerindeki çemberlere çember gönderir. Bu dikkat çekici gerçek §18.5'te geleceğimiz görelilik kuramı için önemlidir (spinör ve burgaç kuramlarıyla derin ilişkiye sahiptir; *bkz.* §22.8, §24.7, §§33.2, 4).

Riemann küresi bakış açısından gerçel eksenin esasen birim çemberden farklı olmayan fakat yatay çizilmek yerine dikey olarak çizilen "yalnızca başka bir çember" olduğunu fark ederiz (Şekil 8.7c). Biri diğerinden bir döndürme sonucunda elde edilir. Döndürme kesinlikle konformaldir, böylece kürenin kendi kendine holomorfik bir gönderimiyle verilir. Aslında Riemann küresinin bütününü kendine alan (yansımalı olmayan) her konformal gönderim çifte–doğrusal (diğer bir deyişle Möbius) bir dönüşümle gerçekleştirilir. İlgilendiğimiz özel döndürme,

$$t = \frac{z-1}{iz+i}, \quad z = \frac{-t+i}{t+i}$$

çifte–doğrusal uygunluk ifadeleriyle[8 7] tanımlanan z ve t karmaşık parametrelerine ilişkin Riemann küreleri arasındaki bir ilişkiyle açık şekilde gösterilebilir. Bu uygunluğu, t düzleminin, kendi gerçel ekseni tarafından sınırlanmış üst yarısının z'nin kendi birim çemberi tarafından sınırlanmış birim diskine dönüştürüldüğünü özel olarak işaretlediğim Şe kil 8.8'de, t ve z karmaşık düzlemleri biçiminde çizdim. Bu özel dönüşüm bizim için sonraki bölümde önemli olacak.



Şekil 8.8 t ve z karmaşık düzlemleri biçimindeki uygunluk ifadeleri, $t = (z-1)/(iz+i)$, $z = (-t+i)/(t+i)$. t düzleminin, kendi gerçel ekseni tarafından sınırlanmış üst yarısının z'nin kendi birim çemberi tarafından sınırlanmış birim diskine dönüşümü.

---

[1] *Bkz.* alıştırma [2.5].

[8.7] Bunu gösterin.

Riemann küresi *tıkız*, ya da "*kapalı*" Riemann yüzeylerinin en basitidir.[2] "Tıkız" kavramı için §12.6'ya bakın. Aksine logaritma fonksiyonunun "spiral rampa" Riemann yüzeyi açıkladığım üzere *tıkız değil*dir. $(1-z^3)^{1/2}$'ye ilişkin Riemann yüzeyi durumunda onu tıkız hale getirmek için dallanma noktalarından kaynaklanan dört deliği doldurmamız gerekir (ve bunu yapmazsak o tıkız değildir) fakat bu "tıkızlaştırma" yapılması gereken sıradan işlemdir. Daha önce belirtildiği üzere bu "delik doldurma" sonlu düzende bir dallanma noktasıyla her zaman olasıdır. §8.1'in sonunda gördüğümüz üzere, logaritma için orijindeki ve sonsuzdaki dallanma noktalarının her ikisini birden, Riemann küresini tıkızlaştırma biçiminde elde etmek için, gerçekten tek bir noktayla doldurabiliriz. Aslında, (sicim kuramı dahil) pek çok alanda önemli olan tıkız Riemann yüzeylerinin (Riemann tarafından oluşturulmuş) bütünlüklü bir sınıflandırması mevcuttur. Şimdi bu sınıflandırmayı kısaca özetleyeceğim.

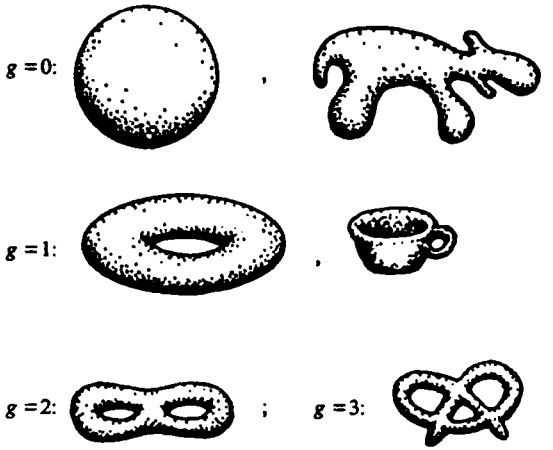
8.4 Tıkız bir Riemann yüzeyinin cinsi

İlk aşama, yüzeyleri topolojilerine göre, diğer bir deyişle şeylerin sürekli dönüşümler tarafından korunan görünümlerine göre sınıflandırmaktır. 2boyutlu yönlendirilebilir (*bkz.* §12.6'nın sonu) tıkız yüzeylerin topolojik sınıflandırılması gerçekten oldukça basittir. Yüzeyin *cinsi* denilen tekil bir doğal sayıyla tanımlanır. Kabaca söylersek tüm yapmamız gereken yüzeyde bulunan "kulplar"ı saymaktır. Küre örneğinde cins 0'dır, oysa ki torus için 1'dir. Sıradan bir çay fincanının yüzeyi de 1 cinsine (bir kulp!) sahiptir, bu nedenle bir torusla topolojik olarak aynıdır. Normal bir tuzlu krakerin yüzeyi 3 cinsine sahiptir. Çeşitli örnekler için *bkz.* Şekil 8.9.

Cinsin kendisi Riemann yüzeyini, 0 cinsi dışında ayarlamaz. Ayrıca modül olarak bilinen belirli karmaşık parametreleri de bilmemiz gerekir.

---

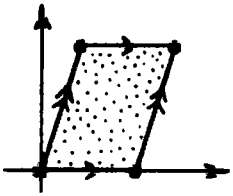
[2] "Kapalı" sözcüğünün yüzeyler ya da daha genel olarak 12. bölümde ele alınacak olan manifoldlar bağlamındaki kullanımında, terminolojik karışıklığa yol açan bir kapsam mevcuttur. Bu tür bir manifold için "kapalı"nın anlamı sırf, §7.4'te tartışılmış "açık" kavramının tümleyicisi olan topolojik anlamdaki "kapalı" olmaktan ziyade "sınır olmaksızın tıkız"dır. (Topolojik olarak bir *kapalı* küme kendine ait tüm limit noktalarını barındıran kümedir. Kapalı bir kümenin *tümleyeni* açık bir kümedir ve tersi de geçerlidir. Topolojik bir çevresel uzay $\mathcal{V}$ içindeki bir $\mathcal{S}$ kümesinin "tümleyeni" $\mathcal{V}$'nin $\mathcal{S}$ içinde olmayan üyelerinden oluşan kümedir.) Ek bir karışıklık yukarıdaki "sınır" teriminin bu kitapta tartışmadığım "sınırlı manifold" kavramıyla ilgili olmasından kaynaklanır. 12. bölümde değinlen olağan manifoldlar (diğer bir deyişle sınırlı manifoldlar) için (topolojik olanın aksine) "kapalı" manifold kavramı "tıkız"a eşdeğerdir. Karışıklığı önlemek için bu kitapta "kapalı" yerine normal olarak yalnızca "tıkız" terimini kullanacağım. İstisnalar, topolojik olarak bir S^1 çember olan gerçel bir 1–manifold için "kapalı eğri" ve *uzamsal olarak* tıkız olan, diğer bir deyişle tıkız bir uzaysal hiper yüzey içeren bir evren modeli için "kapalı evren" kullanımlarıdır; *bkz.* §27.11.



Şekil 8.9 Bir Riemann yüzeyinin cinsi ona ait "kulplar"ın sayısıdır. Kürenin cinsi 0'dır, torusun ya da çay fincanınınki 1. Normal bir tuzlu krakerin yüzeyi 3 cinsine sahiptir.

Bu konuyu torus (cins 1) örneğiyle örnekleyeyim. Cins 1'e sahip bir Riemann yüzeyi oluşturmanın kolay bir yolu karmaşık düzlemin bir paralelkenarla sınırlandırılmış, diyelim ki köşeleri (döngüsel olarak açıklanmış) 0, 1, $1 + p$, p olan bir bölgesini almaktır. Şekil 8.10'a bakın. Şu halde yalnızca paralelkenarın karşılıklı kenarlarının birbirlerine yapıştırıldığını, diğer bir deyişle 0'dan 1'e kadar olan kenarın p'den $1 + p$'ye kadar olana ve 0'dan p'ye kadar olan kenarın 1'den $1 + p$'ye kadar olana yapıştırıldığını düşünmeliyiz. (İstersek dikiş yerlerini örtmek için her zaman farklı yamalar bulabiliriz.) Sonuçtaki Riemann yüzeyi aslında topolojik olarak bir torustur. O halde farklı p değerleri için sonuçtaki yüzeylerin genellikle birbirlerine *eşdeğer olmadıkları* ortaya çıkar; demek oluyor ki, birini ötekine holomorfik bir dönüştürme yoluyla dönüştürmek olası değildir. (Bununla birlikte örneğin p'nin, $1 + p$'yle, $-p$'yle ya da $1/p$'yle[8 8] yerinin değiştirilmesi sonucu ortaya çıkan türde bazı ayrık eşdeğerlik ler de mevcuttur. Aynı topolojideki Riemann yüzeylerinin tümünün eşdeğer olamayacağı, Şekil 8.11'de gösterilen iki örneği ele almak yoluyla sezgisel olarak akla yatkın hale getirilebilir. Bir durumda çok küçük bir p değeri seçtim ve oldukça sıska görünümlü bir torus elde ettik; diğer durumdaysa i'ye yakın bir p seçtim ve sonuç şişman ve güzel bir torus oldu. Sezgisel olarak ikisi arasında konformal eşdeğerlik olamayışı oldukça açık görünüyor ve gerçekten de yoktur.

[8.8] Bu yer değiştirmelerin holomorfik olarak eşdeğer uzaylar verdiğini gösterin. p'nin, bu eşdeğerlik lerin Riemann yüzeyinin ilave ayrık simetrilerine yol açan tüm özel değerlerini bulun.



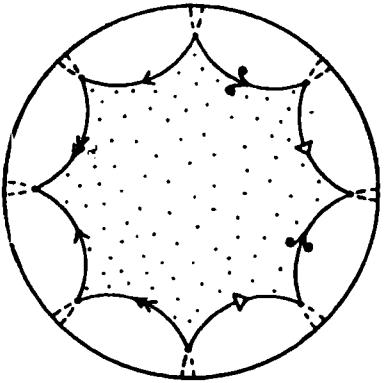
Şekil 8.10 Cins 1'e sahip bir Riemann yüzeyi oluşturmak için karmaşık düzlemin bir paralelkenarla sınırlandırılmış, karşılıklı kenarlarla tanımlı, köşeleri (döngüsel olarak) 0, 1, $1 + p$, p olan bir bölgesini alın. p niceliği Riemann yüzeyi için bir modül sağlar.

Şekil 8.11 Eşdeğer olmayan torus topolojili iki Riemann yüzeyi.

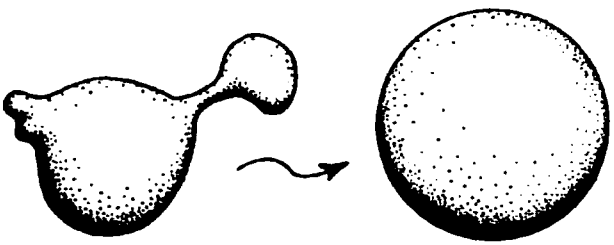
Cins 1 durumunda yalnızca bu tek karmaşık p modülü mevcuttur fakat cins 2 için üç adet olduğunu görürüz. Cins 2'ye sahip bir Riemann yüzeyini, cins 1 için kullandığımız paralelkenar biçiminde bir şekli bir araya getirerek oluşturmak için, şekli hiperbolik düzlemin bir parçasından oluşturabiliriz; *bkz.* Şekil 8.12. Aynısı herhangi yüksek bir cins için de geçerlidir. Cins g'ye ilişkin karmaşık modüle ait m sayısı, $g \geq 2$ olmak üzere $m = 3g - 3$'tür.

Modül sayısına ilişkin $3g - 3$ denkleminin g cinsinin tüm değerleri için, $g = 2, 3, 4, 5, \ldots$, geçerli olup $g = 0$ ya da 1 için işlememesi biraz tuhaf olarak değerlendirilebilir. Aslında bunun için, Riemann yüzeyinin farklı sürekli (holomorfik) *öz dönüşümler*ini belirlemesi gereken karmaşık parametrelere ait s sayısıyla ilişkisi olan bir "sebep" mevcuttur. $g \geq 2$ için böylesi hiçbir öz dönüşüm mevcut değildir, bu durumda $s = 0$'dır. Bununla birlikte $g = 1$ için Şekil 8.10'daki paralelkenara ait karmaşık düzlem düzlemde herhangi bir yönde ötelenebilir (döndürme olmaksızın sabitçe hareket ettirilebilir). Bu yer değiştirmenin miktarı tekil bir karmaşık a parametresiyle, öteleme $z \mapsto z + a$ tarafından gerçekleştirilmiş olmak üzere belirtilebilir, bu durumda $g = 1$ olduğunda $s = 1$'dir. Küre örneğinde (cins 0), öz dönüşümler yukarıda açıklanmış çifte–doğrusal dönüşümler, diğer bir deyişle $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ tarafından gerçekleştirilir. Burada serbestlik üç[3] bağımsız oranla, $a : b : c : d$, verilir. Böylece $g = 0$ durumunda $s = 3$ elde ederiz. Bundan dolayı tüm durumlarda karmaşık modül sayısıyla bir

[3] Dönüşüm, a, b, c, d'nin her birini sıfır olmayan aynı karmaşık sayıyla çarparsak (yeniden ölçeklendirirsek) etkisiz olur fakat herhangi birinde tekil olarak değişiklik yaparsak değişir. Bu toplam yeniden ölçeklendirme serbestliği dönüşümde içerilmiş bağımsız parametrelerin sayısını dörtten üçe, bir azaltır.



Şekil 8.12 Hiperbolik düzlemin bir cins 2 Riemann yüzeyi vermek üzere belirlemelere sahip sekizgen bir bölgesi.



Şekil 8.13 Her $g = 0$ metrik geometrisi konformal olarak standart ("yuvarlak") birim küreyle özdeştir.

öz dönüşümü belirtmek için gereken karmaşık parametre sayısı arasındaki $m - s$ farkı

$$m - s = 3g - 3$$

ifadesini sağlar. (Bu eşitlik, bu kitabın ufkunun ötesindeki bazı daha derin konularla ilgilidir.)[4]

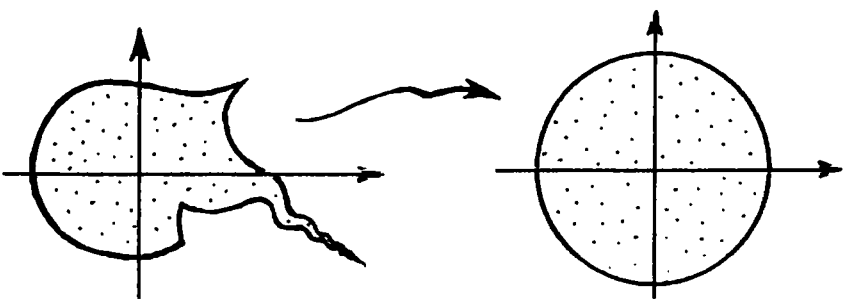
Bir Riemann yüzeyinin görünürdeki "şekli"ni, ona ait yapıyı değişmeyen bir Riemann yüzeyi olarak korurken değiştirmek için, konformal (holomorfik) dönüşümler ailesi içinde hatırı sayılır bir derecede serbestlik bulunduğu açıktır. Küresel topoloji durumunda örneğin, farklı pek çok metrik geometri (Şekil 8.13'te gösterildiği üzere) olasıdır; yine de bunların tümü standart ("yuvarlak") birim küreyle konformal olarak özdeştir. (§14.7'de "metrik" kavramıyla ilgili daha açık olacağım.) Dahası, daha yüksek cins için, yüzey "biçim"inde var olan görünüşte çok miktardaki serbestliğin tümü, yukarıdaki denklemlerle verilmiş sınırlı karmaşık modül sayısına indirgenebilir. Bununla birlikte yüzeyin şeklinde hâlâ, bu konfor-

[4] Bu, zirvesi çok genel ve güçlü Atiyah–Singer teoremi, 1963, olan uzun bir öykünün başlangıcı olarak düşünülebilir.

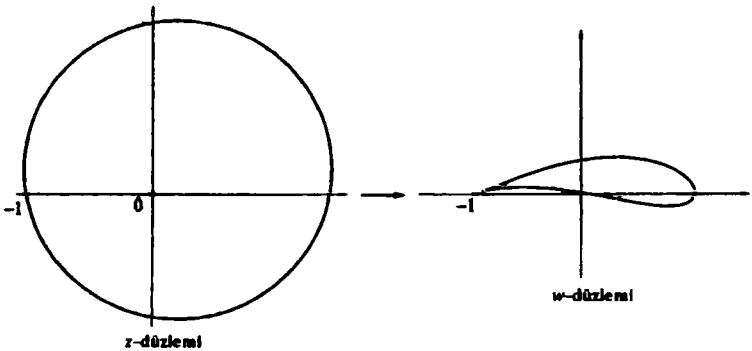
mal serbestliğin kullanılması yoluyla elenemeyecek, diğer bir deyişle modüllerin kendileriyle tanımlanmış bir parça kapsamlı bilgi mevcuttur. Bu tür serbestliğin kullanımı sayesinde tam olarak ne kadarının gerçekleşebileceği oldukça ince bir konudur.

8.5 Riemann dönüşüm kuramı

Bununla birlikte holomorfik dönüşümlerde içerilmiş dikkate değer serbestliğin bir kavranışı, Riemann dönüşüm kuramı olarak bilinen ünlü sonuçla elde edilebilir. Bu, karmaşık düzlemde kendisiyle kesişmeyen kapalı bir ilmekle sınırlandırılmış kapalı bir bölgeye sahip olduğumuz durumda (*bkz.* not 8.1), bu bölgeyi kapalı birim diske eşleyen holomorfik bir dönüşümün var olduğunu ileri sürer (*bkz.* Şekil 8.14). (İlmeğin "uysallığı" üzerine hafif bazı kısıtlamalar mevcuttur fakat bu durum ilmeğin köşelere ya da türevinin alınamayacağı türde başkaca kötü yerlere sahip olmasını, Şekil 8.14'teki özel örnekte gösterildiği üzere önlemez.) Bundan daha da ileri gidilip oldukça rasgele biçimde ilmek üzerinde üç ayrık a, b, c noktası seçilebilir ve bunların, birim çember üzerinde belirtilmiş üç a', b', ⊠c' noktasına gönderim sonucu (diyelim ki $a' = 1$, $b' = \omega$, $c' = \omega^2$) elde edildiklerinde, tek kısıtlama a, b, c noktalarının ilmek etrafındaki döngüsel düzeninin, a', b', c' noktalarının birim çember üzerindeki düzeniyle uyum göstermesi olmak üzere, ısrar edilebilir. Gönderimi eşsiz bir şekilde belirtmenin diğer bir yolu ilmek üzerinde yalnızca tek bir a noktası ve içerisinde ek bir j noktası seçmek ve sonra a'nın birim çember üzerindeki belirli bir a' noktasına ($a' = 1$ diyelim) ve j'ninse birim çember içerisinde belirli bir j' noktasına ($j' = 0$ diyelim) dönüştürüldüğünde ısrar etmektir.



Şekil 8.14 Riemann dönüşüm kuramı basit bir karmaşık düzlemde kapalı ilmekle sınırlandırılmış herhangi açık bir bölgenin holomorfik olarak birim çemberin iç bölgesine, sınır da uygun şekilde dönüştürülmek üzere, dönüştürülebileceğini ileri sürer.



Şekil 8.15 Zhoukowski dönüşümü $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z = -1$'den geçen bir çemberin dışını bir kanat profilinin yatay kesitine, ikincisi için hava akışı modelini hesaplamaya olanak verecek şekilde çevirir.

Şimdi, Riemann dönüşüm kuramını karmaşık düzlem yerine *Riemann küresi* üzerinde uyguladığımızı düşünelim. Riemann küresi bakış açısına göre kapalı bir ilmeğin "iç"i, "dış"ıyla aynı dayanak noktasına sahiptir (kürenin hemen öbür tarafından bakın), böylece teorem ilmeğin içine olduğu kadar dışına da eşit derecede uygulanabilir. Bunun sonucu olarak, Riemann dönüşüm kuramının, karmaşık düzlemdeki bir ilmeğin dışının birim çemberin dışına dönüştürülebileceğini ileri süren "ters çevrilmiş" bir biçimi mevcuttur ve eşsizlik artık ilmek üzerinde belirtilen bir a noktasının birim çember üzerinde belirtilmiş bir a' noktasına (yukarıdaki parafın sonunda sunulan açıklamadaki j ve j' rollerini artık ∞ üstlenmiş bulunmak üzere) dönüştürülmesi basit gereksinimi tarafından sağlanır.[5]

Bu tür arzu edilen gönderimler açık biçimde gerçekleştirilebilir ve böylesi gönderimlerin arzulanmasına ilişkin bir sebep onların, ilgilenilen fiziki problemlere, örneğin bir kanat profili şeklinden geçen (ideal koşullarda "yapışkan olmayan", "sıkıştırılamaz" ve "dönel olmayan" olarak adlandırılan) hava akışı için çözüm sağlayabilmesidir. Üniversitede bir matematik öğrencisiyken bu tür şeylerden, özellikle Şekil 8.15'te gösterilen, $z = -1$ noktasından geçen uygun bir çember üzerindeki

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

dönüşümü sonucunda açık biçimde tanımlanabilecek Zhoukowski (ya da Joukowski) kanat profili dönüşümü olarak bilinen dönüşümden çok etki-

[5] Riemann dönüşüm kuramının iki versiyonunun birleşiminin bize, yalnızca tam bir çember olan bir döngü için tümüyle pürüzsüz bir Riemann küresi vereceği belirtilmelidir.

lenmiş olduğumu hatırlıyorum. Aslında bu Şekil 1930'lara ait bir uçağın kanadının yatay kesitine yakından benzer, bu durumda etrafındaki (ideal) hava akımı dolaysız biçimde, kendisi de daha önce başka bir holomorfik dönüşümden elde edilen dairesel yatay kesite sahip bir "kanat" etrafındaki akıştan elde edilebilir. (Bir defasında uçak kanatlarında bu tür bir şeklin kullanılmasının sebebinin yalnızca, Zhoukowski dönüşümünün matematiksel olarak bu sayede çalışılabilmesi olduğunu duymuştum. Bunun doğru olmamasını umuyorum!)

Elbette bu tür uygulamalarda içerilmiş belirli varsayım ve sadeleştirmeler mevcuttur. Yalnızca sıfır yapışkan, sıkıştırılamayan ve dönel olmayan akış varsayımları sırf uygun sadeleştirmeler değildir ayrıca akışın tüm kanat uzunluğu boyunca aynı kabul edilebileceği ve bunun sonucu olarak esasen üç boyutlu bir problemin bütünüyle iki boyutlu bir probleme indirgenebileceği türde çok etkili bir sadeleştirme de mevcuttur. Bir uçak kanadı etrafındaki akışa ilişkin tümüyle gerçekçi bir hesaplama için çok daha karışık bir matematiksel uygulama gerektiği açıktır. Daha gerçekçi bir uygulamada holomorfik fonksiyonların Zhoukowski dönüşümünde olduğu gibi dolaysız ve zarif kullanımını gerektiren herhangi bir şeyden kaçınabileceğimizi beklemek için hiçbir sebep yoktur. Aslında gerçek dünyada ayırt edici önemdeki karmaşık sayıların bir probleme ilişkin etkileyici türdeki bir uygulamasını bulmada iyi talihin güçlü bir unsurunun var olduğu iddia edilebilir. Hava elbette muazzam sayıda temel tekil parçacıktan oluşur (gerçekte bir santimetre küpte bunlardan yaklaşık 10^{20} adet kadar), öyleyse hava akışı, makroskopik boyuttaki açıklanışı dikkate değer miktarda ortalama alma ve yaklaşıklık tahmini yapma işlemi içeren bir şeydir. Aerodinamiğin matematiksel denklemlerinin, bu tekil parçacıklara hükmeden fiziki yasalarda derinlemesine içerilmiş matematiğin büyük kısmını yansıtması gerektiğini beklemek için bir sebep yoktur.

§4.1'de karmaşık sayıların, aslında fiziki eylemin "en küçük ölçeğinde" oynadığı "olağandışı ve çok temel rol"e değindim ve gerçekten de parçacıkların davranışlarını yöneten holomorfik bir denklem mevcuttur (*bkz.* §21.2). Buna rağmen makroskopik sistemler söz konusu olduğunda bu "karmaşık yapı" genellikle bütünüyle ortadan kaybolur ve karmaşık sayılar ve holomorfik geometri yalnızca (üstte ele alınan hava akışı problemindeki gibi) istisnai durumlarda doğal bir yarar gösterir görünür. Yine de belli başlı bir temel karmaşık yapının makroskopik düzeyde bile ortaya çıktığı durumlar söz konusudur. Bu bazen Maxwell'in elektromanyetik kuramında ve diğer dalga olaylarında görülebilir. Ayrıca görelilik kuramında da özel olarak çarpıcı bir örnek mevcuttur (*bkz.*§18.5). Bir sonraki bölümde karmaşık sayılar ve holomorfik fonksiyonların, sihirlerini sahne arkasından yapabilmelerine yol açan dikkate değer bir şey göreceğiz.

9

FOURIER AYRIŞMASI VE HİPERFONKSİYONLAR

9.1 Fourier serisi

§6.1'de dile getirilen, Euler ve çağdaşları tarafından kabul edilebilir bir "dürüst fonksiyon" kavramı olarak göz önüne alınan soruna geri dönelim. §7.1'de Euler'in de aklında olmuş olabilecek şeyi en iyi karşılayan şey olarak holomorfik (karmaşık analitik) fonksiyonda karar kıldık. Yine de bugün çoğu matematikçi bu tür bir "fonksiyon" kavramını makul olmayan biçimde kısıtlayıcı olarak kabul ediyor. Haklı olan kim? Bu soruya ilişkin çok dikkate değer bir yanıtı bu bölümün sonunda görüyor olacağız. Öyleyse ilk olarak konuların ne olduğunu anlamaya çalışalım.

Matematiğin, fiziki dünyanın problemlerine uygulanışında ne holomorfik fonksiyonların ne de onların gerçel karşılıklarının, analitik (diğer bir deyişle C^{ω}–) fonksiyonlar, sahip göründüğü bir esnekliğin varlığı sık görülen bir gereksinimdir. Karmaşık düzlemin birleşik bir $\mathcal{D}$ açık bölgesi boyunca tanımlı holomorfik bir fonksiyonun evrensel davranışı, $\mathcal{D}$'nin küçük bir açık alt bölgesinde bir kez bilindiğinde, analitik sürdürmenin §7.4'te açıklandığı üzere eşsizliği nedeniyle tümüyle sabit hale gelir. Benzer biçimde gerçel $\mathbb{R}$ doğrusunun birleşik bir $\mathcal{R}$ parçası üzerinde tanımlanan gerçel değişkenli bir analitik fonksiyon da, küçük bir açık $\mathcal{R}$ alt bölgesinde bir kez bilindiğinde, tümüyle sabit hale gelir. Böylesi bir katılık fiziki sistemlerin gerçekçi modellemesi için uygunsuz görünmektedir.

Durum *dalgaların* yayılımı söz konusu olduğunda özel olarak tuhaflaşır. Sinyallerin radyo dalgaları ya da ışığın elektromanyetik titreşimler aracılığıyla gönderimini içeren dalga yayılımı, yararlılığının büyük kısmını bilginin bu tür araçlarla iletilebilmesi gerçeği sayesinde kazanır. Sonuç itibariyle sinyallemedeki tüm mesele, bir mesaj göndermek üzere, alıcı tarafından umulmadık olabilecek bir potansiyelin var olma zorunluluğudur. Sinyalin biçimi analitik bir fonksiyon tarafından tanımlanmak zorundaysa, bu durumda mesajın ortasında "fikir değiştirip cayma" olasılığı yoktur. Sinyalin herhangi küçük bir parçası, sinyali kendi bütünlüğü içinde tüm zamanlar için tümüyle belirler. Aslında dalga yayılımı üzerine, sürek-

sizlikler ya da analitiklikten diğer sapmaların gerçekte nasıl yayılacağıyla ilgili soru bakımından sıklıkla çalışılır.

Dalgaları ele alalım ve bu tür şeylerin matematiksel olarak nasıl açıklandığını sorgulayalım. Dalga biçimlerini *Fourier analizi* olarak bilinen işlem yoluyla çalışmak en verimli yollardan biridir. Joseph Fourier 1768'den 1830'a kadar yaşamış Fransız bir matematikçidir. Periyodik titreşimleri kendi "sinüs dalgası" bileşen parçalarına ayrıştırma sorunuyla ilgilenmişti. Müzikte bu temel olarak, bazı müzikal sesleri kendi bileşenleri olan "saf tonlar" biçiminde yansıtmakta içerilmiş şeydir. "Periyodik" terimi; örüntünün (titreşen nesnenin fiziki yer değiştirmeleri diyelim) kendisini belli bir zaman aralığı sonunda tam olarak yinelemesi anlamına gelir ya da uzaydaki, örneğin bir kristalde ya da duvar kağıdında ya da açık denizdeki dalgalarda yinelenen örüntüler benzeri periyodikliği ifade edebilir. Bir f fonksiyonuna (gerçel bir χ değişkenli fonksiyon diyelim[1]), o fonksiyon tüm χ değerleri için, l, *periyot* olarak ifade edilen belli bir sabit sayı olmak üzere,

$$f(\chi + l) = f(\chi)$$

ifadesini sağlıyorsa matematiksel olarak *periyodik*tir deriz. Bu durumda $y = f(\chi)$ grafiğini χ ekseni boyunca l miktarı kadar kaydırırsak daha önce olduğunun tıpatıp aynısı gibi görünür (Şekil 9.1a). (Fourier'in periyodik olması gerek*meyen* fonksiyonları ele alma biçimi; Fourier *dönüşümü* kullanılarak §9.4'te açıklanacak.)

"Saf tonlar" $\sin\chi$ ya da $\cos\chi$ gibi şeylerdir (Şekil 9.1b). Bunlar,

$$\sin(\chi + 2\pi) = \sin\chi, \quad \cos(\chi + 2\pi) = \cos\chi$$

olduğundan 2π periyoduna sahiptir. Bu denklemler tekil karmaşık $e^{i\chi} = \cos\chi + i\sin\chi$ niceliğinin §5.3'te ele aldığımız

$$e^{i(\chi+2\pi)} = e^{i\chi}$$

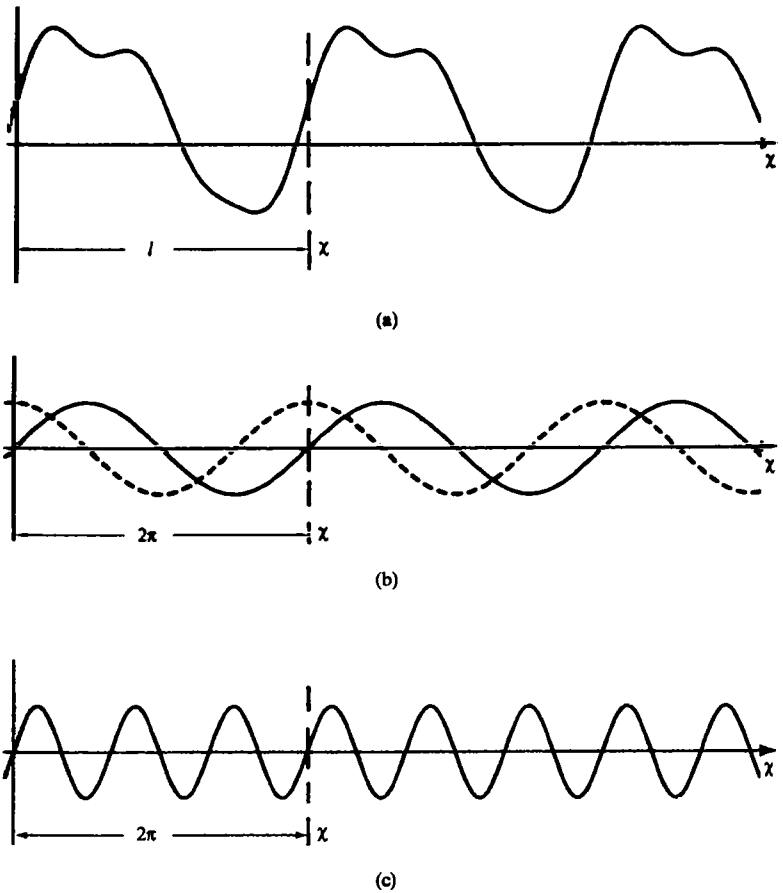
periyodikliğinin ortaya konuluşudur. 2π yerine l periyodikliğini istersek bu durumda χ'yi fonksiyonda göründüğünde "yeniden ölçeklendir"ebilir ve $e^{i\chi}$ yerine $e^{i2\pi\chi/l}$ alabiliriz. Gerçel ve sanal kısımlar da $\cos(2\pi\chi/l)$ ve $\sin(2\pi\chi/l)$ buna uygun olarak l periyoduna sahip olacaktır. Buna rağmen, tek olasılık bu değildir. Fonksiyon l periyodunda bir kez salınmak yerine, iki kez, üç kez ya da aslında n herhangi pozitif bir tamsayı olmak üzere n kez salınabilir ve böylece

[1] Daha doğal görülebilecek sıradan bir x yerine Yunan harfi χ'yi ("chi") burada yalnızca, ilerleyen bölümlerde önemli bir rol oynayacak karmaşık z sayısının gerçel kısmı x'ten ayırt etmemiz gerektiği için kullanıyorum.

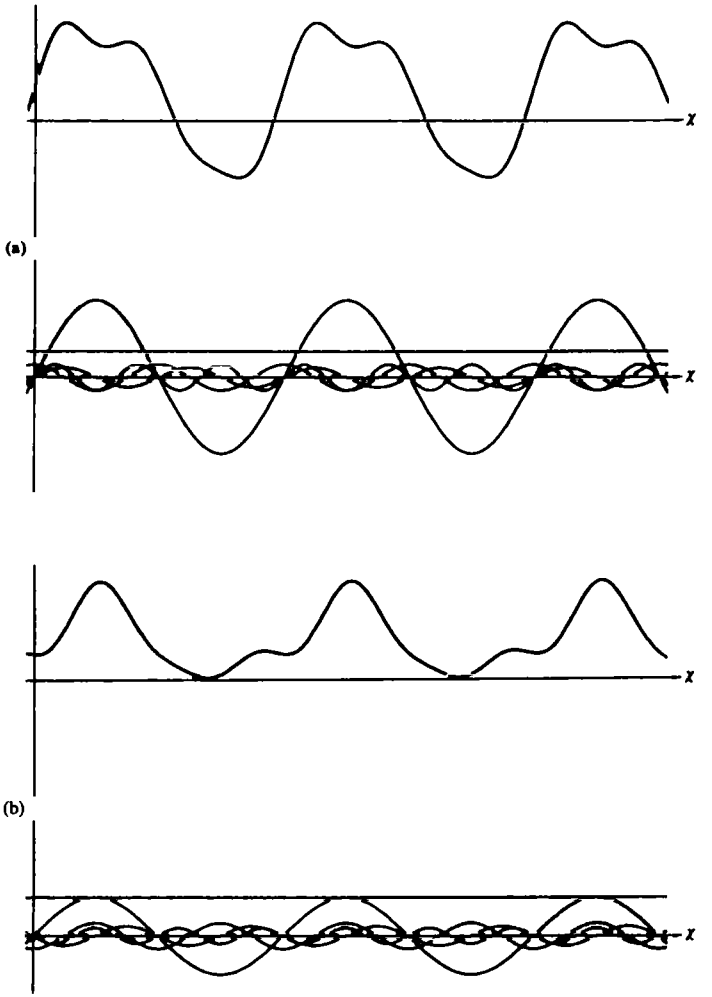
$$e^{i2\pi n\chi/l},\ \sin\left(\frac{2\pi n\chi}{l}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi n\chi}{l}\right)$$

ifadelerinin her biri (daha küçük l/n periyoduna sahip olmak yanında) l periyoduna sahip olur. Müzikte bu ifadeler $n = 2, 3, 4, \ldots$ için *yüksek harmonikler* olarak adlandırılır.

Fourier'in ortaya attığı (ve çözdüğü) bir problem, l periyotlu genel bir periyodik $f(\chi)$ fonksiyonunun saf tonların bir toplamı olarak nasıl ifade



Şekil 9.1 Periyodik fonksiyonlar. (a) Tüm χ'ler için $f(\chi) = f(\chi + l)$ ise $f(\chi)$ l periyoduna sahiptir. Bu demek oluyor ki, $y = f(\chi)$ fonksiyonunu χ ekseni üzerinde l kadar kaydırırsak, fonksiyon tıpkı daha önce olduğu gibi görünür. (b) Temel (noktalı gösterilen) $\sin\chi$ ya da $\cos\chi$ "saf tonları" $l = 2\pi$ periyoduna sahiptir. (c) "Yüksek harmoni"li saf tonlar birkaç kez l periyodunda salınım yaparr; daha kısa bir periyoda sahipken de hâlâ l periyoduna sahiptir (daha kısa $2\pi/3$ periyoduna sahip olmanın yanısıra $l = 2\pi$ periyodundaki $\sin 3\chi$ gösterilmektedir).



Şekil 9.2 Periyodik fonksiyonların Fourier ayrışması örnekleri. Dalga biçimi (grafiğin şekli) Fourier katsayıları tarafından belirlenir. Fonksiyonlar ve altlarında onlara ait tekil Fourier bileşenleri. (a) $f(\chi) = \frac{2}{3} + 2\sin\chi + \frac{1}{3}\cos 2\chi + \frac{1}{4}\sin 2\chi + \frac{1}{3}\sin 3\chi$. (b) $f(\chi) = \frac{1}{2} + \sin\chi - \frac{1}{3}\cos 2\chi - \frac{1}{4}\sin 2\chi - \frac{1}{5}\sin 3\chi$.

edileceğinin bulunmasıydı. Her bir n için, genel olarak o saf tonun bütüne katkısının farklı bir büyüklüğü söz konusu olacak ve bu, dalga biçimine (diğer bir deyişle $y = f(\chi)$ grafiğinin şekline) bağlı olacaktır. Bazı basit örnekler Şekil 9.2'de gösteriliyor. Bununla birlikte, $f(\chi)$'ye katkıda bulunan farklı saf tonların sayısı genelde sonsuz olacaktır. Fourier'in çok daha

özel olarak gerek duyduğu şey $f(\chi)$'yi kendi kurucu parçalarına ayrıştırma işlemindeki,

$$f(\chi) = c + a_1 \cos \omega\chi + b_1 \sin \omega\chi + a_2 \cos 2\omega\chi + b_2 \sin 2\omega\chi + a_3 \cos 3\omega\chi + b_3 \sin 3\omega\chi + \cdots$$

ifadesi tarafından sağlanan c, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4 katsayılar derlemesiydi. İfadelerin daha basit görünmelerini sağlamak üzere onları, $\omega = 2\pi/l$'yle tanımlanan (§§5.4, 5, §8.1'deki "ω" ile hiçbir ilgisi olmayan) *ω açısal frekansı* biçiminde yazdım.

Bazı okuyucular $f(\chi)$'ye ilişkin bu ifadenin, hâlâ aşırı derecede karışık olduğuna dair bir duyguya sahip olabilir; ve böyle bir okuyucu esasen haklıdır. Aslında denklem, cos ve sin terimlerini karmaşık üsteller ($e^{iA\chi} = \cos A\chi + i \sin A\chi$) biçiminde bir araya getirirsek çok daha derli toplu görünür. Şöyle ki; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ için

$$a_n = \alpha_n + \alpha_{-n},\ b_n = i\alpha_n - i\alpha_{-n},\ c = \alpha_0$$

olmak üzere,

$$f(\chi) = \cdots + \alpha_{-2}e^{-2i\omega\chi} + \alpha_{-1}e^{-i\omega\chi} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{i\omega\chi} + \alpha_2 e^{2i\omega\chi} + \alpha_3 e^{3i\omega\chi} + \cdots$$ [2, [9.1]]

İfade, $f(\chi)$ ile aynı nicelikteki $F(z)$ fonksiyonunu artık yeni karmaşık z değişkeni biçiminde tanımlar ve $z = e^{i\omega\chi}$ koyarsak daha da düzenli görünür. Böylece,

$$F(z) = F\left(e^{i\omega\chi}\right) = f(\chi)$$

olmak üzere,

$$F(z) = \cdots + \alpha_{-2}z^{-2} + \alpha_{-1}z^{-1} + \alpha_0 z^0 + \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots$$

ifadesini elde ederiz. Ayrıca onu, "tüm terimleri tüm r tamsayı değerleri için birbirine ekle" anlamındaki $\sum$ işaretini kullanarak hâlâ daha derli toplu görünür hale getirebiliriz:

$$F(z) = \sum \alpha_r z^r.$$

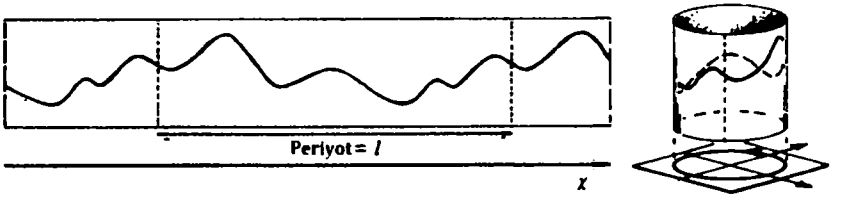
Bu, pozitif üsler yanında *negatif* üslerin de var olması dışında bir üslü seriye benzer ve *Laurent* serisi olarak adlandırılır. Bu ifadenin önemini sonraki bölümde görüyor olacağız.[9.2]

---

[2] $f(\chi)$'nin gerçel χ değerleri için gerçel olması gerekliliği mevcut değildir, diğer bir deyişle a_n, b_n ve c gerçel sayı olmak zorunda değildir. Gerçel değişkenli karmaşık sayıların varlığı mükemmel şekilde yasaldır. $f(\chi)$'nin gerçel olma koşulu, α_{-n}'nin α_n'nin karmaşık eşleniği olmasıdır. Karmaşık eşlenikler §10.1'de tartışılacak.

[9.1] Bunu gösterin.

[9.2] Fbirim çember üzerinde analitik olduğunda $\alpha_n$ve buradan hareketle a_n, b_n ve c katsayılarının $\alpha_n = (2\pi i)^{-1} \oint z^{-n-1} F(z)dz$ denklemi kullanılarak elde edilebileceğini gösterin.



Şekil 9.3 Gerçel bir χ değişkenli periyodik bir fonksiyon, χ'nin gerçel eksenini etrafına doladığımız, çevresi l olan bir çember üzerinde tanımlanmış olarak düşünülebilir. $l = 2\pi$ ile birlikte bu çemberi karmaşık düzlemdeki birim çember olarak kabul edebiliriz.

9.2 Bir çember üzerindeki fonksiyonlar

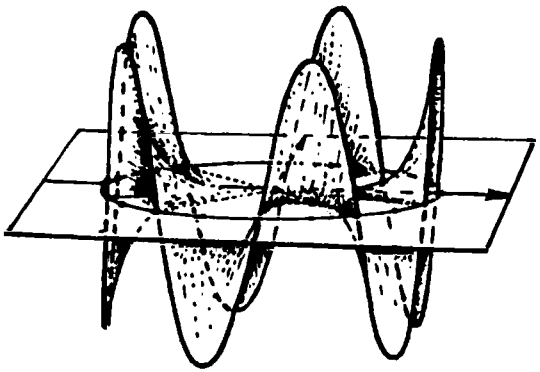
Laurent serisi bize Fourier serilerini sunmanın kesinlikle oldukça hesaplı bir yolunu verir. Bununla birlikte bu ifade ayrıca Fourier ayrışması hakkında ilginç bir alternatif bakış açısı önerir. Periyodik bir fonksiyon kendini durmadan basit şekilde yinelediği için bu tür bir fonksiyonu, fonksiyonun periyodu l'yi çemberin çevresi, χ çember etrafında ölçülen uzaklık olmak üzere, bir *çember* (Şekil 9.13) üzerinde tanımlı olarak düşünebiliriz. Basitçe düz bir çizgi üzerinde gitmek yerine bu uzaklıklar artık çemberi sarmalar, böylece periyodiklik otomatik olarak hesaba katılır.

Uygunluk adına (en azından şimdilik) bu çemberi, karmaşık düzlemde çevresi 2π olan birim çember ve l periyodunu 2π olarak kabul ediyorum. Bu nedenle,

$$\omega = 1 \text{ ve böylece } z = e^{i\chi}\text{'dir.}$$

(Periyodun herhangi başka bir durumu için tüm yapmamız gereken χ değişkenini uygun şekilde yeniden ölçeklendirmek yoluyla ω'yu yeniden ayarlamaktır.) Fourier ayrışmasına ait çeşitli "saf tonlar"ı temsil eden farklı cos ve sin terimleri artık kısaca z'nin pozitif ya da negatif üsleri, diğer bir deyişle n'inci dereceden harmonikler için $z^{\pm n}$ olarak gösterilir. Bu üsler bize birim çember üzerinde tam da gerek duyduğumuz salınımlı cos ve sin terimlerini verir; *bkz.* Şekil 9.4.

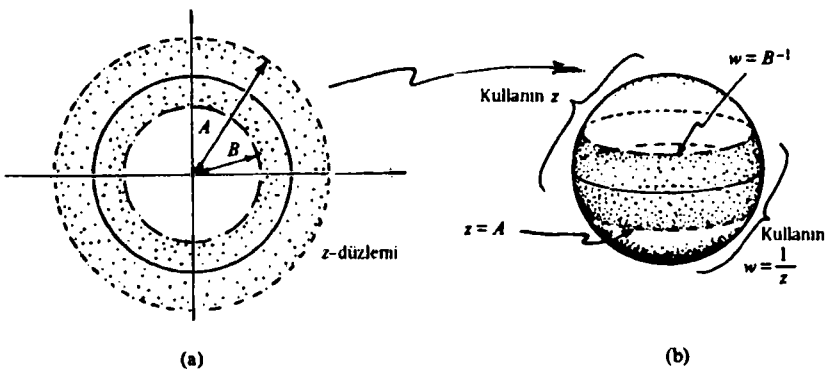
Artık periyodik bir $f(\chi)$ foksiyonuna ilişkin Fourier ayrışmasını göstermenin bu oldukça derli toplu biçimine sahibiz. $f(\chi) = F(z)$'yi z düzlemindeki birim çember üzerinde, $z = e^{i\chi}$'yle birlikte, tanımlı olarak düşünürüz ve böylece Fourier ayrışması bu fonksiyona ait karmaşık bir z değişkeni biçimindeki Laurent serisi tanımı haline gelmiş olur. Bununla birlikte avantaj yalnızca bir derli topluluk konusu değildir. Bu gösterim bize ayrıca Fourier serilerinin doğasına ilişkin ve onların temsil edebileceği türde fonksiyonlara ilişin daha derinlikli bir kavrayış sunar. Bu kitabın



Şekil 9.4 z^n fonksiyonunun gerçel ve sanal kısımları birim çember üzerinde n'inci dereceden harmonik cos ve sin ($z = e^{ix}$ olmak üzere $e^{i\omega x}$'nin gerçel ve sanal kısımları) dalgaları biçiminde görünür. Burada $n = 5$ için z^5'in gerçel kısmı çizilmiştir.

nihai amacı düşünüldüğünde daha önemlisi o, kuantum mekaniği ve bu nedenle Doğaya ilişkin daha iyi bir kavrayışla önemli bağlara sahiptir. Bu durum karmaşık sayıların sihrinden kaynaklanır çünkü Laurent serisi ifadesini, z birim çemberden uzakta yer aldığında da kullanabiliriz. Bu serinin bize $F(z)$ hakkında, serinin z birim çember *dışında* yer alırken yaptığı şey biçiminde önemli bir şey söylediği çünkü z birim çember *üzerinde* yer alır, ortaya çıkar.

Gelin şimdi, üslü bir serinin, içinde yakınsayıp dışında ıraksadığı bir yakınsaklık çemberi kavramını (§4.4'ten) anımsayalım. Bunun bir Laurent serisiyle yakın bir benzerliği mevcuttur: *yakınsaklık halkası*. Bu, karmaşık düzlemde her ikisi de orijin merkezli iki çemberin kesin biçimde ara-



Şekil 9.5 (a) Bir $F(z) = F^+ + \alpha_0 + F^-$ Laurent serisi için, $F^+ = \cdots + \alpha_{-2}z^{-2} + \alpha_{-1}z^{-1}$ ve $F^- = \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \cdots$, olmak üzere yakınsaklık halkası. F^+ için yakınsaklık yarıçapı A'dır ve $w = z^{-1}$ ile bağlantılı olarak F^- için B^{-1}. (b) Riemann küresi üzerinde, z genişletilmiş kuzey yarıküre ve $w(= z^{-1})$ genişletilmiş güney yarıküre anlamına gelmek üzere aynı durum.

sında kalan bölgedir (*bkz.* Şekil 9.5a). Sıradan bir üslü seri için yakınsaklık çemberi kavramına bir kez sahip olduğumuzda bunu anlamamız kolaydır. Serinin pozitif üslü kısmı[3]

$$F^{-} = \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots$$

diyelim ki A yarıçaplı sıradan bir yakınsaklık çemberine sahip olacaktır ve modülü A'dan az olan tüm tüm z değerleri için yakınsayacaktır. Serinin negatif üslü kısmı

$$F^{+} = \cdots \alpha_{-3} z^{-3} + \alpha_{-2} z^{-2} + \alpha_{-1} z^{-1}$$

bakımından onu yalnızca ters $w = 1/z$ değişkenli sıradan bir üslü seri olarak anlayabiliriz. w düzleminde diyelim ki $1/B$ yarıçaplı bir yakınsaklık çemberi mevcut olacaktır ve serinin o kısmı modülü 1/B'den az olan tüm w değerleri için yakınsayacaktır. (Burada gerçek anlamda 8. bölümde anlatılmış olan, *bkz.* Şekil 8.7, z koordinatının bir yarıküreyi, w koordinatınınsa diğerini temsil ettiği Riemann küresinden bahsetmekteyiz. *Bkz.* Şekil 9.5b. Bunun Riemann küresine ilişkin kısmını sonraki bölümde keşfedeceğiz.) Böylece modülleri B' den büyük olan z değerleri için serinin negatif üslü kısmı yakınsar. $B < A$ olmak koşuluyla bu iki yakınsak bölge çakışacak ve Laurent serisinin tümü için yakınsaklık halkası elde edeceğiz. $f(\chi) = F(e^{i\chi}) = F(z)$ fonksiyonuna ilişkin Fourier ya da Laurent serisi ek sabit α_0 terimi dahil edilmek üzere

$$F(z) = F^{+} + \alpha_0 + F^{-}$$

şeklinde verilir.

Verili durumda, gerçel χ değerleri için $z = e^{i\chi}$ ifadesine sahip olabilmemiz nedeniyle birim çember *üzerinde* yakınsaklık ararız ve z birim çember üzerinde olduğunda $f(\chi)$ fonksiyonu için Fourier serisinin yakınsaklığına ilişkin arayışımız tam olarak $F(z)$ fonksiyonu için Laurent serisinin yakınsaklığı arayışıdır. Bu nedenle, birim çemberin gerçekte yakınsaklık halkası içinde yer alması güvencesi için $B < 1 < A$ koşuluna gerek duyar görünüyoruz. Bu, Fourier serilerinin yakınsaklığı için birim çemberin zorunlu olarak yakınsaklık halkası içinde yer alması gerektiği anlamına mı gelir?

$f(\chi)$ analitikse (diğer bir deyişle C^{ω}) aslında durum budur; bu nedenle $f(\chi)$ birim çemberi içeren açık bir bölge boyunca holomorfik bir $F(z)$

[3] Serinin pozitif üslü kısmı için F^{-}, negatif üslü kısmı içinse F^{+} kullanımındaki tuhaf görünümlü notasyonal anomali kuantum mekaniğiyle ilgili yazında neredeyse evrensel hale gelen belki de talhsiz bir işaret uzlaşısından kaynaklanır (*bkz.* §§21.2, 3 ve §24.3). Bununla ilgili özür dierim fakat yazık ki makul biçimde yapabileceğim birşey de mevcut değil!

fonksiyonuna genişletilebilir.[4] Bununla birlikte $f(\chi)$ analitik değilse ilginç bir sorun ortaya çıkar. Bu durumda, ya yakınsaklık halkası birim çemberin kendisi haline gelmek üzere büzüşür, kesin konuşmak gerekirse buna gerçek bir yakınsaklık halkası için izin verilmez çünkü birim çemberin aksine yakınsaklık halkası açık bir bölge olmak zorundadır, ya da birim çember yakınsaklık halkasının iç ya da dış sınırı haline gelir. Bu sorunlar bizim için §§9.6,7'de önemli olacak.

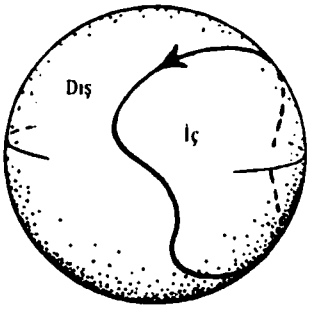
Şimdilik $f(\chi)$ analitik olmadığında ne olduğu hakkında kaygılanmayalım ve $f(\chi)$ analitik olduğu zaman ortaya çıkan daha basit durumu ele alalım. Bu durumda, kesin biçimde $F(z)$'ye ilişkin gerçek bir yakınsaklık halkası içinde, bu da $B < 1 < A$ koşuluna uyan A ve B yarıçaplı (merkezleri orijinde olan) iki çemberle sınırlanmış olmak üzere, bulunan z düzlemindeki birim çembere sahip oluruz. Laurent serisinin pozitif üslü kısmı, F^-, z düzleminde modülleri A'dan küçük olan noktalar için yakınsar ve negatif üslü kısım, F^+, z düzleminde modülleri B'den büyük olan noktalar için yakınsar, böylece her ikisi de halkanın kendisi içinde yakınsar (ve oldukça önemsizse de, sabit terim α_0'nun tüm z'ler için açık biçimde "yakınsadığını" belirtelim). Bu durum, $F(z)$ fonksiyonunu iki ayrı parçaya "bölme"mize olanak sağlar; biri dış çemberin içinde holomorfik, diğeri iç çemberin dışında holomorfik ve sırasıyla F^- ve F^+ için seri ifadeleriyle tanımlanmış olan parçalar.

Bu bölmede α_0 sabit teriminin F^-'ye mi yoksa F^+'ya mı dahil edileceğiyle ilgili (hafif) bir bulanıklık mevcuttur. Aslında, yine de bu bulanıklıkla yaşamak daha iyidir çünkü, F^- ve F^+ arasında, yukarıda değinilen Riemann küresi çerçevesini benimsersek daha açık hale gelen bir simetri mevcuttur (*bkz.* Şekil 9.5b). Bu, bize durumla ilgili daha tam bir tablo sunar, öyleyse şimdi bunu inceleyelim.

9.3 Riemann küresi üzerinde frekans bölme

z ve w $(= 1/z)$ koordinatları bize Riemann küresini örten iki yama verir. Birim çember kürenin ekvatoru haline gelir ve artık halka yalnızca ekvtorun "yaka"sıdır. $F(z)$'yi bölmemizi, onu biri holomorfik olarak, $F^+(z)$ tarafından tanımlandığı üzere ve sabit terimin hangi kısmını dahil etmeyi seçersek onunla birlikte, $F(z)$'nin *pozitif frekans* kısmı olarak adlandırılan güney yarıküreye genişleyen ve diğeri holomorfik olarak, $F(z)$'nin *ne-*

[4] Gerçel bir $\mathcal{R}$ tanım kümesinde tanımlı herhangi bir f C^ω-fonksiyonu için $\mathcal{R}$'yi hafif bir biçimde, $\mathcal{R}$'nin bir "karmaşık kalınlaştırma"sı denilen ve iç bölgesinde $\mathcal{R}$'yi bulunduran genişletilmiş karmaşık $\mathbb{C}\mathcal{R}$ tanım kümesi haline "karmaşıklaştırmak", örneğin f'nin benzersiz biçimde $\mathbb{C}\mathcal{R}$'de tanımlı holomorfik bir fonksiyona genişlemesi gibi, olasıdır.



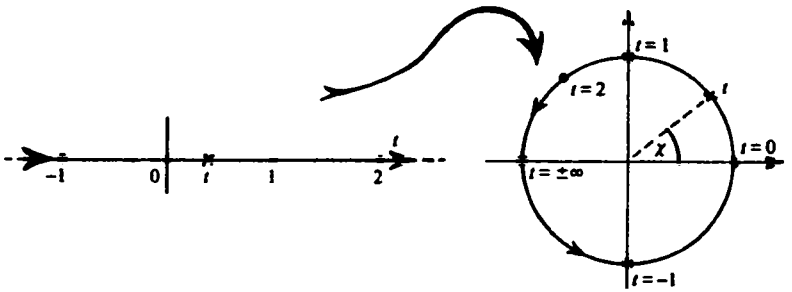
Şekil 9.6 Riemann küresi üzerinde kapalı bir ilmeğe ayrılan bir yönelim belirtildiği üzere onun "iç" ve "dış"mı tanımlar: bu yönelim ilmek içindeki bir "saat yüzü" için saat yönünün tersinedir (ve dışarıdaysa saat yönüne).

gatif frekans kısmı olarak adlandırılan kuzey yarıküreye $F^-(z)$ tarafından tanımlandığı üzere ve sabit terimin kalan kısmıyla birlikte genişleyen iki parçanın toplamı biçiminde ifade etmek olarak düşünürüz. Sabit terimi göz ardı edersek bu bölme benzersiz biçimde, iki yarıküreden biri ya da diğerine genişlemeye ilişkin holomorfiklik gereksinimi tarafından belrlenir.[9.3]

Riemann küresi üzerine çizilen bir çemberin (ya da kapalı başka ilmek) "iç"inden ya da "dış"ından, çembere ayrılması gereken bir *yönelime* başvurarak değinmek, zaman zaman yararlı olacaktır. z düzlemindeki birim çemberin standart yönelimi standart θ koordinatının artış yönü, diğer bir deyişle saat yönünün tersi biçiminde verilir. Bu yönelimi ters çevirirsek (örneğin, θ yerine $-\theta$ koyarak), bu durumda pozitif ve negatif frekansların yerlerini değiştiririz. Kapalı bir genel ilmeğe ilişkin uzlaşımız bununla uyumlu olmalıdır. Yönelim, "saat yüzü" ilmeğin dış tarafı üzerine yerleştirildiğinde saat yönünde olurken, "saat yüzü" ilmeğin iç tarafı üzerindeyken saat yönü tersinedir. Bu, yönlü bir kapalı ilmeğin "iç"i ve "dış"ını tanımlamaya hizmet eder. Şekil 9.6 konuya açıklık getirmektedir.

Bir fonksiyonu kendi pozitif ve negatif parçalarına bölmek §24.3 ve §§26.2–4'te göreceğimiz üzere kuantum kuramının ve daha özel olarak kuantum alan kuramının kritik önemdeki bir bileşenidir. Burada verdiğim özel formülasyon aslında pek de bu bölme işinin genelde ifade ediliş biçimi değildir fakat pek çok farklı bağlamda (örneğin özellikle burgaç kuramında; *bkz.* §33.10) dikkate değer bazı avantajlara sahiptir. Alışıldık formülasyon holomorfik genişletmeyle, doğrudan Fourier genişlemesiyle olduğu ölçüde ilgili değildir. Pozitif frekans bileşenleri, n pozitif olmak üzere, $e^{in\chi}$'in katları biçiminde verilen negatif frekans bileşenleri aksine, $e^{-in\chi}$'nin katları biçiminde verilenlerdir. Pozitif frekanslı bir fonksiyon tümüyle pozitif frekans bileşenlerinden oluşan bir fonksiyondur.

[9.3] Neden olduğunu görebiliyor musunuz?



Şekil 9.7 Kuantum mekaniğinde pozitif/negatif frekans bölme, periyodik varsayılmayan *t*zaman fonksiyonlarına atfedilir. Şekil 9.5'teki bölme, *t*'yi z ($= e^{i\chi}$)'yle ilişkilendiren dönüşümü kullanırsak *t*'nin tüm aralığı ($-\infty$'dan ∞'a) için, birim çemberde saat yönüne ters biçimde $z = -1$'den yine $z = -1$'e geriye dolanılarak, hâlâ uygulanabilir, böylece χ, $-\pi$'den π'ye gider.

Buna rağmen, bu tanımlama bölme işleminde içerilmiş olanın tüm genelliğini gözler önüne sermez. Riemann küresinin, her bir yarıküreyi kendisine gönderen fakat kuzey ya da güney kutbunu ($z = 0$ ya da $z = \infty$ noktaları) korumayan, kendisine pek çok holomorfik dönüşümü mevcuttur.[9 4] Bu nedenle (kuantum kuramı için çok önemli olan) pozitif ve negatif frekanslara bölme konusu, tekil Fourier bileşenlerini seçmekten çok daha genel bir kavramdır.

Kuantum mekaniğiyle ilgili normal tartışmalarda pozitif/negatif frekans bölme, *t zaman* fonksiyonlarıyla ilgilidir ve zamanı genelde bir çember etrafında ilerliyormuş gibi düşünmeyiz. Bununla birlikte *t*'nin, "geçmiş limit" $t = -\infty$'dan "gelecek limit" $t = \infty$'a kadar olan tüm aralığını çember etrafında bir kez dolanan bir χ'den elde etmek için basit bir dönüşüm kullanabiliriz; χ'nin burada, $\chi = -\pi$ ve $\chi = \pi$ limitleri arasında değiştiğini kabul ediyorum (böylece $z = e^{i\chi}$, karmaşık düzlemdeki birim çember üzerinde saat yönüne ters yönde $z = -1$ noktasından yeniden $z = -1$'e geri dönecek şekilde değişir; *bkz.* Şekil 9.7). Bu tür bir dönüşüm

$$t = \tan\frac{1}{2}\chi$$

ifadesiyle tanımlanır. Bu bağıntının grafiği Şekil 9.8'de veriliyor ve basit geometrik bir açıklama Şekil 9.9'da sunuluyor.

Bu özel dönüşümün bir avantajı, daha önce §8.3'te ele alınmış olan (*bkz.* Şekil 8.8) ve birim çemberi (z düzlemi), gerçel doğrusuna (t düzlemi) getiren bir dönüşüm olarak, holomorfik şekilde tüm Riemann küresine genişlemesidir:[9 5]

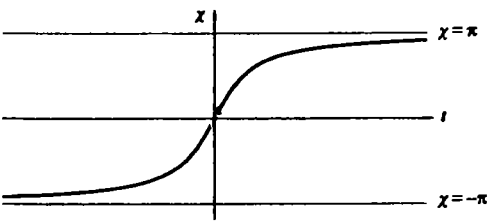
[9.4] Açık olarak bu dönüşümler hangileridir?

[9.5] Bunun yukarıdakiyle aynı *t*'yi verdiğini gösterin.

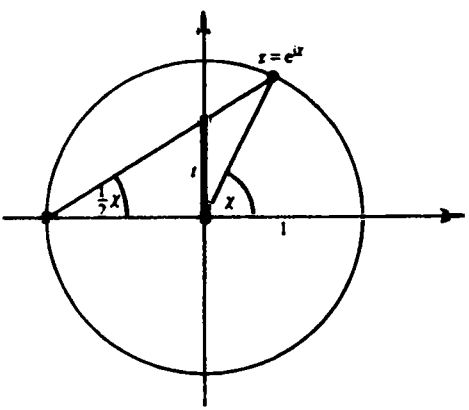
$$t = \frac{z-1}{iz+i}, \quad z = \frac{-t+i}{t+i}.$$

z düzlemindeki birim çemberin iç bölgesi t düzleminin üst yarısına ve z birim çemberinin dış bölgesi t düzleminin alt yarısına karşılık gelir. Bu nedenle t'ye ait pozitif frekanslı fonksiyonları holomorfik olarak t'nin alt yarı düzlemine genişleyenler ve negatif frekanslılarsa üst yarı düzleme genişleyenlerdir. (Bununla birlikte, t düzlemindeki "∞" noktasının nasıl ele alınacağıyla ilgili dikkat etmemiz gereken önemli bir ek teknik ayrıntı mevcuttur; fakat basitçe karmaşık t düzlemi yerine her zaman Riemann küresi biçiminde düşünürsek bununla uygun şekilde başa çıkılmış olur.)

Buna rağmen standart gösterimlerde bir t zaman koordinatı biçimindeki "pozitif frekans" kavramı genellikle, burada sunduğum belirli yöntemle belirtilmez fakat daha çok $f(\chi)$'e ilişkin *Fourier dönüşümü* denilen şey biçiminde ortaya konulur. Yanıt aslında benim sunduğum yanıtla aynıdır[5] fakat Fourier dönüşümleri kuantum mekaniği için her koşulda yaşamsal önemde olduğundan bu dönüşümün gerçekte ne olduğunu açıklamak önemli olacaktır.



Şekil 9.8 $t = \tan \chi/2$ grafiği.



Şekil 9.9 $t = \tan \frac{\chi}{2}$ 'nin geometrisi.

[5] *Bkz.*, örneğin Bailey vd., 1982.

9.4 Fourier dönüşümü

Temel olarak bir Fourier dönüşümü, periyodik fonksiyonumuz $f(\chi)$'nin l periyodu sonsuz olana kadar git gide daha büyük alındığında, bir Fourier serisi için sınırlayıcı durumdur. Bu sonsuz limitte $f(\chi)$ üzerinde hiçbir periyodiklik sınırlaması mevcut değildir: o yalnızca sıradan bir fonksiyondur.[6] Bu durum, dalga yayılımı üzerine çalışırken dikkate değer avantajlara ve "beklenmedik" sinyaller gönderme potansiyeline sahiptir. Bu nedenle sinyalin biçiminin periyodik olmasında ısrar etmek istemeyiz. Fourier dönüşümü bize bu tür "tek seferlik" sinyalleri, onları bir taraftan hâlâ periyodik "saf tonlar" biçiminde analiz ederken ele alma olanağı sunar. Aslında bunu $f(\chi)$ fonksiyonumuzun $l \to \infty$ periyoduna sahip olduğunu hesaba katarak başarır. l periyodu büyüdükçe, herhangi bir pozitif n tamsayısı için l/n periyoduna sahip saf ton harmonikleri, seçtiğimiz herhangi bir gerçel pozitif sayıya gittikçe daha yakın hale gelecektir. (Örneğin herhangi bir gerçel sayıya, rasyoneller kullanılarak gelişigüzel biçimde oldukça yakın yaklaşıklık tahmini yapılabilir.) Bunun bize söylediği herhangi bir frekanstaki herhangi saf tona artık bir Fourier bileşeni olarak izin verildiğidir. $f(\chi)$'in, Fourier bileşenlerinin ayrık bir toplamı olarak ifade edilişine sahip olmak yerine artık onun, şu halde $f(\chi)$'in frekansa göre alınan bir *integrali* (*bkz.* §6.6) biçiminde ifadesi anlamına gelen, tüm frekanslar üzerinden sürekli bir toplam biçimindeki ifadesine sahibiz.

Kısaca bunun nasıl çalıştığını görelim. İlk olarak l periyotlu bir $f(\chi)$ periyodik fonksiyonun Fourier ayrışmasına ilişkin yukarıda verilmiş "en derli toplu" ifademizi anımsayalım:

$$z = e^{i\omega\chi} \text{ olmak üzere, } F(z) = \Sigma\, \alpha_r z^r$$

(açısal frekans $\omega = 2\pi/l$'yle verilir). Periyodu başlangıçta 2π olarak alalım; böylece $\omega = 1$ olur. Şimdi periyodu daha büyük bir N tamsayı çarpanıyla artırmaya çalışacağız (buradan $l = 2\pi N$ olur), böylece frekans aynı çarpan oranında (diğer bir deyişle $\omega = N^{-1}$) azaltılmış olur. Daha önce temel saf ton olan salınımlı dalga artık bu yeni düşük frekansla ilgili olarak N'inci derece harmonik hale gelir. Daha önce n'inci derece harmonik olan bir saf ton şimdi (nN)'inci derece harmoniktir. N sonsuza yaklaşırken limit aldığımızda belirli bir salınımlı bileşeni ona ait "harmonik sayısı"yla (diğer bir deyişle n sayısıyla) tanımlayarak takip etmeye çalışmak uygunsuz hale

[6] Diğer taraftan χ pozitif ya da negatif sonsuza yönelirken $f(\chi)$ "akla uygun şekilde" davranmasına ilişkin bir gerekliliği yürürlüğe koymak olağandır. Bu bizim için burada özel bir ilgi konusu olmayacak ve benisediğim yaklaşımda normal gereklilikler hiçbir koşulda gereksiz biçimde kısıtlayıcı olmayacak.

gelir çünkü bu sayı sürekli değişir. Bu demek oluyor ki yukarıdaki toplamda bu salınımlı bileşeni r tamsayısıyla tanımlamak uygunsuzdur çünkü sabit bir r değeri belirli bir ton frekansını takip etmek yerine belirli bir harmoniği (n'inci derece harmonik için $r = \pm n$) tanımlar. Bu frekansı takip eden aslında r/N'dir ve bunu tanımlamak için yeni bir değişkene gereksinim duyarız. Fourier dönüşümlerinden kaynaklanan önemli kullanımın sonraki bölümlerde (özellikle *bkz.* §21.11) ortaya konacağını akılda tutarak, N sonsuza giderken alınan limitte konumu χ'yle hesaplanan bir kuantum mekaniksel parçacığın *momentum*unu[7] simgeleyen bu değişkene "p" diyeceğim. Bu limitte istenilirse χ yerine, χ'nin limitte gerçekten z'nin gerçel kısmı haline geleceğini aşağıdaki açıklamalarda göreceğimiz üzere, üzerinde anlaşılmış x kullanımına da dönülebilir.

Sonlu N için

$$p = \frac{r}{N}$$

yazıyorum. $N \to \infty$ iken limitte, p parametresi sürekli bir değişken haline gelir ve toplamımızdaki "α_r katsayıları", tamsayı değerli ayrık r parametresi yerine gerçel değerli sürekli p parametresine bağlı olacağından α_r katsayılarının r'ye bağımlılığını α_r'de olduğu gibi yalnızca bir sonek (örneğin g_p) kullanmak yerine fonksiyon gösteriminin standart biçimini, diyelim ki $g(p)$, kullanarak yazmak daha iyidir. $\Sigma\, \alpha_r z^r$ toplamımızdaki

$$\alpha_r \longmapsto g(p)$$

yer değişikliğini etkin biçimde gerçekleştireceğiz fakat N büyüdükçe p değerlerinin küçük bir aralığında yer alan gerçek terim sayısının daha büyük hale geleceğini (temelde N'yle orantılı olarak çünkü o aralıkta yer alan n/N kesirlerini dikkate alıyoruz) aklımızda tutmak zorundayız. Bu nedenle $g(p)$ niceliği gerçekten yoğunluğun bir ölçüsüdür ve $\sum$ toplamı limitte bir integral, $\int$, haline gelirken dp türevsel niceliği ona eşlik etmek zorundadır. Son olarak $\Sigma\, \alpha_r z^r$ toplamımızdaki z^r terimini göz önüne alın. $\omega = N^{-1}$ olmak üzere $z = e^{i\omega\chi}$ ifadesine ve bu durumda $z = e^{i\chi/N}$ eşitliğine sahibiz. Böylece $z^r = e^{ir\chi/N} = e^{i\chi p}$ olur; bunları bir araya getirerek $N \to \infty$ iken limitte $f(\chi)$ fonksiyonumuzu temsil etmek üzere

[7] Kuantum mekaniğinde ayrıca, p'nin ölçeklendirilmesini x'le bağıntılı olarak (*bkz.* §§21.2, 11) uygun biçimde saptamak üzere ortaya konan sabit bir $\hbar$ niceliği de mevcuttur fakat şimdilik basit olması için bunu $\hbar = 1$ olarak kabul ediyorum. Gerçekte $\hbar$ Planck sabitinin (diğer bir deyişle h Planck'ın orijinal "hareket kuantumu" olmak üzere $h/2\pi$) Dirac biçimidir. $\hbar = 1$ seçimi temel birimlerimizi uygun bir biçimde tanımlamak yoluyla her zaman yapılabilir. *Bkz.* §27.10.

$$\sum \alpha_r z^r \to \int_{-\infty}^{\infty} g(p) e^{i\chi p} dp$$

ifadesini elde ederiz. Aslında integrale $(2\pi)^{-1/2}$ gibi bir ölçekleme çarpanı dahil etmek olağandır, bu nedenle burada $g(p)$'yi $f(\chi)$ biçiminde ifade eden *ters* ilişkinin $f(\chi)$'i $g(p)$ biçiminde ifade edenle tam olarak aynı biçime sahip oluşuna ilişkin dikkat çekici simetri mevcuttur:

$$f(\chi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) e^{i\chi p} dp, g(p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi) e^{-i\chi p} d\chi.$$

$f(\chi)$ ve $g(p)$ fonksiyonları birbirlerinin *Fourier dönüşümleri* olarak adlandırılırlar.[9.6]

9.5 Fourier dönüşümünden frekans bölme

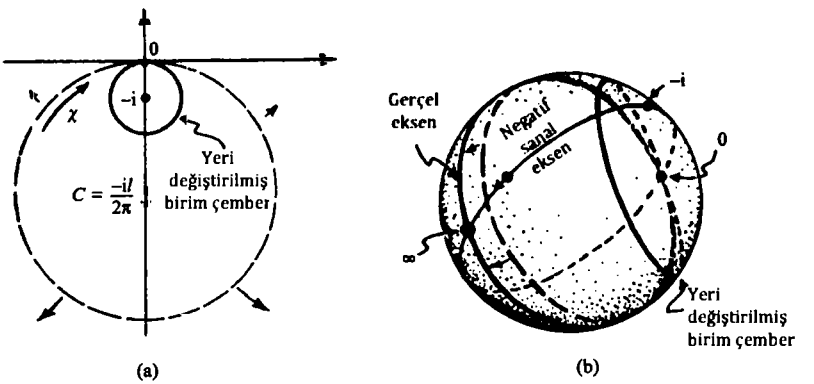
Tüm gerçel doğrusu üzerinde tanımlı (karmaşık) bir $f(\chi)$ fonksiyonu, kendisine ait $g(p)$ Fourier dönüşümü tüm $p \geq 0$ değerleri için sıfırsa *pozitif frekanslıdır* denir. Bu nedenle $p < 0$ olduğunda $f(\chi)$ yalnızca $e^{i\chi p}$ biçimindeki bileşenlerden oluşur. (Euler $p < 0$ için sıfır olmayan bir fonksiyonla $p > 0$ için basitçe sıfır olan bir fonksiyon arasında kaba bir "yapıştırma işi" olarak görünen bu tür bir $g(p)$ hakkında oldukça endişelenebilirdi; *bkz.* §6.1.) Yine de bu, $f(\chi)$'in mükemmel biçimde saygın "holomorfik" bir özelliğini sergiler görünür. Bu "pozitif frekans" durumunu ifade etmenin bir başka yolu, daha önce Fourier serilerinde yaptığımız gibi $f(\chi)$'in holomorfik genişletilebilirliği biçimindedir. Artık bu χ değişkenini gerçel eksen, ki Riemann küresi üzerindeki bu ("$\chi = \infty$" noktası da dahil) "gerçel eksen" artık *gerçel çember*dir (*bkz.* Şekil 8.9c), üzerindeki noktaları tanımlıyor gibi düşünürüz (böylece $\chi = x$'i bu eksen üzerinde alabiliriz). Bu çember küreyi, "dış"ta olanı karmaşık düzleme ait standart resimdeki alt yarı düzlem olmak üzere iki yarıküreye böler. $f(\chi)$'in pozitif frekanslı olmasının koşulu artık holomorfik olarak bu dış yarıküreye genişlemesidir.

Bununla birlikte "pozitif frekans"ın bu iki tanımını kıyasladığımızda biraz dikkat gerektiren bir konu mevcuttur. Bu, $z = \infty$ noktasına, $f(\chi)$ fonksiyonu orada genellikle bir tür tekilliğe sahip olacağı için nasıl davranacağımız sorusuyla bağlantı kurar. Gerçekte, kısa süre içinde (§9.7'de) açıklayacağım "hiperfonksiyonel" bakış açısını benimsememiz koşuluyla $z = \infty$'daki bu tekillik bize esasen hiçbir güçlük çıkarmaz. "$f(\infty)$"a göre uy-

[9.6] $g(p)$ için $f(\chi)$ biçimindeki ifadenin alıştırma [9.2]'deki kontür integral ifadesinin sınırlayıcı bir biçimi, $\alpha_n = (2\pi i)^{-1} \oint z^{-n-1} F(z)\, dz$, kullanılarak nasıl elde edildiğini gösterin.

gun bakış açısıyla birlikte pozitif frekansa ilişkin önceki paragrafta verdiğim iki tanımın birbirleriyle temel bir uyum içinde olduklarını görürüz.[8]

Bizi Fourier serisinden Fourier dönüşümüne ulaştıran, §9.4'teki limitimizde içerilmiş bir kısım geometriyi Riemann küresi biçiminde incelemek ilgili okur için yararlı olabilir. 2π periyoduna sahip bir $f(\chi)$ fonksiyonu için daha önce ele almış olduğumuz, χ'nin birim yarıçaplı bir çember etrafındaki yay uzunluğunun ölçüsü olduğu z düzlemi tanımına geri dönelim. χ yorumlamasını bir çember etrafındaki uzaklık olarak koruyarak, periyodu art arda gelen artan adımlarla 2π'den daha büyük değerlerle değiştirmek istediğimizi düşünün. Bunu git gide büyüyen bir çember dizisini ele alarak gerçekleştirebiliriz fakat limit alma işleminin geometrik bir mantık oluşturması için çemberlerin hepsinin $\chi = 0$ başlangıç noktasında birbirlerine değdiğini varsayacağız (*bkz.* Şekil 9.10a). Basitlik için bu noktayı tüm çemberler alt yarı düzlemde yer alacak şekilde $z = 0$ ($z = 1$ yerine) başlangıç noktası olarak seçelim. Bu, $l = 2\pi$ periyodu için merkezi orijin yerine $z = -i$'de olan başlangıç çemberimizi oluşturur. $l > 2\pi$ periyodu için çemberin merkezi karmaşık düzlemdeki $C = -il/2\pi$ noktasındadır ve $l \to \infty$ iken limitte gerçel eksenin kendisini, çemberin "merkezi" negatif



Şekil 9.10 $l \to \infty$ iken, l $f(\chi)$'in periyodu olmak üzere, pozitif frekans koşulu. (a) Merkezi $z = -i$'de olacak şekilde yeri değiştirilmiş birim çember üzerinde tanımlı f ile birlikte $l = 2\pi$'yle başlayın. Büyüyen l için çemberin yarıçapı l'dir ve merkezi $C = -il/2\pi$'dedir. Her durumda χ, *saat yönü*ndeki yay uzunluğunu ölçer. Pozitif frekans, f'nin çemberin içine ve $l \to \infty$ limitinde alt yarı düzleme holomorfik genişleyebilirliği olarak ifade edilir. (b) Riemann küresi üzerindeki aynı durum. Sonlu l için Fourier serisi $z = -il/2\pi$ noktası dolayında bir Laurent serisinden elde edilir fakat küre üzerinde bu nokta çemberin merkezi değildir; Fourier serisi Fourier dönüşümü haline gelmek üzere, $l \to \infty$ limitinde ∞ noktası biçimini (onun üzerinde yer alarak) alır.

[8] *Bkz.* Bailey vd., 1982.

sanal eksen boyunca sonsuza taşınmış olmak üzere, elde ederiz (böylece $\chi = x$). Her durumda χ'yi artık, orijinde $\chi = 0$ olmak üzere, çember etrafında *saat yönü*ndeki yay uzunluğunun ölçüsü (ya da limit durumunda gerçel eksen üzerindeki pozitif uzaklık) olarak kabul ederiz. Çemberlerimiz artık standart olmayan (diğer bir deyişle saat yönüne) bir yönelime sahip olduklarından, "dışları" onların *içleri*dir (*bkz.* §9.3, Şekil 9.6), böylece pozitif frekans koşulumuz bu iç anlamına gelir. χ ile z arasında artık

$$z = \frac{il}{2\pi}(e^{-2\pi i\chi/l} - 1)$$

ile ifade edilen bir bağıntıya sahibiz.[9 7] Sonlu l için $f(\chi)$'yi $C = -il/2\pi$ noktası dolayında bir Laurent serisine başvurarak bir Fourier serisi olarak ifade edebiliriz. Fourier dönüşümünü $l \to \infty$ limitini alarak elde ederiz. Sonlu l için pozitif frekans koşulunu $f(\chi)$'nin ilgili çemberin içine holomorfik genişleyebilirliği olarak elde ederiz; $l \to \infty$ limitinde bu koşul, yukarıda ifade edilmiş olan şeyle uyumlu olacak şekilde alt yarı düzleme genişleyebilirlik halini alır.

Laurent serisi $l \to \infty$ limitinde ne hale gelir? Bu limitte ne olduğunu anlamak için Riemann küresine göz atmaya gerek duyacağız. Her bir sonlu l değeri için C $(= -il/2\pi)$ noktası χ çemberinin merkezidir fakat Riemann küresi üzerinde bu C noktası çember merkezi benzeri hiçbir şey olmaya gerek duymaz. l büyüdükçe C, sanal ekseni temsil eden Riemann küresi üzerindeki çember boyunca dışarı hareket eder ve bu nokta C $(= il/2\pi)$ çemberin merkezine git gide daha az benzer görünür. Son olarak $l = \infty$ limitine ulaşıldığında C Riemann küresi üzerindeki $z = \infty$ noktası haline gelir. Bununla birlikte $C = \infty$ olduğunda, onun aslında çember merkezinde olması gerekirken çemberin *üzerinde* olduğunu görürüz! (Bu çember artık elbette gerçel eksendir.) Bu nedenle bu nokta dolaylarında üslü bir seri oluşturmakta, elbette bekleneceği üzere, özgün (ya da "tekil") bir şey mevcuttur çünkü artık bireysel terimlerin bir toplamı yerine sürekli bir integral elde ederiz.

9.6 Hangi tür fonksiyon uygundur?

Şimdi bu bölümün başında kullanımı uygun olan "fonksiyon" türüyle ilgili ortaya atılmış soruya dönelim. Şu konuyu dile getirebiliriz: ne tür fonksiyonları Fourier dönüşümleri olarak gösterebiliriz? Dikkati yalnızca analitik fonksiyonlarla (diğer bir deyişle C^ω) sınırlamak uygunsuz görünür çünkü yukarıda gördüğümüz üzere kesinlikle analitik olabilen, pozitif fre-

[9.7] Bu ifadeyi türetin.

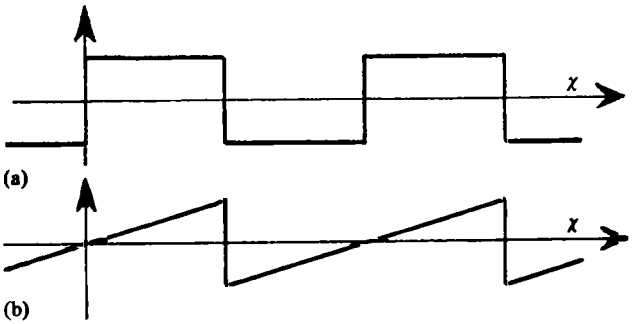
kanslı bir $f(\chi)$ fonsiyonuna ilişkin $g(p)$ Fourier dönüşümü, sıfır olmayan bir fonksiyonla sıfır fonksiyonunun ayırt edilir biçimde analitik olmayan bir "yapıştırma işi"dir. Bir fonksiyon ve ona ilişkin Fourier dönüşümü arasındaki ilişki simetriktir, o halde her biriyle ilgili bu tür farklı standartlar benimsemek anlamsız görünür. Daha başka bir nokta olarak $f(\chi)$'nin $\chi = \infty$ noktasındaki davranışının pozitif/negatif frekans bölme konusuyla bağlantılı olduğu fakat $f(\chi)$'nin ∞'da, aslında yalnızca çok özel koşullarda (bu, $\chi \to +\infty$ iken ve $\chi \to -\infty$ iken $f(\chi)$'nin davranışları arasında kesin bir eşleşme gerektirdiğinden) analitik (C^{ω}) olduğu yukarıda belirtildi. Tüm bunlara ek olarak, Fourier dönüşümlerini çalışmak üzere, daha önce değinilen, "beklenmedik" (analitik olmayan) mesajlar iletebilen sinyallerle uğraşmamıza olanak sağlayan ilk *fiziki* yönlendiricimiz söz konusudur. Bu nedenle bölümün başında yüz yüze geldiğimiz soruya dönmek zorundayız: ne tür bir fonksiyonu "dürüst" bir fonksiyon olarak kabul edelim?

Bir taraftan, Euler ve çağdaşlarının belki de, bir holomorfik (ya da analitik) fonksiyonu zihinlerinde saygı duyulan bir "fonksiyon" olarak bulundurdukları türde bir şey olacak biçimde kabul edebileceklerini, yine de diğer taraftan bu tür fonksiyonların pek çok tür matematiksel ve fiziki problem için, dalga yayılımıyla ilgili olanları da dahil olmak üzere, anlamsız biçimde sınırlayıcı görünmelerini anımsarız; bu durumda daha genel bir kavram gereklidir. Bu bakış açılarından biri diğerinden daha mı "doğru"dur? Büyük olasılıkla ilk bakış açısının destekçilerinin "modası geçmiş" olduğu ve modern fikirlerin baskın biçimde ikincisine eğilimli olduğuna ilişkin kuvvetli bir egemen anlayış mevcuttur; böylece holomorfik ya da analitik fonksiyonlar genel bir "fonksiyon" kavramının yalnızca çok özel biçimidir. Bununla birlikte zorunlu biçimde kabul edilmesi gereken "doğru" tavır bu mudur? Kendimizi bir 18. yüzyıl zihin çerçevesi içine koymayı deneyelim.

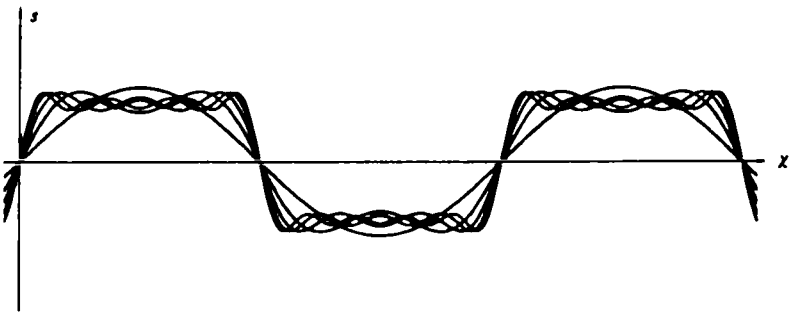
19. yüzyıl başlarındaki Joseph Fourier'e bakalım. Fourier, Şekil 9.11'de çizilmiş kare dalga ya da testere ağız gibi belirli periyodik fonksiyonların mükemmel derecede makul görünümlü Fourier gösterimlerine sahip olduğunu gösterdiğinde "analitik" ("Eulerci") düşünce okuluna mensup kişiler kötü bir şok geçirmişti. Fourier, zamanında matematik kurumunun çok sayıda itirazıyla karşılaştı. Çoğu onun çıkarımlarını kabul etmekte isteksizdi. Örneğin, nasıl olurdu da kare fonksiyonuna ait bir "eşitlik" olabilirdi? Buna rağmen Fourier'in gösterdiği üzere

$$S(\chi) = \sin\chi + \frac{1}{3}\sin 3\chi + \frac{1}{5}\sin 5\chi + \frac{1}{7}\sin 7\chi + \cdots$$

serisinin toplamı gerçekten, yarı periyot π'de sabit değerler $\frac{1}{4}\pi$ ve $-\frac{1}{4}\pi$ arasında salınım yaptığı kabul edilen bir kare dalga verir (*bkz.* Şekil 9.12).



Şekil 9.11 Süreksiz periyodik fonksiyonlar (mükemmel derecede makul görünümlü Fourier gösterimleriyle birlikte): (a) Kare dalga (b) Testere ağız.



Şekil 9.12 $s(\chi) = \sin\chi + \frac{1}{3}\sin 3\chi + \frac{1}{5}\sin 5\chi + \frac{1}{7}\sin 7\chi + \frac{1}{9}\sin 9\chi + \cdots$ Fourier serisinin (Şekil 9.11a'dakine benzer) bir kare dalgaya yakınsayan kısmi toplamları.

Bununla ilgili yukarıda verilmiş Laurent serisi tanımını ele alalım. $z = e^{i\chi}$ olmak üzere oldukça şık görünümlü

$$2is(\chi) = \cdots - \frac{1}{5}z^{-5} - \frac{1}{3}z^{-3} - z^{-1} + z + \frac{1}{3}z^{3} + \frac{1}{5}z^{5} + \cdots$$

ifadesine sahibiz.[9.8] Aslında bu yakınsaklık halkasının hiçbir gerçek açık alan kalmadan birim çembere büzüşmesine bir örnektir. Bununla birlikte Laurent serisini biri z düzeninde sıradan bir üslü seri veren pozitif üslü ve diğeri z^{-1} düzeninde bir üslü seri veren negatif üslü iki yarıya bölersek şeylere hâlâ holomorfik fonksiyonlar biçiminde bir anlam katabiliriz. Aslında bunlar

$$S^{-} = z + \frac{1}{3}z^{3} + \frac{1}{5}z^{5} + \cdots = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

[9.8] Bunu gösterin.

ve

$$S^+ = \cdots - \frac{1}{5}z^{-5} - \frac{1}{3}z^{-3} - z^{-1} = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)$$

şeklindeki iyi bilinen serilerdir ve $2is(\chi) = S^- + S^+$ ifadesini vermek üzere açık olarak toplanabilirler.[9 9] Bu ifadelerde yapılan ufak bir düzenleme bizi, $s(\chi) = \pm\frac{1}{4}\pi$ olduğunu[9 10] söyleyerek S^- ve S^+'nın birbirinden yalnızca $\pm\frac{1}{2}i\pi$ kadar farklı olduğu sonucuna götürür. Buna rağmen aslında neden bu alternatif değerler arasında salınan bir kare fonksiyonu elde ettiğimizi görmek için biraz daha yakından bakmaya gerek duyarız.

§8.3'te, z düzlemindeki birim çemberin iç bölgesini t düzleminin üst yarısına götürmek üzere (Şekil 8.10'da gösterildiği gibi) ifade edilen $t = (z-1)/(iz+1)$ dönüşümünü uygularsak ne olduğunu değerlendirmek biraz daha kolaylaşır. t biçimli ifadeye göre artık S^- bu üst yarı düzleme ve S^+ alt yarı düzleme karşılık gelir ve (logaritmalarda olası $2\pi i$ bulanıklıklarıyla birlikte)

$$S^- = -\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\log i, \quad S^+ = \frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\log i$$

ifadeleriyle karşılaşırız. Logaritmaları, sırasıyla $t = i$ ve $t = -i$ başlangıç noktalarından hareketle sürekli olarak izleyerek, negatif gerçel t ekseni üzerinde $S^- + S^+ = -\frac{1}{2}i\pi$ iken[9 11] pozitif gerçel t ekseni üzerinde $S^- + S^+ = +\frac{1}{2}i\pi$ olduğunu görürüz. Buradan hareketle, z düzlemindeki birim çemberin alt yarısı üzerinde $s(\chi) = -\frac{1}{4}\pi$ iken üst yarısı üzerinde $s(\chi) = +\frac{1}{4}\pi$ olduğu sonucunu çıkarırız. Bu durum, Fourier serisinin toplamının aslında tıpkı Fourier'in ileri sürdüğü gibi kare dalgaya eşit olduğunu gösterir.

Bu örnekten çıkarılacak ders nedir? Sürekli bile olmayan, yalnızca türevi alınabilir haldeki (bu durumda yalnızca bir C^{-1}–fonksiyonu olan) özel (periyodik) bir fonksiyonun mükemmel şekilde anlamlı görünen bir Fourier serisi biçiminde gösterilebileceğini gördük. Eşdeğer biçimde, fonksiyonu birim çember üzerinde tanımlı olarak düşündüğümüzde o, makul görünümlü bir Laurent serisi olarak, her ne kadar yakınsaklık halkasının kendisi için birim çembere büzüştüğü Laurent serilerinden biri de olsa, ifade edilebilir. Bu Laurent serisinin pozitif ve negatif yarılarının her biri top-

[9.9] Bunu, §7.4'ün sonlarına doğru verilmiş olan, $\log z$ için $z = 1$ dolaylarındaki bir üslü seri genişlemesinden yararlanarak yapın.

[9.10] Bunu ($|s(\chi)| < \frac{3\pi}{2}$ varsayımıyla) gösterin.

[9.11] Bunu gösterin.

lamı Riemann küresinin yarısı üzerindeki mükemmel derecede iyi bir holomorfik fonksiyona eşittir. Biri birim çemberin bir tarafında diğeri öbür tarafında tanımlanır. Bu fonksiyonların "toplam"larını birim çemberin kendisi üzerinde istenilen kare dalgayı verir şekilde düşünebiliriz. Bu durum, birim çember üzerinde $z = \pm 1$ noktalarında, toplamın, bu toplamdan kaynaklanan kare dalgayı vererek bir taraftan diğerine "sıçrayabileceği" biçimdeki dallanma tekilliklerinin varlığından kaynaklıdır. Bu dallanma tekillikleri ayrıca iki taraftaki üslü serilerin birim çemberin ötesine yakınsamasını önler.

9.7 Hiperfonksiyonlar

Bu örnek yalnızca çok özel bir durumdur fakat genelde ne yapmamız gerektiğini gösterir. Birim çember üzerinde (Riemann küresi üzerindeki) tanımlanabilen ve tıpkı ele almakta olduğumuz örnekteki gibi, çemberin bir tarafında yer alan açık bölge üzerindeki bir F^+ holomorfik fonksiyonu ile diğer tarafındaki açık bölge üzerinde yer alan başka bir F^- holomorfik fonksiyonunun bir "toplam"ı olarak gösterilebilen en genel biçimli fonksiyonun ne olduğu sorusunu soralım. Bu sorunun yanıtının bizi doğruca, "hiperfonksiyon" olarak adlandırılan egzotik fakat önemli bir kavrama yönelttiğini göreceğiz.

Aslında f'yi F^- ile $-F^+$ arasındaki "fark" olarak düşünmenin daha aydınlatıcı olduğu ortaya çıkar. Buna ilişkin bir sebep, en genel durumda, gerçek birim çembere ne F^-'nin ne de F^+'nın analitik bir genişlemesinin olabileceği ve böylece çemberin kendi üzerinde bu tür bir "toplam"ın ne anlama gelebileceğinin açık olmayışıdır. Bununla birlikte, F^- ile $-F^+$ arasındaki *farkı*, tanım bölgeleri birim çember üzerinde bir araya geldiğinde, bu iki fonksiyon arasındaki "sıçrama"yı gösterir gibi düşünebiliriz.

Karmaşık düzlemdeki bir eğrinin bir tarafı üzerindeki holomorfik bir fonksiyonla diğer tarafı üzerindeki başka bir holomorfik fonksiyon arasındaki bu "sıçrama" fikri bize aslında, holomorfik fonksiyonların hiçbirinin eğrinin kendisi üzerinde holomorfik olarak genişlemesine gerek olmayacak şekilde, eğri üzerinde tanımlanan bir "fonksiyon"a ilişkin yeni bir görüş sunar. Gerçekte bu, (analitik) bir eğri üzerindeki bir *hiperfonksiyon*un tanımıdır. Bu, Japon matematikçi Mikio Sato tarafından 1958'de ortaya konmuş harika bir kavramdır.[9] Yine de birazdan göreceğimiz üzere Sato'nun esas tanımı bundan dikkate değer biçimde daha zariftir.[10]

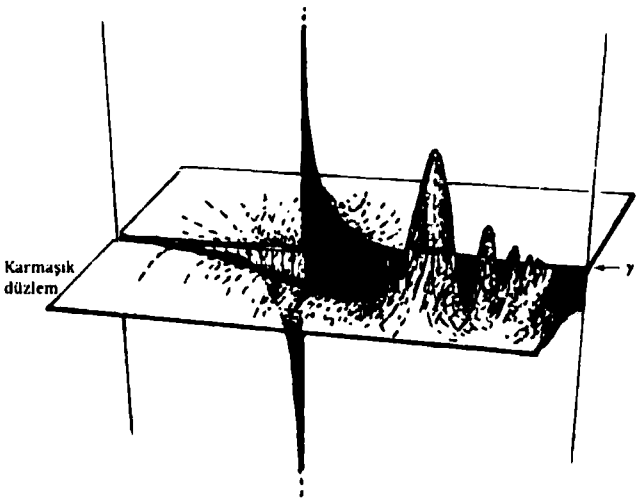
---

[9] *Bkz.* Sato, 1958, 1959, 1960.

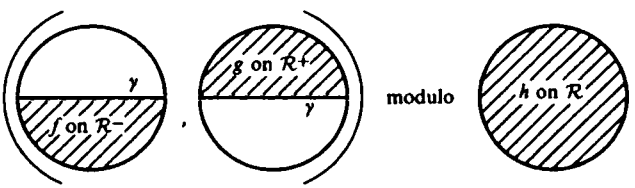
[10] Ayrıca *bkz.* Bremermann, 1965, her ne kadar "hiperfonksiyon" terimi bu çalışmada açıkça kullanılmamış olsa da.

Bir hiperfonksiyonun tanımı için birim çemberin bütünü gibi kapalı bir eğri düşünmemiz gerekmez fakat eğrinin bir kısmını dikkate alabiliriz. Aslında hiperfonksiyonları gerçel doğrusunun bir γ parçası üzerinde tanımlanmış olarak ele almak daha olağandır. γ'yı, a ve b, $a < b$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, gerçel doğrusunun a ile b arasında kalan parçası olarak kabul edeceğiz. Öylese γ üzerinde tanımlı bir hiperfonksiyon, açık bir (üst sınırı γ olan) $\mathcal{R}^-$ kümesi üzerindeki holomorfik bir f fonksiyonundan başlayıp açık bir (alt sınırı γ olan) $\mathcal{R}^+$ kümesi üzerindeki holomorfik bir g fonksiyonuna γ üzerinden gerçekleşen sıçramadır; *bkz.* Şekil 9.13.

Bir "sıçrama"ya basitçe bu şekilde değinmek bu tür bir şeyle ne yapılması gerektiğine ilişkin pek fazla fikir vermez (ve bu henüz matematiksel olarak yeterince tam değildir). Sato'nun bu konulara ilişkin zarif çözümü



Şekil 9.13 Gerçel eksenin bir γ parçası üzerindeki bir hiperfonksiyon, γ'nın bir tarafı üzerindeki bir holomorfik fonksiyondan diğer tarafındaki birine gerçekleşen "sıçrama"yı ifade eder.



Şekil 9.14 Gerçel eksenin bir γ parçası üzerindeki bir hiperfonksiyon, f açık bir $\mathcal{R}^-$ bölgesi üzerinde tanımlı ve γ'dan aşağı doğru genişlemek üzere ve g açık bir $\mathcal{R}^+$ bölgesi üzerinde tanımlı ve γ'dan yukarı doğru genişlemek üzere, holomorfik bir (f, g) fonksiyon çiftiyle sağlanır. γ üzerindeki gerçek h hiperfonksiyonu, h, $\mathcal{R}^-$, γ ve $\mathcal{R}^+$'dan oluşan $\mathcal{R}$ birliği üzerinde holomorfik olmak üzere, (f, g) modülo $(f + h, g + h)$ niceliklerdir.

gerçekten olağanüstü basit ve biçimsel olarak görece daha cebirsel bir yolla ilerlemektir. Bu sıçramayı yalnızca bu holomorfik fonksiyonların (f, g) *çifti* olarak sunarız. Böylesi bir (f, g) çiftinin başka bir (f_0, g_0) çiftine *denk* olduğunu, sonraki öncekinden f ve g'nin her ikisine de, h, γ eğri parçası üzerinde birbirine bağlanmış $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$'dan oluşan birleşik (açık) $\mathcal{R}$ bölgesinde tanımlı olmak üzere, aynı holomorfik h fonksiyonu eklenerek elde edilirse söyleriz; *bkz.* Şekil 9.14. Holomorfik fonksiyonlar f ve g sırasıyla $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$'da tanımlıysa ve h, $\mathcal{R}$ birleşik bölgesi üzerinde gelişigüzel holomorfik bir fonksiyonsa

$$(f, g), (f + h, g + h)\text{'ye denktir}$$

diyebiliriz. Yukarıda gösterilen ifadelerin herhangi birisi aynı hiperfonksiyonu temsil etmek üzere kullanılabilir. Hiperfonksiyonun kendisi matematiksel olarak bu tür çiftlerin *eşdeğerlik sınıfı* şeklinde adlandırılır ve $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı holomorfik h fonksiyonlarının "indirgenmiş modülo"sudur.[11] Okuyucu, önsözde kesir tanımıyla bağlantılı olarak değinilen "eşdeğerlik sınıfı" kavramını anımsayacaktır. Bu aynı genel fikirdir ve daha az karışık değildir. Buradaki temel nokta, h eklemenin f ile g arasındaki "sıçrama"ya etkide bulunmamasıdır fakat h, f ile g'yi bu sıçramayla ilgisi olmayan yollarla değiştirebilir. (Örneğin, h bu fonksiyonların γ'dan açık $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$ bölgelerine devam etme biçimlerini değiştirebilir.) Böylece sıçramanın kendisi bu eşdeğerlik sınıfı gibi açık olarak gösterilir

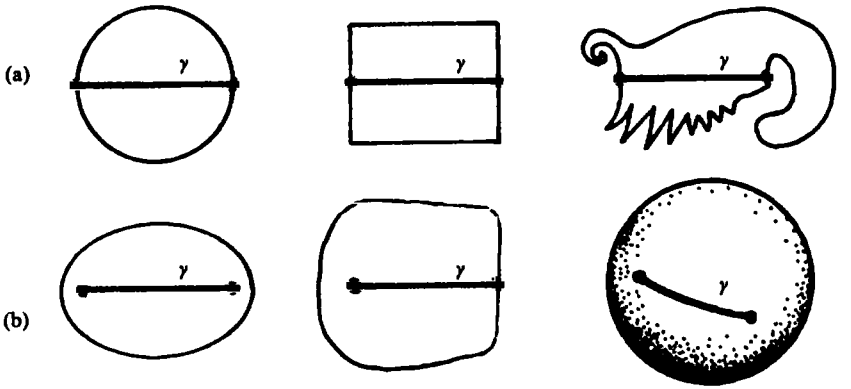
Okuyucu bu ustaca tanımın önemli oranda, yalnızca üzerinde bağlı bulundukları ortak sınır çizgileri γ'yla sınırlanan açık $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$ bölgeleri seçimimize bağlı görünmesinden gerçek anlamda rahatsız olmuş olabilir. Bununla birlikte, dikkat çekici olan, bir hiperfonksiyonun tanımı bu seçime bağlı *değil*dir. *Keserek çıkarma teoremi* olarak bilinen şaşırtıcı bir teoreme göre bu hiperfonksiyon kavramı belirli $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$ seçimlerinden oldukça bağımsızdır; Şekil 9.15'in üstteki üç örneğine bakın.

Aslında keserek çıkarma teoremi bize bundan da fazlasını verir. Açık bölgemiz $\mathcal{R}$'nin γ çıkarılarak ikiye bölünmesine (diğer bir deyişle $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$'ya) gerek duymayız. Tüm gereksinimimiz karmaşık düzlemdeki açık $\mathcal{R}$ bölgesinin açık γ parçasını[12] içerme zorunluluğudur. $\mathcal{R} - \gamma$ (diğer bir deyişle $\mathcal{R}$'den γ çıkarıldığında ondan geriye kalan şey)[13] tıpkı bu noktaya kadar göz önüne aldığımız gibi iki ayrı parçadan oluşabilir fakat daha genel olarak γ'nın $\mathcal{R}$'den çıkarılması bizi Şekil 9.15'in alttaki üç örneğinde gös-

[11] "Modülo" [ya da "kapasite"] kavramının başka bir yönü §16.1'de tartışılacak (*bkz.* 3.17).

[12] Burada "açık parça" basit şekilde, gerçek bitim noktaları a ve b'nin γ'da içerilmediği gerçeğine atıfta bulunur. Öyle ki γ'yı "içermek" $\mathcal{R}$ içinde a ve b'yi içermeyi ifade etmez.

[13] $\mathcal{R}$ ve γ kümeleri arasındaki bu "fark" ayrıca genellikle $\mathcal{R}\backslash\gamma$ şeklinde yazılır.



Şekil 9.15 Keserek çıkarma teoremi bize, bir hiperfonksiyon kavramının $\mathcal{R}$ verili γ eğrisini içerdiği sürece, açık $\mathcal{R}$ bölgesi seçiminden bağımsız olduğunu söyler. (a) $\mathcal{R} - \bar{\gamma}$ bölgesi iki ayrı parçadan oluşabilir (böylece Şekil 9.14'teki gibi iki ayrık holomorfik f ve g fonksiyonu elde ederiz) ya da (b) $\mathcal{R} - \bar{\gamma}$ bölgesi, f ve g'nin basit olarak aynı holomorfik fonksiyonun iki parçası olduğu birleşik tek bir parça olabilir.

terildiği gibi tek bir bağlı bölgeyle baş başa bırakabilir. Bu durumlarda γ'ya ait içte kalan herhangi bir a ya da b bitim noktasını da çıkarmalıyız, böylece $\mathcal{R} - \bar{\gamma}$ olarak adlandırığım açık bir kümeyle karşılaşırız. Bu daha genel durumda hiperfonksiyonlarımız "$\mathcal{R}$ üzerinde holomorfik fonksiyonlar, $\mathcal{R} - \bar{\gamma}$ üzerinde indirgenmiş modülo holomorfik fonksiyonlar" olarak tanımlanır. $\mathcal{R}$'nin bu oldukça serbest seçiminin kendisi aracılığıyla tanımlanan "hiperfonksiyonlar" sınıfında hiçbir fark yaratmaması epey dikkat çekicidir.[9.12] a ve b'nin her ikisinin $\mathcal{R}$ içinde yer alma durumu hiperfonksiyon integrallerinde yararlıdır, bu nedenle $\mathcal{R} - \bar{\gamma}$'da kapalı bir kontür kullanılabilir.

Tüm bunlar ayrıca Riemann küresi üzerindeki bir çembere ilişkin önceki durumumuzda da geçerlidir. Burada, $\mathcal{R}$'yi tüm Riemann küresi olarak kabul etmenin bazı yararları mevcuttur çünkü "modunu almak" zorunda olduğumuz fonksiyonlar tüm Riemann küresi üzerinde evrensel olan holomorfik fonksiyonlardır ve bize bu fonksiyonların yalnızca sabitler olduğunu söyleyen bir teorem mevcuttur. (Aslında bunlar §9.2'de haklarında kaygılanmamayı seçtiğimiz α_0 "sabitleri"dir.) Bu nedenle, modülo sabitleri, Riemann küresi üzerindeki bir çember üzerinde tanımlı bir hiperfonksiyon basitçe çemberin bir tarafında kalan tüm bölge üzerindeki holomorfik bir fonksiyonla ve diğer tarafı üzerindeki başka bir fonksiyonla belirti-

[9.12] Neden "$\mathcal{R}$ üzerindeki holomorfik fonksiyonlar, $\mathcal{R} - \bar{\gamma}$ üzerindeki indirgenmiş modülo holomorfik fonksiyonlar" daha önce sahip olduğumuz, $\mathcal{R} - \gamma$'mn $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$'ya bölündüğü durumdaki bir hiperfonksiyonun tanımı haline gelir?

lir. Bu durum, çember üzerindeki rasgele bir hiperfonksiyonun, kendi pozitif ve negatif frekanslı parçalarına eşsiz biçimde (modülo sabitleri) bölünmesi sonucunu verir.

Hiperfonksiyonların bazı temel özelliklerini değerlendirerek bitirelim. Holomorfik olarak sırasıyla $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$ üzerinde tanımlı, f ve g çiftiyle belirtilen hiperfonksiyonu göstermek üzere $[\![f, g]\!]$ notasyonunu kullanacağım (γ'nın $\mathcal{R}$'yi $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$'ya böldüğü durumu tersine çeviriyorum). Bu nedenle aynı hiperfonksiyonun farklı iki gösterimine, $[\![f, g]\!]$ ve $[\![f_0, g_0]\!]$, sahipsek, diğer bir deyişle $[\![f, g]\!] = [\![f_0, g_0]\!]$ ise bu durumda $f - f_0$ ve $g - g_0$, $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı fakat sırasıyla $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$'yla sınırlanmış *aynı* h holomorfik fonksiyonudur. Öyleyse iki hiperfonksiyonun *toplamını*, bir hiperfonksiyonun *türevini* ve bir hiperfonksiyonun γ üzerinde tanımlı bir q analitik fonksiyonuyla *çarpımını* ifade etmek oldukça basittir:

$$[\![f, g]\!] + [\![f_1, g_1]\!] = [\![f + f_1, g + g_1]\!],$$

$$\frac{\mathrm{d}[\![f, g]\!]}{\mathrm{d}z} = \left[\!\!\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\right]\!\!\right],$$

$$q[\![f, g]\!] = [\![qf, qg]\!].$$

Son ifadede analitik q fonksiyonu holomorfik olarak γ'nın bir komşuluğuna[14] genişletilmiştir.[9 13] q'nun kendisini $q = [\![q, 0]\!] = [\![0, -q]\!]$ ifadeleriyle bir hiperfonksiyon olarak gösterebiliriz fakat iki hiperfonksiyon arasında tanımlı genel bir çarpım mevcut değildir. Bir çarpım eksikliği genellenmiş fonksiyonlara uygulanan hiperfonksiyon yaklaşımının hatası değildir.[15] Örneğin Dirac delta fonksiyonunun (§6.6'da değinilen; ayrıca aşağıya da bakın) karesinin alınamaması kuantum alan kuramcılarına pek çok sorun çıkarır.

$\gamma = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{R}^-$ ve $\mathcal{R}^+$ üst ve alt açık karmaşık yarı düzlemler olduğu durumda hiperfonksiyonel gösterimlerin bazı basit örnekleri, $\log 1 = 0$ olacak şekilde logaritma dallanması aldığımız, Heaviside basamak fonksiyonu $\theta(x)$ ve Dirac (Heaviside) delta fonksiyonu $\delta(x)$ $(= \mathrm{d}\theta(x)/\mathrm{d}x)$'tir (*bkz.* §§6.1,6):

---

[14] "Komşuluğu"nun teknik tanımı "açık küme içeren"dir.

[9.13] Burada ufak bir ayrıntı mevcuttur. Açığa çıkarın. *İpucu*: Açıklamanın tanım kümesi üzerine dikkatlice düşünün.

[15] "Genellenmiş fonksiyon" fikrine daha standart yaklaşım için, *bkz.* Schwartz, 1966; Friedlander, 1982; Gel'fand ve Shilov, 1964; Trèves (1967); "doğrusal olmayan" bağlamlarda yararlı, ve "çarpım varlığı problemini bir benzersiz olmama problemi"ne çeviren alternatif bir öneri için, *bkz.* Colombeau, 1983, 1985 ve Grosser vd., 2001.

$$\theta(x) = \left[\!\!\left[\frac{1}{2\pi i}\log z, \frac{1}{2\pi i}\log z - 1\right]\!\!\right],$$

$$\delta(x) = \left[\!\!\left[\frac{1}{2\pi i z}, \frac{1}{2\pi i z}\right]\!\!\right].$$

$[\![f, g]\!]$ hiperfonksiyonunun tüm gerçel doğrusu üzerindeki integrali, her ikisi de soldan sağa olmak üzere, f'nin gerçel doğrusunun hemen altındaki bir kontür boyunca integralinden g'nin gerçel doğrusunun hemen üstündeki bir kontür boyunca integralinin (bunların yakınsadığını varsayarak) çıkarılması biçiminde ifade edilebilir.[9.14] Hiperfonksiyonun, f ve g aynı fonksiyonun analitik sürdürmeleri olduğunda bile önemsiz olamayacağına dikkat edin.

Hiperfonksiyonlar ne kadar geneldir? Onlar kesinlikle tüm analitik fonksiyonları içerirler. Ayrıca onlar $\theta(x)$ ve (yukarıdaki tartışmalarımız gösterdiği üzere) kare dalga benzeri süreksiz fonksiyonları ya da bu tür şeyleri birbirine ekleyerek elde edilen diğer C^{-1}–fonksiyonlarını da içerir. Aslında tüm C^{-1}–fonksiyonları hiperfonksiyonlara örnektir. Dahası bir hiperfonksiyonun türevini başka bir hiperfonksiyon elde etmek üzere alabildiğimizden ve herhangi bir C^{-2}–fonksiyonu bir C^{-1}–fonksiyonunun türevi olarak elde edilebildiğinden, bunu tüm C^{-2}–fonksiyonlarının da hiperfonksiyon olmaları sonucu izler. Bu durumun Dirac delta fonksiyonunu da içerdiğini görmüştük. Yeniden ve yeniden türev alabiliriz. Aslında herhangi bir n tamsayısı için herhangi bir C^{-n}–fonksiyonu bir hiperfonksiyondur. *Dağılımlar* olarak adlandırılan $C^{-\infty}$–fonksiyonlarına (*bkz.* §6.6) ne demeli? Evet, bunların da hepsi hiperfonksiyondur.

Bir dağılımın normal tanımı, C^{∞}–pürüzsüz fonksiyonlarının *ikili* uzayı olarak adlandırılan şeyin bir elemanı olarak verilir. "İkili uzay" kavramı §12.3'te (ve §13.6'da) tartışılacak. Aslında C^{n}–fonksiyonlarının uzayının ikiliği herhangi bir n tamsayısı için C^{-2-n}–fonksiyonlarının uzayıdır ve bu ayrıca, $-2-\infty = -\infty$ ve $-2+\infty = \infty$ yazarsak $n = \infty$ için de geçerlidir. Ya C^{ω}–fonksiyonlarının eşleniği $(C^{-\omega})$? Gerçekte "eşleniğin" uygun tanımıyla tüm bu C^{ω}–fonksiyonları da kesin olarak hiperfonksiyondur!

Çemberi tamamladık. Bir "fonksiyon" kavramını, açık biçimde oldukça sınırlayıcı bir "analitik" ya da, Euler'i mutlu yapabilecek fonksiyon tipi olan "holomorfik" fonksiyon kavramından uzak kalarak, yapabildiğimiz kadarıyla genelleme çalışmasında son derece genel ve esnek bir *hiperfonksiyon* kavramına ulaştık. Buna rağmen hiperfonksiyonlar, temelde

[9.14] $q(x)$ analitik olduğu durumda delta fonksiyonuna ilişkin $\int q(x)\delta(x)dx = q(0)$ olan standart özelliği sınayın.

çok basit bir yolla, isteksizce vazgeçirildiğimizi düşündüğümüz bu oldukça benzer "Eulerci" holomorfik fonksiyonlar biçiminde kendilerinde tanımlıdır. Bana göre bu karmaşık sayıların büyülü başarılarının en üstünlerinden biridir.[16] Keşke Euler bu harikulade gerçeğin keyfine varmak üzere hayatta olsaydı!

[16] Ayrıca hiperfonksiyonlar ve holomorfik deste kohomolojisi arasında §33.9'da tartışılacak önemli iç bağıntılar da mevcuttur. Bu tür fikirler, çok boyutlu yüzeyler üzerindeki hiperfonksiyonlar kuramında önemli roller oynar; *bkz.* Sato, 1959, 1960 ve Harvey, 1966.

10

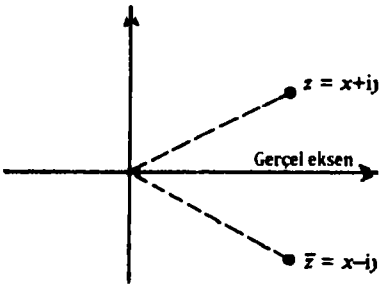
YÜZEYLER

10.1 Karmaşık boyutlar ve gerçel boyutlar

Matematiğin son iki yüzyıldaki en etkileyici başarılarından biri, değişik boyutlardaki düz olmayan uzayları ele alabilen dikkat çekici çeşitli tekniklerin gelişimidir. Bu durum, okuyucuya bu fikirlere ilişkin bir şeyler aktarma amacım ve modern fiziğin yaşamsal biçimde onlara bağlı olduğunu aktarmam için önemli olacaktır.

Bu noktaya kadar yalnızca tek boyutlu uzayları değerlendirdik. Okuyucunun bu uyarı sebebiyle kafası karışabilir çünkü karmaşık düzlem, Riemann küresi ve diğer çeşitli Riemann yüzeyleri önceki bölümlerin pek çoğunda kuvvetli biçimde vurgulandı. Bununla birlikte bu yüzeyler holomorfik fonksiyonlar bağlamında gerçekten yalnızca tek boyutlu olarak, bu da aslında §8.2'de belirtildiği üzere *karmaşık* bir boyut olarak düşünülmelidir. Bu tür bir uzayın noktaları birbirinden (yerel olarak) tek bir parametreyle, her ne kadar bu parametre karmaşık bir sayı da olsa, ayırt edilir. Bu nedenle bu "yüzeyler" gerçekten de *eğriler* olarak, diğer bir deyişle *karmaşık* eğriler olarak düşünülmelidir. Elbette, $z = x + iy$ olmak üzere, karmaşık bir z sayısı kendi gerçel ve sanal kısımlarına (x, y) ayrılabilir ve x ve y iki bağımsız gerçel parametre olarak düşünülebilir. Buna rağmen karmaşık bir sayıyı bu şekilde bölme süreci holomorfik işlemler dünyasına ait bir şey değildir. Karmaşık uzayları ele alırken şu ana kadar yaptığımız gibi yalnızca holomorfik yapılarla ilgilendiğimiz sürece tek bir karmaşık parametreyi yalnızca tek bir boyut sağlar biçimde değerlendirmeliyiz. Bu en azından benimsenmesini önerdiğim zihinsel tutumdur.

Diğer taraftan karşıt bir konum, holomorfik işlemlerin, daha genel işlemlerin yalnızca belirli örneklerini oluşturmasına ilişkin, istenirse x ve y'nin bu işlemler aracılığıyla ayrı bağımsız parametreler olarak ele alınmak üzere birbirinden ayrılabileceğini savunan konum benimsenebilir. Bunu gerçekleştirmenin uygun yolu, holomorfik *olmayan* bir işlem olan *karmaşık eşleme* kavramı üzerinden gidilen yoldur. $z = x + iy$ karmaşık sayısının karmaşık eşleniği, x ve y gerçel sayılar olmak üzere,



Şekil 10.1 $z = x + iy$*'nin karmaşık eşleniği (x, y gerçel) z düzleminin gerçel eksende bir yansıması olarak elde edilen* $\bar{z} = x + iy$*'dir.*

$$\bar{z} = x + iy$$

ifadesiyle verilen $\bar{z}$ karmaşık sayısıdır. Karmaşık z düzleminde karmaşık bir sayının karmaşık eşleniğini oluşturma işlemi düzlemin gerçel doğrusunda bir *yansıma*sına karşılık gelir (*bkz.* Şekil 10.1). §8.2'deki tartışmadan, holomorfik işlemlerin karmaşık düzlemin yönelimini her zaman koruduğunu anımsayın. Karmaşık düzlemin (bir parçasının), yönelimi (örneğin karmaşık düzlemi kendisi üzerine döndürerek) tersine çeviren konformal bir dönüşümünü ele almak istersek, bu durumda karmaşık eşleme işlemini de dahil etmemiz gerekir. Bununla birlikte diğer standart işlemlerle (toplama, çarpma, limit alma) birlikte içerildiğinde karmaşık eşleme ayrıca bize, dönüşümlerimizi, artık hiç de konformal olmaları gerekmeyecek biçimde genelleme olanağı sunar. Aslında karmaşık düzlemin herhangi bir bölümünün, (diyelim ki sürekli bir dönüşümle) diğer bir bölüme dönüşmesi karmaşık eşleme işlemini diğer işlemlerle birlikte gündeme getirerek gerçekleştirilebilir.

Bu yorumu biraz açayım. Holomorfik fonksiyonların, limit alma yöntemiyle birlikte, karmaşık sayılara uygulandığı gibi toplama ve çarpma işlemlerinden inşa edilen şeyler olduğunu düşünebiliriz (çünkü bu işlemler art arda gelen kısmi toplamların bir limiti olarak sonsuz bir toplam olan üslü serilerin inşası için yeterlidir).[10.1] Bunun yanısıra karmaşık eşleme işlemini de dahil edersek, böylece x ve y'ye ait genel fonksiyonları meydana getirebiliriz çünkü x ve y'yi bağımsız olarak

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

ile ifade edebiliriz. (x ve y'ye ilişkin her tür sürekli fonksiyon gerçel sayılardan toplamlar, çarpımlar ve limitler yoluyla inşa edilebilir.) Holomor-

[10.1] Çıkarma ve bölmenin niçin bunlardan oluşturulabileceğini açıklayın.

fik olmayan bir z fonksiyonu ele alındığında, $\bar{z}$ açık biçimde belirtilmek üzere, $F(z,\bar{z})$ notasyonunu kullanma eğiliminde olacağım. Bu durum, fonksiyonlarımızı, holomorfik dünya dışına adım atar atmaz tek boyutlu karmaşık bir uzay yerine, 2 boyutlu gerçel bir uzay üzerinde tanımlanmış olarak düşünmemiz gerektiği gerçeğini vurgulamaya hizmet eder. Fonksiyonumuz $F(z,\bar{z})$'de, aynı biçimde, z'nin gerçel ve sanal kısımları x ve y biçiminde ifade ediliyor gibi ele alınabilir ve bu fonksiyonu, diyelim ki, $f(x,y)$ biçiminde yazabiliriz. Bu durumda, elbette f'nin açık matematiksel ifadesi genelde F'ninkinden oldukça farklı olacak olsa da $f(x,y) = F(z,\bar{z})$ ifadesine sahip oluruz. Örneğin $F(z,\bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$ ise $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ olur. Başka bir örnek olarak $F(z,\bar{z}) = z\bar{z}$'yi ele alabiliriz; bu durumda $f(x,y) = x^2 + y^2$, bir başka deyişle z'nin modülü $|z|$'nin karesi olan

$$z\bar{z} = |z|^2$$

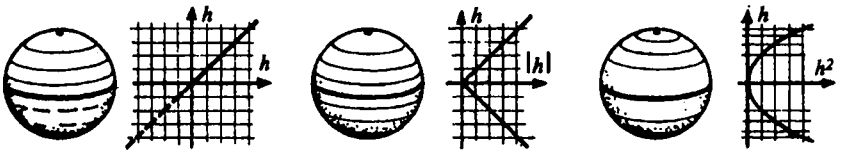
ifadesini elde ederiz.[10 2]

10.2 Pürüzsüzlük, kısmi türevler

Birden fazla değişkenli fonksiyonları ele alarak çok boyutlu uzaylara girişmeye başladığımızdan, burada bu tür uzayların "kalkülüs"ünü ilgilendiren uyarılara gerek duyulur. Bir sonraki bölümü izleyen bölümde açık olarak göreceğimiz üzere, *manifoldlar* olarak adlandırılan uzaylar, n pozitif bir tamsayı olmak üzere herhangi bir n boyutuna sahip olabilir. (n–boyutlu bir manifold sıklıkla basitçe bir n–manifold olarak adlandırılır.) Einstein'ın genel göreliliği uzayzamanı açıklamak üzere bir 4–manifold kullanır ve pek çok kuram daha da çok boyutlu manifoldları işe koşar. Genel n–manifoldları 12. bölümde inceleyeceğiz fakat basitlik için bu bölümde yalnızca gerçel bir 2–manifold (ya da yüzey), $\mathcal{S}$, durumunu ele alacağız. Böylece yerel (gerçel) koordinatlar x ve y $\mathcal{S}$'nin değişik noktalarını ($\mathcal{S}$'ye ait yerel bir bölgede) işaretlemek üzere kullanılabilirler. Aslında tartışma, genel n–boyutlu durumun oldukça tipik bir örneğidir.

2–boyutlu bir yüzey örneğin, sıradan bir düzlem ya da küre olabilir. Buna rağmen yüzey bir "karmaşık düzlem" ya da bir "Riemann küresi" olarak düşünülmemektedir çünkü ona karmaşık uzay gibi bir yapı atamakla (diğer bir deyişle yüzey üzerinde tanımlı "holomorfik fonksiyon"a eşlik eden kavramla) ilgili olmayacağız. Ona ait tek yapı, bir *pürüzsüz manifold*unki olmaya gerek duyar. Geometrik olarak bu yerel bir konformal yapıya benzeyen herhangi bir şeyi, §8.2'deki Riemann yüzeyimiz için yaptığı-

[10.2] Her ikisini de türetin.



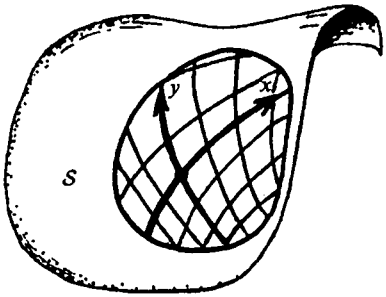
(a) (b) (c)

Şekil 10.2 Bir S küresi üzerinde, h ekvatoral düzlemin üstündeki uzaklığı belirtmek üzere, Öklitçi 3–uzayda oturur biçimde resmedilen fonksiyonlar. (a) h fonksiyonunun kendisi S üzerinde pürüzsüzdür (negatif değerler kesik çizgilerle gösterilmiştir). (b) $|h|$ modülü (*bkz.* Şekil 6.2b) ekvator üzerinde pürüzsüz değildir. (c) h^2 S'nin her yerinde pürüzsüzdür.

mız gibi takip etmeye gerek duymadığımız anlamına gelir fakat uzayda tanımlı bir fonksiyonun (diğer bir deyişle tanım kümesi uzay olan bir fonksiyon) ne zaman "pürüzsüz" olarak değerlendirilmesi gerektiğini söyleyebilmeye gerek duyarız.

"Pürüzsüz" bir manifoldun ne olduğunu anlamaya yarayan sezgisel bir kavram için bir küp yerine küre düşünün (elbette her seferinde iç bölgeye değil yüzeye atıfta bulunduğumu göz önüne alarak). Küre üzerinde pürüzsüz bir fonksiyon örneği olarak bir "yükseklik fonksiyonu", diyelim ki ekvatoral düzlemin üstündeki uzaklığı (küre, sıradan Öklitçi 3–uzayda normal biçimde oturur biçimde resmedilmek üzere) düşünebiliriz. *Bkz.* Şekil 10.2a. Diğer taraftan fonksiyonumuz bu yükseklik fonksiyonunun, ekvator altında kalan uzaklıklar da pozitif olacak şekilde, *modül*üyse (*bkz.* §6.1 ve Şekil 10.2b) bu durumda bu fonksiyon ekvator boyunca pürüzsüz değildir. Buna rağmen yükseklik fonksiyonunun *kare*sini değerlendirdiğimiz durumda bu fonksiyon, küre üzerinde pürüzsüz*dür* (Şekil 10.2c). Tüm bu durumlarda fonksiyonun, sabit yüksekliğe ilişkin kontür çizgilerinin kutuplardaki "tekil" görünümüne karşın, kuzey ve güney kutbunda pürüzsüz olduğunu belirtmek öğreticidir. Pürüzsüz olmamaya ilişkin tek olay ikinci örneğimizde; ekvatorda meydana gelir.

Bunun ne anlama geldiğini biraz daha ayrıntılı olarak kavramak için yüzeyimiz S üzerinde bir *koordinatlar* sistemi ortaya koyalım. Bu koordinatlar yalnızca yerel olarak geçerli olmaya gerek duyar ve S'yi, §8.1'deki Riemann yüzeyleri için yapılan işleme benzer şekilde yerel parçalar, *koordinat yamaları*, kullanarak bir araya "yapıştırma"yı düşünebiliriz. (Küre için örneğin birden fazla yamaya gerek duyarız.) Bir yama içerisinde, pürüzsüz koordinatlar farklı noktaları işaretler; *bkz.* Şekil 10.3. Koordinatlarımız gerçel sayı değerleri almaktadır. Bunlara (karmaşık bir sayı biçiminde birleşmeleri gerektiğine ilişkin herhangi bir öneri girişiminde bulunmaksızın) x ve y diyelim. Şimdi, S üzerinde tanımlı bir Φ pürüzsüz



Şekil 10.3 Yerel bir yama içinde pürüzsüz (gerçel sayı) koordinatlar (x, y), noktaları işaretler.

fonksiyonuna sahip olduğumuzu düşünün. Modern matematiksel yazında Φ, S'den gerçel sayı uzayı $\mathbb{R}$'ye (ya da Φ'nin S üzerinde karmaşık değerli bir fonksiyon olması durumunda karmaşık sayı uzayı $\mathbb{C}$'ye) pürüzsüz bir göndermedir çünkü Φ, S'nin her bir noktasına gerçel (ya da karmaşık) bir sayı atar; diğer bir deyişle Φ, S'yi gerçel (ya da karmaşık) sayılara *dönüştürür*. Bu tür bir fonksiyon bazen S üzerindeki bir *skaler alan* olarak adlandırılır. Belirli bir koordinat yaması üzerinde Φ niceliği iki koordinatlı bir fonksiyon olarak diyelim ki, Φ niceliğinin *pürüzsüzlüğü* $f(x, y)$ fonksiyonunun *türevlenebilirliği* olarak ifade edilmek üzere,

$$\Phi = f(x, y)$$

şeklinde gösterilebilir.

Henüz, birden fazla değişkene sahip bir fonksiyon için "türevlenebilirliğin" ne anlama geldiğini açıklamadım. Sezgisel olarak açık olmasına rağmen kesin tanımın ayrıntılarına burada girmek benim için biraz fazla tekniktir.[1] Yine de bazı aydınlatıcı yorumlar uygun olacaktır.

Her şeyden önce, (x, y) değişkenler çiftinin bir fonksiyonu olarak f'nin türevlenebilir olması için, $f(x, y)$'yi kendi kapasitesi içinde, y sabit bir değerde tutulmak üzere, yalnızca *bir* x değişkenli bir fonksiyon olarak düşünürsek, böylece bu fonksiyon, *tek* değişkenli bir fonksiyon olmak anlamında x'in bir fonksiyonu olarak pürüzsüz (en azından C^1) olmak zorundadır (*bkz.* §6.3); dahası, $f(x, y)$'yi bu kez x sabit tutulmak üzere, yalnızca bir y değişkenli bir fonksiyon olarak düşünürsek, böylece o, y'nin bir fonksiyonu olarak pürüzsüz (C^1) olmak zorundadır. Ayrı ayrı x ve y için pürüzsüz olan fakat (x, y) çifti için pürüzsüz olarak tanımlamanın epey anlamsız olacağı pek çok fonksiyon mevcuttur.[10.3] Pürüzsüzlük için yeterli ek bir

[1] Birkaç değişkenli fonksiyonların türevlenebilirliğine ilişkin ayrıntılı bir tartışma için, *bkz.* Marsden ve Tromba, 1996.

[10.3] Gerçel $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)^{-N}$ fonksiyonunu sırasıyla $N = 2$, 1 ve $\frac{1}{2}$ durumlarında değerlendirin. Fonksiyonun her durumda herhangi sabit bir y değeri için x'e göre türevlenebilir (C^ω) olduğunu (ve aynısının x ve y'nin yerleri değiştiğinde de geçerli olduğunu) gösterin. Bu-

koşul x ve y'ye göre ayrı ayrı alınan türevlerin her birinin (x,y) çiftinin *sürekli* fonksiyonları olmasıdır. Benzer ifadeler (§4.3'le özel ilişkili biçimde), ikiden fazla değişkenli fonksiyonları ele aldığımızda da geçerli olur. Kısmi türev sembolünü, ∂, diğer(ler)ini sabit tutarak bir değişkene göre türev almayı göstermekte kullanırız. $f(x,y)$'nin x'e ve y'ye göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}$$

olarak yazılır. (Bir örnek olarak, $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$ ise bu durumda $\partial f/\partial x = 2x + y^2$ ve $\partial f/\partial y = 2xy + 3y^2$ olduğunu belirtelim.) Bu nicelikler mevcut ve sürekliyse bu durumda Φ'nin yüzey üzerindeki bir C^1–pürüzsüz fonksiyon olduğunu söyleriz.

Daha yüksek dereceden türevleri de f'nin x'e ve y'ye göre ikinci derece kısmi türevlerini

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ ve } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ifadeleriyle göstererek dikkate alabiliriz. (Şimdi elbette C^2–pürüzsüzlüğe gerek duyarız.) Ayrıca, $\partial(\partial f/\partial y)/\partial x$ anlamına gelen, diğer bir deyişle f'nin y'ye göre kısmi türevinin x'e göre kısmi türevi olan ikinci derece bir "karışık" türev de mevcuttur. Bu karışık türevi ayrıca, $\partial^2 f/\partial x \partial y$ niceliğini elde etmek üzere diğer türlü de alabiliriz. Aslında bu iki niceliğin birbirine eşit oluşu f'nin (ikinci derece) türevlenebilirliğinin bir sonucudur:[10.4]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

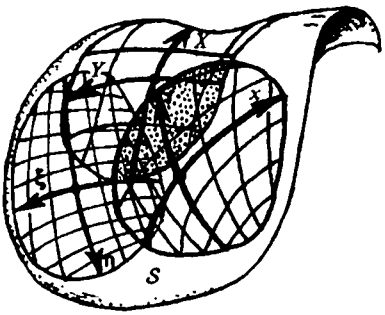
(İki değişkenli bir fonksiyonun C^2–pürüzsüzlüğüne ilişkin tam tanım bunu gerektirir.)[10.5] Daha yüksek dereceli türevler (ve yüksek dereceli pürüzsüzlük) için ilgili niceliklere sahibiz:

---

nunla birlikte f, (x,y) çiftinin bir fonksiyonu olarak pürüzsüz değildir. Bunu, $N = 2$ durumunda fonksiyonun orijinin, (0,0), komşuluğunda bile (diğer bir deyişle orada rasgele büyük değerler alır) sınırlı olduğunu; $N = 1$ durumunda fonksiyonun, sınırlı olduğu halde (x,y)'nin bir fonksiyonu olarak aslında sürekli olmadığını; ve $N = \frac{1}{2}$ durumunda fonksiyonun, artık sürekli de olsa $x = y$ doğrusu boyunca pürüzsüz olmadığını ortaya koyarak gösterin. *İpucu*: Her bir fonksiyonun değerini (x,y) düzleminde orijinden geçen düz çizgiler boyunca inceleyin. Bazı okuyucular, olanaklıysa, 3–boyutlu grafik çizen uygun bir bilgisayar kullanmayı aydınlatıcı bulabilirler fakat bu hiçbir şekilde gerekli değildir.

[10.4] Karışık ikinci derece türevler $\partial^2 f/\partial y \partial x$ ve $\partial^2 f/\partial x \partial y$'nin, $f(x,y)$ bir polinomsa, her zaman eşit olduklarını kanıtlayın. (x ve y biçimli bir *polinom*, yalnızca toplama ve çarpma kullanılarak x, y ve sabitlerden oluşturulan bir ifadedir.)

[10.5] $f = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ fonksiyonunun ikinci dereceden karışık türevlerinin orijinde eşit olmadıklarını gösterin. Süreklilik eksikliğini doğrudan orijindeki ikinci derece kısmi türevlerinden hareketle saptayın.



Şekil 10.4 S'nin tümünü örtmek için birkaç koordinat yamasını birbirine "yapıştırmak" zorunda kalabiliriz. S üzerindeki pürüzsüz bir Φ fonksiyonu (sırasıyla yerel (x, y) ve (X, Y) koordinatlarıyla birlikte) bir yama üzerinde Φ = f(x, y) ve diğeri üzerinde Φ = F(X, Y) koordinat ifadelerine sahiptir. Bir çakışma bölgesi üzerinde, X ve Y, x ve y'nin pürüzsüz fonksiyonları olmak üzere f(x, y) = F(X, Y) olur.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \text{ vb.}$$

Burada f'yi Φ'den, farklı harfler kullanarak ayırmak üzere dikkat etmemin önemli bir sebebi (ve daha sonra bu türde bir şeyle ilgili epeyce daha az "dikkatli" olabilirim), yüzey üzerinde tanımlı fakat çeşitli değişik koordinat sistemlerine göre ifade edilmiş bir Φ niceliğini dikkate almak isteyebilecek olmamızdır. $f(x, y)$ fonksiyonuna ilişkin matematiksel ifade, yamadan yamaya, bu yamalarla "örtülmüş" yüzey üzerinde herhangi belirli bir noktadaki Φ niceliğinin değeri değişmemiş olsa bile değişebilir. En belirgin olarak bu, değişik koordinat yamaları arasındaki bir çakışma bölgesini göz önüne aldığımızda meydana gelebilir (*bkz.* Şekil 10.4). İkinci bir koordinatlar kümesi (X, Y)'le gösterilirse bu durumda yeni koordinat yaması üzerindeki Φ değerleri için yeni bir

$$\Phi = F(X, Y)$$

ifadesine sahip oluruz. İki yama arasındaki bir çakışma bölgesinde böylece,

$$F(X, Y) = f(x, y)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Bununla birlikte yukarıda belirtildiği üzere F'nin X ve Y nicelikleri biçiminde sunduğu belirli ifade genellikle f'nin x ve y biçiminde sunduğu ifadeden epeyce farklı olacaktır. Aslında X, ve bu nedenle Y, çakışma bölgesi üzerinde x ve y'nin oldukça karışık birer fonksiyonu olabilir ve bu fonksiyonlar f'den F'ye geçişte birleştirilmek durumunda kalırlar.[10.6] Bir sistemin koordinatlarını diğerinin koordinatları biçiminde gösteren

[10.6] $X = x - y$ ve $Y = xy$ olmak üzere $f(x, y) = x^3 - y^3$ iken $F(X, Y)$'nin biçimini açık şekilde bulun. *İpucu*: $x^2 + xy + y^2$, X ve Y biçiminde nasıl ifade edilir? Bunun f'yle ilgisi nedir?

$$X = X(x,y) \text{ ve } Y = Y(x,y)$$

şeklindeki bu tür fonksiyonlar ve onların

$$x = x(X,Y) \text{ ve } y = y(X,Y)$$

biçimindeki tersleri, bir yamadan diğerine gerçekleşen değişimi ifade etmek üzere *geçiş fonksiyonları* olarak adlandırılırlar. Bu geçiş fonksiyonları pürüzsüz, basitlik için diyelim ki C^∞–pürüzsüz, olmalıdır ve bu durum Φ niceliğine ilişkin "pürüzsüzlük" kavramının bir yama çakışmasında kullanılan koordinat seçiminden bağımsız olması sonucunu doğurur.

10.3 Vektör alanları ve 1–biçimliler

Bir fonksiyona ait, koordinat seçiminden bağımsız olan bir "türev" kavramı mevcuttur. Bununla ilgili standart bir notasyon S üzerinde tanımlı Φ fonksiyonu için

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

olmak üzere $\mathrm{d}\Phi$'dir. Burada konuyla ilgili bazı karışıklıklara ulaşmaya başlarız ve bunlara alışmak biraz zaman ister. İlk olarak, "$\mathrm{d}\Phi$" ya da "$\mathrm{d}x$" gibi, "$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$" türevi formüle edildiğinde analize dahil olan limit alma işlemini uygulamamızdan kaynaklanan bir nicelik (*bkz.* §6.2), başlangıçta bir "sonsuz küçük biçimde küçük" olarak düşünülme eğilimindedir. §6.5'teki bazı ifadelerde ayrıca, $\mathrm{d}(\log x) = \mathrm{d}x/x$ gibi şeyleri de hesaba kattım. O aşamada bu ifadeler yalnızca biçimsel[2] olmak şeklinde, bu son ifade "daha doğru" $\mathrm{d}(\log x)/\mathrm{d}x = 1/x$ ifadesini temsil etmenin yalnızca ("$\mathrm{d}x$"le çarparak) uygun bir yolu olarak düşünülmek üzere, ele alındı. Diğer taraftan yukarıda gösterilen ifadede "$\mathrm{d}\Phi$" yazdığımda 1–biçimli denilen (her ne kadar bu, 1–biçimlinin en genel tipi olmasa da; *bkz.* §10.4 ve §12.6) belirli türde bir geometrik kavramı kastediyorum ve bu $\mathrm{d}(\log x) = \mathrm{d}x/x$ benzeri şeyler için de işler. Bir 1–biçimli bir "sonsuz küçük" değildir; bir şekilde farklı bir yoruma, yıllar içinde önemi artmış bir yoruma sahiptir; bu konuya hemen geleceğim. Bununla birlikte dikkat çekici olan, "d" ile ilgili bu

[2] Her ne kadar ilk olarak Leibniz'in ortaya koyduğu "$\mathrm{d}x$" notasyonu büyük bir güç ve esneklik gösterse de, $\mathrm{d}x$ gibi niceliklerin kendileri sayesinde cebire ilişkin kavramlar olarak ele alınabilmeleri gerçeğinin gösterdiği üzere bu durum, onun ikinci derece türevlerle ilgili "d^2x" notasyonna genişlemez. Bu notasyonda, y'nin x'e göre ikinci derece türevinin $(\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}^2x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)/\mathrm{d}x^2$ şeklinde yazıldığı türde bir değişiklik kullansaydı, böylece "d^2x" niceliği aslında cebirle ilgili tutarlı bir biçimde davranırdı ("d^2x", $\mathrm{d}x\mathrm{d}x$'i, vb. göstermek üzere). Bununla birlikte bu durumun, ifadenin karışıklığı nedeniyle ne derece kullanışlı olduğu açık değildir.

belirgin yorum değişikliğine karşın (§6.5'tekiler gibi) biçimsel matematiksel ifadeler, dx benzeri şeylerle bölme yapmayı denemememiz koşuluyla, pek de değiştirilmez.

Yukarıda gösterilen denklemde ayrıca, Φ'yi sol tarafta ve f'yi sağ tarafta kullanmam gerçeğinden kaynaklanan başka bir potansiyel karışıklık konusu mevcuttur. Bunu esasen Φ ve f arasındaki ayrımla ilgili yukarıda bildirdiğim uyarılar nedeniyle yaptım. f'nin görüntü kümesi (x,y)düzleminde belirli bir koordinat yamasına karşılık gelen (açık) bir bölgeyken Φ niceliği, görüntü kümesi S manifoldu olan bir fonksiyondur. "x'e göre kısmi türev" kavramını uygulamam gerekirse böylece "öteki y değişkenini sabit tutma"nın ne anlama geldiğini bilmem gerekir. Φ yerine f'nin sağ tarafta kullanılmasının nedeni budur çünkü f, x ve y koordinatlarının ne olduğunu "bilir"ken Φ bilmez. Böyleyken bile gösterilen bu denklemde bir karışıklık mevcuttur çünkü fonksiyonun argümanları belirtilmemiş. f, koordinat sisteminin p noktasına atadığı belirli (x,y) koordinat değerlerine uygulanırken sol taraftaki Φ, S 2–manifoldunun belirli bir p noktasına uygulanır. Açık konuşmak gerekirse ifadenin anlamlı olması için bu durumun açık hale getirilmesi gerekir. Bununla birlikte sürekli olarak bu tür bir şey söylemek zorunda olmak sıkıntı vericidir ve bu denklemi

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

şeklinde ya da "gövdesiz" işlemci biçimindeki

$$d = dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}$$

gibi yazabilmek çok daha uygun olur. Aslında bu şeylerle ilgili bir mantık oluşturmayı deneyeceğim. Bu denklemler *zincir kuralı* olarak anılan bir şeye ilişkin örnektir. Belirtildiği üzere Φ, S üzerinde tanımlı bir fonksiyon olduğunda, $\partial\Phi/\partial x$ türünde şeylere anlam atanmasını gerektirirler.

$\partial/\partial x$ türündeki bir operatörü, nasıl yalnızca x ve y değişkenlerinden oluşan bir fonksiyon yerine, S manifoldu üzerinde tanımlı Φ gibi bir fonksiyona uygulanabilen bir şey olarak düşünmeliyiz? İlk olarak, şeyleri başka bir (X,Y) koordinat sistemine sevkettiğimizde $\partial/\partial x$'in ne anlama geldiğini görmeye çalışalım. Uygun "zincir kuralı" denklemi artık

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

biçimine dönmüş görünür. Bu yüzden, (X,Y) sistemiyle ilgili olarak artık, (x,y) sisteminde basit görünümlü $\partial/\partial x$'in temsil ettiği işlemin tam olarak

aynısını temsil eden daha karışık görünümlü $(\partial X/\partial x)\,\partial/\partial x + (\partial Y/\partial x)\,\partial/\partial y$ ifadesine sahibiz. Bu daha karışık ifade, A ve B, X ve Y'nin C^∞–pürüzsüz fonksiyonları olmak üzere,

$$\xi = A\frac{\partial}{\partial X} + B\frac{\partial}{\partial Y}$$

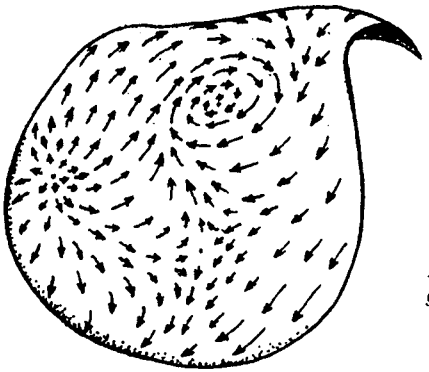
biçimindeki bir ξ niceliğidir. Henüz ortaya konmuş, (x,y) sisteminde ξ'nin $\partial/\partial x$'i temsil ettiği özel durumda, $A = \partial X/\partial x$ ve $B = \partial Y/\partial x$ ifadelerine sahibiz. Bununla birlikte A ve B'nin bu belirli biçimlere sahip olmadığı daha genel türde ξ niceliklerini ele alabiliriz. Bu tür bir ξ niceliği S üzerindeki ((X,Y) koordinat yamasındaki) bir *vektör alanı* olarak adlandırılır. ξ'yi orijinal (x,y) sisteminde yeniden yazabiliriz ve böylece (X,Y) sistemindeki genel biçimin (her ne kadar a ve b fonksiyonları A ve B'den genel olarak epey farklı olsa da)[10.7] aynısına sahip olduğunu görürüz:

$$\xi = a\frac{\partial}{\partial X} + b\frac{\partial}{\partial Y}.$$

Bu durum, vektör alanını (X,Y) yamasından, çakışan bir (x,y) yamasına genişletmemize olanak sağlar. Bu yolla, gerek duyduğumuz kadar çok yama alarak ξ vektör alanını S'nin bütününe genişletmeyi kafamızda canlandırabiliriz.

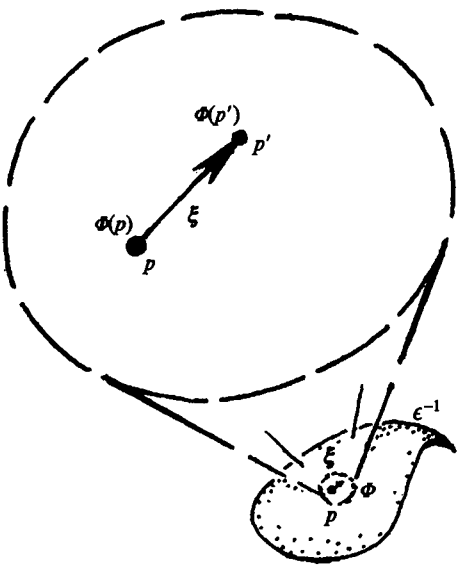
Tüm bunlar olasıdır ki okura büyük karışıklık çıkarmıştır. Bununla birlikte benim amacım kafa karıştırmak değil fakat oldukça temel geometrik bir kavramın doğru analitik biçimini bulmaktır. "Vektör alanı" olarak adlandırdığımız türevsel ξ operatörü, (sonuçtaki) kendine has dönüştürme biçimiyle, Şekil 10.5'te gösterildiği üzere açık bir geometrik yoruma sahiptir. Gözümüzde ξ'nin, bir ok her ne kadar, S üzerindeki bazı yerlerde bir nokta haline, bu yerler ξ'nin sıfır değeri aldığı yerler olmak üzere, büzüşebilse de, S üzerine çizilmiş bir "küçük oklar alanı"nı açıkladığını canlandırmalıyız. (Vektör alanının iyi bir resmini elde etmek için televizyondaki hava durumu bültenlerinin rüzgâr akış haritalarını düşünün.) Oklar, ξ'nin etki ettiği, türevi alınacak fonksiyondaki yönleri temsil eder. Bu fonksiyonu Φ olarak kabul ederek, ξ'nin Φ üzerindeki etkisinin, diğer bir deyişle $\xi(\Phi) = a\,\partial\Phi/\partial X + b\,\partial\Phi/\partial Y$, Φ'nin oklar yönündeki artış oranını ölçtüğünü söyleyebiliriz; *bkz.* Şekil 10.6. Ayrıca okun büyüklüğü ("uzunluk"), bu artışın kendisine göre hesaplanacağı ölçeği belirlemekte önemlidir. Daha uzun bir ok buna uygun bir şekilde artış oranının daha büyük ölçü değerini gösterir. Daha uygun olarak, tüm okları, her biri S'nin (okun "kuyruğu"ndaki) bir p noktasını yine S'nin (okun "ucu"ndaki) bir "komşuluk ya-

[10.7] A ve B'yi a ve b biçiminde bulun; benzer şekilde a ve b'yi A ve B biçiminde yazın.



10.5 Vektör alanı ξ'nin 'alan oklarıyla' gösterilen geometrik yorumu.

pan" p' noktasıyla birleştirir durumdaki sonsuz küçük olarak düşünmek zorundayız. Bunu biraz daha açık hale getirmek üzere, iki ayrı nokta p ve p' arasındaki ayrımın bir ölçüsü olarak ξ yönü üzerinde küçük bir pozitif ϵ sayısı seçelim. Böylece $\Phi(p) - \Phi(p')$ farkının ϵ ile bölümü bize $\xi(\Phi)$ niceliğine yapılan bir yaklaşıklık tahmini verir. ϵ ne kadar küçük olarak seçilirse o kadar iyi bir yaklaşıklık tahmini elde ederiz. Son olarak p''nün p'ye yaklaştığı durumdaki limitte aslında bazen Φ'nin ξ yönündeki *gradyanı* denen $\xi(\Phi)$'yi elde ederiz.



Şekil 10.6 ξ'nin skaler bir Φ üzerine etkisi, onun ξ-okları boyunca artış oranını verir. Okları, her biri S'nin (okun "kuyruğu"ndaki) bir p noktasını yine S'nin (okun "ucu"ndaki) bir "komşuluk yapan" p' noktasıyla birleştirir durumda, p'nin komşuluğuna uygulanan (ϵ küçük olmak üzere bir ϵ^{-1} çarpanıyla) geniş bir büyütme yoluyla resmedilmiş sonsuz küçük olarak düşünün. ϵ ile bölünen $\Phi(p') - \Phi(p)$ farkı, Φ'nin ξ üzerindeki, $\xi(\Phi)$, gradyanıdır.

$\partial/\partial x$ özel vektör alanı durumunda okların tümü sabit y'nin koordinat çizgileri boyunca uç verir. Bu durum, sıklıkla, kısmi türev için kullanılan standart "$\partial/\partial x$" matematiksel notasyonuyla karışıklığa yol açan bir konuyu örnekler. "$\partial/\partial x$" ifadesinin en belirgin olarak x niceliğine ait olduğu düşünülebilirdi. Buna karşın o, net bir anlamda, açık biçimde belirtilmeyen değişken(ler)le, burada x'le olduğundan çok y değişkeniyle, daha fazla ilgilidir. Koordinat değişkenlerinin bir değişimi, koordinatlardan biri aynı kalmak üzere, göz önüne alındığında notasyon özel olarak aldatıcıdır. Örneğin çok basit

$$X = x, Y = y + x$$

koordinat değişimini düşünün. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}$$

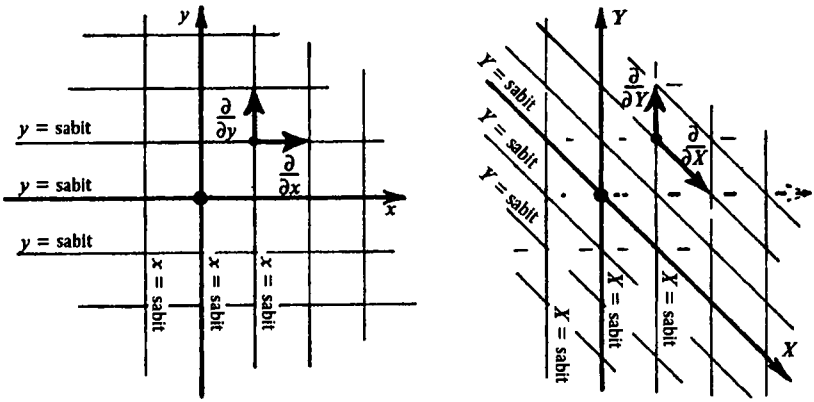
olduğunu buluruz.[10.8] Bu nedenle bu durumda Y, y'den farklı bile olsa, $\partial/\partial Y$, $\partial/\partial y$ ile aynıyken, $\partial/\partial X$'in, X'in x'le aynı olması gerçeğine karşın, $\partial/\partial x$'ten farklı olduğunu görürürüz. Bu, meslektaşım Nick Woodhouse'un "kalkülüsün ikinci temel kafa karışıklığı"[3] olarak adlandırdığı şeye örnek bir olaydır! Diğer taraftan neden $\partial/\partial X \neq \partial/\partial x$ olduğu, ilgili "oklar" farklı koordinat çizgileri boyunca uç verdiklerinden, *geometrik olarak* açıktır (Şekil 10.7).

Artık dΦ niceliğini yorumlayacak bir konumda bulunuyoruz. Buna Φ'nin *gradyanı* (ya da dış türevi) denir ve Φ'nin S boyunca olası tüm yönlerde nasıl değiştiği hakkındaki bilgiyi taşır. dΦ'yi geometrik olarak düşünmenin iyi bir yolu S üzerindeki *kontür çizgileri*nden oluşan bir sistem biçimindeki yoldur. *Bkz.* Şekil 10.8a. S'yi, eğik bir manifold olarak hesaba katmak istersek onu küresel bir evren olabilecek sıradan bir harita biçiminde düşünebiliriz (buradaki "harita"yla sert kağıttan yapılan ve yürüyüşe çıktığınızda yanınıza aldığınız şeyi kastediyorum, matematiksel "gönderim"* kavramını değil). Φ fonksiyonu deniz seviyesi üzerindeki zemin yüksekliğini gösterebilir. Böylece dΦ zeminin yataya göre eğimini temsil eder. Kontür çizgileri eşit yüksekliğe sahip konumları çizer. S'ye ait herhangi bir p noktasında kontür çizgisinin yönü, bize gradyanın, üzerin-

[10.8] Bunu açık biçimde türetin. *İpucu:* $\partial/\partial x$'e ilişkin daha önce gösterilmiş ifadenin tam benzerleri olan $\partial/\partial X$ ve $\partial/\partial Y$'ye ilişkin "zincir kuralı" ifadelerini kullanabilirsiniz.

[3] "İlk temel kafa karışıklığı" §10.2'de karşılaştığımız f ve Φ'nin kullanımları arasındaki karışıklıkla, özellikle kısmi türevlerin alınmasıyla ilişkili biçimde ilgilidir. *Bkz.* Woodhouse, 1987.

* map –çn.



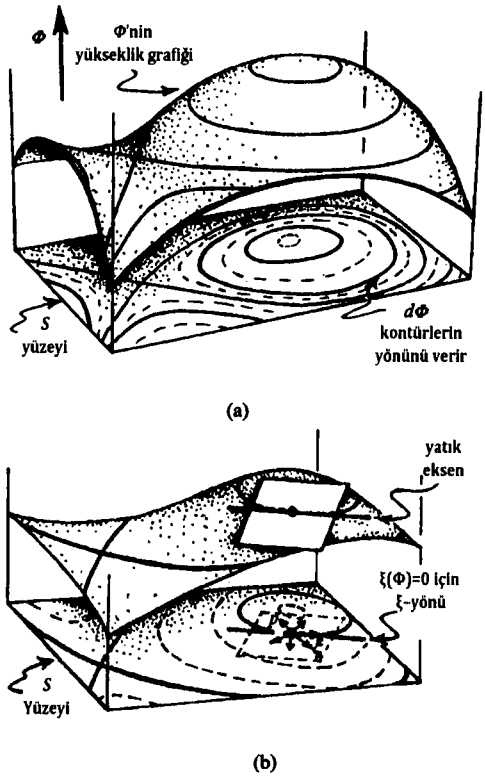
Şekil 10.7 Kalkülüsün ikinci temel kafa karışıklığı gösterilmektedir: $X = x, Y = y + x$ koordinat değişikliği için $X = x$'e karşın $\partial/\partial X \neq \partial/\partial x$ ve $Y \neq y$'ye karşın $\partial/\partial Y = \partial/\partial y$. Kısmi türeve ilişkin işlemcileri koordinat çizgileri boyunca uç veren "oklar" biçiminde yorumlamak geometriyi açıklar ($x =$ sabit, $X =$ sabitle uyumlu fakat $y =$ sabit, $Y =$ sabitle uyumsuz).

de kaybolduğu yönü söyler (zeminin eğimine ait "yatık eksen"), böylece bu, ξ okunun $\xi(\Phi) = 0$ için p'deki yönüdür. Bir kontür çizgisini izleyerek ne yükselir ne de alçalırız. Bununla birlikte kontür çizgileri üzerinden kestirmeden gidersek bu durumda Φ'de bir artma ya da azalma olacak ve bunun meydana geldiği oran, diğer bir deyişle $\xi(\Phi)$, kontür çizgilerinin, onları keserek geçtiğimiz yöndeki sıkışıklıklarıyla ölçülecektir. *Bkz.* Şekil 10.8b.

10.4 Bileşenler, skaler çarpımlar

$$\xi = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$$

ifadesi uyarınca ξ vektör alanı, biri sabit y çizgileri boyunca uç verip $\partial/\partial x$'le orantılı ve diğeri sabit x çizgileri boyunca uç verip $\partial/\partial y$'le orantılı olan iki kısımdan oluşmuş olarak düşünülebilir. Bu nedenle (x, y)–koordinat sisteminde, bağlı ağırlık çarpanları (a, b), ξ'yi işaretlemekte kullanılabilir. a ve b sayıları bu koordinat sisteminde ξ'nin *bileşenleri* olarak adlandırılır; *bkz.* Şekil 10.9. (Açık konuşmak gerekirse, ξ'nin iki "bileşeni" aslında, ξ'nin kendilerinden oluştuğu, $a\,\partial/\partial x$ ve $b\,\partial/\partial y$ iki vektör alanının, Şekil 10.9'da gösterildiği üzere, kendisidir; ve benzer bir uyarı $d\Phi$'nin aşağıdaki bileşenleri için de geçerlidir. Bununla birlikte "bileşen" terimi artık bu "koordinat işareti" anlamını, daha matematiksel bir dilde, özellikle tensör analiziyle bağlantılı olarak edindi; *bkz.* §12.8.)



Şekil 10.8 Geometrik olarak bir Φ skalerinin tüm dΦ (dış türev) gradyanını S üzerindeki kontür çizgilerinden oluşan bir sistem biçiminde resmedebiliriz. (a) Φ değeri burada S üzerinde dikey olarak çizilir, böylece S üzerindeki (sabit Φ) kontür çizgileri sabit yüksekliği tanımlar. (b) S'ye ait herhangi bir p noktasında kontür çizgisinin yönü, bize gradyanın, üzerinde kaybolduğu yönü söyler (tepenin eğimine ait "yatık eksen"), diğer bir deyişle ξ okunun ξ(Φ) = 0 için p'deki yönü. Kontür çizgileri üzerinden kestirmeden gitmek Φ'de bir artma ya da azalma verir, ξ(Φ), kontür çizgilerinin ξ yönündeki sıkışıklıklarını ölçer.

Benzer şekilde $d\Phi$ niceliği de

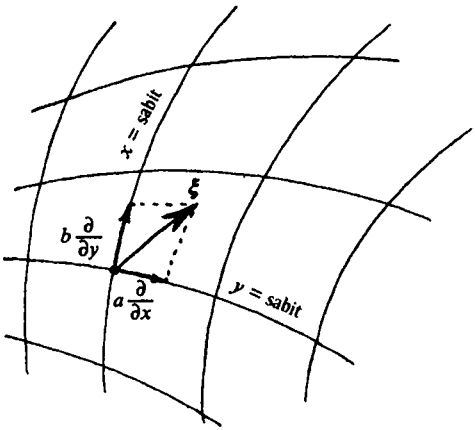
$$d\Phi = u\,dx + v\,dy$$

ifadesi uyarınca iki kısımdan, dx ve dy, oluşur ve böylece (u, v), $d\Phi$'yi işaretlemekte kullanılabilir ve u ile v bu aynı koordinat sisteminde $d\Phi$'ye ait bileşenlerdir. (Aslında burada $u = \partial\Phi/\partial x$ ve $v = \partial\Phi/\partial y$'ye sahibiz.) 1–biçimli $d\Phi$'nin (u, v) bileşenleri ile ξ vektör alanının (a, b) bileşenleri arasındaki ilişki, yukarıda gördüğümüz üzere Φ'nin ξ yönündeki artış oranını ölçen $\xi(\Phi)$ niceliği üzerinden elde edilir. $\xi(\Phi)$'nin değerinin

$$\xi(\Phi) = au + bv$$

ifadesiyle verildiğini görürüz.[10.9] $au + bv$'yi, (a, b)'yle temsil edilen ξ ve (u, v)'yle temsil edilen $d\Phi$ arasındaki *skaler* (ya da *iç*) *çarpım* olarak adlandırırız. Skaler çarpım bazen, onu herhangi belirli bir koordinat siste-

[10.9] Bunu, daha önce gördüğümüz "zincir kuralı" ifadelerini kullanarak açık biçimde gösterin.



Şekil 10.9 $\xi = a\,\partial/\partial x + b\,\partial/\partial y$ *vektörü biri* y = *sabit boyunca uç verip* $\partial/\partial x$*'le orantılı ve diğeri* x = *sabit boyunca uç verip* $\partial/\partial y$ *ile orantılı olan iki kısımdan oluşmuş olarak düşünülebilir.* (x, y) *koordinat sistemindeki ilgili ağırlık çarpanları* (a, b) *çifti* ξ*'nin bileşenleri olarak adlandırılır.*

mine atıfta bulunmaksızın soyut olarak ifade etmek istediğimizde, $d\Phi \bullet \xi$ olarak yazılacaktır. Böylece

$$d\Phi \bullet \xi = \xi(\Phi)$$

ifadesini elde ederiz. Burada aynı şey için iki farklı notasyon bulunmasının sebebi $d\Phi \bullet \xi$'yle ifade edilen işlemin ayrıca, $d\Phi$ olarak ifade edilebilenlerden daha genel türdeki 1–biçimliler için de geçerli olmasıdır (*bkz.* §12.3). η bu tür bir 1–biçimliyse bu durumda o, herhangi bir ξ vektör alanıyla, $\eta \bullet \xi$ olarak yazılan skaler bir çarpıma sahiptir.

Aslında bir 1–biçimlinin tanımı esasen onun bir vektör alanıyla bu şekilde "skaler bir çarpım" oluşturmak üzere birleşebilen bir nicelik olmasıdır. Bu nedenle $d\Phi$ niceliğinin vektör alanlarıyla doğal biçimde skaler bir çarpım oluşturan bir şey olması gerçeği aslında onu bir 1–biçimli olarak nitelendirir. (Bir 1–biçimli bazen bağlamına göre bir *kovektör* olarak adlandırılır.) Teknik olarak 1–biçimliler (kovektörler) bu anlamda vektör alanlarına *ikili*dir. "İkili" bir nesneyle ilgili bu kavram, bu fikirlerin yüksek boyutlu (diğer bir deyişle bir n–manifold) bir "yüzey"de oldukça genel biçimde geçerli olduğunu göreceğimiz §12.3'te ayrıntılı olarak incelenecek. Bir 1–biçimlinin geometrik anlamı ayrıca yüksek boyutlar bağlamında daha tam olarak §§12.3–5'te açıklanacak. An itibariyle bunu, $d\Phi \bullet \xi = 0$ ise kontür çizgilerinin kendisi, bu çizgiler, üzerlerinde bir ξ–okunun uç verme zorunluluğu bulunan yönleri temsil etmek üzere, yapacak.

10.5 Cauchy–Riemann denklemleri

Kendimizi bir sonraki bölüm için hazırladığımız, yüksek boyutlulara gerçekleştireceğimiz bu sıçrayıştan önce bu bölümde başladığımız konu-

ya, 2–boyutlu bir yüzeyin, karmaşık bir 1–manifold olarak yeniden yorumlanabilmesi için gerekli özelliğe geri dönelim. Esasen gerek duyulan şey holomorfik olan bu karmaşık değerli Φ fonksiyonlarını karakterize etmek için bir yönteme sahip olmamızdır. Holomorfiklik koşulu yerel bir koşuldur, bu sayede onu her bir koordinat yamasında ve buna uygun şekilde yamalar arasındaki çakışmalarda geçerli bir şey olarak tanırız. Φ'nin, (x, y)–yaması üzerinde karmaşık $z = x + iy$ sayısında holomorfik olmasına, çakışan bir (X, Y)–yamasında $Z = X + iY$'de holomorfik olmasına gerek duyarız. İkisi arasındaki tutarlılık Z'nin, çakışma bölgesi üzerinde, z'nin holomorfik bir fonksiyonu olması gerekliliğiyle sağlanır ve tersi de söz konusudur. (Φ, z'de holomorfikse ve z, Z'de holomorfikse bu durumda, bir holomorfik fonksiyonun holomorfik fonksiyonu yine bir holomorfik fonksiyon olacağından, Φ, Z'de holomorfik olmak zorundadır.)[10.10]

Şu durumda Φ'nin z'de, Φ ve z'nin gerçel ve sanal kısımları biçiminde holomorfik olma koşulunu nasıl ifade ederiz? Bunlar §7.1'de değinilen ünlü *Cauchy–Riemann* denklemleridir. Öyleyse bu denklemler açık biçimde nedir? Φ'nin z ve $\overline{z}$'nin bir fonksiyonu olarak ifade edildiğini düşünebiliriz (bu bölümün başında gördüğümüz üzere, z'nin, x ve y denilen gerçel ve sanal kısımları, z ve $\overline{z}$ biçiminde, $x = (z + \overline{z})/2$ ve $y = (z - \overline{z})/2i$ ifadeleri kullanılarak yeniden ifade edilebilir.) Φ'nin aslında "yalnızca z'ye bağlı oluşu" (bir başka deyişle "$\overline{z}$'den bağımsız" olma) koşulunu ifade etmemiz gereklidir.

Bu ne anlama gelir? z ve $\overline{z}$ değişkenlerinin karmaşık eşlenik çifti yerine diyelim ki bağımsız gerçel u ve v değişkenlerinin bir çiftine sahip olduğumuzu ve u ile v'nin bir fonksiyonu olan bir Ψ niceliğinin aslında v'den bağımsız olduğu gerçeğini ifade etmeyi umduğumuzu düşünün. Bu bağımsızlık

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0$$

şeklinde belirtilebilir (çünkü bu eşitlik bize her bir u değeri için Ψ niceliğinin v'de sabit olduğunu söyler; böylece Ψ yalnızca u'ya bağlıdır).[4] Bu yüzden "$\overline{z}$'den bağımsız" olarak Φ,

---

[10.10] Bunu üç farklı bakış açısına göre açıklayın: (a) sezgisel olarak genel ilkeler yoluyla (bir $\overline{z}$ nasıl ortaya çıkar?), (b) §8.2'de açıklanan holomorfik gönderimler geometrisini kullanarak, ve (c) açık biçimde, zincir kuralı ve gelmek üzere olduğumuz Cauchy–Riemann denklemlerini kullanarak.

[4] Bu koşulu yalnızca yerel anlamda kabul etmeliyiz. Örneğin, içerisinde $\partial\Phi/\partial x = 0$ olup, Φ'nin u'nun bir fonksiyonu olarak bütünüyle tutarlı olmadığı (u, v) düzleminde, böbrek–biçimli bir bölge üzerinde tanımlı pürüzsüz bir $\Phi(u, v)$ fonksiyonuna sahip olabiliriz.

[10.15] Dipnota ait bir alıştırma] θve Φ fonksiyonları §§6.1, 3'teki biçimde tanımlanmak üzere bunu, $\Phi(u, v) = \theta(v)h(u)$ durumunda ayrıntılandırın. Böbrek–biçimli bölge negatif olmayan u ekseninden kaçınmak zorundadır.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0$$

biçiminde ifade edilmelidir ve bu durum aslında Φ'nin (az önce sunduğum "benzetme yoluyla kanıtlama"nın bu gerçeğe ilişkin bir kanıt olarak kabul edilmemesi gerekliyse de) holomorfikliğini anlatır.[5] Bu eşitliği,[10.11] zincir kuralını kullanarak (x, y)–sistemindeki kısmi türevler biçiminde yeniden ifade edebiliriz:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Φ'yi, α ve β gerçelleriyle, kendi gerçel ve sanal kısımları

$$\Phi = \alpha + \mathrm{i}\beta$$

biçiminde yazarak

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Cauchy–Riemann denklemlerini elde ederiz.[6, 10.12] Daha önce belirtildiği üzere bir (x, y)–koordinat yamasıyla bir (X, Y)–koordinat yamasının çakışma bölgesi üzerinde $Z = X + \mathrm{i}Y$'nin $z = x + \mathrm{i}y$'de holomorfik olmasına gerek duyduğumuz için ayrıca (x, y) ile (X, Y) arasında geçerli olan şu Cauchy–Riemann denkemlerine de sahibiz:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Bu koşul koordinat yamalarının herhangi çifti arasında geçerli olursa bu durumda bir $\mathcal{S}$ Riemann yüzeyi oluşturmuş oluruz. (Bunlar, §7.1'de üzerinde durmadığım gerekli analitik koşullardır.) Bu tür bir yüzeyin bir karmaşık 1–manifold olarak da düşünülebileceğini anımsayın. Buna rağmen şeylere bakışın mevcut "Cauchy–Riemann" biçimine göre $\mathcal{S}$'yi belirli tipte yapıya sahip (diğer bir deyişle Cauchy–Riemann denklemlerince belirlenmiş) gerçel bir 2–manifold olarak düşünürüz.

Tümüyle holomorfik işlemlere bağlı kalmaya çalışmakta ve $\mathcal{S}$'yi bir "eğri" olarak düşünmekte kesin bir "saflık" mevcutken bu alternatif "Ca-

---

[5] Cauchy–Riemann denklemlerine ulaştıran en titiz yol olmasa da bu sav denklemlerin biçimleri için temelde yatan *sebebi* sunar.

[10.11] Bunu yapın.

[6] Gerçekte bu denklemleri Cauchy ya da Riemann'dan çok önce, 1752'de Jean LeRond D'Alembert buldu, *bkz.* Struik, 1954, s. 219.

[10.12] Türevin tanımı üzerinden, Cauchy–Riemann denklemlerinin daha dolaysız bir ortaya konuluşunu gösterin.

uchy–Riemann" bakış açısı diğer pek çok bağlamda güçlü bir konumda yer alır. Örneğin bize sonuçları, kısmi türevsel denklemlerle ilgili varlık kuramındaki pek çok yararlı tekniğe başvurmak yoluyla kanıtlamaya olanak sağlar. Bunun tadımlık bir parçasını (önemli) bir örneğe başvurarak sunayım.

Cauchy–Riemann denklemleri, $\partial\alpha/\partial x = \partial\beta/\partial y$ ve $\partial\alpha/\partial y = -\partial\beta/\partial x$, geçerliyse, böylece α ve β niceliklerinin her birinin tekil olarak belirli bir denklemi (Laplace denklemi) sağladığı ortaya çıkar.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

biçiminde tanımlanıp *Laplace işlemcisi* olarak adlandırılan ikinci dereceden türev işlemcisi ∇^2 için

$$\nabla^2\alpha = 0 \text{ ve } \nabla^2\beta = 0$$

denklemlerine sahibiz.[10.13] Laplace işlemcisi, pek çok fiziki durumda önemlidir (*bkz.* §21.2, §22.11, §§24.3–6). Elimizde yatay bir düzlemden, çok hafif bir şekilde aşağı ve yukarı sapan tel bir halka üzerine gerilmiş bir sabun filmi mevcutsa, bu durumda filmin yatay üzerindeki yüksekliği Laplace denkleminin bir çözümü olacaktır. (Bu düşey sapma ne kadar küçülürse yaklaşıklık tahmini git gide daha iyileşir.)[7] *Bkz.* Şekil 10.10. Laplace denklemi, boşluktaki kütleçekim (ya da statik elektrik) alanını saptayan potansiyel bir fonksiyon tarafından sağlanan bir denklem olduğu için ayrıca Newton kütleçekim kuramında (ve elektrostatikte; *bkz.* bölümler 17 ve 19) temel bir role sahiptir.

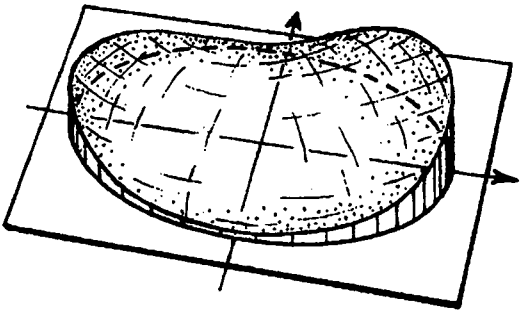
Cauchy–Riemann denklemlerinin çözümleri 2–boyutlu Laplace denkleminin çözümleri yoluyla oldukça dolaysız bir biçimde elde edilebilir. $\nabla^2\alpha$'yı sağlayan herhangi bir α'ya sahipsek, $\beta = \int(\partial\alpha/\partial x)\,dy$ ifadesi aracılığıyla β'yı oluşturabiliriz ve böylece bunun sonucunda her iki Cauchy–Riemann denkleminin de sağlandığını görürüz.[10.14] Bu gerçek önceki bölümün sonundaki savların bazılarını gösterip aydınlatmakta kullanılabilir.

Özel olarak, karmaşık düzlemdeki birim çember üzerinde tanımlı herhangi bir sürekli f fonksiyonunun bir hiperfonksiyon olarak sunulabileceğine ilişkin §9.7'nin sonunda ileri sürülen dikkat çekici gerçeği ele alalım. Bu sav herhangi sürekli bir f'nin, biri holomorfik olarak birim çemberin iç bölgesine ve diğeri holomorfik olarak dış bölgesine genişletilen, ki artık

[10.13] Bunu gösterin.

7 Gerçek sabun filmi denkleminin Weierstrass, 1866, tarafından serbest holomorfik fonksiyonlar biçiminde dikkate değer genel bir çözümü olduğu ortaya çıkıyor.

[10.14] Bunu gösterin.



Şekil 10.10 Tel bir halkaya gerilmiş yatay bir düzlemden çok hafif bir şekilde aşağı ve yukarı sapan bir sabun filmi. Filmin yatay üzerindeki yüksekliği Laplace denkleminin bir çözümünü verir (düşey sapma ne kadar küçülürse o kadar iyiye giden bir yaklaşıklık tahmini).

karmaşık düzlemi Riemann küresine tamamlanmış olarak düşünürüz, iki parçanın toplamı olduğunu etkin biçimde belirtir. Bu sav, f gerçel değişkenli bir periyodik fonksiyon olmak üzere, f'nin bir Fourier serisi biçimindeki gösteriminin varlığına (§9.2'deki tartışma uyarınca) etkin biçimde denktir. Basitlik için f'nin gerçel değerli olduğunu düşünün. (Karmaşık durum f'yi gerçel ve sanal kısımlarına bölmek yoluyla elde edilir.) Şu halde, f'yi sürekli biçimde çemberin iç bölgesine genişletebileceğimizi söyleyen teoremler, f çemberin iç bölgesinde $\nabla^2 f = 0$'ı sağlamak üzere, mevcuttur. (Bu gerçek, yakarıda verilen sabun filmi argümanı dolayısıyla, sezgisel olarak oldukça mantıklıdır; *bkz.* Şekil 10.10. Küçük bir sabit ϵ için f'yi yeni bir ϵf fonksiyonuna uygun biçimde ölçekleyerek tel halkamızın karmaşık düzlemdeki birim çemberde, onun üzerindeki ϵf değerleriyle düşey olarak hafif şekilde[8] aşağı ve yukarı saparak yer aldığını düşünebiliriz. Gerili sabun filmin yüksekliği bize ϵf'yi ve böylece içteki f'yi sunar.) Yukarıdaki reçeteyle ($g = \int(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}y$) f'ye bir sanal g kısmı sağlayabiliriz ve böylece $f + \mathrm{i}g$ birim çemberin iç bölgesi boyunca holomorfik olur. Bu işlem ayrıca f'ye birim çember üzerinde de (genellikle bir hiperfonksiyon biçiminde) sanal bir g kısmı sağlar ve böylece $f + \mathrm{i}g$ negatif frekanslı olur. Şimdi işlemi birim çemberin dış bölgesine uygulayarak yineleriz ve $f - \mathrm{i}g$'nin oraya genişlediğini ve pozitif frekanslı olduğunu görürüz. $f = \frac{1}{2}(f + \mathrm{i}g) + \frac{1}{2}(f - \mathrm{i}g)$ bölümü gerekeni gerçekleştirir.

---

[8] f çember üzerinde sürekli olduğu için *sınırlı* olmalıdır (diğer bir deyişle değerleri sabit bir alt ve sabit bir üst değer arasında yer alır). Bu, çemberin tıkız bir uzay oluşuna ilişkin standart teoremin sonucudur. "Tıkız" kavramı için *bkz.* §12.6 ve Kahn, 1995; Frankel 2001. Sonra f'yi (küçük bir ϵ sabitiyle çarparak) üst ve alt sınırların ikisi de çok ufak olacak şekilde yeniden ölçeklendiririz. Böylece sabun filmi benzetmesi çember içine genişleyen ϵf'nin varlığına ilişkin, Laplace denklemini sağladığı kabul edilebilir bir akla uygunluk argümanı sunar. Elbette bu bir kanıt değildir; "bir diskle ilgili Dirichlet problemi" olarak adlandırılan probleme ilişkin daha ayrıntılı bir yanıt için *bkz.* Strauss, 1992 ya da Brown ve Churchill, 2004.

11

HİPER KARMAŞIK SAYILAR

11.1 Dördeyler cebiri

Tüm bunları yüksek boyutlara nasıl genelleyeceğiz? n–manifoldlarla çalışmanın standart (modern) yöntemini sonraki bölümde açıklayacağım fakat çeşitli diğer sebepler nedeniyle okuyucuya ilk olarak yüksek boyutlar çalışmasında hedeflenen belirli erken fikirlerle ilgili bilgi vermem aydınlatıcı olacaktır. Bu erken fikirler sonradan, kuramsal fiziğin bugünkü bazı etkinlikleriyle, önemli dolaysız ilişki elde ettiler.

Karmaşık analizin güzelliği ve gücü, örneğin, hatırı sayılır derecede önemli bir denklem olan 2–boyutlu Laplace denklemi, kendisi aracılığıyla holomorfik fonksiyonlar biçiminde oldukça basit bir şekilde gösterilebilen yukarıda değinilen özellikteki gibi, 19. yüzyıl matematikçilerini, 3–boyutlu uzaya da doğal biçimde uygulanabilen "genellenmiş karmaşık sayıları" aramaya yöneltti. Ünlü İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton (1805–1865) bu konu üzerine oldukça uzun süre ve derinlemesine kafa patlattı. Sonunda 16 Ekim 1843'te Dublin'deki Royal Kanal üzerinde eşiyle birlikte yürüyüşteyken yanıtı buldu ve bu keşif onu öylesine heyecanlandırdı ki

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

şeklindeki temel denklemlerini hemen Dublin'in Brougham Köprüsü'ndeki bir kaya üzerine kazıdı.

i, **j** ve **k** niceliklerinden her biri "–1'in bağımsız bir karekökü"dür (karmaşık sayılardaki yalın i gibi) ve t, u, v ve w gerçel sayılar olmak üzere

$$\mathbf{q} = t + u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

genel bileşimi genel *dördeyi* tanımlar. Bu nicelikler cebirin tüm normal yasalarını biri dışında sağlar. İstisna, ki bu Hamilton'ın kavramlarının gerçek yeniliğiydi,[1] çarpmanın değişme özelliğine uymamaktı. Bununla il-

[1] Eduard ve Klein, 1898, uyarınca Carl Friedrich Gauss dördeylerle ilgili çarpma kuralını 1820 dolaylarında zaten açık biçimde belirtmiş fakat onu yayımlamamıştı, Gauss, 1900. Bu-

gili Hamilton, standart değişme özelliğine, $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$, büyük aykırılıktaki

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik}$$

ifadelerini buldu.[11.1]

Dördeyler yine de, toplamanın değişme ve birleşme özelliklerini, çarpmanın birleşme özelliğini ve çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini,[11.2] diğer bir deyişle

$$\begin{gathered} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}, \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} \end{gathered}$$

ifadelerini, toplama ve çarpmayla ilgili "birim elemanlar" 0 ve 1'in

$$\mathrm{a} + 0 = \mathrm{a},\ 1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}1 = \boldsymbol{a}$$

biçimindeki varlıklarıyla birlikte, sağlar. Bu bağıntılar, sonuncuyu dışta tutarsak cebir uzmanlarının bir *halka* olarak adlandırdıkları şeydir. (Benim algıma göre "halka" terimi, soyut cebir yazınının çoğu gibi, tümüyle sezgi–dışıdır ve onun kökeni hakkında en ufak bir bilgim yok.) Son bağıntıyı eklersek *birim halka* denen şeyi elde ederiz.

Dördeyler ayrıca gerçel sayılar üzerinde bir *vektör uzayı* denen şeyin bir örneğini sunarlar. Bir vektör uzayında iki elemanı (vektörler),[2] ξ ve η, onlara ait toplamı, $\xi + \eta$, oluşturmak üzere ve bu toplam değişebilirlik ve birleşebilirliğe,

$$\begin{gathered} \xi + \eta = \eta + \xi, \\ (\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta), \end{gathered}$$

bağlı olmak üzere, ekleyebiliriz ve vektörleri "skalerler"le (burada yalnızca gerçel sayılar f ve g), aşağıdaki dağılma ve birleşme özellikleri, vb, geçerli olmak üzere, çarpabiliriz:

$$(f + g)\xi = f\xi + g\xi,$$

---

nunla birlikte buna Tait, 1900, ve Knott, 1900, tarafından itiraz edildi. Daha fazla bilgi için *bkz.* Crowe, 1967.

[11.1] Bunu yalnızca $a(bc) = (ab)c$ birleşme özelliğini göz önüne alarak doğrudan Hamilton'un "Brougham Köprüsü denklemleri"nden yola çıkarak kanıtlayın.

[11.2] İki genel dördeyin toplam ve çarpımını tüm bunların geçerli olacağı biçimde ifade edin.

[2] "Vektör" kavramı bir anlam tayfına sahiptir. Burada, §10.3'te açıklanan bir "vektör alanı"na ilişkin *türev alma* kavramıyla herhangi bir birliğe gerek duymayız.

$$f(\xi + \eta) = f\xi + f\eta,$$
$$f(g\xi) = (fg)\xi,$$
$$1\xi = \xi.$$

Dördeyler gerçeller üzerinde 4–boyutlu bir vektör uzayı oluşturur çünkü dördeylerin tüm uzayını kapsayan yalnızca dört bağımsız 1, **i**, **j**, **k** "temel" niceliği mevcuttur; şöyle ki her tür dördey eşsiz biçimde bu temel elemanların gerçel katlarının bir toplamı olarak ifade edilebilir. Vektör uzaylarının diğer pek çok örneğini sonra göreceğiz.

Dördeyler ayrıca bize, yukarıda açıklandığı üzere bir çarpma kuralının varlığı nedeniyle gerçel sayıların bir *cebiri* denen şeye ilişkin bir örnek de sunar. Bununla birlikte Hamilton'ın dördeyleriyle ilgili dikkat çekici olan şey ek olarak sıfır olmayan her bir $\boldsymbol{q}$ dördeyi için bir *bölme* işlemi ya da aynı anlama gelmek üzere (çarpımla ilgili) *ters* bir $\boldsymbol{q}^{-1}$'e sahip olmamızdır. Daha önceki gibi $\boldsymbol{q} = t + u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{q}$'nun *eşleniği*

$$\overline{\boldsymbol{q}} = t - u\boldsymbol{i} - v\boldsymbol{j} - w\boldsymbol{k}$$

olmak üzere ve buradan hareketle tersi açık biçimde

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \overline{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}})^{-1}$$

olmak üzere bu ters bize, dördeylere bir *bölme halkası* olarak adlandırılan şeyin yapısını vererek

$$\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{-1} = 1$$

ifadesini sağlar.

$$\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}} = t^2 + u^2 + v^2 + w^2$$

ifadesini elde ederiz ve böylece $\boldsymbol{q} = 0$ (diğer bir deyişle $t = u = v = w = 0$) olmadıkça $\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}}$ *gerçel sayısı* yok olamaz, bu durumda $(\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}})^{-1}$ söz konusudur ve bunun sonucu olarak $\boldsymbol{q} \neq 0$ ifadesi sağlanmak üzere $\boldsymbol{q}^{-1}$ iyi tanımlıdır.[11.3]

11.2 Dördeylerin fiziki rolü?

Bu bize, cebirle ilgili oldukça güzel bir yapı ve açıktır ki 3–boyutlu fiziki uzayımızın fizik ve geometrisini ele almaya ilişkin özenle ayarlanmış kusursuz bir analiz potansiyeli sunar. Aslında Hamilton'ın kendisi de yaşamının geri kalan 22 yılını bu tür bir analiz geliştirme girişimine adadı.

[11.3] q^{-1}'in bu tanımının gerçekten işlediğini sınayın.

Bununla birlikte bugünkü bakış açımızdan 19 ve 20. yüzyıllara dönüp baktığımızda bu kahramanca çabaları yine de başarısızlıkla sonuçlanmış olarak dikkate almak durumundayız. Bu, dördeylerin matematiksel (ya da fiziki) olarak önemsiz oldukları anlamına gelmez. Kesinlikle, oynadıkları bazı çok önemli roller mevcuttur ve hafif biçimde dolaylı bir anlamda genellemenin çeşitli biçimleri yoluyla etkileri devasa olmuştur. Buna rağmen orijinal "saf dördeyler" hâlâ başlangıçtaki kuşkusuz biçimde sıradışı bir vaat ifade eden görünümüne ulaşamadı.

Neden? Acaba fiziki dünyaya ilişkin "doğru" matematiği bulma yolunda modern girişimlerle ilgili öğrenmemiz gereken bir ders mi söz konusu? İlk olarak açık bir nokta var. Dördeyleri karmaşık sayıların çok boyutlu bir benzeri olarak düşüneceksek bu benzerlik boyutun 2'den 3'e değil 2'den 4'e yükselmesi biçimindedir. Bu nedenle her bir durumda boyutlardan biri, $\boldsymbol{q}$'nun yukarıdaki **i**, **j**, **k** biçimindeki gösteriminde "t" bileşenine karşılık gelen "gerçel eksen"dir. Bu t'yi, *zaman*[3] olarak kabul etme dürtüsü oldukça kuvvetlidir ve böylece dördeylerimiz, yalın biçimde uzay yerine dört–boyutlu bir *uzayzaman* açıklar. 20. yüzyıl bakış açımızdan bunun, 17. bölümde göreceğimiz üzere dört–boyutlu bir uzayzamanın modern görelilik kuramının merkezinde yer alması nedeniyle son derece uygun olması gerektiğini düşünebiliriz. Bununla birlikte dördeylerin, uzayzamanın açıklanmasında gerçekten uygun olmadıkları, büyük oranda "dördeylerle ilgili olarak doğal" *ikinci derece biçimli* $\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}} = t^2 + u^2 + v^2 + w^2$ ifadesinin görelilik kuramıyla (daha sonra geleceğimiz bir konu; §13.8, §18.1) ilgili "yanlış imza"ya sahip olması sebebiyle ortaya çıkar. Elbette Hamilton görelilik kuramını, yanlış yüzyılda yaşamış olduğundan bilmiyordu. Her koşulda, burada henüz ilgilenmek istemediğim bir "kurtlanmış konserve kutusu" mevcuttur. Onu daha sonra açacağım! (*Bkz.* §13.8, §§18.1–4, §22.11'in sonu, §28.9, §31.13, §32.2.)

Dördeylerin matematiksel olarak ilk bakışta göründükleri kadar "hoş" olmaması gibi başka bir sebep belki de daha temel bir sebep söz konusudur. Onlar oldukça sefil "büyücüler"dir; ve bu anlamda karmaşık sayılarla kesinlikle kıyaslanamazlar. Bunun sebebi bir holomorfik fonksiyon kavramının dördeyle ilgili hiçbir tatmin edici[4] benzerinin var olmamasıdır. Bu-

[3] Hamilton'un bu dürtüye ne derece boyun eğmiş olabileceği bana göre çok açık değildir. Dördeylerle ilgili keşfinden önce "zamanın akışı"na ilişkin cebirsel uygulamalarla ilgilenmişti ve bu durum onun, dördeylerle ilgili cebirde dördüncü bir boyutu kabul etmeye hazırlıklı olmasına etkide bulunmuş olabilirdi. *Bkz.* Crowe, 1967, s. 23–27.

[4] Bununla birlikte makul miktarda çalışma holomorfik kavramların dördeylerle ilgili benzerleri ve bunların fizik kuramındaki değeri konusuna yöneltilmişti. *Bkz.* Gürsey, 1983; Adler, 1995. Kütlesiz serbest alan denklemlerini çözmekte kullanılan burgaç ifadeleri, Laplace denkleminin çözümüne ilişkin holomorfik fonksiyon yönteminin uygun bir 4–boyutlu benze-

na ilişkin temel sebebi basittir. Önceki bölümde bir z karmaşık değişkenine ait holomorfik bir fonksiyonun, karmaşık eşleniği $\bar{z}$'den holomorfik olarak "bağımsız" olmak şeklinde nitelendirildiğini gördük. Bununla birlikte dördeyler söz konusu olunca, $\boldsymbol{q}$'nun dördeye ilişkin $\bar{\boldsymbol{q}}$ eşleniğinin

$$\bar{\boldsymbol{q}} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{q} + \mathbf{i}\boldsymbol{q}\mathbf{i} + \mathbf{j}\boldsymbol{q}\mathbf{j} + \mathbf{k}\boldsymbol{q}\mathbf{k})$$

ifadesi kullanılarak,[11.4] $\boldsymbol{q}$ ve $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ sabit nicelikleri biçiminde ifade edilmesinin olası olduğunu görürüz.

"Dördeye ilişkin holomorfik", toplama, çarpma ve limit alma yoluyla dördeylerden inşa etmek" anlamındaysa bu durumda $\bar{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{q}$'nun tüm fikri berbat eden, dördeye ilişkin holomorfik bir fonksiyonu olarak kabul edilmelidir.

Dördeylerin fiziki dünyayla daha dolaysız ilişkiye sahip olabilecek değiştirilmiş biçimlerini bulmak olası mıdır? Bunun kesinlikle doğru olduğunu göreceğiz fakat tüm bunlar dördeylere ilişkin, onlarla her zaman (sıfır değillerse) bölme yapılabileceğini söyleyen yukarıda gösterilmiş kilit özelliği feda eder. Yüksek boyutlarla ilgili genellemeler hakkında ne demeli? Biraz ileride Clifford'ın bunu nasıl başardığını ve bu tür genellemenin fizikte ne kadar büyük öneme sahip olduğunu göreceğiz fakat tüm bu değişiklikler bölme cebiri özelliğini terke yönlendirmektedir.

Dördeylere ilişkin, bölme özelliğini koruyan genellemeler mevcut mudur? Aslında, evet; fakat cebirin kurallarını matematiğin değişme özelliğini terkimizden bile daha fazla gevşetmezsek bunun olası olmayacağını söyleyen teoremlerin var oluşu dikkat edilmesi gereken ilk noktadır. John Graves, Hamilton'ın dördeyleri keşfini duyuran mektubunu aldıktan yaklaşık iki ay kadar sonra, 1843'te, şimdilerde *oktonyonlar* olarak adlandırılan bir tür "çift" dördey kavramlarının varlığını keşfetti. Bunlar 1845'te Arthur Cayley tarafından yeniden keşfedildi. Oktonyonlar söz konusu olduğunda birleşme özelliği $a(bc) = (ab)c$, (her ne kadar bu özelliğin kısıtlı özdeşlikler, $a(ab) = a^2b$ ve $a(bb) = ab^2$, biçimindeki bir kalıntısı korunsa da) terk edilir. Bu yapının güzelliği, birleşmeli olmayan bir yapı olsa da hâlâ bir bölme cebiri olmasıdır. (Sıfır olmayan her bir a için $a^{-1}(ab) = b = (ba)a^{-1}$ olacak şekilde bir a^{-1} mevcuttur.) Oktonyonlar birleşmeli olmayan sekiz–boyutlu bir bölme cebiri oluşturur. Dördey cebirindeki $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$'nin 1'le birlikte, oktonyan cebirinin sekiz boyutunu kapsayan yedi benzeri

ri olarak değerlendirilebilir. Bununla birlikte bu, dördeylerle ilgili olanı değil karmaşık analizi kullanır. Dördeyler ve oktonyonlara ilişkin genel bir kaynak için *bkz.* Conway ve Smith, 2003.

[11.4] Bunu sınayın.

mevcuttur. Bu elemanlarla ilgili tekil çarpma kuralları (**ij** = **k** = −**ji**'nin benzerleri) bir miktar karışıktır ve bunları, Şekil 16.2'de gösterilip zarif bir açıklamasının verileceği §16.2'ye kadar ertelemem en iyisi olacaktır. Ne yazık ki oktonyonların, bölme cebiri özelliği alıkonacaksa, yüksek derecelilere de tam olarak tatmin edici bir genellenmesi, Hurwitz'in, 1898, dördeyle ilgili "$q\bar{q}$ = karelerin toplamı" özdeşliğinin 1, 2, 4 ve 8'den başka boyutlar için işlemediğini gösteren bir cebirsel sonucundan hareketle, mevcut değildir. Aslında bu belirli boyutlar dışında bölmenin (0'la bölme dışında)her zaman olası olduğu bir cebir *hiç de* mevcut değildir. Bu, §15.4'te karşılaşacağımız dikkat çekici bir topolojik teoremin[5] sonucudur. Aslında yegane bölme cebirleri gerçel sayılar, karmaşık sayılar, dördeyler ve oktonyonlardır.

Bölme özelliğini terk etmeye hazırsak bu durumda dördey kavramının yüksek boyutlulara önemli bir genellenmesi mevcut*tur* ve bu gerçekte modern fizikte güçlü etkilere sahip bir genellemedir. Bu, keskin zekalı fakat kısa yaşamış olan İngiliz matematikçi William Kingdon Clifford, 1845–1879, tarafından 1878'de ileri sürülmüş[6] *Clifford cebiri* kavramıdır. Clifford cebiri aslında, her biri karmaşık sayılarla açıklanan iki kaynaktan ortaya çıkmış gibi değerlendirilebilir. Bu kaynaklardan biri gerçekte, burada ilgilenegeldiğimiz Hamilton dördeylerinin cebriydi; diğeri orijinal olarak 1844 ve 1862'de az tanınmış bir Alman okul öğretmeni, Hermann Grassmann, 1809–1877, tarafından daha erken ortaya konmuş[7] önemli bir gelişmedir. Grassmann cebiri ayrıca, modern kuramsal fizikte de dolaysız rollere sahiptir. (Özelde modern *süpersimetri* kavramı, *bkz.* §31.3, süpersimetri fiziğin standart modeline ait yapısının ötesinde onun temellerini geliştirmeye yönelik modern girişimler arasında her yerde birden bulunmaya yakın olmak üzere, önemli bir biçimde onlara bağlıdır.) Burada Grassmann ve Clifford cebirlerinin ikisiyle de tanışık olmamız önemli olacaktır. Sırasıyla §11.6 ve §11.5'te bunu yapacağız.

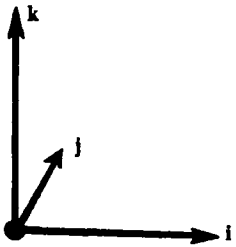
Clifford (ve Grassmann) cebirleri, göz önüne alınan uzayın çok boyutluluğundan kaynaklanan yeni bir bileşen içerir. Bu noktayı uygun biçimde değerlendirmeden önce dördeyleri yeniden fakat bu kez farklı bir bakış açısıyla, geometrik olarak dikkate almamız en iyisi olacaktır. Bu bizi ayrıca, modern fizikte temel önemi olan bazı farklı düşünme biçimlerine de yönlendirecektir.

---

[5] *Bkz.* Adams ve Atiyah, 1966.

[6] *Bkz.* Clifford, 1878. Modern kaynaklar için *bkz.* Hestenes ve Sobczyk, 2001; Lounesto, 1999.

[7] *Bkz.* Grassmann, 1844, 1862; van der Waerden, 1985, s. 191–192; Crowe, 1967, bölüm 3.



Şekil 11.1 Temel **i**, **j**, **k** *dördeyleri olağan 3-boyutlu Öklitçi uzayda karşılıklı olarak dik (ve saat yönünde) eksenleri gösterir.*

11.3 Dördeyler geometrisi

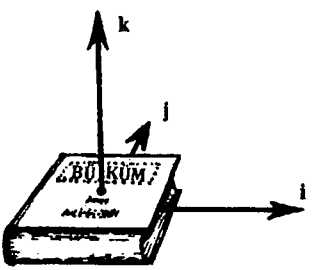
Dördeyle ilgili temel **i**, **j**, **k** niceliklerini olağan 3-boyutlu Öklitçi uzayda karşılıklı olarak dik eksenleri (saat yönünde) gösterir biçimde düşünün (*bkz.* Şekil 11.1). Şu halde, §5.1'den, olağan karmaşık sayı kuramındaki i niceliğinin, karmaşık düzlemdeki eyleminde, "orijin etrafında pozitif anlamda bir dik açı boyunca döndür" anlamına gelen "i ile çarp" işlemi biçiminde yorumlanabileceğini anımsarız. **i** dördeyini benzer biçimde fakat bu kez 3 boyutta **i**-ekseni etrafında (böylece (**j**, **k**)-düzlemi karmaşık düzlem rolündedir) pozitif anlamda (diğer bir deyişle saat yönünde) bir döndürme olarak yorumlayabileceğimizi düşünebiliriz. Buna uygun biçimde **j**'yi **j**-ekseni etrafında (pozitif anlamda) bir döndürme ve **k**'yi **k**-ekseni etrafında bir döndürme olarak düşünürüz. Bununla birlikte bu döndürmeler karmaşık sayılar durumundaki gibi gerçekten dik açı döndürmeleriyse bu durumda çarpım bağıntıları işlemeyecektir çünkü **i**-döndürmesini **j**-döndürmesiyle takip edersek **k**-döndürmesini (hatta bir katını bile) elde etmeyiz.

Bunu açık biçimde görmek, sıradan bir nesneyi fiziki şekilde döndürmek yoluyla oldukça kolaydır. Bir kitap kullanmayı öneririm. Kitabı önünüzdeki bir masaya kapalı şekilde yatay olarak, sanki okumak için açmak üzereymişsiniz gibi olağan biçimde yerleştirin. **k**-ekseninin kitabın merkezinden yukarıya doğru olduğunu, **i**-ekseninin sağa doğru gittiğini, **j**-ekseninin doğruca sizden uzaklaştığını ve her ikisinin de yine kitabın merkezinden çıktığını düşünün. Kitabı **i**-ekseni etrafında (saat yönünde) bir dik açı boyunca, sonra **j**-ekseni etrafında (saat yönünde) döndürürsek, onun artık **k**-ekseni etrafında herhangi tek bir döndürmeyle orijinal durumuna geri getirilemeyecek (arka omurgası yukarı doğru olan) bir düzenle sonuçlandığını görürüz. (*Bkz.* Şekil 11.2).

İşleri yoluna koymak için yapmamız gereken iki *dik* açı kadar döndürmektir (diğer bir deyişle 180° ya da π boyunca). Karmaşık i sayısının eyleminden anladığımız yöntemin kesinlikle dolaysız bir benzeri olmadığı için

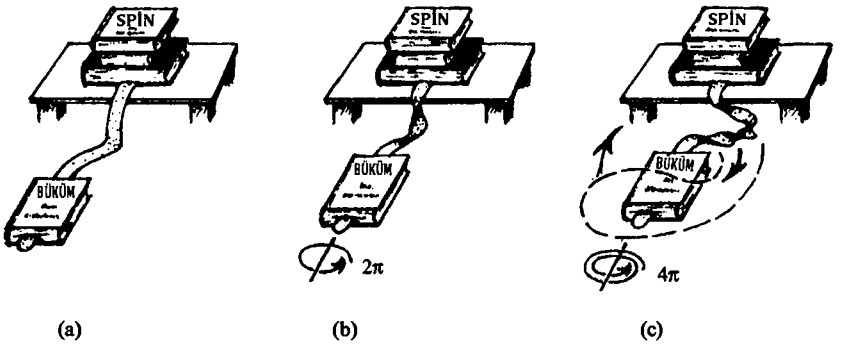
bu, yapması tuhaf bir şey gibi görünür. Asıl sorun, bu işlemi aynı eksen etrafında iki kez uygularsak nesneyi basit biçimde orijinal durumuna geri getiren, açıktır ki $\mathbf{i}^2 = -1$ yerine $\mathbf{i}^2 = 1$'i karşılamak üzere, 360°'lik (ya da 2π) bir döndürme elde etmemiz olarak görünür. Bununla birlikte burada mükemmel bir fikir devreye girer. Bu dikkat çekici bir incelik ve öneme, kuantum fiziğinin elektronlar, protonlar ve nötronlar gibi temel parçacıklarına ilişkin matematiksel bir öneme sahip bir fikirdir. §23.7'de göreceğimiz üzere sıradan katı madde, sonuçları olmaksızın var olamaz. Bununla ilgili temel matematiksel kavram bir *spinördür*.[8]

Bir spinör nedir? Esasen o, 2π'lik bir tam döndürmeye maruz kaldığında kendi negatifine dönen bir nesnedir. Bu bir tuhaflık olarak görülebilir çünkü olağan durumdaki herhangi klasik bir nesne bu tür bir döndürme sonucunda her zaman kendi orijinal durumuna döner, başka bir şeye değil. Spinörlerin, ya da *spinör nesneler* olarak adlandıracağım şeylerin, bu ilginç özelliklerini anlamak üzere daha önce bizim için masada duran kitabımıza geri dönelim. Onun nasıl döndürüldüğünü takip edebilmek için bazı araçlara gerek duyacağız. Bunu uzun bir kemerin bir ucunu kitabın sayfaları arasına sıkıca yerleştirerek ve tokasını da sabit bir yapıya (diyelim ki bir yığın başka kitap, *bkz.* Şekil 11.3a) sert biçimde iliştirerek yapabiliriz. Kitabın döndürülmesi kemeri, kitabın daha fazla döndürülmesi olmaksızın geri getirilemeyecek biçimde büker (Şekil 11.3b). Kitabı ek bir 2π açısı kadar daha, toplamda 4π kadar, döndürürsek, kemeri basit şekilde kitap üzerinden, tüm hareket boyunca kitabın konumunu koruyarak geçirdiğimizde, ondaki bükümün oldukça şaşırtıcı biçimde tamamen ortadan kaldırılabildiğini, görürüz (Şekil 11.3c). Böylece kemer, tüm sayıyı toplamaktansa kitabın maruz kaldığı 2π'lik döndürmenin sayısına ilişkin *dönüşüm çarpanını* izler. Bu demek olur ki, kitabı 2π'lik döndürmenin bir tek katsayısı boyunca döndürürsek kemer kaçınılmaz olarak bükümlü



Şekil 11.2 Dördeylerle ilgili **i**, **j**, *ve* **k** *işlemcilerini, burada kitap olarak alınan bir nesnenin (180° boyunca, diğer bir deyişle π) döndürmelerine karşılık gelir biçimde düşünebiliriz.*

[8] "Spinör"ün hecelenmesindeki gibi telaffuz ederiz, "spynor"daki gibi değil.



Şekil 11.3 Şekil 11.2'deki kitapla gösterilen spinör bir nesne. 2π'nin çift sayı katı kadar bir döndürme hiçbir döndürme olmamasına denk iken tek sayı katı kadar bir döndürme böyle değildir. (a) Kitabın 2π döndürmesinin dönüşüm çarpanı sayısını, kitabı sabit bir nesneye (burada bir kitap yığını) sıkıca bağlayarak takip ederiz. (b) Kitabın 2π boyunca döndürülmesi kemeri, kitabın daha fazla döndürülmesi olmaksızın geri getirilemeyecek biçimde büker. (c) Kitabın 4π boyunca döndürülmesi, kemeri kitabın üzerinden geçirerek bütünüyle ortadan kaldırılabilecek bir büküm verir.

kalırken, onu 2π'lik döndürmenin bir çift katsayısı boyunca döndürürsek büküm bütünüyle görünmez duruma getirilebilir. Bu durum hangi döndürme eksenini ya da ardışık döndürme eksenlerini seçersek seçelim geçerlidir.

Böylece bir spinör nesneyi resmetmek için uzaydaki sıradan bir nesneyi düşünebiliriz fakat sabit bir dışsal yapıya esnek bir sanal eklenti mevcut olduğunda bu eklentiyi, ele alageldiğimiz kemer temsil eder. Eklenti herhangi sürekli bir biçimde hareket ettirilebilir fakat uçları, biri nesnenin üzerinde ve diğeri dışsal yapıda olmak üzere sabit tutulmalıdır. Bu biçimde tasarlanmış "spinör kitabımızın" düzeni böylesi sabit bir dışsal yapıyla sanal bir ilişiğe sahipmiş gibi düşünülür ve ona ilişkin iki düzen ancak birine ait sanal eklenti diğerinin sanal eklentisine deforme edilebilirse denk varsayılır. Her bir sıradan kitap düzeni için kesin olarak denk olmayan iki spinör kitap düzeni söz konusu olacaktır ve birini diğerinin negatifi varsayarız.

Şimdi bunun bize dördeylerle ilgili doğru çarpma kuralları sunup sunmadığını görelim. Kitabı tıpkı daha önceki gibi önünüzdeki masaya koyun fakat bu kez kemer sıkıca kitabın sayfaları arasında olacak şekilde. Şimdi kitabı **i** etrafında π kadar çevirin ve bunu **j** etrafındaki π kadarlık bir döndürmeyle devam ettirin. Tıpkı Hamilton'un **ij** = **k** ifadesi uyarınca olması gerektiği gibi **k** etrafında π kadarlık bir dönmeye denk bir düzen elde ederiz.

Ya da böyle değil mi? Kafa kurcalayan tek bir nokta söz konusudur. Tüm bu döndürmelerin saat yönünde yapıldığında dikkatli biçimde ısrar edersek bu durumda kemer bükülmelerini uygun şekilde takip ederek **ij** = −**k** ifadesini elde eder görünürüz. Yine de bu önemli bir nokta değildir ve çok çeşitli biçimde düzeltilebilir. Ya dördeylerimizin 2π'lik döndürmelerini saat yönü yerine saat yönü tersine sunabiliriz ya da **i**, **j**, **k**–eksenlerimizi saat yönlü bir düzen yerine onun tersi bir düzende kabul ederiz. Ya da en iyisi, matematikte epey olağan olan, diğer bir deyişle "$\boldsymbol{pq}$ çarpımı"nı $\boldsymbol{q}$'yu izleyen $\boldsymbol{p}$ yerine $\boldsymbol{p}$'yi izleyen $\boldsymbol{q}$ olarak gösteren işlemcilerin çarpılması düzenine ilişkin bir uzlaşı benimseyebiliriz.

Aslında bu tuhaf görünümlü uzlaşı için iyi bir gerekçe mevcuttur. Bu, genellikle sağ taraflarına yazılan şeylere etki eder biçimde anlaşılan işlemcilerle, örneğin $\partial/\partial x$ türündekilerle, ilgilidir. Böylece Φ'ye etkiyen $\boldsymbol{P}$ işlemcisi $\boldsymbol{P}(\Phi)$ ya da basitçe $\boldsymbol{P}\Phi$ biçiminde yazılır. Bu nedenle Φ'ye önce $\boldsymbol{P}$ ve sonra $\boldsymbol{Q}$'yu uygularsak Φ'ye etkiyen $\boldsymbol{QP}$ anlamında $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P}(\Phi))$ ya da basitçe $\boldsymbol{QP}\Phi$ elde ederiz.

Dördeylerle ilgili bu tuhaf işaret konusunu kendi çözme yöntemim aslında her şeyi standart saat yönü anlamında kabul etmek bu "olağan" ters düzen matematiksel uzlaşıyı işlemcilerin düzenlenmesi için benimsemek olacak. Hamilton'un "Brougham Köprüsü" denklemlerinin tümünün, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$, aslında "spinör kitabımızca" sağlandığını doğrulamak okur için artık basit bir konudur. Elbette şimdi **ijk**'nin "**k**'yi izleyen **j**'yi izleyen **i**" için kullanıldığını aklımızda tutarız.[9]

11.4 Döndürmelerin oluşturulması

Döndürme açılarının çift oluşuna ilişkin, geometrik olarak uygun görülebilen bu tuhaf özellik başka bir şekilde gösterilebilir. Ne sayıda olursa olsun, (uygun, diğer bir deyişle yansımasız) döndürmeleri birbirleriyle birleştirdiğimiz durumda *herhangi bir* eksen etrafında bir döndürme elde etmemiz onlara ilişkin üç boyuttaki belirli bir özelliktir. Bu ekseni ve ayrıca döndürme miktarını basit geometrik bir biçimde nasıl bulabiliriz? Zekice bir yanıt Hamilton tarafından bulundu.[10] Bunun nasıl işlediğine göz atalım. Benim buradaki sunumum orijinal olarak Hamilton'un ortaya koyduğundan biraz farklı olacak.

---

[9] Dördeylerle ilgili çarpmayı bu şekilde göstermeyi ilk olarak kimin düşündüğünü bilmiyor olsam da J. H. Conway bunu 1978'de Helsinki'deki Uluslararası Matematikçiler Kongresi'ndeki özel gösterimlerde kullandı; ayrıca *bkz.* Newman, 1942; Penrose ve Rindler, 1948, s 41–46.

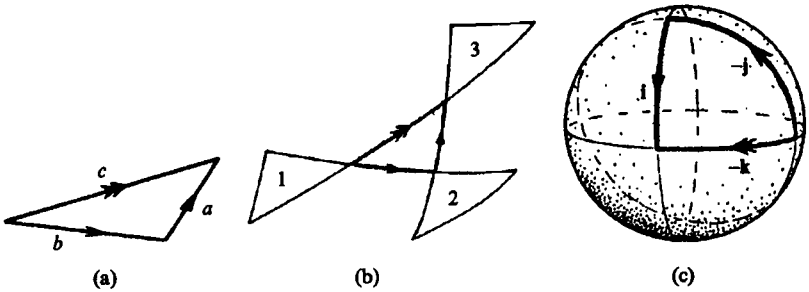
[10] *Bkz.* Pars, 1968.

Basitçe *ötelemeler* olan iki farklı yer değiştirme oluşturduğumuzda, yanıtı elde etmek için (Şekil 5.1a'da gösterilen paralelkenar yasasına eşdeğer) standart üçgen yasasını kullanabildiğimizi anımsayın. Böylece ilk ötelemeyi bir *vektör*le (ki bununla, yönelim yönü kendisi üzerindeki bir ok ile belirtilen bir yönlü doğru parçasını kastediyorum) ve ikinci ötelemeyi de, kuyruk kısmı ilk vektörün ucuyla çakışan ikinci bir vektörle gösterebiliriz. İlk vektörün kuyruğundan ikincisinin ucuna uzatılan vektör burada iki öteleme hareketinin bileşkesini temsil eder. *Bkz.* Şekil 11.4a.

Döndürmeler için de benzer bir şey yapabilir miyiz? Dikkat çekici biçimde, yapabildiğimizi görürüz. Şimdi "vektörler"i bir küre üzerine çizilmiş büyük çemberlere ait, yönelimi göstermek üzere yine bir okla çizilmiş olmak üzere, yönlü yaylar olarak düşünün. (Bir küre üzerindeki büyük çember, kürenin kendi merkezinden geçen bir düzlemle kesişimini ifade eder.) Bu tür bir "vektör yayı"nın ok yönündeki bir döndürmeyi temsil etmekte kullanılabileceğini düşünebiliriz. Bu döndürme kürenin merkezinden geçen ve okun üzerinde bulunduğu büyük çember düzlemine dik bir eksen etrafında ortaya çıkmaktadır.

İki döndürmenin bileşkesini, daha önceden sıradan döndürmeler için sahip olduğumuz duruma benzer bir "üçgen yasası"yla ortaya konmuş biçimde gösterildiğini düşünebilir miyiz? Aslında yapabiliriz ama burada bir hile söz konusudur. "Vektör yayı"mız aracılığıyla gösterilmesi gereken döndürme, yayın uzunluğuyla gösterilen açının tam olarak *iki katı*na eşit bir açı boyunca gerçekleşmelidir. (Tutarlılık için küreyi birim yarıçaplı olarak kabul edebiliriz. Böylece yayla gösterilen açı basit biçimde yay üzerinde ölçülen uzunluk olur. "Üçgen yasası"nın geçerli olması için döndürmenin gerçekleştirileceği açının ölçüsü bu yay uzunluğunun iki katı olmalıdır.) Bunun işlerliğine ilişkin neden Şekil 11.4b'de gösteriliyor. Merkezdeki eğri çizgisel (küresel) üçgen "üçgen yasası"nı örnekler ve dıştaki üç üçgen, sırasıyla bu üçgene ait köşelerdeki yansımalardır. İki başlangıç döndürmesi bu dış üçgenlerden birini bir ikincisine ve sonra ikincisini üçüncüsüne götürür; ikisinin bileşkesi olan döndürme ilkini üçüncüsüne götürür. Bu döndürmelerin her birinin, orijinal eğri çizgisel üçgende kendilerine karşılık gelen yay uzunluklarının tam olarak iki katına eşit bir açı boyunca gerçekleştiğini belirtelim.[11.5] Bu oluşturmanın bir değişik biçimini §18.4'te, göreli fizikte göreceğiz. (Şekil 18.13).

[11.5] Bu oluşturmayla ilgili Hamilton'un orijinal versiyonunda, buna "ikili" olan ve köşeleri kürenin problemde içerilen üç döndürme ekseniyle buluşma noktaları olan küresel üçgen kullanılır. Bunun nasıl işlediğine ilişkin (belki metinde verilmiş argümanı "ikili hale getirerek), döndürme miktarları bu ikili üçgenin *açıla*rının iki katı olarak gösterilmek üzere, dolaysız bir gösterim sunun.



Şekil 11.4 (a) Öklitçi düzlemde yönlü doğru parçalarıyla gösterilen ötelemeler. Çift oklu parça üçgen yasası uyarınca diğer ikisinin bileşkesini gösterir. (b) Öklitçi 3–uzaydaki döndürmelere ilişkin parçalar artık birim küre üzerine çizilmiş, her biri yay tarafından (kendi düzlemine dik bir eksen etrafında) ölçülen açının *iki katı* boyunca bir döndürmeyi temsil eden büyük çember yaylarıdır. Bunun nasıl çalıştığını görmek için yaylar tarafından oluşturulan üçgenleri sırasıyla her bir köşede yansıtın. İlk döndürme üçgen 1'i üçgen 2'ye, ikincisi üçgen 2'yi üçgen 3'e ve bileşke üçgen 1'i üçgen 3'e götürür. (c) Özel bir durum olarak dördeylerle ilgili ($\mathbf{i}(-\mathbf{j}) = -\mathbf{k}$) biçiminde) $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ bağıntısı. Döndürmelerin her biri π boyuncadır fakat yarı–açı $\frac{\pi}{2}$ ile gösterilir.

Bunu yukarıda ele aldığımız belirli durumda inceleyebiliriz ve dördeylerle ilgili $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ bağıntısını göstermeye çalışabiliriz. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ ile tanımlı döndürmelerin her biri bir π açısı boyuncadır. Böylece, "üçgen yasası"nı betimlemek üzere bu açının, $\frac{1}{2}\pi$, tam yarısı olan yay uzunluklarını kullanırız. Bu durum Şekil 11.4c'de etraflıca gösteriliyor (açıklık gerekirse, $\mathbf{i}(-\mathbf{j}) = -\mathbf{k}$ biçiminde). Ayrıca $\mathbf{i}^2 = -1$ bağıntısını, küre üzerindeki bir noktadan kendi *antipod* ("-1"i gösteren) noktasına uzatılan π boyundaki büyük bir çember yayının esasen, her birinin küreyi kendi orijinal konumuna geri getiren birer döndürme olması gerçeğine karşın sıfır ya da 2π boyundaki bir yaydan farklı olduğu gerçeğiyle sunulmuş olarak görebiliriz. "Vektör yayı" açıklaması, bir "spinör nesne"nin döndürmelerini doğru biçimde gösterir.

11.5 Clifford cebiri

Yüksek boyutlular ve Clifford cebiriyle ilerlemek üzere "bir eksen etrafında döndürme"nin benzerinin ne olması gerektiğini göz önüne almalıyız. Bu tür temel bir döndürme n boyutta, olağan 3–boyutlu döndürmelerde elde ettiğimiz yalnızca 1–boyutlu çizgi eksen yerine $(n-2)$–boyutlu bir uzay olan bir "eksen"e sahiptir. Bundan başka, $(n-2)$–boyutlu bir eksen etrafındaki bir döndürme, döndürmenin tümüyle eksenin yönü ve döndürme açısının niceliğiyle belirlendiği 1–boyutlu bir eksen etrafındaki olağan

bir 3–boyutlu tanıdık döndürme durumuna benzerdir. Yine, 2π açısı boyunca döndürüldüğünde kendi orijinal durumuna değil fakat bu durumun "negatif"i olarak ele aldığımız duruma dönme özelliğindeki spinör nesnelere sahibiz. 4π buyunca gerçekleşen bir döndürme bu tür bir nesneyi her zaman kendi orijinal durumuna geri getirir.

Bununla birlikte yukarıda değinilen "yeni bir bileşen" mevcuttur: 3'ten daha yüksek boyutta, $(n-2)$–boyutlu eksen etrafındaki temel döndürmelerin bileşkesinin, yine her zaman $(n-2)$–boyutlu bir eksen etrafındaki bir döndürmeye eşit olacağı doğru değildir. Bu yüksek boyutlarda genel döndürmeler (bileşkeler) bu kadar basit açıklanamaz. Bu tür bir (genellenmiş) döndürme, boyutu çok farklı değerlerde olan bir "eksen"e (diğer bir deyişle döndürme hareketince bozulmamış olarak bırakılmış bir uzaya) sahip olabilir. Böylece n–boyutlu bir Clifford cebiri için, böylesi farklı türde döndürmeleri göstermek üzere farklı türdeki kavramların bir hiyerarşisine gerek duyarız. Gerçekte, π boyunca bir döndürmeden bile daha temel bir şeyle, diğer bir deyişle $(n-1)$–boyutlu bir (hiper) düzlemdeki bir *yansıma*yla başlamanın daha iyi olduğu açığa çıkar. Böylesi iki yansımanın bileşkesi (birbirine dik böylesi iki düzleme göre), daha önceki bu temel π–döndürmelerini, yansımalar birincil işlem olmak üzere, "ikincil" işlemler biçiminde vererek π boyunca bir döndürme sağlar.[11.6]

Bu temel yansımaları $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ olarak, γ_r tüm diğerlerini yalnız bırakırken r'inci koordinat eksenini ters çevirmek üzere, işaretleriz. Uygun biçimdeki "spinör nesne"yle ilgili, onu aynı yönde iki kez yansıtmak nesnenin negatifini verir, böylece bu birincil yansımalar tarafından sağlanan n adet

$$\gamma_1^2 = -1, \gamma_2^2 = -1, \gamma_3^2 = -1, \ldots, \gamma_n^2 = -1$$

dördey benzeri bağıntıya sahip oluruz. Orijinal π–döndürmelerimizi temsil eden ikincil işlemler ayrık γ çiftlerinin çarpımlarıdır ve bu çarpımlar karşı–değişme özelliğine sahiptir (dördeylere oldukça benzer şekilde):

$$\gamma_p\gamma_q = -\gamma_q\gamma_p \quad (p \neq q).$$

Üç boyuta ilişkin belirli durumda üç farklı "ikinci derece"

$$\mathbf{i} = \gamma_2\gamma_3, \mathbf{j} = \gamma_3\gamma_1, \mathbf{k} = \gamma_1\gamma_2,$$

nicelikleri tanımlayabiliriz ve bu üç **i**, **j** ve **k** niceliklerinin dördey cebiri kurallarını (Hamilton'un "Brougham Köprüsü" denklemleri) sağladığı halihazırda sınanmıştır.[11.7]

[11.6] Öklitçi 3–uzayda, birbirine dik olmayan düzlemlerdeki iki yansımanın bileşimi olan ötelemenin geometrik doğasını bulun.

[11.7] Bunu gösterin.

n–boyutlu bir uzaya ilişkin Clifford cebirinin genel elemanı, ayrık γ kümelerinin çarpımlarının gerçel sayı katsayılarının bir toplamıdır (diğer bir deyişle doğrusal bir birleşme). Birinci derece ("birincil") işlem n adet farklı tekil γ_p niceliğidir. İkinci derece ("ikincil") işlem $\frac{1}{2}n(n-1)$ adet bağımsız $\gamma_p\gamma_q$ ($p < q$ olmak üzere) çarpımıdır; $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ adet bağımsız üçüncü derece $\gamma_p\gamma_q\gamma_r$ ($p < q < r$ olmak üzere) işlem, $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ adet bağımsız dördüncü derece işlem, vb, ve son olarak tekil n'inci derece $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_n$ işlemi mevcuttur. Bunların hepsini tekil sıfırıncı derece işlemle birlikte bir araya toplarsak toplamda

$$1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \cdots + 1 = 2^n$$

adet işlem elde ederiz[11.8] ve Clifford cebirinin genel elemanı bunların doğrusal bir birleşimidir. Böylece Clifford cebirinin elemanları §11.1'de açıklandığı anlamda, gerçeller üzerinde 2^n–boyutlu bir cebir oluşturur. Bu elemanlar özdeşliğe sahip bir halka oluşturur fakat dördeylerin aksine bir bölme halkası oluşturmaz.

Clifford cebirlerinin önemli olmasının bir sebebi spinörleri tanımlamaktaki rolünden kaynaklıdır. Fizikte spinörler, Dirac'ın elektrona ilişkin ünlü denkleminde (Dirac, 1928), elektronun durumu bir spinör niceliği olmak üzere, ortaya çıktı (*bkz.* bölüm 24). Bir spinör, üzerine Clifford cebirinin elemanlarının, ele alageldiğimiz "spinör nesne"nin temel yansıma ve döndürmelerindeki gibi işlemciler olarak etki ettiği bir nesne gibi düşünülebilir. Salt "spinör nesne" kavramı kafa karıştırıcı ve sezgisel olmayan bir şeydir ve bazı insanlar çalışmalarında saf bir (Clifford) cebirsel[11] yaklaşıma başvurmayı tercih ederler. Bu kesinlikle kendine özgü, özellikle genel ve titiz bir n–boyutlu tartışmaya ilişkin avantajları mevcuttur fakat geometriden uzaklaşmamanın önemli olduğunu hissediyorum ve burada şeylerin bu görünümlerini vurgulamaya çalıştım.

n–boyutta,[12] spinörlerin tüm uzayı (bazen *spin uzayı* olarak adlandırılır), n çift olduğunda $2^{n/2}$–boyutlu ve n tek olduğunda $2^{(n-1)/2}$–boyutludur. n çift olduğunda spinörlerin uzayı her biri $2^{(n-2)/2}$–boyutlu olan bağımsız iki uzaya (bazen "indirgenmiş spinörler"in ya da "yarı–spinörler"in uzayları olarak adlandırılır) ayrılır, bu demek olur ki tüm uzayın her bir elemanı iki elemanın toplamıdır; indirgenmiş iki uzaydan birer adet gelen iki eleman. n–boyutlu (çift) uzaydaki bir yansıma bu indirgenmiş spin uzayla-

[11.8] Bu hesaplamaların tümünü açıklayın. *İpucu:* $(1+1)^n$'yi düşünün.

[11] Pek çok fiziki probleme Clifford cebiri yoluyla bir yaklaşım için *bkz.* Lasenby vd., 2000 ve orada içerilmiş kaynakça.

[12] *Bkz.* Cartan, 1966; Brauer ve Weyl, 1935; Penrose ve Rindler, 1986, Ek; Harvey, 1990; Budinich ve Trautman, 1988.

rından birini ötekine çevirir. İndirgenmiş spin uzaylarından birinin elemanları kesin bir "aynallık"* ya da "el benzerliği"ne sahiptir; diğerininkiler ters aynallığa sahiptir. Bu durum fizikte, burada olağan 4–boyutlu uzayzaman için spinörlere atıfta bulunuyorum, derin bir öneme sahip görünür. İndirgenmiş iki spin uzayının, biri saat yönündekileri, diğeriyse saat yönünün tersindekileri belirten, her biri 2–boyutludur. Öyle görünüyor ki Doğa bu indirgenmiş iki spin–uzayının her birine farklı bir rol verir ve bu gerçek yoluyladır ki yansımayla değişmez olmayan fiziki süreçler ortaya çıkabilir. Aslında, Doğada kendi ayna–yansımaları biçiminde meydana gelmeyen temel süreçlerin gerçekten mevcut olduğuna ilişkin keşif, 20. yüzyıl fiziğinin (kuramsal olarak Chen Ning Yang ve Tsung Dao Lee tarafından öngörülüp deneysel olarak Chien-Shiung Wu ve ekibi tarafından 1957'de onaylanan) en çarpıcı (ve bazıları "şok edici" der), eşi benzeri görülmemiş keşiflerinden biriydi. Bu kurucu nitelikteki konulara ileride döneceğim (§§25.3, 4, §32.2, §§33.4, 7, 11, 14).

Spinörler ayrıca oldukça farklı bağlamlarda da teknik olarak matematiksel bir öneme sahiptir[13] (*bkz.* §§22.8–11, §§22.4, 5, §§24.6, 7, §§32.3, 4, §§33.4, 6, 8, 11) ve belirli biçimdeki hesaplamalarda pratik yararları mevcuttur. Spin–uzanın boyutuyla ($2^{n/2}$, vb) orijinal uzayın boyutu n arasındaki "üstel" ilişki nedeniyle, n makul derecede küçük olduğunda spinörlerin daha iyi pratik araçlar olması şaşırtıcı değildir. 11–boyutlu modern "M–kuramı" için spin uzayı 32 boyuta sahipken, örneğin 4–boyutlu olağan uzayzaman için indirgenmiş her bir spin uzayı yalnızca 2 boyuta sahiptir.

11.6 Grassmann cebiri

Son olarak Grassmann cebirine dönmeme izin verin. Yukarıdaki tartışmanın bakış açısından Grassmann cebirini, Clifford cebirindeki γ_1, γ_2, γ_3, ..., γ_n'ye benzer η_1, η_2, η_3, ..., η_n karşı–değişme üreten temel elemanlara sahip olduğumuz, Clifford cebirinin bozulmuş durumdaki bir türü olarak düşünebiliriz. Bununla birlikte Clifford durumundaki -1 yerine her bir η_s'nin karesi *sıfır* olur:

$$\eta_1^2 = 0, \eta_2^2 = 0, , ..., \eta_n^2 = 0.$$

Karşı–değişme kuralı

$$\eta_p \eta_q = -\eta_q \eta_p$$

---

* *Chirality*: sol veya sağ ellilik. Ayna simetrisi kendisine eşit olmayan nesneler için kullanılır –yn.

[13] *Bkz.* Lounesto, 1999; Cartan, 1966; Crumeyrolle, 1990; Chevalley, 1954; birkaç örnek için Kamberov, 2002.

Grassmann cebirinin artık Clifford cebirinden daha "sistematik" olması dışında önceki gibi geçerlidir çünkü bu denklemde "$p \neq q$"yu belirtmek durumunda değiliz. $\eta_p \eta_q = -\eta_q \eta_p$ durumu basitçe $\eta_p^2 = 0$ ifadesini yeniden ifade eder.

Aslında Grassmann cebirleri, yalnızca asgari miktarda yerel yapıya bağlı olduklarından Clifford cebirlerine göre daha basit ve daha evrenseldir. Temelde konu, "döndürme" kavramı Grassmann cebirine göre açıklanan şeyin bir parçası değilken Clifford cebirinin, sıradan döndürmelerin yansımalar yoluyla oluşturulabilmesi için "dik"in ne anlama geldiğini "bilme"ye gerek duymasıdır. Bunu başka türlü ortaya koymak gerekirse, sıradan "Clifford cebiri" ve "spinör" kavramları uzayda bir *metrik* olmasını gerektirirken bu durum bir Grassmann cebiri için gerekli değildir. (Metrikler §13.8 ve §14.7'de tartışılacak.)

Grassmann cebirinin ilgilendiği şey farklı sayılardaki boyutlara ilişkin bir "düzlem elemanı" temel fikridir. Temel nicelikler $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$'nin her birini n–boyutlu bir uzayda koordinatların, her bir η, n farklı koordinat ekseninden biriyle ilişkili olmak üzere, (yansımaya ilişkin bir hiper düzlem yerine) orijinindeki bir *çizgi elemanını* ya da "vektör"ü tanımladığını düşünelim. (Grassmann cebiri diklikle ilgili olmadığından dolayı bunlar "eğik" eksenler olabilir; *bkz.* Şekil 11.5.) Genel vektör, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayılar olmak üzere, orijindeki

$$\boldsymbol{a} = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_n\eta_n$$

gibi bir birleşim olacaktır. (Alternatif biçimde karmaşık bir uzay durumunda a_i karmaşık sayı olabilir fakat gerçel ve karmaşık durumlar cebirsel olarak ele alındıklarında benzerdir.)

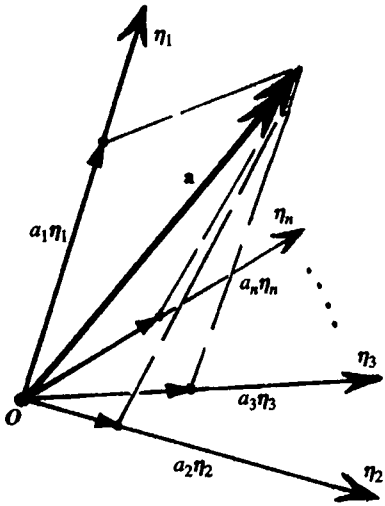
$$\boldsymbol{b} = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \cdots + b_n\eta_n$$

olmak üzere böylesi iki $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ vektörüyle kapsanan 2–boyutlu düzlem elemanını açıklamak üzere $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$'ye ilişkin *Grassmann çarpımını* oluştururuz. Bundan böyle bu çarpım için sembollerin yan yana kullanımı yerine (standart) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ ("kama çarpımı" denilen) notasyonunu benimseyeceğim. Bu nedenle daha önce $\eta_p \eta_q$ olarak yazdığım şeyi artık $\eta_p \wedge \eta_q$ olarak göstereceğim. Bu η'lerin karşı–değişme özelliği böylece artık

$$\eta_p \wedge \eta_q = -\eta_q \wedge \eta_p$$

şeklinde yazılır. $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ çarpımını tanımlamak üzere dağılma kuralını benimsememiz sonucunda, rasgele $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ vektörleri için daha genel

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$$



Şekil 11.5 Grassmann cebirinin her bir temel $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ elemanı bir O başlangıç noktasında n-boyutlu bir vektör tanımlar. Bu vektörler (Grassmann cebiri ortogonallikle ilgilenmiyor olmak üzere, "eğik" eksenler olabilen) farklı koordinat eksenleri üzerinde olabilir. O'daki genel bir vektör doğrusal bir $a = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_n\eta_n$ birleşimi olabilir.

karşı–değişme özelliğini elde ederiz.[11.9] $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ niceliği $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ vektörleriyle kapsanan düzlem elemanının cebirsel bir gösterimini sunar (Şekil 11.6a). Bunun, düzlem elemanı için yalnızca bir yönelme bilgisi değil ($\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$'nin işaretinin $\boldsymbol{a}$ ya da $\boldsymbol{b}$'den hangisinin önce geldiğiyle ilgisi bulunduğundan) fakat ayrıca düzlem elemanına atanmış bir "büyüklük" bilgisi de içerdiğini belirtelim.

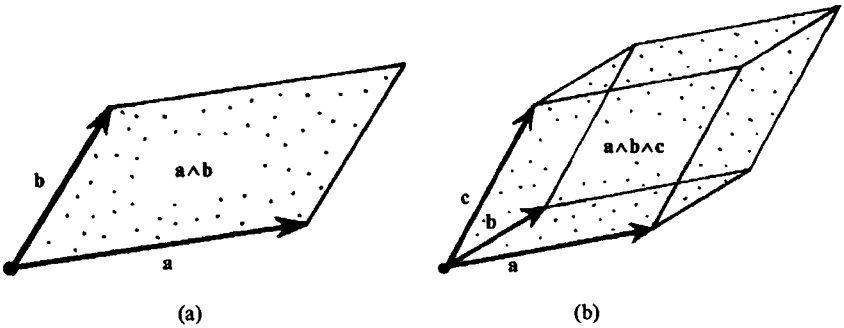
Örneğin $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ gibi bir niceliğin, $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ sırasıyla $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$'nin doğrusal birleşimi olarak sunulduğunda ortaya çıkan katsayılar olmak üzere, $\boldsymbol{a}$'nın $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ olarak ve $\boldsymbol{b}$'nin $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ olarak gösterilebilmesi yöntemiyle ilgili, nasıl bir bileşenler kümesi olarak gösterilmekte olduğunu sorabiliriz. Bu nedenle $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ niceliği $\eta_1 \wedge \eta_2$, $\eta_1 \wedge \eta_3$, vb'nin doğrusal bir birleşimi olarak sunulabilir ve ortaya çıkan katsayılara gerek duyarız. Burada belirli bir uzlaşı seçimi içerilmiştir çünkü örneğin, $\eta_1 \wedge \eta_2$ ve $\eta_2 \wedge \eta_1$ bağımsız değildir, böylece bunlardan birini ya da diğerini seçip ayırmak isteyebiliriz. Tüm terimleri içermenin ve ilgili katsayıyı aralarında eşit biçimde bölmenin daha sistematik olduğu görülür. Bu durumda $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$'nin katsayılarının, indisler etrafındaki köşeli parantezler

$$A_{[pq]} = \frac{1}{2}(A_{pq} - A_{qp})$$

ve bundan dolayı

$$a_{[p}b_{q]} = \frac{1}{2}(a_p b_q - a_q b_p)$$

[11.9] Bunu gösterin.



Şekil 11.6 (a) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ niceliği bağımsız $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ vektörleriyle kapsanan (yönlü ve ölçekli) düzlem elemanını gösterir. (b) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ üçlü Grassmann çarpımı bağımsız $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{c}$ vektörleriyle kapsanan 3–elemanı temsil eder.

ile tanımlanan karşı–simetrikliği göstermek üzere, değişik $a_{[p}b_{q]}$ niceliklerı olduğunu görürüz.[11.10]

3–boyutlu bir "düzlem elemanı"ndan ne haber? $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{c}$'yi bu 3–elemanı kapsayan bağımsız üç vektör şeklinde kabul etmek yoluyla, bu 3–elemanı göstermek üzere $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ *üçlü* Grassmann çarpımını

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$$

şeklindeki karşı–değişme özelliklerini bularak oluşturabiliriz (*bkz.* Şekil 11.6b). $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$'nin *bileşenleri* yukarıdakiyle uyumlu olarak, köşeli parantezler sağ taraftaki ifadede gösterildiği gibi yine karşı–simetrikliği temsil etmek üzere,

$$a_{[p}b_q c_{r]} = \frac{1}{6}(a_p b_q c_r + a_q b_r c_p + a_r b_p c_q - a_q b_p c_r - a_p b_r c_q - a_r b_q c_p)$$

şeklinde alınır.

Benzer ifadeler, r tüm uzayın n boyutuna dek sıralanmak üzere genel r–elemanlarını tanımlar. r'inci derece kama çarpımı bileşenleri tekil vektörlerin karşı–simetrik hale getirilmiş çarpımlarını alarak elde edilir.[11.11], [11.12] Aslında Grassmann cebiri rasgele (sonlu) boyutlara ilişkin temel geometrik doğrusal elemanları açıklamakta güçlü araçlar sunar.

Grassmann cebiri (r ifade içinde $\boldsymbol{\eta}$'nın "kama çarpımı"na uğramış haldeki sayısı olmak üzere) r'inci derece elemanlar barındırması anlamında

---

[11.10] Bunun nasıl meydana geldiğini görmek için $n = 2$ durumunda $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$'yi ayrıntılı olarak yazın.

[11.11] Bu ifadenin dört vektörlü bir kama çarpımı durumundaki halini yazın.

[11.12] Kama çarpımının $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$'nın kama çarpımında içerilen herhangi başka bir vektörün herhangi bir katıyla toplamıyla yer değiştirdiğinde değişmemiş olarak kaldığım gösterin.

derecelendirilmiş bir cebirdir. r sayısı ($r = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ olmak üzere) Grassmann cebirindeki elemanın *derecesi* olarak adlandırılır. Bununla birlikte r dereceli cebirin genel elemanının basit bir kama çarpımı ($r = 3$ durumunda $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ gibi) olmasına gerek yoktur fakat böylesi ifadelerin bir toplamı olabileceği belirtilmelidir. Bu yüzden Grassmann cebirinin geometrik r–elemanları dolaysız biçimde açıklamayan pek çok elemanı mevcuttur. "Geometrik olmayan" bu tür Grassmann elemanlarının rolü daha sonra ortaya çıkacaktır (§12.7).

Genelde, $\boldsymbol{P}$, p derecesinin bir elemanı ve $\boldsymbol{Q}$, q derecesinin bir elemanıysa onlara ilişkin $p + q$ dereceli $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$ kama çarpımını, $P_{a\ldots c}$ ve $Q_{d\ldots f}$ sırasıyla $\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$'nun bileşenleri olmak üzere, $P_{[a\ldots c}Q_{d\ldots f]}$ biçiminde bileşenlere sahip olarak tanımlarız. Böylece

$$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} = \begin{cases} +\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}, p, q \textit{ ya da ikisi de çiftse} \\ -\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}, p \textit{ ve } q\textit{'nun ikisi de tekse} \end{cases}$$

ifadesini buluruz.[11.13], [11.14] Sabit bir r derecesinin elemanları toplamı yine r derecesinin bir elemanıdır; ayrıca farklı dereceli elemanları da herhangi belirli bir dereceye sahip olmayan "karışık" bir nicelik elde etmek üzere de toplayabiliriz. Buna rağmen Grassmann cebirinin bu tür elemanları böylesi dolaysız yorumlara sahip değildir.

[11.13] Bunu gösterin.

[11.14] p tekse, $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{P} = 0$ sonucunu çıkarın.

12

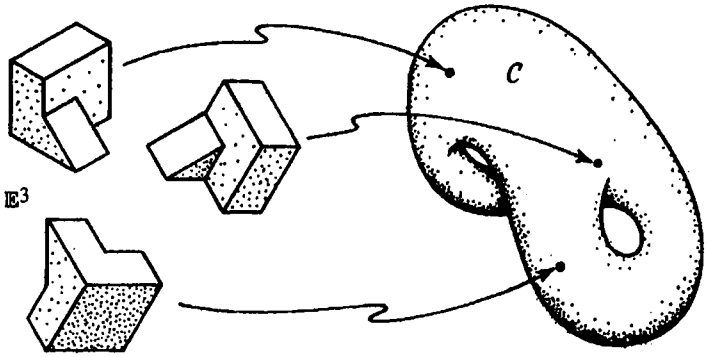
n BOYUTLU MANİFOLDLAR

12.1 Yüksek boyutlu manifoldları niçin çalışmalı?

Artık, n, boyut olarak herhangi pozitif bir tamsayı (ya da hatta, tekil bir noktayı bir 0–manifold oluşturur olarak düşünürsek sıfır bile) olabilmek üzere, yüksek boyutlu manifoldların oluşturulmasında uygulanan genel yönteme gelelim. Bu, temel fiziğin modern kuramlarının neredeyse tümü için gerekli bir kavramdır. Okur, olağan uzayzaman yalnızca dört boyuta sahip olduğundan, n'nin 4'ten büyük olduğu durumlardaki n–manifoldları ele almanın fiziki olarak nasıl bir anlamı olduğunu merak edebilir. Gerçekte, örneğin sicim kuramı gibi pek çok modern kuram, boyutu 4'ten çok daha büyük olan bir "uzayzaman" içinde çalışır. Bu tür bir şeye bu genel fikrin akla uygunluğunu fiziki olarak incelemek üzere daha sonra (§15.1, §§31.4, 10–12, 14–17) geleceğiz. Bununla birlikte gerçek "uzayzaman"ın bir n–manifold olarak uygun biçimde açıklanıp açıklanamayacağına ilişkin soruyla oldukça ilgisiz biçimde, n–manifoldların genel olarak fizikte ele alınmasının oldukça farklı ve ilgi çekici başkaca nedenleri de mevcuttur.

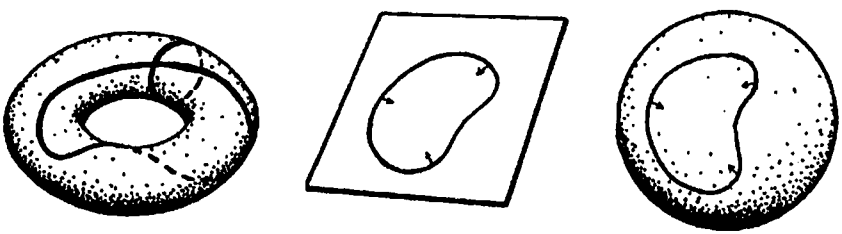
Örneğin, Öklitçi 3–uzaydaki, bununla farklı noktaları cismin farklı fiziki konumlarını temsil eden bir $\mathcal{C}$ uzayını kastediyorum, sıradan katı bir cismin *düzenleme uzayı* Öklitçi olmayan bir 6–manifolddur (*bkz.* Şekil 12.1). Neden altı boyutlu? Kütleçekim merkezi konumunda üç boyut ve cismin dönme yöneliminde üç boyut daha mevcuttur.[12.1] Neden Öklitçi olmayan? Bunun pek çok sebebi var fakat özellikle en çarpıcılarından biri, onun *topolojisinin* bile Öklitçi 6–uzaydan farklı olmasıdır. $\mathcal{C}$'ye ilişkin bu "topolojik olarak önemsiz olmayış" basit olarak uzayın, cismin *dönme* yönelimine atfedilen 3–boyutlu görünümünde ortaya çıkar. Bu 3–uzaya $\mathcal{R}$ diyelim ve böylece $\mathcal{R}$'nin her bir noktası cismin belirli bir dönme yönelimini temsil etsin. "Cismi"mizi (elbette açılmamış biçimde durması gereken, aksi halde sayfalarının hareketi sonucu düzenleme uzayının çok daha fazla boyuta sahip olacağı) o kitap olarak kabul edeceğiz.

[12.1] Bu boyut hesabını daha açık biçimde açıklayın.



Şekil 12.1 Noktalarının her biri Öklitçi 3–uzayda, $\mathbb{E}^3$, verili katı bir cismin olası konumlarını temsil eden $\mathcal{C}$ düzenleme uzayı: $\mathcal{C}$ Öklitçi olmayan bir 6–manifolddur.

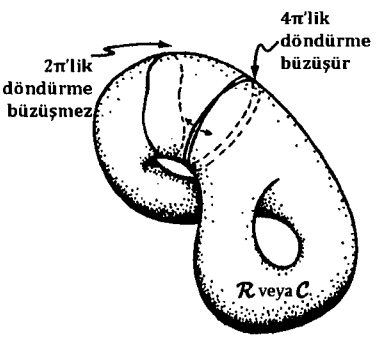
"Topolojik olarak önemsiz olmayış"ın farkına nasıl varmaktayız? Bunun bir 3– ya da 6–manifold için kolay bir konu olmadığını düşünebiliriz. Bununla birlikte bu tür şeylerin doğrusunu öğrenmek üzere pek çok matematiksel yöntem mevcuttur. Riemann yüzeylerine ilişkin §8.4'teki incelememizde (*bkz.* Şekil 8.9), 2–yüzeylilerin topolojik olarak önemsiz olmayan çeşitli türlerini ele aldığımızı anımsayın. Bu tür yüzeylerin (Riemann) küresinden ayrı olarak en basiti (cins 1 yüzeyindeki) torustur. Torusu küreden nasıl ayırt edebiliriz? Bunun bir yolu yüzey üzerinde kapalı döngüleri göz önüne almaktır. Torus üzerine çizilebilen ve onları, (bir nokta haline gelecek şekilde) büzüşene kadar, küre üzerindeki kapalı her döngü bu biçimde büzüştürülebilirken sürekli biçimde deforme etmenin hiçbir yolu bulunmayan döngülerin varlığı, sezgisel olarak açıktır (*bkz.* Şekil 12.2). Ayrıca Öklitçi düzlem üzerindeki döngülerin de tümü büzüştürülebilir. Küre



Şekil 12.2 Torus üzerindeki bazı döngüler yüzey içinde kalarak (tekil bir noktaya) sürekli biçimde büzüşemezken düzlem ya da küre üzerindeki kapalı her döngü büzüşebilir. Bu nedenle düzlem ve küre basit bağlantılı fakat torus (ve yüksek cinse sahip yüzeyler) çoklu bağlantılıdır.

ve düzlem için, kendileriyle ilgili bu "büzüşebilme" özelliğinin erdemi dolayısıyla *basit bağlantılı* deriz. Öte taraftan toruslar (ve yüksek cinse sahip yüzeyler) büzüşebilir olmayan döngülerin varlığı nedeniyle *çoklu bağlantılıdır*.[1] Bu bize, torusu (ve yüksek cinse sahip yüzeyler) küre ve düzlemden ayırt etmeye ilişkin yüzeyin kendisi içinden anlaşılır bir yöntem sağlıyor.

3–manifoldlu $\mathcal{R}$'nin topolojisini Öklitçi 3–uzayın "önemsiz" topolojisinden ya da 6–manifoldlu $\mathcal{C}$'nin topolojisini Öklitçi 6–uzayın topolojisinden ayırt etmekte aynı fikri uygulayabiliriz. §11.3'teki gibi sabit bir yapıya sanal bir kemerle iliştirilmiş olarak resmettiğimiz "kitabımıza" geri dönelim. Kitabın her bir bireysel dönme yönelimi $\mathcal{R}$'deki ilgili noktayla gösterilmektedir. Kitabı sürekli bir biçimde kendi orijinal dönme yönelimine geri gelecek şekilde 2π boyunca döndürürsek bu hareketin $\mathcal{R}$'deki belirli bir kapalı döngüyle temsil edildiğini görürüz (*bkz.* Şekil 12.3). Bu kapalı döngüyü, (tekil bir noktaya) büzüşene dek kesintisiz bir biçimde deforme edebilir miyiz? Bu tür bir döngü deformasyonu, kitabımızı döndürmenin, sonuçta o bir hareketsizlik haline gelene kadar dereceli bir değişimine karşılık gelir fakat (gerçek bir kemer olarak da kavrayabileceğimiz) sanal bir kemer bağlayışımızı hatırlayın. 2π'lik döndürmemiz kemeri bükülü bırakır fakat bu durum kitabı hareketsiz bıraktığımızda, kesintisiz bir kemer hareketiyle tersine çevrilemez. Şu halde bu 2ğ'lik büküm, kitap döndürmenin dereceli deforme edilişi boyunca aynı kalmalıdır (ya da 2π'lik bir döndürmenin tek katına dönüştürülmelidir), böylece 2π'lik döndürmenin as-

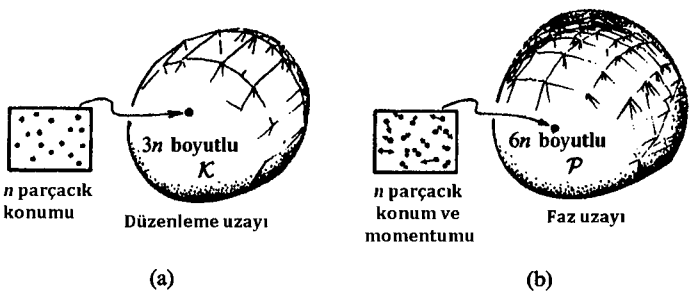


Şekil 12.3 Çoklu bağlantılılık kavramı, Şekil 12.2'de gösterildiği üzere 3–manifoldlu $\mathcal{R}$'nin (döndürme uzayı) ya da 6–manifoldlu $\mathcal{C}$'nin (düzenleme uzayı) topolojisini Öklitçi 3–uzayın "önemsiz" topolojisinden ayırt eder. $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{C}$ üzerinde 2π'lik kesintisiz bir döndürmeyi temsil eden bir döngü bir noktaya dek büzüşemez, böylece $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{C}$ çoklu–bağlantılıdır. Buna rağmen iki kez çaprazlandığında (4π'lik bir döndürmeyi temsil eden) döngü bir noktaya büzüşür (topolojik torsiyon). Bkz. Şekil 11.3. (Not. yalnızca şematik olarak çizilmiş 2–manifold, gerçekte bu özelliğe sahip değildir.)

[1] Bu "büzüşebilirlik", zıt biçimde yönlenmiş döngü parçalarının "iptal"ine izin verilmeyecek şekilde, *homotopi* anlamında, *bkz.* §7.2, Şekil 7.2, kabul edilir; böylece çoklu bağlantılılık homotopi kuramının bir parçasıdır. *Bkz.* Huggett ve Jordan, 2001; Sutherland, 1975.

lında bir döndürmeme durumuna kesintisiz biçimde deforme edilebilmesinin olanaksızlığı sonucunu çıkarırız. Böylece bununla bağlantılı olarak $\mathcal{R}$ üzerindeki seçili kapalı döngümüzün büzüşene dek kesintisiz biçimde deforme edilmesi olası değildir. Bu nedenle 3–manifoldlu $\mathcal{R}$ çoklu bağlantılı ve böylece basit bağlantılı Öklitçi 3–uzaydan (ya da 6–uzay) topolojik olarak farklı olmalıdır.[2]

$\mathcal{R}$ ve $\mathcal{C}$ uzaylarının çoklu bağlantılılığının torus durumunda meydana gelenden daha ilginç bir doğada olduğu belirtilebilir. 2π'lik döndürmeyi temsil eden döngümüz, onun etrafında iki kez ilerlersek (4π'lik bir döndürme) artık kesintisiz biçimde bir noktaya deforme edile*bilecek* bir döngü elde ettiğimiz türdeki tuhaf özelliğe sahiptir.[12.2] (Bu kesinlikle torusta meydana gelmez.) $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{C}$'deki döngülerin bu tuhaf özelliği *topolojik torsiyon* olarak adlandırılır. Tüm bunlardan görürüz ki, yalnızca olağan uzayzamandan daha fazla boyuta sahip olan değil fakat ayrıca önemsiz olmayan topolojiye de sahip olabilen 6–manifoldlu $\mathcal{C}$ gibi uzayları çalışmak fiziki ilgi konusudur. Çok büyük boyutlu uzaylar düzenleme uzayı olarak ve ayrıca çok sayıda tekil parçacık içeren sistemlere ilişkin *faz uzayları* de-



Şekil 12.4 (a) 3–uzaylı bir bölgedeki n adet nokta parçacıklı bir sistem için $\mathcal{K}$ düzenleme uzayı, $\mathcal{K}$'nin her bir tekil noktası n parçacığın tümünün konumunu göstermek üzere $3n$ boyuta sahiptir. (b) $\mathcal{P}$ faz uzayı, her bir noktası n parçacığın tümünün konum ve momentumunu göstermek üzere $6n$ boyuta sahiptir. (Not. momentum = hız çarpı kütle.)

---

[2] Açık konuşmak gerekirse bu argüman, kemerin uçları sabit tutulursa 2π'lik bükümün kesintisiz biçimdeki bir hareketle tersine çevrilemeyeceğine ilişkin herhangi tatmin edici bir neden sunmamamdan dolayı eksiktir. *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984, s. 41–44.

dipnot 2'ye bağlı alıştırma: Olağan 3–uzaydaki bir döndürmeyi, döndürme açısına eşit uzunluktaki döndürme ekseni boyunca uç veren bir vektör olarak temsil ederek $\mathcal{R}$ topolojisinin olağan bir küreyle, kürenin her bir noktası kendi antipodal noktasıyla tanımlanmak üzere, sınırlanmış (π yarıçaplı) katı bir top biçiminde açıklanabileceğini gösterin. 2π'lik bir döndürmeyi temsil eden kapalı bir döngünün niçin sürekli biçimde bir noktaya deforme edilemeyeceğini göstermek üzere dolaysız bir argüman verin.

[12.2] Bunun nasıl yapıldığını, örneğin $\mathcal{R}$'nin alıştırma [12.8]'de verilmiş gösterimine başvurarak gösterin.

nen şey olarak da ortaya çıkabilir. Bir gazın, gaz parçacıkları 3 boyutlu uzaydaki tekil noktalar biçiminde tanımlanmak üzere, $\mathcal{K}$ düzenleme uzayı, N gaz içindeki parçacık sayısı olmak üzere, $3N$ boyutludur. $\mathcal{K}$'nin her bir noktası, her parçacığın konumunun bireysel olarak belirlendiği bir gaz düzenlemesini temsil eder (Şekil 12.4a). Gazın $\mathcal{P}$ faz uzayı durumunda ayrıca her parçacığın, bir vektör niceliği olan *momentum*unu da takip etmek durumundayız, böylece toplam boyut $6N$ olur. Bu durumda $\mathcal{P}$'nin her bir tekil noktası, yalnızca gaz içindeki tüm parçacıkların konumlarını değil fakat ayrıca her bir parçacığın hareketini de gösterir (Şekil 12.4b). Bir yüksük dolusu bildiğimiz havada yaklaşık 10^{19} adet molekül bulunur[3] ve böylece $\mathcal{P}$ 60 000 000 000 000 000 000 gibi bir boyuta sahiptir! Faz uzayları çok parçacık içeren fiziki sistemlerin davranışlarını çalışmakta özellikle yararlıdır, öyleyse bu tür büyük boyutlu uzaylar fiziki olarak oldukça anlamlıdır.

12.2 Manifoldlar ve koordinat yamaları

Şimdi bir n–manifoldun yapısının matematiksel olarak nasıl ele alınabileceğine bakalım. n–manifoldlu bir $\mathcal{M}$, 8 ve 10. bölümlerde (*bkz.* §10.2) birkaç koordinat yamasından oluşturduğumuz $\mathcal{S}$ yüzeyine tümüyle benzer biçimde oluşturulabilir. Bununla birlikte şimdi, her bir yamada sayıların yalnızca bir (x, y) ya da (X, Y) çiftinden daha fazla koordinata gerek duyarız. Aslında yama başına, n herhangi pozitif bir tamsayı olabilecek şekilde sabit bir sayı, $\mathcal{M}$'nin boyutu, olmak üzere, n adet koordinata gerek duyarız. Bu nedenle uygun olan her bir koordinat için ayrı bir harf kullanmama fakat farklı

$$x^1,\ x^2,\ x^3, \ldots, x^n$$

koordinatlarımızı sayısal bir (üst) indis kullanarak ayırt etmektir. Burada kafanız karışmasın. Bunların tekil bir x niceliğinin farklı kuvvetleri olması gerekmez, onlar ayrı bağımsız gerçel sayılardır. Okur, bir alt indis yerine (örneğin $x_1, x_2, \ldots, x_n$), örneğin x^3 koordinatıyla bir x niceliğinin küpü arasında kaçınılmaz bir karışıklığa yol açan üst indis kullanımı yoluyla kasıtlı biçimde, açıkça bir şaşırtmaca istememi tuhaf bulabilir. Bu okurlar aslında kafalarının karışmasında haklıdır. Ben de bunu yalnızca kafa karıştırıcı bulmuyorum fakat ayrıca zaman zaman gerçek biçimde sinir bozucu da buluyorum. Bazı tarihi nedenlerle klasik tensör analizine iliş-

[3] Burada molekülleri nokta parçacıklar olarak ele alıyoruz. $\mathcal{P}$'nin boyutu, iç ya da dönel serbestlik dereceli moleküller için dikkate değer biçimde daha büyüktür.

kin standart eğilimler bu biçimde gelişti. Bu eğilimler indislerin aşağı/yukarı konumlandırılmasını yöneten birbirine sıkı sıkıya bağlı kuralları içeriyordu ve koordinatların kendileri üzerindeki indisler hakkındaki tutarlı yerleştirme üst konum olacak şekilde ortaya çıktı. (Bu kurallar aslında uygulamada iyi işler fakat eğilimlerin ters biçimde seçilmemiş olması çok yazık. Korkarım ki bu yalnızca birlikte yaşamak zorunda olduğumuz bir şey.)

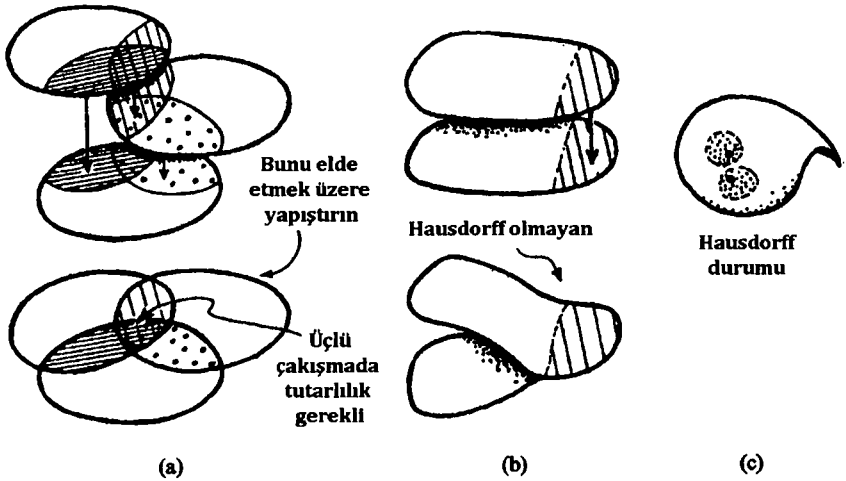
Manifoldumuz $\mathcal{M}$' yi nasıl resmetmeliyiz? Onu bir miktar koordinat yamasının, her bir yama $\mathbb{R}^n$'nin açık bir bölgesi olmak üzere, "birbirine yapıştırılmış" hali olarak düşünürüz. Burada $\mathbb{R}^n$, noktaları gerçel sayıların basit biçimde n–katı $(x^1, x^2, ..., x^n)$ olan "koordinat uzayı" yerine kullanılır. $\mathbb{R}$ §6.1'den anımsayabileceğimiz üzere gerçel sayılar sistemini temsil eder. Yapıştırma işlemimizde, $\mathcal{M}$ manifoldunda bir koordinat yamasının diğer biriyle çakıştığını gördüğümüz her yerde, bir yamadaki koordinatları diğer bir yamadaki koordinatlar biçiminde ifade eden *geçiş fonksiyonları* var olacaktır. Bu geçiş fonksiyonları kendi aralarında tüm işlemin tutarlılığını sağlamak üzere belirli koşulları sağlamak zorundadır. İşlem Şekil 12.5a 'da gösteriliyor. Bununla birlikte, bir *Haussdorff uzayı* olan standart türde bir manifold[4] üretmek için dikkatli olmalıyız. (Haussdorff olmayan manifoldlar, örneğin Şekil 12.5b'de belirtilen biçimlerle "dallanabilir", ayrıca *bkz.* Şekil 8.2c.) Bir Haussdorff uzayı, uzayın ayrı herhangi iki noktası için her ikisini de içerip kesişmeyen açık kümelerin mevcut oluşuna ilişkin tanımlayıcı özelliğe sahiptir (Şekil 12.5c).

Bununla birlikte bir $\mathcal{M}$ manifoldunun, bu bireysel yamaların nerede olduğunu ya da bir noktadaki belirli koordinat değerlerinin ne olabileceğini "biliyor" olarak düşünülmemesini fark etmek önemlidir. $\mathcal{M}$'yi düşün-

---

[4] Olağan "manifold" kavramı, ilk aşamada, $\mathcal{M}$ uzayımızın bir *topolojik uzay* olmasını ön varsayar. Bir $\mathcal{M}$ uzayına bir *topoloji* atamak ona ait hangi nokta kümelerinin "açık" biçiminde adlandırılacağını kesin biçimde belirtmektir (karşılaştırın, §7.4). Açık kümeler, onlardan herhangi ikisinin kesişiminin bir açık küme oluşu ve ne sayıda olursa olsun onların (sonlu ya da sonsuz) birliğinin yine bir açık küme olması özelliğine sahiptir. Metinde değinilen Hausdorff durumuna ek olarak, $\mathcal{M}$'nin topolojisinin belirli başka biçimlerde sınırlanmasını, özellikle "paratıkızlık" olarak adlandırılan bir beklentiyi sağlamasını beklemek olağandır. Bunun ve ilişkili diğer terimlerin anlamları için ilgilenen okuyucu Kelley, 1965; Engelking, 1968 ya da genel topoloji üzerine diğer standart metinlere başvurabilir. Yine de buradaki amacımız doğrultusunda $\mathcal{M}$'nin yalnızca $\mathbb{R}^n$'nin açık bölgelerinin yerel olarak sonsuz bir yama işinden oluştuğunu varsaymak, "yerel olarak sonsuz" her bir yamanın pek çok diğer yama tarafından yalnızca sonlu biçimde kesilmesi anlamına gelmek üzere, yeterlidir.

Bir manifoldun tanımına ilişkin bazen ortaya konan son bir gereklilik onun, yalnızca (burada boş–olmayan iki açık kümenin ayrık bir birliği olmadığı anlamında alnabilmek üzere) "tek parça"dan oluşması anlamına gelen *bağlantılı* olması gerekliliğidir. Burada bunun üzerine ısrar etmeyeceğim; bağlantılılık gerekliyse açık olarak belirtilecektir (fakat bağlantısızlığa her durumda yalnızca sonlu sayıdaki ayrı parçalar için izin verilecek).



Şekil 12.5 (a) Çakışma yamalarındaki koordinatlar arasında dönüşen geçiş fonksiyonları tüm üçlü çakışmalar üzerinde bir tutarlılık bağıntısını sağlamalıdır. (b) Yama çiftleri arasındaki (açık küme) çakışma bölgeleri uygun olmalıdır; aksi halde Hasudorff olmayan bir uzayı karakterize eden "dallanma" ortaya çıkabilir. (c) Hausdorff uzayı, herhangi ayrı iki noktanın çakışmayan komşuluklar barındırması özelliğine sahip bir uzaydır. ((b)'de "yapışık" bölümün açık bir küme olması için dallanmanın ortaya çıktığı "kenar"ı ayrı tutulmalıdır. Hausdorff durumunun boşa çıkması burası üzerinden kaynaklanır.

menin makul bir yolu onun, belli miktarda koordinat yamasından bu şekilde bir araya getirilmek yoluyla oluşturulabilmesidir fakat sonra bu koordinat yamalarının sunulduğu belirli biçimi "unutma"yı seçeriz. Manifold kendi başına matematiksel bir yapı olarak kalır ve koordinatlar yalnızca, istendiğinde bir kolaylık olarak ortaya konulabilecek yardımcılardır. Bununla birlikte bir manifolda ilişkin (birkaç alternatifi olan) kesin matematiksel tanım bizim için burada dikkat dağıtıcı olur.[5]

12.3 Skalerler, vektörler ve kovektörler

§10.2'de olduğu gibi, $\mathcal{M}$ üzerinde (bazen $\mathcal{M}$ üzerindeki bir *skaler alan* olarak adlandırılır) tanımlı bir Φ *pürüzsüz fonksiyon*una, Φ herhangi yerel bir koordinat yamasındaki n adet koordinata ilişkin pürüzsüz bir fonk-

[5] Örneğin *bkz.* Kobayashi ve Nomizu, 1963; Hicks, 1965; Lang, 1972; Hawking ve Ellis, 1973. Bir $\mathcal{M}$ manifoldunu tanımlamanın ilginç bir yöntemi $\mathcal{M}$'nin kendisini basit şekilde $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlı skaler alanların değişme cebiri yoluyla yeniden oluşturmaktır: *bkz.* Chevalley, 1946; Nomizu, 1956; Penrose ve Rindler, 1984. Bu biçimdeki düşünce değişmeli olmayan cebirlere de genellenir ve Alain Connes'in, 1994, "kuantum uzayzaman geeometrisi"ne modern yaklaşımlardan birini sunan "değişmeli olmayan geometri" kavramına yönlendirir, *bkz.* §33.1.

siyon olarak tanımlanmak üzere, sahibiz. Burada "pürüzsüz", en kullanışlı kuramı sunduğu için her zaman "C^∞–pürüzsüz" olarak kabul edilecek (*bkz.* §6.3). İki yama arasındaki her bir çakışma üzerinde, her bir yama üzerindeki koordinatlar diğerleri üzerindeki koordinatların pürüzsüz fonksiyonlarıdır, böylece Φ'nin çakışma üzerinde bir koordinatlar kümesi biçimindeki pürüzsüzlüğü, diğeri biçimindeki pürüzsüzlüğü anlamına gelir. Bu yolla, skaler bir Φ fonksiyonunun pürüzsüzlüğünün yerel ("yama biçimli") tanımı $\mathcal{M}$'nin bütününe genişler ve kısaca Φ'nin $\mathcal{M}$ üzerindeki *pürüzsüzlüğü*nden bahsedebiliriz.

Daha sonra $\mathcal{M}$ üzerindeki geometrik olarak $\mathcal{M}$ üzerinde bir "oklar" ailesi biçiminde (Şekil 10.5) yorumlanan bir şey olması gereken ξ *vektör alanı* kavramını, ξ herhangi bir (pürüzsüz) skaler Φ alanı üzerine bir türev alma işlemcisi tarzında başka bir $\xi(\Phi)$ skaler alanı üretmek için etkiyen bir şey olmak üzere, tanımlayabiliriz. $\xi(\Phi)$'nin yorumu, tıpkı §10.3'ün 2–yüzeylilerinde olduğu gibi, Φ'nin ξ'yi temsil eden oklarca belirtilen yöndeki "artış oranı" biçimindedir. Bir "türev alma işlemcisi" olarak ξ belirli tipik cebirsel bağıntıları (temel olarak daha önce §6.5'te gördüğümüz şeyler; diğer bir deyişle a sabitse $\mathrm{d}(f+g) = df + dg$, $\mathrm{d}(fg) = f\,\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}a = 0$) sağlar:

$$\xi(\Phi + \Psi) = \xi(\Phi) + \xi(\Psi),$$
$$\xi(\Phi\Psi) = \Phi\xi(\Psi) + \Psi\xi(\Phi),$$
$$\xi(k) = 0,\ k \text{ bir sabitse.}$$

Aslında bize bu cebirsel özelliklerin ξ'yi bir vektör alanı olarak karakterize etmek için *yeterli* olduğunu söyleyen bir teorem mevcuttur.[6]

Bu tür saf cebirsel araçları ayrıca, bir 1–biçimliyi ya da aynı şeyin farklı bir isimle ifade edilişi olan bir *kovektör alanını* tanımlamakta da kullanabiliriz. (Bir kovektörün geometrik anlamına kısa süre içinde geleceğiz). Bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektör alanı vektör alanlardan skaler alanlara bir gönderim olarak düşünülebilir. $\boldsymbol{\alpha}$'nm ξ üzerindeki eylemi $\boldsymbol{\alpha} \bullet \xi$ ($\boldsymbol{\alpha}$'nın ξ'yle *skaler çarpımı*) biçiminde yazılır, herhangi ξ ve η vektör alanları ve Φ skaler alanı için *doğrusallığa* sahip oluruz:

$$\boldsymbol{\alpha} \bullet (\xi + \eta) = \boldsymbol{\alpha} \bullet \xi + \boldsymbol{\alpha} \bullet \eta,$$
$$\boldsymbol{\alpha} \bullet (\Phi\xi) = \Phi(\boldsymbol{\alpha} \bullet \xi).$$

Bu bağıntılar vektörlere *ikili* nesneler olarak kovektörleri tanımlar (ve bu "ko" önekinin atıfta bulunduğu şeydir). Vektörler ve kovektörler arasındaki ilişkinin simetrik olduğu açığa çıkıyor, böylece iki kovektörün toplamı ve bir kovektörün bir skalerle çarpımının tanımlarına yol açan ilgili

[6] *Bkz.* Helgason, 2001; Frankel, 2001.

$$(\alpha + \beta)\bullet \xi = \alpha \bullet \xi + \beta \bullet \xi,$$
$$(\Phi\alpha)\bullet \xi = \Phi(\alpha \bullet \xi)$$

ifadelerine sahip oluruz. Kovektörler uzayının ikiliğini aldığımızda vektörlerin orijinal uzayını yeni baştan elde ederiz. (Diğer bir deyişle bir "kovektör" bir vektör olur.)

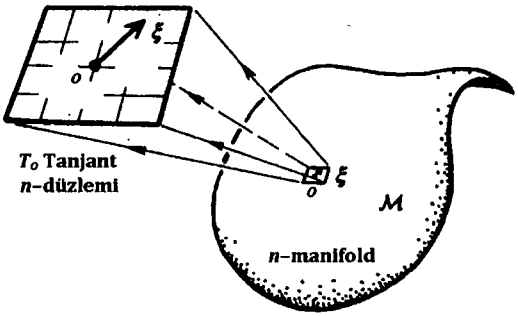
Bu bağıntıları tüm alanlarla ya da yalnızca $\mathcal{M}$'nin tekil bir noktasında tanımlı işlemle ilgili olarak kabul edebiliriz. Belirli sabit bir o noktasında alınan vektörler bir *vektör uzayı* oluşturur. (§11.1'de açıklandığı üzere bir vektör uzayında ξ ve η elemanlarını kendilerine ait $\xi + \eta$ toplamını $\xi + \eta = \eta + \xi$ ve $(\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta)$ ile birlikte oluşturacak biçimde toplayabilir ve onları skalerlerle, burada gerçel f ve g sayıları, $(f + g)\xi = f\xi + g\xi$, $f(\xi + \eta) = f\xi + f\eta$, $f(g\xi) = (fg)\xi$, $1\xi = \xi$ olmak üzere çarpabiliriz.) Bu (düz) vektör uzayını o'nun yakın komşuluğundaki manifoldun yapısını sunar biçimde değerlendirebiliriz (*bkz.* Şekil 12.6). Bu vektör uzayını $\mathcal{M}$'ye o'daki T_o *tanjant uzayı* olarak adlandırırız. T_o sezgisel olarak, o'nun $\mathcal{M}$'de gittikçe daha küçük hale gelen komşulukları git gide daha büyük büyütmelere karşılık gelecek şekilde incelendiğinde ulaşılan sınırlayıcı uzay biçiminde anlaşılabilir. Böylece bu inceleme altında o'nun $\mathcal{M}$'deki yakın çevresi sonsuz biçimde "esnetilmiş" olarak görünür. Limitte, $\mathcal{M}$'nin her tür "eğriliği", T_o'a ait *düz* yapıyı verecek şekilde "ütülenerek düzleştirilir." T_o vektör uzayı n (sonsuz) boyutuna sahiptir çünkü n *temel elemandan* oluşan bir küme, diğer bir deyişle o noktasında koordinat ekseni boyunca uç veren, T_o'a ait herhangi bir elemanın eşsiz biçimde doğrusal olarak ifade edilebileceği $\partial/\partial x^1$, ..., $\partial/\partial x^n$ niceliklerini bulabiliriz (ayrıca *bkz.* §13.5).

o'nun *ikili* vektör uzayını (o'daki kovektörlein uzayı) yukarıda açıklandığı biçimde oluşturabiliriz ve buna $\mathcal{M}$'ye o'daki T_o^* *kotanjant uzayı* denir. Bir kovektör *alanının* özel bir durumu bir Φ skaler alanının $d\Phi$ *gradyanıdır* (ya da dış türevi). (Bu notasyonla 2–boyutlu durumda zaten karşılaşmıştık, *bkz.* §10.3.) $d\Phi$ kovektörü ($\partial\Phi/\partial x^1$, ..., $\partial\Phi/\partial x^n$ bileşenleriyle birlikte)

$$d\Phi \bullet \xi = \xi(\Phi)$$

tanımlayıcı özelliğine sahiptir. (Ayrıca *bkz.* §10.4.)[12.3] Tüm kovektörler $d\Phi$ biçiminde olmasa da bazı Φ'ler için hepsi tüm tekil noktalarda bu şekilde ifade edilebilir. Bunun neden kovektör alanlarına genişlemediğini hemen göreceğiz.

[12.3] Bu biçimde tanımlanan $d\Phi$'nin aslında bir kovektörün yukarıda belirtilen "çizgisellik" gereksinimini karşıladığını gösterir.



Şekil 12.6 n-manifoldlu $\mathcal{M}$'ye o'daki T_o tanjant uzayı sezgisel olarak, o'nun $\mathcal{M}$'de gittikçe daha küçük hale gelen komşulukları git gide daha büyük büyütmelere karşılık gelecek şekilde incelendiğinde ulaşılan sınırlayıcı uzay biçiminde anlaşılabilir. (Şekil 10.6'yla kıyaslayın.) Sonuçtaki T_o düzdür: n-boyutlu vektör

Bir kovektörle bir vektör arasındaki geometrik fark nedir? $\mathcal{M}$'nin her bir noktasında (sıfır olmayan) bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörü bir $(n-1)$-*boyutlu düzlem elemanını* tanımlar. Bu $(n-1)$-düzlem elemanı içerisinde yer alan yönler, kendileriyle ilgili olarak $\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\xi} = 0$ olmak üzere, $\boldsymbol{\xi}$ vektörlerince tanımlanan yönlerdir; *bkz.* Şekil 12.7. $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\Phi$ özel durumunda bu $(n-1)$-düzlem elemanları, (Şekil 10.8a'da gösterildiği üzere "kontür çizgileri" kavramını genelleyen) Φ sabitinin $(n-1)$-boyutlu yüzey ailesine tanjant halindedir.[12.4] Bununla birlikte, bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörünce tanımlanan $(n-1)$-düzlem elemanları genelde, kendilerini sürekli biçimde bu tür $(n-1)$-yüzeyli herhangi bir aileye değmekten koruyacak bir şekilde bükülür (*bkz.* Şekil 12.8).[7]

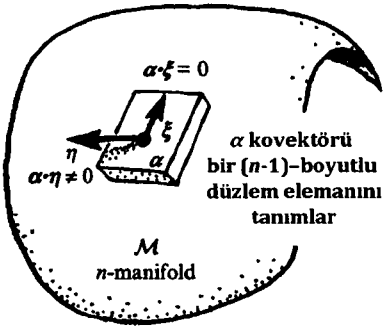
$x^1, \ldots, x^n$ koordinatlarına sahip herhangi belirli bir koordinat yamasında $\boldsymbol{\xi}$ vektörünü, ona ait bileşenler kümesiyle, bunlar $\boldsymbol{\xi}$'nin yamadaki kısmi türev alma işlemcileri

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

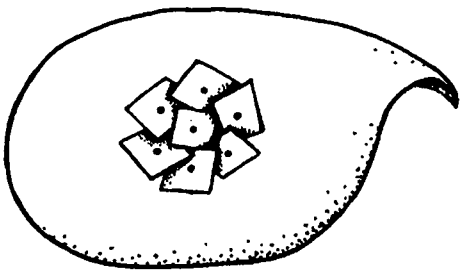
biçiminde açık gösterimindeki katsayılar kümesi olmak üzere, gösterebiliriz (*bkz.* §10.4). Belirli bir noktadaki bir vektörle ilgili, $\xi^1, \ldots, \xi^n$, yalnızca n adet gerçel sayı olacaktır; bir koordinat yamasındaki vektör alanı için onlar $x^1, \ldots, x^n$ koordinatlarının n adet (pürüzsüz) fonksiyonu olacaktır (ve okura "ξ^n"nin "ξ'nin n'inci üssü", vb, yerine kullanılmadığını anımsatalım). Her bir "$\partial/\partial x^r$" işlemcisinin "r'inci koordinat ekseni yönündeki değişim oranını alın" anlamına geldiğini anımsayın. $\boldsymbol{\xi}$'yle ilgili yukarıdaki ifade (bir işlemci olarak "ξ-yönündeki değişim oranını alın" iddiasını anımsadığımız) bu vektörü basitçe her bir koordinat ekseni boyunca uç veren vektörlerin doğrusal bir birleşimi olarak ifade eder (*bkz.* Şekil 12.9).

[12.4] Niçin?

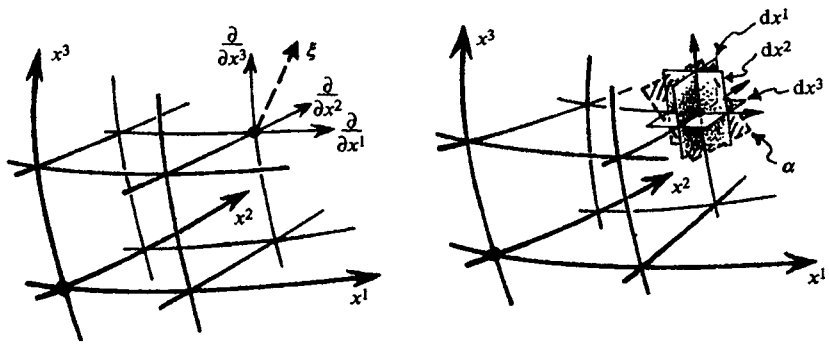
[7] Bir 1-biçimli $\boldsymbol{\alpha}$'yla tanımlanmış $(n-1)$-düzlem elemanlı aile için bir 1-parametreli $(n-1)$-yüzeyli aileye değmenin genel koşulu, $\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$ Frobenius koşuludur; *bkz.* Flanders, 1963.



Şekil 12.7 Bir $\mathcal{M}$ noktasında (sıfır olmayan) bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörü orada bir $(n-1)$-boyutlu düzlem elemanı belirtir. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ ifadesini sağlayan $\boldsymbol{\xi}$ vektörleri ondaki yönleri tanımlar.



Şekil 12.8 Bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörünce tanımlanan $(n-1)$-düzlem elemanları genelde, (skaler Φ alanı için geçerli) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}\Phi$ özel durumunda Φ = sabit olan yüzeylere (Şekil 10.8'in "kontür çizgileri"ni genelleyerek) değseler de, kendilerini sürekli biçimde $(n-1)$-yüzeyli tekil bir aileye değmekten koruyacak bir şekilde bükülür.



(a) (b)

Şekil 12.9 Koordinat yamasındaki bileşenler $(x^1, \ldots, x^n)$ (burada $n = 3$ olarak). (a) Bunlar bir $\boldsymbol{\xi}$ vektörü (alanı) için, "$\partial/\partial x^r$" "r'inci koordinat ekseni üzerindeki değişim oranı" yerine kullanılmak üzere, $\boldsymbol{\xi} = \xi^1\, \partial/\partial x^1 + \xi^2\, \partial/\partial x^2 + \cdots + \xi^n\, \partial/\partial x^n$ ifadesindeki katsayılardır $(\xi^1, \xi^2 \ldots, \xi^n)$ (ayrıca *bkz.* Şekil 10.9). (b) Bunlar bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörü (alanı) için, ∂x^r "x^r"nin gradyanı yerine kullanılmak üzere, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \mathbf{d}x^1 + \alpha_2 \mathbf{d}x^2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{d}x^n$ ifadesindeki katsayılardır $(\alpha^1, \alpha^2 \ldots, \alpha^n)$ ve x^r–eksenini dışta tutarsak tüm koordinat eksenleri tarafından kapsanan $(n-1)$–düzlem elemanına karşılık gelir.

Benzer bir biçimde bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörü (alanı) koordinat yamasında, yamadaki bileşenlerin bir kümesi $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tarafından gösterilir. Şu halde $\boldsymbol{\alpha}$'yı artık temel 1–biçimlilerin (kovektörler), $dx^1, dx^2, ..., dx^n$, doğrusal bir birleşimi olarak

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \cdots + \alpha_n dx^n$$

şeklinde ifade edilir.[8] Geometrik olarak her bir dx^r, x^r–eksenini dışta tutarsak tüm koordinat eksenleri tarafından kapsanan $(n-1)$–düzlem elemanına karşılık gelir (*bkz.* Şekil 12.10).[12.5] $\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\xi}$ skaler çarpımı

$$\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\xi} = \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 + \cdots + \alpha_n \xi^n$$

ifadesiyle verilir.[12.6]

12.4 Grassmann çarpımları

Gelin şimdi çeşitli diğer boyutlardaki düzlem elemanlarının gösterimini §11.6'da tanımlandığı üzere bir *Grassmann çarpımı* fikrini kullanarak ele alalım. Bir $\mathcal{M}$ noktasındaki bir 2–düzlem elemanı, $\boldsymbol{\xi}$ ve $\boldsymbol{\eta}$ 2–düzlem(ler)i kapsayan bağımsız iki vektör (ya da vektör alanı) olmak üzere, bir

$$\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}$$

niceliğince gösterilecektir (*bkz.* Şekiller 11.6a ve 12.10a). bir $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}$ bazen (basit) bir *ikili-vektör* olarak adlandırılır. Bileşenleri, önceki bölümün sonlarına doğru açıklandığı üzere $\boldsymbol{\xi}$ ve $\boldsymbol{\eta}$ biçimindeki

$$\xi^{[r}\eta^{s]} = \frac{1}{2}(\xi^r\eta^s - \xi^s\eta^r)$$

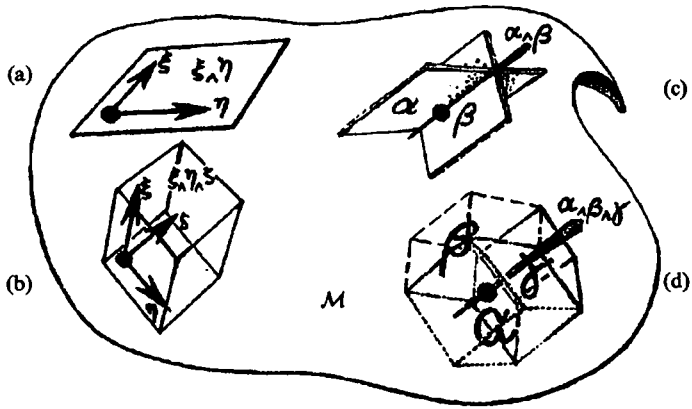
ifadelerdir. Basit $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta}$ ikili-vektörlerinin $\boldsymbol{\psi}$ toplamı da yine bir ikili-vektör olarak adlandırılır; ona ait ψ^{rs} bileşenleri r ve s'de ters simetrik olacak biçimdeki karakteristik özelliğe sahiptir, diğer bir deyişle $\psi^{rs} = -\psi^{sr}$.

---

[8] "dx^r" gibi bir şeyin sonsuz küçük bir yer değişikliğini (vektörünü) karşılaması gerektiği "klasik" fikriyle onu burada bir kovektör olarak görüyor oluşumuz arasında kolaylıkla bir karışıklık ortaya çıkar. Aslında notasyon tutarlı*dır* fakat bunu görmek açık bir zihin gerektirir! dx^r niceliği üst indisi r nedeniyle vektörel bir niteliğe sahip görünür ve aslında bu §12.8 uyarınca r soyut bir indis olarak ele alınırsa gerçekleşir. Öte taraftan r sayısal bir indis olarak alınırsa, diyelim ki $r = 2$, bu durumda $y = x^2$ ("x–iki", "x kare" değil) skaler niceliğinin gradyanı olan bir kovektör, diğer bir deyişle dx^2, elde ederiz. Bu "d"nin klasik gelenekte yapıldığı üzere bir sonsuz küçük olarak gösterilmesi yerine gradyan için kullanılması biçimindeki yorumlanışına bağlıdır. Aslında her ikisini de, r'yi soyut ve d'yi gradyan olarak ele alırsak "dx^r" basitçe (soyut) Kronecker deltası yerine kullanılır!

[12.5] Örneğin dx^2'nin bileşenlere (0, 1, 0, ..., 0) sahip olduğunu ve x^2 = sabit'e tanjant olan hiperdüzlem elemanlarını temsil ettiğini gösterin.

[12.6] $\boldsymbol{\alpha} = d\Phi$ özel durumunda, $\boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\xi}$ ile ilgili bu ifadenin $d\Phi \bullet \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\Phi)$ ifadesiyle uyumlu olduğunu zincir kuralını (*bkz.* §10.3) kullanarak gösterin.



Şekil 12.10 (a) Bir $\mathcal{M}$ noktasında, bağımsız ξ ve η vektörleriyle kapsanan bir 2–düzlem elemanı, $\xi \wedge \eta$ ikili-vektörüyle açıklanır. (b) Benzer biçimde ξ, η, ζ'yla kapsanan bir 3–düzlem elemanı $\xi \wedge \eta \wedge \zeta$'yla açıklanır. (b) İkili olarak, 1–biçimliler α, β'yla belirtilen iki adet $(n-1)$–düzlem elemanının kesişimi olan bir $(n-2)$–düzlem elemanı $\alpha \wedge \beta$ tarafından açıklanır. (d) α, β, γ ile belirtilen üç adet $(n-1)$–düzlem elemanının kesişimi olan bir $(n-3)$–düzlem elemanı $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ tarafından açıklanır.

Benzer şekilde bir 3–düzlem elemanı, ξ, η, ζ,

$$\xi^{[r}\eta^{s}\zeta^{t]} = \frac{1}{6}(\xi^{r}\eta^{s}\zeta^{t} + \xi^{s}\eta^{t}\zeta^{r} + \xi^{t}\eta^{r}\zeta^{s} - \xi^{r}\eta^{t}\zeta^{s} - \xi^{t}\eta^{s}\zeta^{r} - \xi^{s}\eta^{r}\zeta^{t})$$

bileşenlerine sahip 3–düzlemi kapsayan (Şekiller 11.6b ve 12.10b) vektörler olmak üzere basit bir

$$\xi \wedge \eta \wedge \zeta$$

*üçlü vektör*üyle gösterilir. Genel τ üçlü vektörü tümüyle ters simetrik τ^{rst} bileşenlerine sahiptir ve her zaman bu tür basit üçlü vektörlerin bir toplamıdır. Basit 4–vektörlerle gösterilen 4–düzlem elemanını tanımlamak üzere benzer şekilde devam edebiliriz ve bu böylece sürer. *Genel* n–vektör, tümüyle ters simetrik olan bileşen kümelerine sahiptir. Bu, basit n–vektörlerin bir *toplamı* olarak her zaman ifade edilebilirdir.

Burada kafa karıştırıcı sayılabilecek bir konu ortaya çıkar. Öyle görünüyor ki artık bir $(n-1)$–düzlem elemanını göstermenin iki farklı yoluna sahibiz; ya bir 1–biçimli olarak ya da $(n-1)$–düzlemi kapsayan $n-1$ adet vektörün bir arada "kamalamak" yoluyla elde edilen bir $(n-1)$–vektör niceliği olarak. Aslında bu iki farklı yolla açıklanan nicelikler arasında geometrik fakat bir biçimde incelikli bir ayrılık mevcuttur. Ayrılık, 1–biçimlinin bir tür "yoğunluk" olarak düşünülmesi gerekirken $(n-1)$–vektörün düşünülmemesi gerekliliğidir. Bunu daha açık hale getirmek üzere öncelikle genel bir p–biçimli kavramını ortaya koymak yararlı olacaktır.

Esasında, tıpkı yukarıdaki çoklu vektörlerde olduğu gibi ilerleyeceğiz fakat vektörler yerine 1–biçimlilerle başlayarak. Bir p sayısı kadar verilen $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, ..., $\boldsymbol{\delta}$ 1–biçimlilerin, bir koordinat yamasındaki (§11.6'daki genel indisler etrafındaki köşeli parantez notasyonunu kullanarak)

$$\alpha_{[r}\beta_{s}\ldots\delta_{u]}$$

ifadesiyle verilen bileşenlere sahip

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\delta}$$

kama çarpımını oluşturabiliriz. Bu tür bir nicelik bir $(n-1)$–düzlem elemanını (ya da alanını), bu eleman bireysel olarak $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, ..., $\boldsymbol{\delta}$ tarafından belirlenen çeşitli $(n-1)$–düzlem elemanlarının *kesişimi* olmak üzere, belirler (Şekil 12.10c, d). Bu nicelik bir *basit p–biçimli* olarak adlandırılır. En genel p–biçimli, p–vektörlerindeki duruma benzer biçimde kovektörlerin dolaysız bir kama çarpımı olarak ifade edilemez fakat yine de ($p = 0$, 1, $n-1$, n belirli durumları dışında) o, böyle ifade edilebilen terimlerin bir toplamıdır. Bileşenlerde, genel bir $\boldsymbol{\varphi}$ p–biçimlisi, (r, s, ..., u'nun her biri 1, ..., n aralığında olmak üzere) r, s, ..., u indislerinde, bunlar sayıca p kadar olmak üzere, *ters simetrik* olan

$$\varphi_{rs\ldots u}$$

niceliklerinin bir kümesi tarafından (her tür koordinat yamasında) gösterilir. Önceki gibi, ters simetri, herhangi bir indis çiftinin işaretini değiştirirsek daha önce sahip olduğumuzun kesin olarak negatifi olan bir nicelik elde etmemiz anlamına gelir. Bu ters simetri özelliğini köşeli parantez notasyonumuz biçiminde,

$$\varphi_{[rs\ldots u]} = \varphi_{rs\ldots u}$$

denklemiyle[12.7] ifade edebiliriz. Burada ayrıca, $\boldsymbol{\varphi}$ p–biçimlisiyle bir $\boldsymbol{\chi}$ q–biçimlisinin kama çarpımı olan $\boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{\chi}$ $(p+q)$–biçimlisinin, ters simetrileme tüm indislerin tam karşısında alınmak (ve $\chi_{jk\ldots m}$ $\boldsymbol{\chi}$'nin bileşenleri olmak) üzere,

$$\varphi_{[rs\ldots u}\chi_{jk\ldots m]}$$

bileşenlerine sahip olduğu belirtilebilir.[12.8] Benzer bir notasyon p–vektörünün bir q–vektörüyle kama çarpımı için de geçerlidir.

[12.7] Bunun niçin işlediğini açıklayın.

[12.8] $\varphi = \alpha\wedge\cdots\wedge\gamma$ ve $\chi = \lambda\wedge\cdots\wedge\nu$ olmak üzere $\varphi\wedge\chi = \alpha\wedge\cdots\wedge\gamma\wedge\lambda\wedge\cdots\wedge\nu$ gerçeğini doğrulayın.

12.5 Biçimlilerin integralleri

Şimdi bir p–biçimlisinin "yoğunluk" görünümüne geri dönelim. Olağan fizikte bir nesnenin *yoğunluğu*nun, kendisine ait kütlenin birim hacme olan oranı olduğunu anımsayın. Bu yoğunluk, cismi oluşturan maddenin bir özelliğidir. Cismin toplam kütlesini ve onu oluşturan maddenin doğasını bildiğimizde toplam kütleyi hesaplamak istersek bu "yoğunluk" kavramını kullanırız. Matematiksel olarak yaptığımız, yoğunluğunun, kapladığı hacim üzerinden integralini almaktır. Temelde yoğunluk hakkındaki nokta, onun belli bir bölge içinde integralini alabilmemize uygun türdeki nicelik oluşu, bir integral işaretinden sonra yerleştirebileceğimiz türdeki nicelik oluşudur. Bununla birlikte burada, farklı boyutlara sahip uzaylar üzerindeki integralleri ayırt etmeye biraz dikkat etmeliyiz. (Örneğin "birim alandaki kütle" "birim hacimdeki kütle"den farklı türde bir niceliktir.) Bir p–biçimlinin p–boyutlu bir uzay üzerinde integrali alınmaya uygun nicelik olduğunu göreceğiz.

Bir 1–biçimliyle başlayalım. Bu en basit durumdur. Bir niceliğin 1–boyutlu bir manifold üzerindeki, diyelim ki bir γ eğrisi üzerindeki, integraliyle ilgilenmekteyiz. §6.6'dan, sıradan (1–boyutlu) integrallerin, x, γ eğrisi üzerindeki bir parametre olarak alabileceğimiz gerçel değerli bir nicelik olmak üzere

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

biçiminde yazılan şeyler olduğunu anımsayın. "$f(x)\mathrm{d}x$" niceliğinin bir 1–biçimliyi göstermekte olduğunu düşünürüz. Aslında 1–biçimlilerle ilgili notasyon, sıradan integrallerin gösterimiyle tutarlı olabilmesi için dikkatli biçimde uygun hale getirilmiştir. Bu, 13, 14 ve 17. bölümlerde yeniden karşılaşacağımız, seçkin Fransız matematikçi Élie Cartan (1869–1951) tarafından sunulmuş *dışsal kalkülüs* olarak bilinen 20. yüzyıl analizinin bir özelliğidir ve 17. yüzyılda Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) tarafından sunulmuş "$\mathrm{d}x$" notasyonuyla zarif biçimde içiçe geçmiştir. Cartan'ın düzeninde $\mathrm{d}x$'i bir "sonsuz küçük niceliği" gösterir biçimde değil fakat bir eğri üzerinde integral alınabilecek uygun türdeki yoğunluğu (1–biçimli) sağlar biçimde düşünürüz.

Bu notasyonun güzelliklerinden birisi, çağırmayı seçtiğimiz değişkendeki her türlü değişiklikle otomatik olarak ilgilenmesidir. x parametresini, diyelim ki, başka bir X'le değiştirirsek böylece $\boldsymbol{\alpha} = f(x)\mathrm{d}x$ 1-biçimlisi, verili değişken (x ya da X) biçimindeki açık fonksiyonel ifadesi değişse de,

$\int \boldsymbol{\alpha}$'nın aynı kalması anlamında, aynı kalmış sayılır.[12.9] Ayrıca $\boldsymbol{\alpha}$ 1–biçimlisini, eğrimizin içinde bulunduğu daha büyük boyutlu bir çevresel uzay boyunca tanımlanmış olarak da değerlendirebiliriz. x ya da X parametreleri, başka bir koordinat yamasına geçtiğimizde farklı bir koordinata geçmekten memnun olacağımız bu çevresel uzaydaki bir koordinat yamasının koordinatlarından biri olarak kabul edilebilir. Her şey kendi başının çaresine bakar. Bu integrali basitçe, $\mathcal{R}$ verili γ eğrisinin üzerinde integral alınacak bir parçası yerine kullanılmak üzere,

$$\int \boldsymbol{\alpha} \text{ ya da } \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\alpha}$$

biçiminde yazabiliriz.

Yüksek boyutlu bölgeler üzerindeki integraller ne durumdadır? 2–boyutlu bir bölge için integral işaretinin ardından bir 2–biçimliye gerek duyarız.[9] Bu bir $f(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ niceliği (ya da bu tür şeylerin bir toplamı) olabilir ve $\mathcal{R}$ artık üzerinde integral alınacak, verili bir 2–yüzey içinde yer alan 2–boyutlu bir bölge olmak üzere,

$$\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{\alpha}$$

ifadesini (ya da bu tür niceliklerin bir toplamını) yazabiliriz. Yine, yüzeyin koordinatlarını yerel olarak belirten x ve y parametreleri, bu tür herhangi başka bir çiftle değiştirilebilir ve notasyon başının çaresine bakar. Bu, 2–biçimli, $\mathcal{R}$ 2–bölgesinin içinde bulunduğu daha yüksek boyutlu bir çevresel uzayda ikamet ediyorsa kusursuz derecede iyi işler. Tüm bunlar ayrıca 3–boyutlu bölgeler üzerinde integrali alınan 3–biçimliler ya da 4–boyutlu bölgeler üzerinde integrali alınan 4– biçimliler, vb için de çalışır. Koordinatlarımızı değiştirmeyi seçersek Cartan'ın türevsel biçimli notasyonundaki kama çarpımı (§12.6'nın dışsal türeviyle birlikte), her şeyin icabına bakar. (Bu durum, aksi taktirde hesaba katılması gereken "Jakobyenler" olarak bilinen tuhaf niceliklerin açık biçimdeki bahsini eler.)[12.10]

§6.6'dan, 1–boyutlu integraller söz konusu olduğunda integral almanın türev almanın tersi olduğunu ileri süren ya da başka biçimde

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

[12.9] Bunu, bir belirli $\int_a^b \boldsymbol{\alpha}$ integrali için limitlerin nasıl ele alınacağını açıklayarak gösterin.

9 Bu, "dx" benzeri niceliklerle ilgili "sonsuz küçük" bakış açısına sahip yaklaşımdan bir sapma gösterir. Burada "$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$"nin karşı değişme özellikleri bize yönlü alan ölçüleriyle ilgili yoğunluklarla çalıştığımızı söyler.

[12.10] $G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ olsun. $G^2 = \int_{\mathcal{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ifadesinin niçin doğru olduğunu açıklayın ve bunu (r,θ) kutupsal koordinatlarına dönüştürerek hesaplayın. (§5.1). Buradan hareketle $G = \sqrt{\pi}$ ifadesini kanıtlayın.

olduğunu ortaya koyan *kalkülüsün temel teoremini* anımsayın. Bunun daha yüksek boyutlu bir benzeri mevcut mudur? Aslında farklı boyutlar için değişik biçimde adlandırılan benzerler mevcuttur (Ostrogradski, Gauss, Green, Kelvin, Stokes, vb) fakat genel sonuç olarak, esasen Cartan'ın türevsel biçimli dışsal analizinin bir kısmı burada "dışsal kalkülüsün temel teoremi" olarak adlandırılacaktır.[10] Bu, Cartan'ın, şimdi döneceğimiz genel *dışsal türev* kavramına bağlıdır.

12.6 Dışsal türev

Bu önemli kavramı tanımlamanın "koordinat bağımsız" bir yolu dışsal türevi, $p = 0, 1, \ldots, n-1$ değerlerinin her biri için p–biçimlileri $(p+1)$–biçimliler şeklinde alarak, $\boldsymbol{\alpha}$ bir p–biçimli olmak ve $\mathrm{d}(\Phi)$ (ayrıca $\mathrm{d}x$'teki "d" bu aynı işlem olmak üzere $\mathrm{d}\Phi \bullet \xi = \xi(\Phi)$ ifadesinden tanımlanan) bir 0–biçimliyle (diğer bir deyişle bir skalerle) ilgili daha önceki tartışmamızdakiyle aynı anlama gelmek üzere ("Φ'nin gradyanı")

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) &= \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} + \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}, \\ \mathrm{d}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma}) &= \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma} + (-1)^p \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}, \\ \mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}) &= 0 \end{aligned}$$

özelliklerine sahip eşsiz "d" işlemcisi olarak aksiyomatik biçimde oluşturmaktır. Yukarıdaki listedeki son eşitlik sıklıkla basitçe, dışsal türev işlemcisi d'nin kilit bir özelliği olan

$$\mathrm{d}^2 = 0$$

eşitliğiyle ifade edilir. (Gösterilen ikinci eşitlikteki $(-1)^p$ teriminin tuhaf görünümünün nedeninin onu izleyen "d"nin, ters simetrik olan p indisiyle birlikte $\boldsymbol{\alpha}$'ya "doğru itilerek" gerçekten "yanlış yerde bulunuyor oluşu" olduğunu algılayabiliriz. Bu aşağıdaki indis ifadelerinde daha anlaşılır hale getiriliyor.)[12.11]

Bir *gradyan*, $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\Phi$, olan $\boldsymbol{\alpha}$ 1–biçimlisi yukarıdakiler uyarınca $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = 0$'ı sağlamalıdır.[12.12] Bununla birlikte tüm 1–biçimliler bu bağıntıyı sağlamaz. Aslında bir $\boldsymbol{\alpha}$ 1–biçimlisi $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = 0$'ı sağlıyorsa buradan bir Φ için *yerel*

---

[10] Bana N. M. J. Woodhouse tarafından önerilen bir isim. Bu teorem bazen basitçe *Stokes teoremi* olarak adlandırılır. Bununla birlikte bu durum, Stokes'un tek katkısı görünüşe göre William Thompson'dan, Lord Kelvin, aldığı bir Cambridge sınav sorusunda oluşturulduğu için özellikle uygunsuz görünür.

[12.11] Yukarıdaki bağıntıları kullanarak $\mathrm{d}(A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y) = (\partial B/\partial x - \partial A/\partial y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ olduğunu gösterin.

[12.12] Neden?

olarak (diğer bir deyişle verili herhangi bir noktayı içeren yeterli küçüklükteki açık bir kümede) $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\Phi$ biçimine sahip olduğu sonucu çıkar. Bu, bir $\boldsymbol{\beta}$ 1–biçimlisi $\mathrm{d}\boldsymbol{\beta} = 0$'ı sağlıyorsa böylece $\boldsymbol{\beta}$'nın bir $\boldsymbol{\gamma}$ $(p-1)$–biçimlisi için *yerel olarak* $\boldsymbol{\beta} = \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}$ biçimine sahip olacağını ileri süren önemli *Poincaré önsavı*nın bir örneğidir.[11, [12.13]]

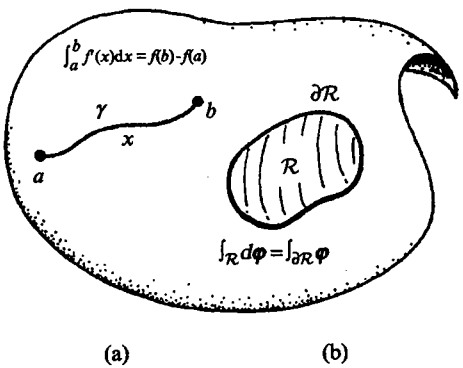
Dışsal türev bileşenler kullanılarak açıklanıp belirgin hale getirilir. Bir $\boldsymbol{\alpha}$ p–biçimlisini ele alın. $x^1, \ldots, x^n$ koordinatlarına sahip bir koordinat yamasında $\boldsymbol{\alpha}$'yı göstermek için, $\alpha_{r\ldots t}$ $(=\alpha_{[r\ldots t]}$, $r, \ldots, t$ sayıca p kadar olmak üzere; *bkz.* §11.6) bileşenlerinin ters simetrik bir kümesine sahip oluruz. Bu gösterimi, ($\sum$ sembolüyle belirtilen) toplama, her biri 1, ..., n aralığında yer alan p sayıları $r, \ldots, t$'nin tüm kümeleri üzerinde gerçekleştirilmek üzere,

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum \alpha_{r\ldots t}\mathrm{d}x^r \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^t$$

biçiminde yazabiliriz. (Bazı insanlar kama çarpımındaki ters simetrinin sıfır olmayan her bir terimin $p!$ kez yinelenmesine yol açması sonucu bu ifadede ortaya çıkan bir fazlalıktan kaçınmayı tercih ederler. Bununla birlikte, basitçe bu fazlalıkla yaşarsak notasyon daha iyi çalışır; benim daha çok tercih ettiğim seçenek de budur.) $\boldsymbol{\alpha}$ p–biçimlisinin *dışsal türevi* $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$ şeklinde yazılan ve

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha})_{\mathrm{qr\ldots t}} = \frac{\partial}{\partial x^{[\mathrm{q}}}\alpha_{\mathrm{r\ldots t]}}$$

bileşenlerine sahip bir $(p+1)$–biçimlidir. (Notasyon burada biraz tuhaf görünmektedir. İfadenin kilit özelliği olan ters simetrileme türev sembolü



Şekil 12.11 Dışsal kalkülüsün temel teoremi, $\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\partial\mathcal{R}} \boldsymbol{\varphi}$. (a) Klasik durum (17. yüzyıl), $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ve $\mathcal{R}$, bir $\boldsymbol{\gamma}$ eğrisinin $\boldsymbol{a}$'dan $\boldsymbol{b}$'ye kadarlık bölümü olmak üzere, $\int_a^b \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$'dır. Bu, $\boldsymbol{x}$ parametresiyle tanımlanır, böylece $\partial\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}$'nın $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ (negatif sayılan) ve $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (pozitif) bitiş noktalarından oluşur. (b) Bir $\boldsymbol{\varphi}$ $\boldsymbol{p}$–biçimlisi için $\mathcal{R}$ $\boldsymbol{p}$–boyutlu $\partial\mathcal{R}$ sınırına sahip tıkız bir yönlü $(\boldsymbol{p}+\mathbf{1})$–boyutlu bölgedir.

[11] *Bkz.* Flanders, 1963. Bu kitapta, "Poincaré önsavı" olarak adlandırdığım şeye *ters* olarak değinilir.

[12.13] Alıştırma [12.10]'un sonucunu kullanarak $p = 1$ için Poincaré önsavını kanıtlayın.

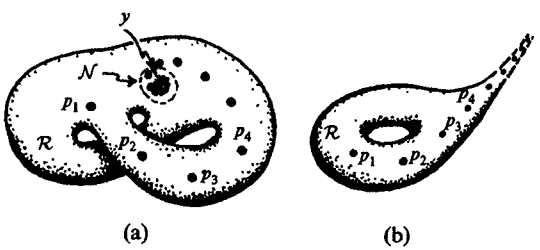
üzerindeki de dahil olmak üzere tüm $p + 1$ indisleri boyunca genişler.)[12.14], [12.15]

Artık *dışsal kalkülüsün temel teoremi*ni yazacak bir konumdayız. Bu, bir $\boldsymbol{\varphi}$ p–biçimlisi için aşağıdaki oldukça zarif (ve güçlü) denklemle ifade edilir (*bkz.* Şekil 12.11):

$$\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\partial\mathcal{R}} \boldsymbol{\varphi}.$$

Burada $\mathcal{R}$, (kendisi de tıkız olan) p–boyutlu (yönlü) sınırı $\partial\mathcal{R}$'yle gösterilen tıkız bir $(p + 1)$–boyutlu (yönlü) bölgedir.

Burada kullanıp henüz açıklamadığım çeşitli sözcükler mevcuttur. "Tıkız", amaçlarımız için, sezgisel olarak, $\mathcal{R}$ bölgesinin "sonsuza gitmemesi" ve "kendinden çıkarılmış deliklere" ya da "sınırından çıkarılmış parçalara" sahip olmaması anlamına gelir. Daha kesin olarak *tıkız* bir $\mathcal{R}$ bölgesi, buradaki amaçlarımız için,[12] $\mathcal{R}$'de bulunan noktaların herhangi sonsuz bir dizisinin $\mathcal{R}$ içinde bir noktada *birikmesi* zorunluluğunda oluşu özelliğine sahip bir bölgedir (Şekil 12.12a). Burada, bir y *birikme noktası*, $\mathcal{R}$'de y'yi içeren tüm açık kümelerin (*bkz.* §7.4) sonsuz dizinin üyelerini de içerme zorunluluğunda oluşu özelliğine sahiptir (böylece dizinin noktaları, sınırsız biçimde, y'ye git gide daha yakın hale gelir). Öklitçi sonsuz düzlem tıkız değildir fakat bir kürenin ve de torusun yüzeyi böyledir. Ayrıca kar-



Şekil 12.12 Tıkızlık. (a) Tıkız bir $\mathcal{R}$ bölgesi, $\mathcal{R}$'deki $p_1, p_2, p_3, \ldots$ noktalarının herhangi sonsuz bir dizisinin sonuçta bir y noktasında birikmek zorunda oluşu özelliğine sahiptir; böylece $\mathcal{R}$'de y'yi içeren tüm $\mathcal{N}$ açık kümeleri ayrıca dizinin (sonsuz biçimde fazla) üyelerini de içermek zorundadır. (b) Tıkız olmayan bir bölgede bu özellik yoktur.

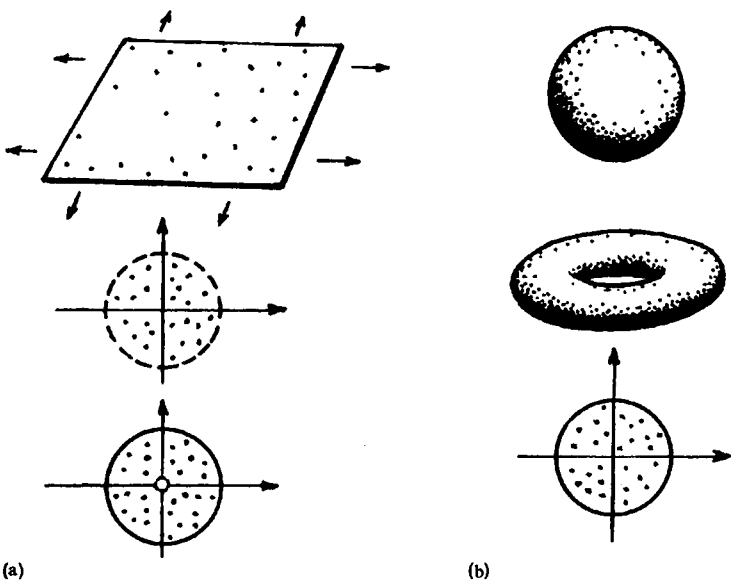
[12.14] Dışsal türevle ilgili tüm "aksiyomlar"ın dolaysız biçimde sağlandığını bu koordinat tanımını kullanarak gösterin.

[12.15] Bu koordinat tanımının, bir biçimin $\alpha_{r\ldots t}$ bileşenlerinin dönüşümü, $\boldsymbol{\alpha}$ biçiminin kendisinin koordinat değişmesi yoluyla değiştirilememesi gereksinimi tarafından tanımlanmak üzere, koordinatlarla ilgili ne gibi bir seçim yapılırsa yapılsın aynı $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$ niceliğini verdiğini gösterin. *İpucu*: Bu dönüşümün, §13.8'de verildiği üzere, $\begin{bmatrix}0\\p\end{bmatrix}$–değerlikli tensör bileşenlerinin pasif dönüşümüyle özdeş olduğunu gösterin.

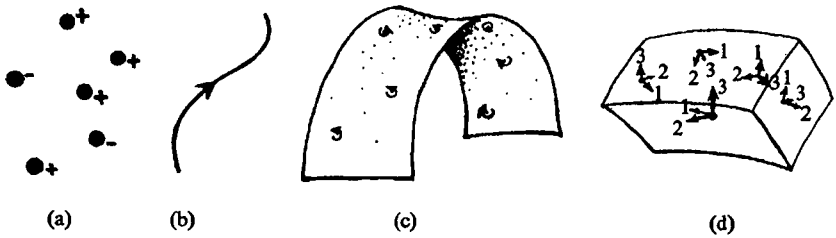
12 Bununla birlikte topolojik bir uzayın tıkızlığının metinde verilen kadar sezgisel olmayıp çok daha yaygın uygulanabilir bir tanımı mevcuttur. Bir $\mathcal{R}$ uzayı, açık kümelerin bir birliği olarak ifade edilebildiği her durumda bu kümelerin birliği hâlâ $\mathcal{R}$ olan sonlu bir toplamı mevcutsa, tıkızdır.

maşık düzlemdeki birim çember üzerinde ya da içinde bulunan noktalar kümesi de böyledir (kapalı birim disk) fakat çemberin kendisini ya da yalnızca çember merkezini kümeden çıkarırsak böylece sonuçtaki küme tıkız olmaz. *Bkz.* Şekil 12.13.

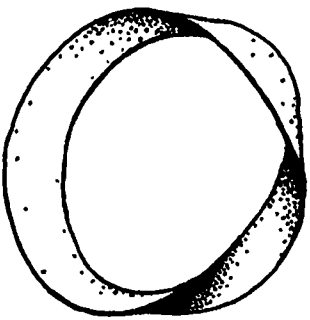
"Yönlü" terimi $\mathcal{R}$'nin her noktasında tutarlı bir "handedness" belirlenmesine karşılık gelir (Şekil 12.14). Bir 0–manifold ya da ayrık *noktalar* kümesi için yönelim her bir noktaya basitçe bir "pozitif" (+) ya da "negatif değer" (–) atar (12.14a). Bir 1–manifold ya da *eğri* için bu yönelim eğri üzerinde bir "yön" sunar. Bu, bir şekilde, eğri üzerine yönü belirtmek için bir "ok" yerleştirerek gösterilebilir (Şekil 12.4b). Bir 2–manifold için yönelim şekilsel olarak minik bir çember ya da üzerinde bir ok olan çembersel bir yay tarafından gösterilebilir (Şekil 12.14c); bu, yüzeyin bir noktasındaki bir tanjant vektörünün hangi dönmesinin "pozitif" yönde sayılacağını belirtir. Bir 3–manifold için yönelim bir noktadaki bağımsız vektörlerin hangi üçlüsünün "saat yönünde" ve hangisinin "saat yönü tersinde" olarak değerlendirildiğini belirler (§11.3 ve Şekil 11.1'i anımsayın). *Bkz.* Şekil 12.14.d. Yalnızca görece sıradışı uzaylar için tutarlı biçimde bir yönelim atamak olanaklı değildir. Bunun yapılamadığı ("yönlendirilebilir olmayan) bir örnek Şekil 12.15'te gösterildiği üzere *Möbius şeridi*dir.



Şekil 12.13 (a) Bazı tıkız olmayan uzaylar: Öklitçi sonsuz düzlem, açık birim disk ve merkezi çıkarılmış kapalı disk. (b) Bazı tıkız uzaylar: küre, torus ve kapalı birim disk. (Katı sınır çizgileri kümenin parçasıdır; kesik sınır çizgileri değildir.)



Şekil 12.14 Yönelim. (a) 0–manifold ayrık noktaların bir kümesidir; yönelim her bir noktaya basitçe bir "pozitif" (+) ya da "negatif" değer (–) atar. (b) Bir 1–manifold ya da eğri için yönelim eğri üzerinde, onun üzerine bir "ok" yerleştirerek gösterilen bir "yön" sunar. (c) Bir 2–manifold için yönelim, üzerinde bir tanjant vektörünün "pozitif" dönme yönünü belirten bir ok olan minik çembersel bir yay tarafından gösterilebilir. (d) Bir 3–manifold için yönelim bir noktadaki bağımsız vektörlerin hangi üçlüsünün "saat yönünde" olduğunu belirler (karşılaştırın Şekil 11.1).

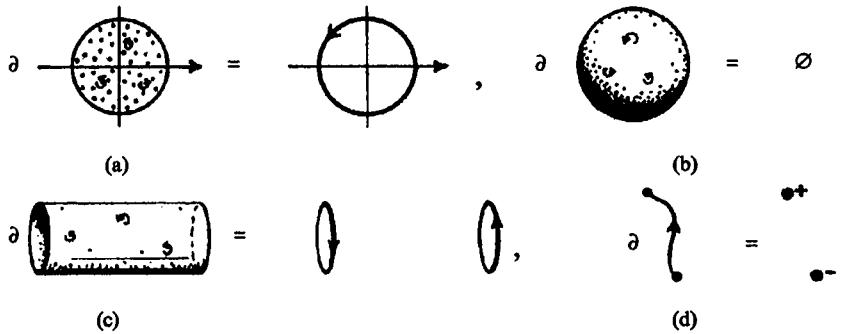


Şekil 12.15 Möbius şeridi: yönlendirilebilir olmayan bir uzay örneği.

$(p+1)$–boyutlu (tıkız yönelimli) $\mathcal{R}$ bölgesinin $\partial\mathcal{R}$ *sınırı*, $\mathcal{R}$'nin iç bölgesinde yer almayan noktalarından oluşur. $\mathcal{R}$ uygun biçimde patalojik değilse $\partial\mathcal{R}$ boş olsa bile (tıkız yönelimli) p–boyutlu bir bölgedir. Ona ait sınır $\partial\,\partial\mathcal{R}$ boştur. Böylece daha önceki $d^2 = 0$ bağıntımızı tamamlar biçimde $\partial^2 = 0$ olur.

Karmaşık düzlemdeki kapalı birim diskin sınırı birim çemberdir; birim kürenin sınırı boştur, sonlu bir silindirin (silindirik 2–yüzey) sınırı her iki uçtaki birim çemberden oluşur fakat her birinin yönelimi terstir, sonlu bir doğru parçasının sınırı biri pozitif ve diğeri negatif sayılan iki uç noktasından oluşur. *Bkz.* Şekil 12.16.[13] Yukarıda gösterildiği üzere kalkülüsün temel teoreminin 1–boyutlu orijinal biçimi, $\mathcal{R}$ bu tür bir doğru parçası olarak kabul edildiğinde dışsal kalkülüsün temel teoreminin özel bir durumu olarak ortaya çıkar.

[13] Bu konularda daha fazla bilgi için *bkz.* Willmore, 1959.



Şekil 12.16 İyi-tanımlı bir tıkız yönlü $(p+1)$-boyutlu $\mathcal{R}$ bölgesinin $\partial\mathcal{R}$ sınırı, $\mathcal{R}$'nin $(p+1)$-boyutlu iç bölgesinde yer almayan noktalarından oluşan (tıkız yönlü) p-boyutlu (olasılıkla boş) bir bölgedir. (a) Kapalı birim diskin (karmaşık düzlem $\mathbb{C}$'de $|z| \leq 1$ ile verilen) sınırı birim çemberdir. (b) Birim kürenin sınırı ($\emptyset$ boş kümeyi göstermek üzere, *bkz.* §3.4) boştur. (c) Sonlu uzunluktaki bir silindirik yüzeyin sınırı her biri ters yönelime sahip iki uçtaki çemberden oluşur. (d) Sonlu bir eğri parçasının sınırı, biri pozitif diğeri negatif olan iki uç noktasından oluşur.

12.7 Hacim elemanı; toplama uzlaşısı

Şimdi bir p-biçimliyle bir $\mathcal{M}$ n-manifoldundaki $(n-p)$-vektörü arasındaki ayrıma ve ilişkiye dönelim. Bu ilişkiyi anlamak üzere en iyisi ilk olarak $p = n$ uç örneğine gidelim, böylece bir p-biçimlisiyle $\mathcal{M}$ üzerindeki bir skaler alan arasındaki ilişkiyi inceleriz. Bir $\boldsymbol{\varepsilon}$ n-biçimlisi durumunda $\mathcal{M}$'nin bir o noktasındaki birleşik n-yüzey elemanı o'daki tüm tanjant n-düzlemidir. $\boldsymbol{\varepsilon}$'un sunduğu *ölçü* basitçe, yönle ilgili herhangi bir özelliği bulunmayan bir n-yoğunluktur. Bu tür bir (hiçbir yerde sıfır varsayılmayan) n-yoğunluk bazen $\mathcal{M}$ n-manifoldu için bir *hacim elemanı* olarak anılır. Bir hacim elemanı $(n-p)$-vektörlerini p-biçimlilere, çevirmekte kullanılabilir, tersi de geçerlidir. (Bazen bir manifolda atanmış bir hacim elemanı manifoldun atanmış "yapı"sının parçası olarak mevcut olur; bu durumda bir p-biçimlisi ve $(n-p)$-vektörü arasındaki esas ayrım kaybolur.)

Bir hacim elemanını, bir $(n-p)$-vektörü bir p-biçimlisine çevirmek üzere nasıl kullanabiliriz? $\boldsymbol{\varepsilon}$ n-biçimlisi bileşenler biçiminde, her bir koordinat yamasında n ters simetrik alt indisli bir nicelik tarafından gösterilir:

$$\varepsilon_{r\ldots w}.$$

(Bazıları buna bir $(n!)^{-1}$ çarpanı katmayı tercih edebilir; "!" için *bkz.* §5.3. Bununla birlikte dikkati ana fikirden başka yöne çektikleri oranda burada ortaya çıkan çeşitli tuhaf faktöriyellerle ilgilenmeyeceğim.) $\varepsilon_{r\ldots w}$ niceliğini bir $\boldsymbol{\psi}$ $(n-p)$-vektörünün $\psi^{u\ldots w}$ bileşenler ailesini bir $\boldsymbol{\alpha}$ p-biçimlisinin $\alpha_{r\ldots t}$

bileşenler ailesine çevirmekte kullanabiliriz. Bunu, önümüzdeki bölümde daha ayrıntılı olarak göreceğimiz *tensör cebiri* işlemlerini kullanarak yapabiliriz. Bu cebir bize $\psi^{u\ldots w}$'nun $(n-p)$ üst indisini $\varepsilon_{r\ldots w}$'nun n adet alt indisinden $(n-p)$ adedine "yapıştırma" olanağı sağlar, böylece bizi $\alpha_{r\ldots t}$ için gerek duyduğumuz p adet bağlanmamış alt indisle baş başa bırakır. Burada meydana gelen "yapıştırma" işlemi tensör "büzülümü" (ya da "transveksiyon") olarak bilinen şeydir ve her bir üst indisin ilgili bir alt indisle, bu ikisi "toplanmak" üzere, çift oluşturmasına olanak sağlar, böylece tüm indis kümeleri sonuçtaki ifadeden çıkarılmış olur.

Buna ilişkin arketip olan örnek, bir $\boldsymbol{\beta}$ kovektörünün β_r bileşenlerini, iki küme elemanlarının bileşenlerini birbiriyle çarpıp daha sonra yineleyen indisleri, toplama yineleyen r indisine (bir yukarıya, bir aşağıya) karşılık gelmek üzere,

$$\boldsymbol{\beta} \bullet \boldsymbol{\xi} = \sum \beta_r \xi^r$$

elde etmek üzere "toplamak" yoluyla $\boldsymbol{\xi}$ vektörünün ξ^r bileşenleriyle birleştiren *skaler çarpımdır*. Bu toplama işlemi ayrıca çok indisli niceliklerde de geçerlidir ve fizikçiler Einstein tarafından ortaya konmuş olup *toplama uzlaşısı* olarak adlandırılan bir uzlaşıyı kabul etmeyi son derece uygun bulur. Bu uzlaşı gerçek toplama işaretlerinin kullanımdan çıkarılması anlamına gelir ve bir alt ve üst indis arasındaki bir toplama aynı indis harfi bir terimdeki tüm konumlarda ortaya çıktığında, toplama her zaman 1, ..., n indis değerleri üzerinden olmak üzere, meydana gelir. Bu nedenle skaler çarpım artık basit olarak

$$\boldsymbol{\beta} \bullet \boldsymbol{\xi} = \beta_r \xi^r$$

biçiminde yazılır. Yukarıda özetlenen işlemi, bu uzlaşıyı kullanarak, bir p–biçimlisini kendine karşılık gelen bir $(n-p)$–vektörü ve hacim biçimi şeklinde ifade etmek üzere, $(n-p)$ adet u, ..., w indisi üzerindeki büzülmeyle birlikte

$$\alpha_{r\ldots t} \propto \varepsilon_{r\ldots tu\ldots w}\psi^{u\ldots w}$$

olarak yazabiliriz. Burada, "orantılıdır" yerine kullanılıp her iki taraf diğer tarafın sıfır olmayan bir katıdır anlamına gelen "$\propto$" sembolünü sunuyorum. Bu, ifadelerimizin karışık görünümlü faktöriyellerle kafa karıştırıcı biçimde dağınık hale gelmemesi için böyledir. Bazı durumlarda, bu bağıntı (orantılılık) geçerliyse $\boldsymbol{\psi}$ $(n-p)$–vektörü ve $\boldsymbol{\alpha}$ p–biçimlisi birbirine *ikili*dir[14] deriz.

[14] Bu "ikili" kavramı, §12.3'te açıklandığı üzere bir vektörün bir kovektöre "ikili" olmasındakinden oldukça farklıdır. Bununla birlikte yine de başka bir "ikililik" konusuyla, *Hodge ikiliği*yle yakından ilişkilidir. Bunun elektromanyetizmada, *bkz.* §19.2, bir rolü mevcuttur ve türevleri kuantum kütleçekim, *bkz.* §31.14, §32.2, §§33.11,12, ve parçacık fiziğine, *bkz.* §25.8,

Bu durumda uygun bir ters ϵ (n–vektörlü) hacim biçimi için her zaman, ε'a karşı

$$\varepsilon \bullet \epsilon = \varepsilon_{r\ldots w} \in^{r\ldots w} = n!$$

uyarınca (normalleştirme konuları buradaki temel uğraşımız olmasa da) sıklıkla "normalleştirilen" ilgili bir

$$\psi^{u\ldots w} \propto \alpha_{r\ldots t} \in^{r\ldots tu\ldots w}$$

ters denklemi mevcut olacaktır.

Bu denklemler klasik tensör cebirinin parçasıdır (*bkz.* §12.8). Bu durum kendi yararımıza kullanacağımız, Einstein'ın toplama uzlaşısıyla birleşmiş bir indis gösterimi kullanımından oldukça yararlanan (ayrıca 14. bölümde daha fazla ilgileneceğimiz tensör analizine genişletilen) güçlü bir yöntem sunar. Ters simetrilemeyle ilgili köşeli parantez notasyonu ayrıca bu cebirde, *simetrileme*yle ilgili,

$$\psi^{(ab)} = \tfrac{1}{2}(\psi^{ab} + \psi^{ba}),$$
$$\psi^{(abc)} = \tfrac{1}{6}(\psi^{abc} + \psi^{acb} + \psi^{bca} + \psi^{bac} + \psi^{cab} + \psi^{cba}),$$

vb, köşeli parantezi tanımlayan eksi işaretlerin tümünün artı işaretlerle değiştirildiği ek bir parantez notasyonunda olduğu gibi değerli bir rol oynar.

Parantez notasyonunun değeriyle ilgili başka bir örnek olarak bir $\boldsymbol{\alpha}$ p–biçimlisinin ya da $\boldsymbol{\psi}$ q–vektörünün *basit* olmasına ilişkin koşulu, diğer bir deyişle p adet tekil 1–biçimlinin ya da q adet sıradan vektörün kama çarpımını nasıl yazabileceğimizi görelim. Bu koşul, bileşenler biçiminde, ilk çarpanın tüm indisleri ikincisinin yalnızca bir indisiyle "eğriltilmiş" olmak üzere,

$$\alpha_{[r\ldots t}\alpha_{u]v\ldots w} = 0 \text{ ya da } \psi^{[r\ldots t}\psi^{u]v\ldots w} = 0$$

olarak karşımıza çıkar.[15] $\boldsymbol{\alpha}$ ve $\boldsymbol{\psi}$ birbirine ikiliyse, bu durumda her koşul için alternatif olarak, $\boldsymbol{\psi}$'nin tek bir indisi $\boldsymbol{\alpha}$'nın tek bir indisine büzülmek üzere,

$$\psi^{r\ldots tu}\alpha_{uv\ldots w} = 0$$

yazabiliriz. Bu ifadenin simetrisi gösterir ki, basit bir p–biçimlisinin ikiliği, tersi de geçerli olmak üzere, basit bir $(n-p)$–vektörüdür.[12.16]

---

ilişkin çeşitli yaklaşımlarda öneme sahiptir. Ne yazık ki burası, matematiksel yazının sınırlılıklarının yol açabileceği karışıklıklar arasında yalnızca bir yerdir.

[15] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984, s. 165, 166.

[12.16] Basitlik için bu koşulların tümünün eşdeğerliğini doğrulayın; $p = 2$ durumunda $\alpha_{[rs}\alpha_{u]v} = 0$'ın yeterliliğini kanıtlayın. *İpucu*: bu ifadeyi iki vektörle büzün.

12.8 Tensörler: soyut indis ve diyagram biçimli notasyon

Burada ortaya çıkan ve bazen matematikçinin notasyonuyla fizikçininki arasında bir çelişki gibi görünen bir konu mevcuttur. İki notasyon, yukarıdaki $\boldsymbol{\beta} \bullet \boldsymbol{\xi} = \beta_r \xi^r$ denklemi tarafından örneklendirildi. Matematikçinin notasyonu açık olarak koordinatlardan bağımsızdır ve ($(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi})$ ya da $\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ türünde bir notasyon kendisi için matematiksel yazında daha genel olabilen) $\boldsymbol{\beta} \bullet \boldsymbol{\xi}$ ifadesinin, skaler çarpım işlemi bütünüyle geometrik/cebirsel terimlerle tanımlanmış olmak üzere, herhangi bir koordinat sistemine göndermede bulunmaz. Diğer taraftan fizikçinin $\beta_r \xi^r$ ifadesi belirgin olarak bir koordinat sistemindeki bileşenlerle ilgilidir. Bu bileşenler koordinat yamasından koordinat yamasına geçişte değişir; dahası, notasyon (daha standart matematiksel kullanımla çelişkili olan) "itiraz edilebilir" toplama uzlaşısına bağlıdır. Yine de fizikçinin notasyonunda, özellikle, matematikçinin belirli işlemlerinin alanı kapsamında hazır olarak gelmeyen, yeni işlemler oluşturmak üzere kullanılabilme kolaylığında büyük bir esneklik mevcuttur. Bir şekilde karışık olan hesaplamalar (örneğin yukarıda gösterilmiş son denklem çiftiyle ilgili olanlar), indis serbest ifadelere bağlı kalmakta ısrar edilirse neredeyse çoğu kez yönetilemezdir. Saf matematikçiler kendilerini, bir argümanda hesapla ilgili temel bazı bileşenler gerektiğinde, sıklıkla "koordinat yaması" hesaplamalarına (bir miktar utançla!) başvururken bulurlar ve toplama uzlaşısını seyrek olarak kullanırlar.

Bana göre bu çelişki büyük oranda yapaydır ve bir tutum değişikliğiyle etkili biçimde önlenebilir. Fizikçi bir "ξ^a" niceliğini kullandığında zihninde normalde, ona ait rasgele seçilmiş bir koordinat sistemindeki bileşenler kümesi yerine $\boldsymbol{\xi}$ ile göstermekte olduğum gerçek vektör niceliği bulunur. Aynısı, gerçek bir 1–biçimli olarak düşünülen "α_a" niceliği için de geçerlidir. Aslında bu kavram, *soyut indis notasyonu* olarak adlandırılan şey çerçevesinde bütünüyle özenli biçimde yapılabilir.[16] Bu düzende indisler, bir koordinat sistemine atıfta bulunan 1, 2, ..., n'den biri yerine geç*mez*, bunun yerine onlar yalnızca cebirin kendileri biçiminde formüle edildiği *soyut işaretçiler*dir. Bu, indis notasyonunun pratik avantajlarını, açık olsun ya da olmasın bir koordinat sistemine atıfta bulunmakla ilgili kavramsal gerileme zorunluluğu olmaksızın, kaybetmeme olanağı sağlar. Dahası soyut indis notasyonunun, özellikle spinör temelli formalizmlerle ilintisi içinde, sayısız ek pratik avantaja sahip olduğu açığa çıkar.[17]

Yine de soyut indis notasyonu hâlâ, bir eşitlikteki tüm önemli ayrıntıların, indislerin küçük olma eğiliminde olması ve onların belirli düzenle-

---

[16] Penrose, 1968, s. 135–141; Penrose ve Rindler, 1984, s. 68–103; Penrose, 1971.

[17] *Bkz.* Penrose, 1968; Penrose ve Rindler, 1984, 1986; Penrose, 1971 ve O'Donnell, 2003.

nişlerinin aslını öğrenmenin zorluk çıkarması nedeniyle farkına varmanın zor olabileceğine ilişkin görsel sorundan zarar görür. Bu zorluklar buna rağmen, tensör cebiriyle ilgili daha sonra kısaca açıklayacağım diğer bir notasyonun ortaya konmasıyla kolaylaştırılabilir. Bu *diyagram biçimli* notasyondur.

İlk olarak bir *tensör*ün gerçekte ne olduğunu bilmeliyiz. İndis notasyonunda, bir tensör, her $p, q \geq 0$ için p adet alt ve q adet üst indise sahip olabilen ve hiçbir özel simetriye gereksinim duymayan

$$Q^{f\ldots h}_{a\ldots c},$$

gibi bir nicelikle gösterilir. Buna bir $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ *değerlik* tensörü[18] (ya da bir $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$–değerli tensör ya da yalnızca bir $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$–tensörü) deriz. Cebirsel olarak bu,

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{C}; \boldsymbol{F}, \ldots, \boldsymbol{H}) = A^a \ldots C^c\, Q^{f\ldots h}_{a\ldots c}\, F_f \ldots H_h$$

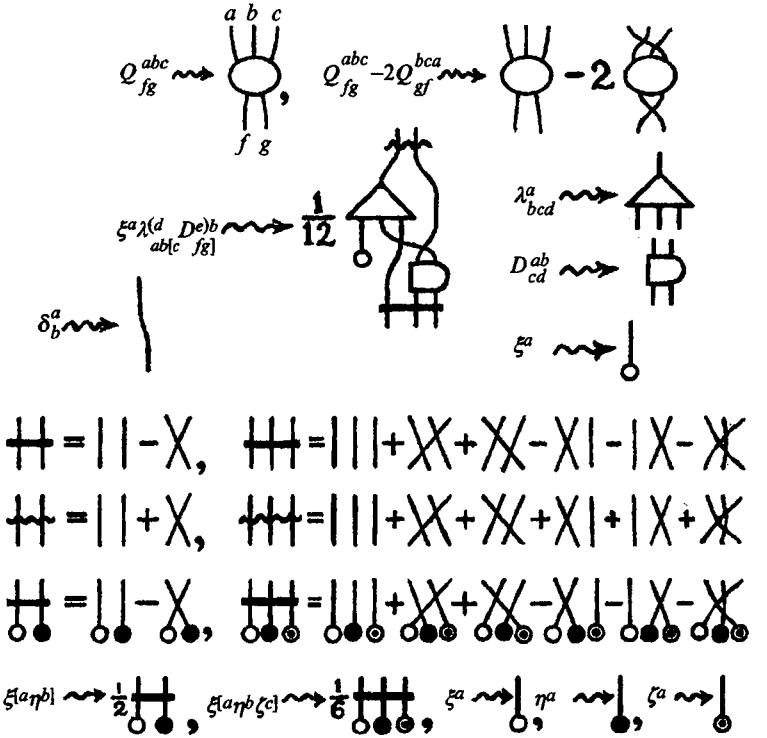
olmak üzere p adet $\boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{C}$ vektörünün ve q adet $\boldsymbol{F}, \ldots, \boldsymbol{H}$ kovektörünün bir (*çoklu doğrusal*[19] olarak bilinen özel bir tür) fonksiyonu olarak düşünülebilen bir $\boldsymbol{Q}$ niceliğini temsil eder. Diyagram biçiminde notasyonda, kendisine aşağıya ("bacaklar") doğru genişleyen q çizgi ve yukarıya ("kollar") doğru genişleyen p çizgi eklenmiş $\boldsymbol{Q}$ tensörü ayırt edici bir sembol (uygunluk uyarınca diyelim ki bir dikdörtgen ya da bir üçgen ya da bir oval) olarak gösterilir. Bir tensör ifadesinin herhangi bir teriminde birbiriyle çarpılan pek çok eleman bir tür bitişik konumda resmedilir fakat sayfa boyunca doğrusal biçimde düzenlenmeleri gerekmez. Birbirine büzülmüş herhangi iki indisle için çizgiler, üstteki alttakine olacak şekilde bağlanmak zorundadır. Henüz karşılaştığımız çeşitli denklemlerin örneklerini de içeren bazı örnekler şekiller 12.17 ve 12.18'de gösteriliyor. Bu notasyonun parçası olarak, ters simetrilemeyi yansıtmak üzere indis çizgileri üzerine, indis notasyonundaki köşeli parantez notasyonunu yansıtan (faktöriyel çarpanlarla ilgili farklı bir uzlaşı kabul etmenin uygunluğunu kanıtlasa da) bir çubuk çizilir. "Dalgalı" bir çubuk buna bağlı olarak simetrilemeyi yansıtır. Diyagram biçiminde notasyonu sıradan biçimde basmak zor olmasına rağmen pek çok el yazısı hesaplamada aşırı derecede kullanışlı olabilir. Ben de 50 yıldan fazladır bunu kullanıyorum![20]

---

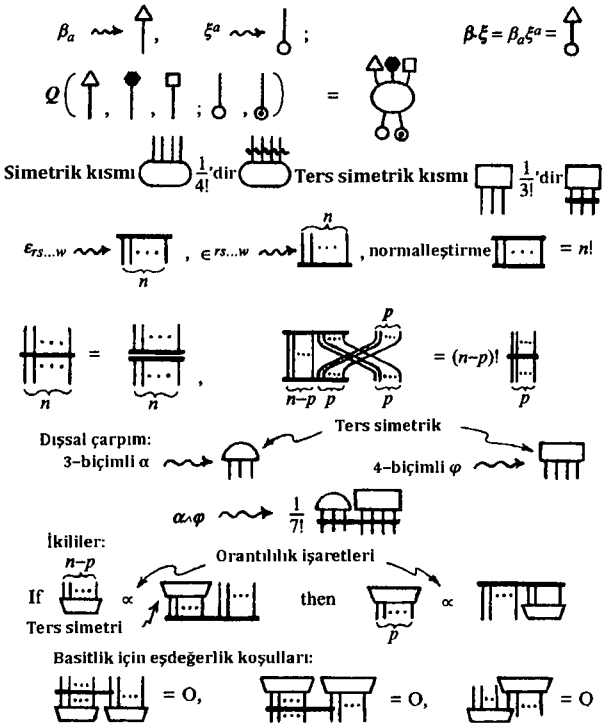
[18] $p + q$ değeri için bazen *mertebe* terimi kullanılır fakat bu "mertebe"yle ilgili matrislerle bağlantılı farklı bir anlam nedeniyle kafa karıştırıcıdır, *bkz.* not 13.10, §13.8.

[19] Bu, $\boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{C}; \boldsymbol{F}, \ldots, \boldsymbol{H}$'nin her biri için ayrı ayrı doğrusal anlamına gelir; ayrıca *bkz.* §§13.7–10.

[20] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984, Ek; Penrose, 1971; Cvitanović ve Kennedy, 1982.



Şekil 12.17 Diyagram biçimli tensör notasyonu. $\binom{3}{2}$–değerli Q tensörü, genel $\binom{p}{q}$–değerli tensör resmi p kol ve q bacağa sahip olmak üzere, 3 kollu ve 2 bacaklı bir oval tarafından temsil edilir. $Q^{abc}_{fg} - 2Q^{bca}_{gf}$ gibi bir ifadede diyagram biçiminde notasyon bireysel indis harfleri kullanmak yerine hangi indisin hangisi olduğunu takip etmek üzere sayfa üzerinde kol ve bacakların bitiminde konumlandırma kullanır. Tensör indislerinin büzülmeleri $\xi^a\lambda^{(d}_{ab[c}D^{e)b}_{fg]}$ ifadesiyle ilgili diyagramda gösterildiği gibi bir kol ve bir bacağı birleştirmek yoluyla gösterilir. Bu diyagram ayrıca ters simetrilemeyi göstermek üzere indis çizgileri üzerinden geçen kalın bir çubuk ve simetrilemeyi göstermek üzere dalgalı bir çubuk kullanır. Diyagramdaki $\frac{1}{12}$ katsayısı, (hesaplamaları kolaylaştırmak üzere) simetrileyici ve ters simetrileyicilerle ilgili normal payda faktöriyelinin diyagram biçimli notasyondan çıkarılması gerçeği sonucunda ortaya çıkar (böylece burada $\frac{1}{2!}\times\frac{1}{3!}=\frac{1}{12}$'ye gereksinim duyarız). Diyagramın alt yarısında ters simetrileyici ve simetrileyiciler "gövdesiz" ifadeler olarak yazılır (§13.3'te ve Şekil 13.6c'de sunulacak olan δ^a_b Kronecker deltasının diyagram biçiminde gösteriminin kullanımı yoluyla). Daha sonra bu $\xi\wedge\eta$ ve $\xi\wedge\eta\wedge\zeta$ kama çarpımlarını ifade etmek üzere kullanılır.



Şekil 12.18 Daha fazla diyagram biçimli notasyon. Bir (1–biçimli) $\boldsymbol{\beta}$ kovektörünün diyagramı, bir $\boldsymbol{\xi}$ vektörünün tek koluyla birleştiğinde skaler çarpımlarını veren tek bir bacağa sahiptir. Daha genel olarak bir $\left[{p \atop q}\right]$–değerli Q tensörü tarafından tanımlanan çokludoğrusal biçim, $\boldsymbol{p}$ adet kolun $\boldsymbol{p}$ adet kovektör değişkenine ve $\boldsymbol{q}$ adet bacağın $\boldsymbol{q}$ adet vektör değişkenine eklenmesiyle gösterilir (burada $\boldsymbol{q} = \mathbf{3}$ ve $\boldsymbol{p} = \mathbf{2}$'dir). Genel tensörlerin simetrik ve ters simetrik kısımları Şekil 12.17'nin işlemlerindeki dalgalı çizgiler ve kalın çubuklar kullanılarak ifade edilebilir. Ayrıca çubuk notasyonu ($\boldsymbol{n}$–boyutlu bir uzayla ilgili) $\boldsymbol{n}$–biçimli $\boldsymbol{\varepsilon}_{rs\ldots w}$ hacimi için, ilgili bir diyagram biçimli notasyonla ve onun ikili $\boldsymbol{\epsilon}^{rs\ldots w}$ $\boldsymbol{n}$–vektörüyle birleşir, $\boldsymbol{\varepsilon}_{rs\ldots w}\boldsymbol{\epsilon}^{rs\ldots w} = \boldsymbol{n}!$ uyarınca normalleşir. $\boldsymbol{n}!\,\boldsymbol{\delta}^{a}_{[r}\boldsymbol{\delta}^{b}_{s}\ldots\boldsymbol{\delta}^{f}_{w]} = \boldsymbol{\epsilon}^{ab\ldots f}\boldsymbol{\varepsilon}_{rs\ldots w}$ (ters simetrik hale gelmiş $\boldsymbol{n}$ adet indis) ve $\boldsymbol{\varepsilon}_{a\ldots cu\ldots w}\boldsymbol{\epsilon}^{a\ldots ce\ldots f} = \boldsymbol{p}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!\,\boldsymbol{\delta}^{e}_{[u}\ldots\boldsymbol{\delta}^{f}_{w]}$ (*bkz.* § 13.3ve Şekil 13.6c) ifadelerine eşdeğer bağıntılar da ayrıca ifade edilir. Biçimlerin dışsal çarpımları $\boldsymbol{p}$–biçimliler ve $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})$–vektörleri arasındaki "ikililik" ve "basitlik" için koşullar açık ve kesin olarak diyagram biçiminde gösterilir. (Dışsal türev diyagramları için *bkz.* Şekil 14.18)

12.9 Karmaşık manifoldlar

Sonuç olarak, 10. bölümde belirtildiği üzere karmaşık manifoldlar konusuna geri dönelim. Bir Riemann yüzeyini 1–boyutlu olarak düşündüğümüzde yalnızca karmaşık sayılar üzerinde uygulanan holomorfik fonksi-

yonlar biçiminde düşünürüz. Daha yüksek boyutlu manifoldlarda da, x^1, ..., x^n koordinatlarımızı artık z^1, ..., z^n karmaşık sayıları biçiminde ele alarak kesin biçimde aynı duruşu ve onlarla ilgili fonksiyonlarımızı holomorfik fonksiyonlar olarak benimseyebiliriz. Manifoldumuzu yine bir miktar koordinat yamasının, her bir yama artık noktaları karmaşık sayıların n–katı (z^1, z^2, ..., z^n) olan $\mathbb{C}^n$ koordinat uzayının (ve §10.2'den "$\mathbb{C}$"nin kendisinin karmaşık sayılar sisteminin yerine kullanıldığını anımsayın) açık bir bölgesi olmak üzere, "birbirine yapıştırılmış" hali olarak alırız. Koordinat dönüşümlerini ifade eden *geçiş fonksiyonları*, koordinat yamasından koordinat yamasına hareket ettiğimizde, artık tümüyle *holomorfik fonksiyonlar* tarafından verilir. Holomorfik vektör alanlarını, kovektörleri, p–biçimlileri, tensörleri, vb, tıpkı daha önce gerçek bir n–manifoldu durumunda yaptığımız gibi tanımlayabiliriz.

Bu durumda fakat tüm karmaşık koordinatlarımızı onların gerçel ve sanal kısımları, $z^j = x^j + iy^j$, biçiminde (ya da eşdeğer biçimde, karmaşık eşleme kavramımızı, işlemlerin daha fazla açık biçimde holomorfik olmasına gerek kalmaması için, kabul edilebilir fonksiyon kategorimize dahil ederek, *bkz.* §10.1) kendisi uyarınca ifade edebileceğimiz alternatif bir felsefi bakış açısı mevcut olur. Böylece "karmaşık n–manifoldumuz artık daha fazla n–boyutlu bir uzay olarak görülmez fakat bunun yerine gerçel bir $2n$–manifold olarak düşünülür. Elbette o, *karmaşık yapı* olarak adlandırılan oldukça özel türde bir $2n$–manifold yapısıdır.

Bu kavramı formüle etmenin çeşitli yolları mevcuttur. Esasında gereken Cauchy–Riemann denklemlerinin (§10.5) daha yüksek boyutlu bir çeşididir fakat bazı şeyler bundan biraz farklı biçimde ifade edilir. Gelin, manifold üzerindeki karmaşık vektör alanlarıyla gerçel vektör alanları arasındaki ilişkiyi düşünelim. Karmaşık bir ζ vektör alanının, ξ ve η $2n$–manifold üzerindeki sıradan gerçel vektör alanları olmak üzere,

$$\zeta = \xi + i\eta$$

biçiminde gösterildiğini düşünebiliriz. "Karmaşık yapı"nın bizim için yaptığı, bu gerçel vektör alanlarının birbirleriyle nasıl ilişkilenmeleri gerektiği ve ζ'nın "holomorfik" olarak nitelenebilmesi için hangi türevsel denklemleri sağlamaları gerektiğini söylemektir. Şimdi, karmaşık ζ alanı i'yle çarpıldığında ortaya çıkan yeni karmaşık vektör alanını göz önüne alın. Tutarlılık gereği, $i\zeta = -\eta + i\xi$ ifadesine sahip olmalıyız, böylece gerçel ξ vektör alanının $-\eta$'yla ve benzer şekilde η'nın ξ'yla yerleri değiştirilmelidir. Bu yer değişikliklerini etkileyen J işlemi (diğer bir deyişle $J(\xi) = -\eta$ ve $J(\eta) = \xi$) genellikle "karmaşık yapı" olarak anılır.

İki kez uygulandığında J'nin etki ettiği şeyin işaretini basitçe ters çevirdiğini not edelim, böylece

$$J^2 = -1$$

yazabiliriz.

Tek başına bu koşul bir *neredeyse karmaşık yapı* olarak anılan şeyi tanımlar. Manifoldla ilgili tutarlı bir "holomorfik" kavramının ortaya çıkabilmesi için J niceliğinin belirli bir türevsel denklemi[21] sağlanmalıdır. Bize, J–yapılı $2n$–boyutlu gerçel bir manifoldun karmaşık bir n–manifold olarak yeniden yorumlanması için bunun (gerekli olmak yanısıra) *yeterli* olduğunu söyleyen dikkate değer bir teorem, Newlander–Nirenberg teoremi,[22] mevcuttur. Bu teorem karmaşık manifoldlarla ilgili iki felsefi bakış açısı arasında özgürce hareket etme olanağı sağlar.

[21] Bu, $J^d_{[a}\partial J^c_{b]}/\partial x^d + J^c_d \partial J^d_{[a}/\partial x^b = 0$ olarak ifade edebileceğimiz, "J'den oluşturulmuş Nijenhuis tensörü" olarak adlandırılan bir ifadenin yok olmasıdır.

[22] Newlander ve Nirenberg, 1957.

13

SİMETRİ GRUPLARI

13.1 Dönüşüm grupları

Simetrik olan uzaylar modern fizikte temel bir öneme sahiptir. Neden böyledir? Bütünüyle kusursuz simetrinin yalnızca istisna ya da yalnızca bir yaklaşıklık tahmini olarak ortaya çıkabildiği düşünülebilir. Simetrik bir nesne, bir kare ya da bir küre, idealize edilmiş ("Platoncu", *bkz.* §1.3) matematiksel bir yapı olarak kesin bir varlığa sahip olsa da bu tür bir şeyin herhangi *fiziki* gerçekleştirilişi genelde bu Platoncu idealin yalnızca bir tür yaklaşıklık tahmini biçiminde gösterimi olarak değerlendirilir, bu nedenle o kusursuz olarak değerlendirilebilen herhangi bir gerçek simetriye sahip değildir. Yine de, 20. yüzyılın oldukça başarılı fiziki kuramları uyarınca (kütleçekim de dahil) tüm fiziki etkileşimler dikkate değer biçimde, açık konuşmak gerekirse, temel bir açıklama düzeyinde esasen zorunlu olarak tam bir simetriye sahip belirli fiziki yapılara kritik biçimde bağlı olan bir fikirle uyum içinde davranır.

Nedir bu fikir? Bu, "ayar bağlantısı" olarak bilinegelen bir kavramdır. Bu isim şu haliyle az şey aktarır. Buna rağmen fikir, bir manifold üzerindeki genel işlemlere (aslında, 12. bölümde anlatıldığı üzere yalnızca dışsal türev almaya bağlı olanlardan, p–biçimlilerden, daha genel işlemlere) etkiyen ("bükülmüş") incelikli bir türev alma kavramı bulmamıza olanak sağlayan önemli bir fikirdir. Bu konular bunu izleyen iki bölümde ele alınacak fakat ön koşul olarak öncelikle *simetri grubu* temel kavramını incelemeliyiz. Bu kavramın ayrıca fizik, kimya ve kristalografinin önemli pek çok farklı alanında ve ayrıca matematiğin kendisinin pek çok değişik alanında uygulamaları mevcuttur.

Basit bir örnek ele alalım. Bir *kare*nin simetrileri nelerdir? Karenin yönelimini tersine çeviren simetrilere izin verip vermememize (diğer bir deyişle karenin ters çevrilmesine) bağlı olarak soru iki farklı yanıta sahiptir. İlk olarak yönelimi ters çevirme simetrilerine izin verilmeyen durumu ele alalım. Bu durumda karenin simetrileri, kare düzlemindeki bir dik açı bo-

yunca çeşitli sayıda yinelenen tek bir döndürme yoluyla üretilir. Uygunluk bakımından bu hareketleri 5. Bölümde yaptığımız gibi karmaşık sayılar biçiminde gösterebiliriz. Dilersek karenin köşelerini karmaşık düzlemdeki 1, i, –1 ve –i noktaları üzerine oturur ve temel döndürmemizi i'yle çarpım (diğer bir deyişle "i×") halinde gösterilir biçimde düşünebiliriz. i'nin çeşitli *üsleri*, hepsi birlikte ayrık dört adet olmak üzere, tüm döndürmelerimizi gösterir (Şekil 13.1b):

$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i.$$

Dördüncü üs $i^4 = 1$ bizi başlangıca geri getirir, böylece daha başka elemana sahip değiliz. Bu dört elemandan herhangi ikisinin çarpımı yine onlardan biridir.

Bu dört eleman bize *grubun* basit bir örneğini sunar. Bu, bir elemanlar kümesi ve onların çiftleri arasında tanımlanan bir "çarpma" kuralından oluşur. Bu elemanlarla ilgili olarak,

$$1a = a1 = a$$

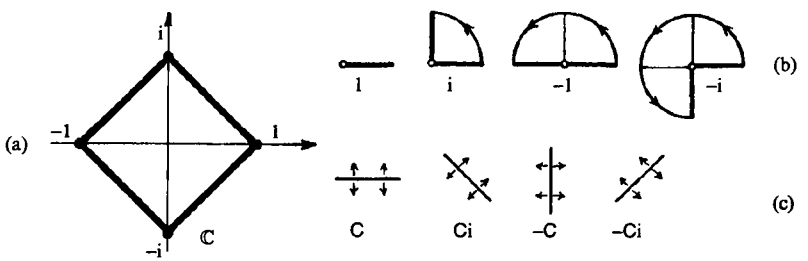
ifadesini sağlayan bir 1 *birim* elemanı mevcut olmak üzere ve

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1$$

ifadesindeki gibi her a elemanı *ters* bir a^{-1}'e sahip olmak üzere, çarpmanın *birleşme* özelliği

$$a(bc) = (ab)c$$

geçerlidir. [13.1]



Şekil 13.1 Bir karenin simetrisi. (a) Karenin köşelerini karmaşık ℂ düzlemindeki 1, i, –1 ve –i noktalarıyla gösterebiliriz. (b) Yansımalı olmayan simetriler grubu, ℂ'de sırasıyla $1 = i^0$, $i = i^1$, $-1 = i^2$, $-i = i^3$ ile çarpma olarak gösterilir. (c) ℂ'de yansımalı simetriler C (karmaşık eşleme), Ci, – C ve – C'yle verilir.

[13.1] Tüm a'lar için $1a = a$ ve $a^{-1}a = 1$'i birleşme özelliği $a(bc) = (ab)c$ ile birlikte varsayarsak buradan $a1 = a$ ve $aa^{-1} = 1$ sonuçlarının *çıkarılabildiğini* gösterin. *İpucu*: Elbette a'nın tersi olan tek eleman olduğu ileri sürülmüyor. Öte taraftan $a1 = a$, $a^{-1}a = 1$ ve $a(bc) = (ab)c$'nin niçin yetersiz olduklarını gösterin.

Kendi içerisine bir nesne (kare olması zorunlu değil) alan simetri işlemleri, *grup aksiyomları* olarak adlandırılan bu kuralları her zaman sağlar.

11. bölümde önerilen, ab çarpımında ilk olarak b ve daha sonra a'yı etki eder halde düşündüğümüz uzlaşıyı anımsayın. Bunları, sağ taraftaki bazı nesnelere uygulanan işlemler olarak değerlendirebiliriz. Böylece b hareketini bir Φ nesnesinin simetrisini, $\Phi \mapsto b(\Phi)$ olarak, ifade eder biçimde ele alabiliriz. Bunu $b(\Phi) \mapsto a(b(\Phi))$ ifadesini veren bu tür başka bir a hareketi izler. Bu, ab hareketine karşılık gelen, kısaca $\Phi \mapsto ab(\Phi)$ biçiminde yazdığımız $\Phi \mapsto a(b(\Phi))$ birleşik hareketiyle sonuçlanır. Özdeşlik işlemi nesneyi yalnız başına bırakır (açıkça her zaman bir simetri) ve tersi, verili bir simetrinin yalnızca nesneyi geldiği konuma geri hereket ettiren ters çevrilmesi işlemidir.

Kareye ilişkin yansımalı olmayan döndürmeler özel örneğimizde ek olarak

$$ab = ba$$

değişme özelliğine de sahibiz. Bu anlamda değişmeli olan gruplar, trajik biçimde kısa yaşamış Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel anısına *Abelci* olarak adlandırılır.[1] Açıktır ki, basit olarak karmaşık sayıların çarpımı biçiminde gösterilebilen gruplar (bireysel karmaşık sayıların çarpımlarının her zaman değişmesi nedeniyle) Abelci olmalıdır. Bunun diğer örneklerini, 5. bölümde birliğin n'inci dereceden bir kökü tarafından üretilen sonlu bir *döngüsel* $\mathbb{Z}_n$ grubuna ilişkin genel durumu ele alırken gördük.[13.2]

Şimdi de karemizin yönelim ters çevirme *yansımalarına* izin verelim. Karenin karmaşık sayılar biçimindeki yukarıdaki gösterimini hâlâ kullanabiliriz fakat C ile gösterdiğim ve *karmaşık eşleme* adı verilen yeni bir işleme gerek duyacağız. (Bu, kareyi yatay bir çizgi etrafında ters çevirir, *bkz.* §10.1, Şekil 10.1.) Şu halde (*bkz.* Şekil 13.1c)

$$Ci = (-i)C,\ C(-1) = (-1)C,\ C(-i) = iC,\ CC = 1$$

---

[1] Abel 1802'de doğdu ve 1829'da, 26 yaşında tüberkülozdan öldü. Abelci olmayan ($ab \neq ba$) daha genel grup kuramı trajik biçimde daha az yaşamış, 21 yaşına ulaşmadan, bir önceki tüm geceyi, şimdi *Galois kuramı* denen, bu grupları cebirsel denklemlerin çözülebilirliklerini araştırmakta kullanmayı da içeren devrimci fikirlerini not ederek geçirdikten sonra bir düelloda öldürülen Fransız matematikçi Evariste Galois, 1811–1832, tarafından ileri sürüldü.

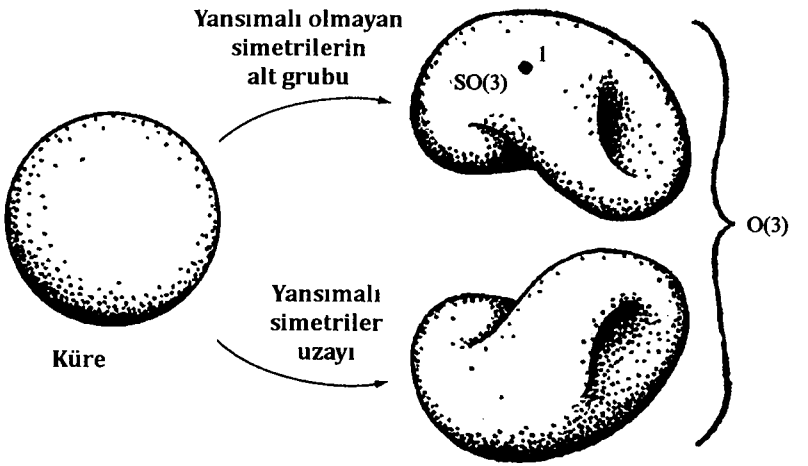
[13.2] Grup "çarpma" işlemi vektör uzayının "toplama" işlemi olan herhangi bir vektör uzayının neden, *toplamsal* Abelci grubu denen bir Abelci grubu olduğunu açıklayın.

"çarpma kuralları"nı[13.3] buluruz (bundan böyle[2] (–i)C'yi –iC olarak, vb, yazacağım). Aslında tüm grup için gerekli çarpma kurallarını, grup son denklemde açıkça belirtildiği gibi Abelci olmayan olmak üzere, yalnızca

$$i^4 = 1,\ C^2 = 1,\ Ci = i^3C$$

temel denklemlerinden[13.4] elde edebiliriz. Bir gruptaki ayrık elemanların toplam sayısı onun *düzeni* olarak adlandırılır. Bu belirli grubun düzeni 8'dir.

Şimdi, sıradan bir kürenin döngüsel simetriler grubu denen başka bir basit örneği ele alalım. Önceki gibi ilk olarak yansımaların dışta tutulduğu durumu ele alabiliriz. Bu kez simetri grubumuz sonsuz sayıda elemana sahip olacak çünkü 3–boyutta herhangi bir eksen etrafında herhangi bir açı boyunca döndürme yapabiliriz. Simetri grubu gerçekte 3–boyutlu bir uzay, diğer bir deyişle 12. bölümde $\mathcal{R}$'yle gösterilen 3–manifoldu oluşturur. Şimdi bu grubun (3–manifold) resmi ismini vereyim. Ona, 3 boyutta



Şekil 13.2 Bir kürenin döngüsel simetrisi. Tüm O(3) simetri grubu iki parçadan oluşan bağlantısız bir 3–manifolddur. 1 birim elemanını içeren bileşen küreye ait yansımalı olmayan simetrinin SO(3) (normal) alt grubudur. Kalan bileşen yansımalı simetrilerin 3–manifoldudur.

[13.3] Bu bağıntıları (Ci'nin "C işlemi tarafından izlenen i× işlemi, vb" yerine kullanıldığını akılda tutarak) doğrulayın. *İpucu*: Bu bağıntıları, onların yalnızca 1 ve i üzerindeki etkilerini doğrulayarak kontrol edebilirsiniz. Neden?

[2] Ayrıca "–C"nin, "karmaşık eşleniğini alın ve sonra –1'le çarpın", diğer bir deyişle –C = (–1)C anlamına geldiğini not etmeliyiz.

[13.4] Bunu gösterin.

yansımalı olmayan ortogonal grup, SO(3) denir.[3] Şimdi yansımaları dahil edersek, ilkinden bağlantısı koparılmış, başka bir 3–manifold değerinde bütünüyle yeni bir simetri kümesini, diğer bir deyişle kürenin yöneliminin tersine çevrilmiş bir halini içerenleri elde ederiz. Grup elemanlarının tüm ailesi yine bir 3–manifold oluşturur fakat o artık bağlı iki ayrı parçadan oluşan bağlantısız bir 3–manifolddur (*bkz.* Şekil 13.2). Bu tüm grup uzayına O(3) denir.

Bu iki örnek grupların en önemli kategorilerinden ikisini gösterir; sonlu gruplar ve sürekli gruplar (ya da *Lie* grupları; *bkz.* §13.6).[4] Bu iki tip - grup arasında büyük bir fark mevcut olmasına rağmen grupların önemli özelliklerinin pek çoğu her ikisinde de ortaktır.

13.2 Alt gruplar ve basit gruplar

Bir gruba ait *alt grup* kavramı özel önemdedir. Bir alt grubu göstermek üzere grup içinde kendileri de bir grup oluşturan elemanların, tüm grupta geçerli olan aynı çarpma ve ters çevirme işlemlerini kullanarak bir toplamını seçeriz. Alt gruplar parçacık fiziğine ilişkin pek çok modern kuramda önemlidir. Doğada çeşitli türdeki parçacıkları ve ayrıca farklı parçacık etkileşimlerini birbirleriyle ilintilendiren temel bir simetri bulunduğu varsayımı yaygındır. Yine de, bu tüm grubun herhangi açık bir biçimde bir simetri olarak davrandığı, bunun yerine bu simetrinin orijinal grubun bir alt grubuna, bu *alt grup* bir simetri olarak açık bir rol oynamak üzere, bölündüğü bulunarak görülemeyebilir. Bu nedenle varsayılmış "temel" bir simetri grubunun olası alt gruplarının gerçekten ne olduğunu bilmek, aslında Doğada belirgin olan bu simetrilerin, varsayılmış grubun alt grupları olarak düşünülebilmesi için önemlidir. Bu türdeki sorulara §§25.5–8, §26.11 ve §28.1'de yöneleceğim.

Alt gruplara ait belirli bazı durumları ele alageldiğimiz örneklerle ilgili olarak inceleyelim. Karenin *yansımalı olmayan* simetrileri, karenin tüm

---

[3] S, günümüzdeki bağlamıyla bize yalnızca yönelim ters çevirme hareketlerinin dışta bırakıldığını söyleyen ("birim determinantı" anlamında) "özel"i belirtir. O, temsil ettiği hareketlerin koordinat eksenlerinin "ortogonalliği"ni (diğer bir deyişle dik açı doğasını) koruması gerçeğiyle ilgisi olan "ortogonal"i belirtir. 3, üç boyuttaki döndürmeleri ele almakta olduğumuz gerçeğini belirtir.

[4] Bize, ayrıca her sürekli grubun yalnızca *pürüzsüz* (diğer bir deyişle §§6.3,6'daki gösterimde C^0, C^1 hatta C^∞ anlamına gelir) olmayıp aynı zamanda *analitik* (diğer bir deyişle C^0, C^∞ anlamına gelir) de olduğunu söyler. "Hilbert'in 5. problemi" olarak bilinir hale gelmiş olan şeyin çözümünü temsil eden bu ünlü sonuç 1953'te Andrew Mattei Gleason, Deane Montgomery, Leo Zippin ve Hidehiko Yamabe tarafından elde edildi; *bkz.* Montgomery ve Zippin, 1955. Bu durum §13.6'da üslü serilerin kullanımını gerekçelendirir.

8–elemanlı simetriler grubunun 4–elemanlı bir alt grubunu {1, i, –1, –i } oluşturur. Benzer biçimde yansımalı olmayan SO(3) döndürme grubu tüm O(3) grubunun bir alt grubunu oluşturur. Karenin simetrilerinin başka bir alt grubu {1, –1, C, –C} dört elemanından oluşur; yine de bir başkası iki elemana, {1, –1}, sahiptir.[13.5] Dahası tek başına birim elemandan, {1}, oluşan "önemsiz" alt grup her zaman mevcuttur (ve tüm grubun kendisi de eşit derecede önemsiz biçimde her zaman bir alt gruptur).

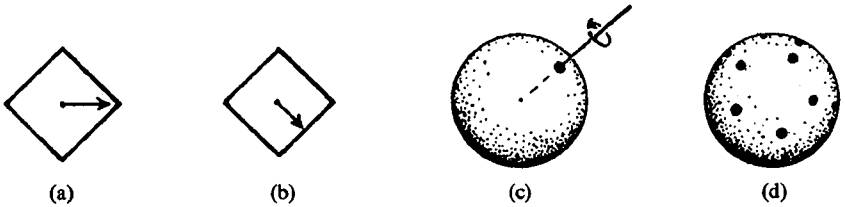
Az önce açıkladığım çeşitli alt grupların tümü belirli önemdeki özel bir niteliğe sahiptir. Onlar *normal* alt gruplar olarak adlandırılan şeylerin örneğidir. Normal bir alt grubun önemi, uygun bir anlamda, tüm grubun herhangi bir elemanının eylemi normal bir alt grubu yalnız bırakır ya da daha teknik biçimde, bütün grubun her bir elemanı normal alt grupla *yer değiştirir* diyebilmemizdir. Daha açık olayım. Bütün grubu $\mathcal{G}$ ve alt grubu $\mathcal{S}$ olarak adlandırın. $\mathcal{G}$ grubunun herhangi belirli bir g elemanını seçersem böylece $\mathcal{S}g$'yle, $\mathcal{S}$'nin her biri bireysel olarak g'yle g sağ tarafta olacak şekilde çarpılmış (g'yle *sonradan çarpılmış* şeklinde adlandırılan durum) tüm elemanlarından oluşan bir kümeyi gösteririm. Bu nedenle kareye ilişkin simetri grubunun belirli $\mathcal{S}$ = {1, –1, C, –C} alt grubu durumunda g = i seçersek böylece $\mathcal{S}$i = {i, –i, Ci, –Ci} elde ederiz. Benzer biçimde $g\mathcal{S}$ notasyonu, $\mathcal{S}$'nin her biri bireysel olarak g'yle g sol tarafta olacak şekilde çarpılmış (g'yle önceden çarpılmış) tüm elemanlarından oluşan bir kümeyi gösterir. Bu nedenle örneğimizde artık i$\mathcal{S}$ = {i, –i, iC, –iC} ifadesine sahip oluruz. $\mathcal{S}$'yle ilgili, $\mathcal{G}$'nin normal bir alt grubu olması için gerekli koşul bu iki kümenin aynı olmasıdır, diğer bir deyişle $\mathcal{S}$'deki tüm g'ler için

$$\mathcal{S}g = g\mathcal{S}$$

olmasıdır. Belirli örneğimizde, dalgalı parantez içindeki şeyler toplamının *düzenlenmemiş* bir küme olarak (böylece $\mathcal{S}$i ve i$\mathcal{S}$ açık biçimde yazıldığında, –iC ve iC elemanlarının, elemanlar toplamı içinde ters düzende görünmesi önemli değildir) alınması aklımızda tutmanın zorunlu olduğu bir şey olmak üzere, durum aslında (Ci = –iC ve –Ci = iC olduğundan) budur.

Kareye ait simetriler grubunun normal *olmayan* bir alt grubunu {1, C} iki elemanlı alt grup olarak gösterebiliriz. Bu normal olmayan bir alt - gruptur çünkü i{1, C} = {i, –Ci} iken {1, C}i = {i, Ci}'dir. Karemizi sağ tarafı gösteren yatay bir okla işaretlediğimizde bu alt grubun yeni (indirgenmiş) simetri grubu olarak ortaya çıktığına dikkat edin (*bkz.* Şekil 13.3a). Kareyi bunun yerine diyagonal olarak aşağı sağ tarafı gösteren bir okla işaretler-

[13.5] Bu paragraftakilerin tümünün alt gruplar olduklarını doğrulayın (ve not 13.4'ü aklınızda tutun).



Şekil 13.3 (a) Şekil 13.1'in küresini sağ tarafı gösteren bir okla işaretlemek onun simetri - grubunu normal olmayan bir {1, C} alt grubuna indirger. (b) Diyagonal olarak sağ aşağı tarafı gösteren bir okla işaretlemek normal olmayan farklı bir {1, Ci} alt grubu sonucunu verir. (c) Şekil 13.2'nin küresini tek bir noktayla işaretlemek simetrisini O(3)'ün (normal olmayan) bir O(2) alt grubuna indirger: orijini bu noktaya birleştiren eksen etafındaki döndürmeler. (d) Küre sıradan bir çok yüzlünün köşeleriyle işaretlenirse (burada bir dodekahedron), ona ait simetriler grubu O(3)'ün (normal olmayan) sonlu bir alt grubudur.

sek normal olmayan başka bir alt grup, diğer bir deyişle {1, Ci}, elde edebiliriz (Şekil 13.3b).[13.6] O(3) durumunda önemsiz olmayan yalnızca bir normal alt grup,[13.7] diğer bir deyişle SO(3), olduğu ortaya çıkar fakat pek çok normal olmayan alt grup mevcuttur. Normal olmayan örnekler küre üzerinde uygun bir sonlu noktalar kümesi seçer ve kürenin bu noktalarla işaretli simetrilerini ararsak elde edilir. Yalnızca tekil bir nokta işaretlersek bu durumda alt grup kürenin orijini bu noktaya birleştiren eksen etrafındaki döndürmelerinden oluşur (Şekil 13.3c). Alternatif olarak, örneğin sıradan bir çok yüzlünün köşeleri olan noktaları işaretleyebiliriz. Bu durumda alt grup sonlu olur ve bu belirli çok yüzlüye ait simetri grubundan oluşur (Şekil 13.3d).

Normal alt grupların önemli oluşunun bir sebebi, bir $\mathcal{G}$ grubu önemsiz olmayan normal bir alt gruba sahipse bu durumda $\mathcal{G}$'yi bir anlamda, daha küçük gruplara bölebiliriz. $\mathcal{S}$'nin $\mathcal{G}$'ye ait normal bir alt grup olduğunu düşünün. Bu durumda ayrık $\mathcal{S}g$ kümeleri, g, $\mathcal{G}$'nin tüm elemanları üzerinden geçmek üzere, kendilerini bir grup oluşturmak üzere ters çevirir. Verili bir $\mathcal{S}g$ kümesi için g seçiminin genellikle eşsiz olmayışına dikkat edin; $\mathcal{G}$'ye ait farklı g_1, g_2 elemanları için $\mathcal{S}g_1 = \mathcal{S}g_2$ ifadesine sahip oluruz. $\mathcal{S}g$ biçiminin, *herhangi bir* $\mathcal{S}$ alt grubuyla ilgili kümelerine $\mathcal{G}$'nin *eşkümeleri* denir fakat $\mathcal{G}$ normal olursa eşkümeler bir grup oluşturur. Bunun nedeni, böylesi iki $\mathcal{S}g$ ve $\mathcal{S}h$ eşkümesine sahip olduğumuz durumda $\mathcal{S}g$'nin $\mathcal{S}h$ ile "çarpmını"

$$(\mathcal{S}g)\,(\mathcal{S}h) = \mathcal{S}(gh)$$

[13.6] Bu savları kontrol edin ve normal olmayan iki alt grup daha olduğunu, başkaca olmadığını göstererek bulun.

[13.7] Bunu gösterin. *İpucu*: hangi döndürme *kümeleri* döndürme değişmez olabilir?

olacak biçimde tanımlayabilmemiz ve tüm grup aksiyomlarının, $\mathcal{S}$'nin normal oluşu sağlanmak koşuluyla, esasen sağ tarafın, bu denklemin sol tarafındaki eşkümelerin gösteriminde hangi g ve h'nin seçilmiş olmasından bağımsız olarak iyi tanımlı olması nedeniyle yerine getirildiğini görmemizdir.[13.8] Bu biçimde tanımlanan sonuçtaki grup kendi normal alt grubu $\mathcal{S}$ aracılığıyla $\mathcal{G}$'nin *çarpan grubu* olarak adlandırılır. $\mathcal{S}$ aracılığıyla $\mathcal{G}$'nin çarpan grubu $\mathcal{G}/\mathcal{S}$ şeklinde yazılır. $\mathcal{S}$ normal olmasa dahi ayrık $\mathcal{S}g$ eşkümelerinin (bir grup olmayan) çarpan *uzayı*yla ilgili hâlâ $\mathcal{G}/\mathcal{S}$ yazabiliriz.[13.9]

Önemsiz olmayan hiçbir normal alt gruba sahip olmayan gruplara *basit gruplar* denir. SO(3) grubu basit gruplara bir örnektir. Basit gruplar berrak bir anlamda grup kuramının temel yapı taşıdır. Bu nedenle tüm sonlu basit grupların ve tüm sürekli basit grupların artık biliniyor olması 19. ve 20. yüzyıl matematiğinin önemli bir başarısıdır. Sürekli durumla ilgili olarak (diğer bir deyişle Lie gruplarıyla ilgili) bunun, temel tezleri 1888–1890'da ortaya çıkmış oldukça etkileyici Alman matematikçi Wilhelm Killing, 1847–1923, tarafından başlanıp esasen 1894'te, şu ana dek yazılmış en önemli matematiksel tezlerden biriyle,[5] (bölüm 12'de karşılaştığımız ve bölüm 17'de yeniden buluşacağımız) muhteşem geometrici ve cebirci Èlie Cartan tarafından tamamlanması matematiksel bir köşe taşıydı. Bu sınıflandırma matematik ve fiziğin pek çok alanında bugüne dek temel bir rol oynamaya devam etmiştir. Sırasıyla $m(m + 2)$, $m(2m + 1)$, $m(2m + 1)$, $m(2m - 1)$ boyutlarına sahip A_m, B_m, C_m, D_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere) olarak bilinip *klasik gruplar* olarak adlandırılan dört aile (*bkz.* §13.10'un sonu) ve sırasıyla 78, 133, 248, 52, 14 boyutlarında E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 olarak bilinen beş *olağanüstü grup* mevcut olduğu ortaya çıkar.

Sonlu basit grupların sınıflandırılması 20. yüzyılın uzun yılları boyunca hatırı sayılır sayıda matematikçi tarafından geliştirilip ancak 1982'de tamamlanmış çok daha yeni (ve hatta daha zor) bir kazanımdır.[6] Yine bazı sistematik aileler ve *olağanüstü* sonlu basit grupların sonlu bir toplamı mevcuttur. Bu olağanüstü grupların en büyüğü, düzeni

$$= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$
$$= 2^{46} \times 3^{20} \times 5^{9} \times 7^{6} \times 11^{2} \times 13^{3} \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$$

[13.8] Bunu doğrulayın ve $\mathcal{S}$ normal değilse aksiyomların başarısızlığa uğradıklarını gösterin.

[13.9] $\mathcal{G}$'ya ait herhangi bir $\mathcal{S}$ alt grubuyla ilgili olarak $\mathcal{G}/\mathcal{S}$'deki eleman sayısının niçin $\mathcal{S}$ düzenine bölünen $\mathcal{G}$ düzeni olduğunu açıklayın.

[5] *Bkz.* van der Waerden, 1985, s. 166–174.

[6] *Bkz.* Devlin, 1988.

olan ve *dev* olarak adlandırılan gruptur. Olağanüstü gruplar pek çok modern kuramsal fizikçi için belirli bir çekiciliğe sahip görünür. Pek çok insan devasa fakat sonlu devin herhangi bir gelecek kuramında rol alması umutlarını açıklarken E_8 grubu sicim kuramında (§31.12) önemli biçimde bir rol oynar.[7]

Basit grupların sınıflandırılması, yukarıda belirtildiği üzere, genel - grupların basit gruplardan (Abelci olanlarla birlikte) oluşturulmuş olarak değerlendirilebilmesi nedeniyle genel olarak grupların sınıflandırılmasına yönelik atılmış önemli bir adım olarak değerlendirilebilir. Aslında tüm öykü bu değildir çünkü basit bir grubun bir diğeri üzerinden nasıl oluşturulduğunda daha fazla bilgi mevcuttur. Bu konunun ayrıntılarına burada girmeyi önermiyorum fakat bunun olabilmesine ilişkin en basit yolu anmaya değer. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ herhangi iki grupsa bu durumda bunlar elemanları basit biçimde (g, h) *çiftleri* olan $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ *çarpım grubu* olarak adlandırılan şeyi, g $\mathcal{G}$'ye ve h $\mathcal{H}$'ye ait olmak ve $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$'nin (g_1, h_1) ve (g_2, h_2) elemanları arasındaki grup çarpma kuralı

$$(g_1, h_1)\,(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$$

olmak üzere, oluşturmak için birleşebilir ve grup aksiyomlarının sağlandığını doğrulamak çok kolay olur. Parçacık fiziğinde rol alan pek çok grup aslında basit grupların (ya da onların basit değişikliğe uğramış hallerinin) çarpım grubudur.[13.10]

13.3 Doğrusal dönüşümler ve matrisler

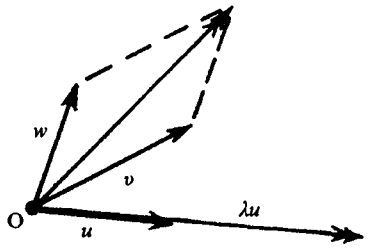
Genel gruplar çalışmasında simetri gruplarının merkezi bir rol oynadığı bulunmuş özel bir sınıfı mevcuttur. Bunlar vektör uzaylarının simetri - gruplarıdır. Bir vektör uzayına ilişkin simetriler *doğrusal dönüşümler* tarafından vektör uzay yapısını koruyarak ifade edilir.

§11.1 ve §12.3'ten, bir V vektör uzayında, onun yapısını tanımlarken vektörlerin sayılarla toplamı ve çarpımı kavramına sahip olduğumuzu anımsayın. Bir sayıyla çarpma, vektörü o sayı oranında büyütmek (ya da küçültmek) olarak göz önüne getirilirken, toplamanın geometrik resminin paralelkenar kuralının kullanımı yoluyla elde edildiği gerçeğini not edebiliriz (Şekil 13.4). Burada onu *gerçel* bir sayı olarak resmediyoruz fakat ayrıca karmaşık vektör uzayları da olasıdır (ve pek çok bağlamda karmaşık

---

[7] *Bkz.* Conway ve Norton, 1972; Dolan, 1996.

[13.10] Herhangi iki $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ grubuyla ilgili olarak $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$'nin bir grup olduğunu ve $(\mathcal{G}\times\mathcal{H})\,/\,\mathcal{G}$ çarpım grubunu $\mathcal{H}$'yle belirleyebileceğimizi doğrulayın.



Şekil 13.4 Doğrusal bir dönüşüm üzerinde hareket ettiği vektör uzayının yapısını korur. Bu yapı (gerçel bir sayı ya da karmaşık bir vektör uzayı durumunda karmaşık bir sayı olabilen) bir λ skaleriyle (paralelkenar kuralı tarafından gösterilen) toplama ve çarpma işlemlerince tanımlanır. Bu tür bir dönüşüm doğruların ve "paralel" kavramının "doğruluğunu", O orijinini sabit tutarak korur.

sihir nedeniyle özellikle önemlidir!), yine de bir diyagramda portrelemek güçtür. V'nin doğrusal dönüşümü, bu temel vektör uzayı kavramınca tanımlandığı üzere, V'yi yapısını koruyarak kendisine getiren bir dönüşümdür. Daha genel olarak ayrıca, bir vektör uzayını bir diğerine götüren doğrusal dönüşümleri de ele alabiliriz.

Bir doğrusal dönüşüm, *matris* adı verilen bir sayı dizilimi kullanılarak açık biçimde açıklanabilir. Matrisler matematiksel pek çok bağlamda önemlidir. Bu son derece kullanışlı kavramları zarif cebirsel kurallarıyla birlikte bu bölümde (ve §§13.4,5'te) inceleyeceğiz. Aslında §§13.3–7 matris kuramının ve onun sürekli gruplar kuramına uygulanmasının seri bir eğitimi olarak değerlendirilebilir. Burada açıklanan kavramlar kuantum kuramının uygun olarak anlaşılması için yaşamsal önemdedir fakat bu malzemeye halihazırda aşina olan okuyucular, ya da kendisine geldiğimizde kuantum kuramına ilişkin daha az ayrıntılı bir kavrayışı tercih edenler, en azından şimdilik bu bölümleri atlamayı seçebilirler.

Doğrusal bir dönüşümün neye benzediğini görmek üzere öncelikle 3–boyutlu bir vektör uzayı durumunu ele alalım ve onun §13.1'de tartışılmış, kürenin simetrilerini veren O(3) (ya da SO(3)) döngü grubuyla ilişkisini görelim. Bu küreyi Öklitçi $\mathbb{E}^3$ 3–uzayına (bu uzay kürenin merkezindeki O orijiniyle ilgili bir vektör uzayı olarak değerlendirilmek üzere[8]) yerleştirilmiş, (x, y, z) sıradan Kartezyen koordinatları biçimindeki

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

geometrik yer olarak düşünebiliriz.[13.11] Kürenin döndürmeleri artık $\mathbb{E}^3$'ün doğrusal dönüşümü fakat §§13.1,8'de (ayrıca *bkz.* §13.1) geleceğimiz *ortogonal* olarak bilinen çok özel tipte bir dönüşüm biçiminde ifade edilir.

Bununla birlikte *genel* doğrusal dönüşümler küreyi Şekil 13.5'te gösterildiği gibi bir *elipsoide* sıkıştırır ya da genişletir. Geometrik olarak doğ-

[8] §14.1'de Öklitçi bir uzayın *afin* bir uzaya örnek olduğunu görüyor olacağız. Belirli bir O (orijin) vektör uzayı seçtiğimizde o bir vektör uzayı haline gelir.

[13.11] Bu denklemin, O'dan birim uzaklıktaki noktaları vererek nasıl §2.1'in Pisagor teoreminin sonucu olduğunu gösterin.

rusal bir dönüşüm doğruların ve "paralel" doğrular kavramının "doğruluğu"nu O orijinini sabit tutarak koruyan bir dönüşümdür. Bununla birlikte dik ya da diğer açıları koruması gerekmez, böylece şekiller düzenli fakat eşyönsüz bir biçimde sıkıştırılabilir ya da genişletilebilir.

Doğrusal dönüşümleri x, y, z koordinatları biçiminde nasıl ifade ederiz? Yanıt, yeni her bir koordinatın orijinal olanların bir (türdeş) *doğrusal birleşimi* olarak, diğer bir deyişle, α, β ve γ sabit sayılar olmak üzere, $\alpha x + \beta y + \gamma z$ benzeri ayrı bir ifade tarafından ifade edilmesidir.[13.12] Her biri yeni koordinatlardan biriyle ilgili olmak üzere bu tür 3 adet ifadeye sahibiz. Tüm bunları daha özlü biçimde yazmak üzere 12. bölümün *indis notasyonu*yla bağlantı kurmak yararlı olacaktır. Bunun için koordinatları,

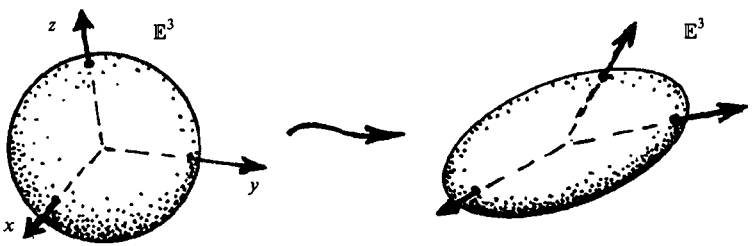
$$x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$$

olmak üzere, (x^1, x^2, x^3) olarak (bu üst indislerin yine üsleri göster*me*diğini akılda tutarak, *bkz.* §12.2) yeniden işaretleriz. Öklitçi 3–uzayımızdaki genel bir nokta, $a = 1, 2, 3$ olmak üzere, x^a koordinatlarına sahiptir. İndis notasyonunu kullanmanın bir avantajı her sayıdaki boyutta geçerli olmasıdır, böylece a'nın (ve tüm diğer indis harflerimizin), n sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere $1, 2, \ldots, n$ üzerinden geçtiğini düşünebiliriz. Biraz önce ele alınan durumda $n = 3$'tür.

Einstein'ın toplama uzlaşısıyla (§12.7) birlikte indis notasyonunda, genel doğrusal dönüşüm artık

$$x^a \longmapsto T^a_b x^b$$

biçimini alır.[9, 13.13]



Şekil 13.5 (x, y, z Kartezyen koordinatları biçiminde ifade edilen) $\mathbb{E}^3$ üzerinde hareket eden doğrusal bir dönüşüm $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresini genellikle bir elipsoide sıkıştırır ya da genişletir. O(3) ortogonal grubu birim küreyi koruyan $\mathbb{E}^3$ doğrusal dönüşümlerinden oluşur.

[13.12] Neden olduğunu açıklayabilir misiniz? Basitlik için bunu yalnızca 2–boyutlu durum için yapın.

[9] Bu kitabın pek çok yerinde indisleri bir tensör tipi sembol üzerinde derecelendirmek uygun ve bazen gerekli olacaktır. Bir doğrusal dönüşüm durumunda buna matris çarpımının düzenini ifade etmek üzere gerek duyarız.

[13.13] Bunu 3–boyutlu durumda açık biçimde gösterin.

Bu doğrusal dönüşümü $\boldsymbol{T}$ biçiminde adlandırırsak, $\boldsymbol{T}$'nin bu T^a_b *bileşenler* kümesince tanımlandığını görürüz. Bu tür bir *bileşenler* kümesi genellikle sayıların *kare* biçimli, ya da başka bağlamlarda (aşağıya bakın) $m\times n$–dikdörtgen, bir dizilimi olarak düzenlenir ve $n\times n$ *matris* olarak adlandırılır. Böylece yukarıda gösterilen denklem 3–boyutlu durum için

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

bu ifade $x^1 \longmapsto T^1_1 x^1 + T^1_2 x^2 + T^1_3 x^3$ ile başlayan üç ayrı bağıntı için kullanılmak üzere, biçiminde yazılır.[13.14]

Ayrıca bunu indisler ya da açık koordinatlar olmaksızın, $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{Tx}$ olarak da yazabiliriz. Dilersek, "$x^a \longmapsto T^a_b x^b$"nin bir bileşen ifadesi ol*ma*ması fakat aslında bu soyut $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{Tx}$ dönüşümünü temsil etmesi dolayısıyla *soyut indis* notasyonunu benimseyebiliriz. (İndislenmiş bir ifadenin soyut olarak ya da bileşenler biçiminde okunması önemli olduğunda bu sözcük seçimi yoluyla açık hale getirilecektir.) Alternatif olarak, Şekil 13.6a'da çizildiği üzere *diyagram biçimindeki* notasyonu kullanabiliriz. Benim açıklamalarımda sayı matrisi (T^a_b) ya da soyut $\boldsymbol{T}$ doğrusal dönüşümü, bu iki konu (ilki **V** vektör uzayımızın belirli bir koordinat tanımına bağlıyken ikincisi değildir) arasındaki teknik ayrıntılarla ilgilenmediğim sürece dönüşümlü olarak kullanılacak.

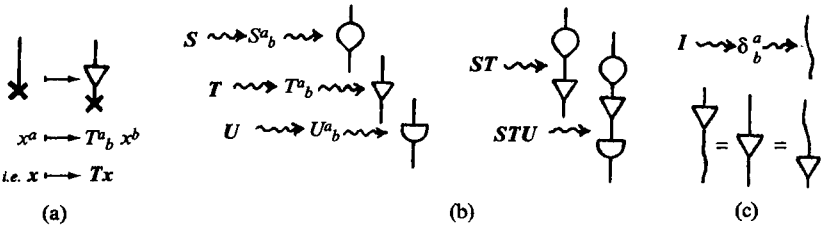
$\boldsymbol{T}$'nin uygulanmasını izleyerek uygulanan ikinci bir $\boldsymbol{S}$ doğrusal dönüşümünü ele alalım. İkisinin $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{ST}$ olarak yazılan $\boldsymbol{R}$ çarpımı bir

$$R^a_c = S^a_b T^b_c$$

bileşen (ya da soyut indis) tanımına sahip olur (bileşenler için toplama uzlaşısı!).[13.15] $\boldsymbol{ST}$ çarpımının diyagram biçimi Şekil 13.6b'de veriliyor. Diyagram biçimindeki notasyonda doğrusal dönüşümlerin ardışık bir çarpımını oluşturmak üzere onları aşağı doğru olan bir çizgide dizdiğimize dikkat edin. Bu, notasyonda uygun olarak çalışır fakat içindeki bağlayıcı "indis çizgileri"nin yatay biçimde çizildiği farklı bir uzlaşı da mükemmel derecede iyi biçimde kabul edilebilir. (Öyleyse burada cebirsel ve diyagram biçimindeki gösterimler arasında daha yakın bir uyum mevcuttur.)

[13.14] Bunun nasıl $x^a \longmapsto T^a_b x^b$'yi ifade ettiğini açıklayarak tümünü ayrıntılı olarak yazın.

[13.15] $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ ve $\boldsymbol{T}$ arasındaki, bileşenlerin 3×3 kare dizilimli elemanları biçiminde açık olarak yazılan ilişki nedir? Bu, "matrislerin çarpımı"nın normal kuralı, size tanıdıksa bunun farkında olabilirsiniz.



Şekil 13.6 (a) $x^a \mapsto T^a_b x^b$ doğrusal dönüşümü ya da indisler olmaksızın diyagram biçiminde $x \longmapsto Tx$ olarak (ya da indislerle birlikte §12.8'deki gibi soyut olarak okuyun) yazılmış hali. (b) S, T, U doğrusal dönüşümleri ve onların ST ve STU çarpımlarıyla ilgili diyagramlar. Ardışık bir çarpımda onları aşağı doğru bir çizgi boyunca dizeriz. (c) δ^a_b Kronecker deltası ya da I özdeşlik dönüşümü "gövdesiz" bir çizgi olarak gösterilir, böylece $T^a_b\delta^b_c = T^a_c = \delta^a_b T^b_c$ bağıntıları notasyonda otomatik hâle gelir (ayrıca *bkz.* Şekil 12.17).

I *özdeşlik* doğrusal dönüşümü normal olarak δ^a_b (*Kronecker deltası;* standart uzlaşıda bu indisler normalde derecelendirilmemiş olmak üzere) şeklinde yazılan bileşenlere sahiptir. Bu durumda

$$\delta^a_b = \begin{cases} 1 & a = b \text{ ise,} \\ 0 & a \neq b \text{ ise} \end{cases}$$

ifadesi geçerlidir ve $TI = T = IT$ cebirsel bağıntısını veren

$$T^a_b\delta^b_c = T^a_c = \delta^a_b T^b_c$$

ifadesine sahip oluruz.[13.16] δ^a_b bileşenlerinin kare matrisi, üst sol köşeden sağ alta uzanan ve *ana köşegen* olarak adlandırılan şey olan aşağı doğru 1'lere sahiptir. $n = 3$ durumunda bu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

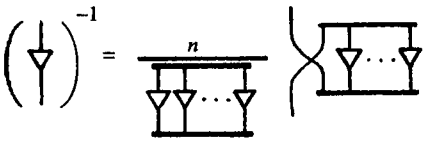
biçimindedir. Diyagram biçimindeki gösterimde Kronecker deltasını basitçe "gövdesiz" bir çizgiyle gösteririz ve yukarıdaki cebirsel bağıntılar notasyonda otomatik hale gelir; *bkz.* Şekil 13.6c.

Vektör uzayının tümünü bu uzay içinde daha küçük bir bölgeye (alt uzay) kadar gönderen bu doğrusal dönüşümler *tekil* olarak adlandırılır.[10] T'nin tekil olması için eşdeğer bir koşul

$$Tv = 0$$

[13.16] Doğrulayın.

[10] Bu bölge r boyutunda bir vektör uzayıdır. r'yi ($r < n$ olmak üzere) matrisin ya da doğrusal T dönüşümünün *derecesi* olarak adlandırırız. Tekil *olmayan* bir $n \times n$ matrisi n derecesine sahiptir. ("Derece" kavramı ayrıca dikdörtgen matrisler için de geçerlidir.) Not 12.18'le karşılaştırın.



Şekil 13.7 Tekil olmayan bir (n×n) T matrisinin T^{-1} tersi burada diyagram biçiminde, §12.7'de sunulup Şekil 12.18'de gösterilen ($\varepsilon_{a\ldots c}\,\epsilon^{a\ldots c} = n!$ ile normalize edilmiş) Levi–Civita ters simetrik $\varepsilon_{a\ldots c}$ ve $\epsilon^{a\ldots c}$ niceliklerinin diyagram biçimleri kullanılarak açık olarak verilmektedir.

olacak biçimde sıfır olmayan bir $\boldsymbol{v}$ vektörünün varlığıdır.[13.17] Dönüşümün tekil olmayışı sağlanırsa böylece o, $\boldsymbol{T}$'nin tersi $\boldsymbol{T}^{-1}$ olmak üzere, bir terse[13.18] sahip olur ve bir tersten bekleneceği üzere

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}$$

olur. Bu tersin açık ifadesini diyagram biçimindeki notasyonda da uygun şekilde verebiliriz; §12.7 ve Şekil 12.8'de sunulmuş[13.19] ters simetrik (*Levi–Civita*) $\varepsilon_{a\ldots c}$ ve $\epsilon^{a\ldots c}$ (normalleştirmeyle $\varepsilon_{a\ldots c}\,\epsilon^{a\ldots c} = n!$) nicelikleriyle ilgili yararlı diyagramları sunduğum Şekil 13.7'ye bakın.

Matris cebiri (ilk olarak 1858'de muazzam üretken İngiliz matematikçi ve avukat Arthur Cayley tarafından başlatılmış olan)[11] oldukça geniş bir uygulama alanına (*örn.* İstatistik, mühendislik, kristalografi, psikoloji, hesaplama; kuantum mekaniğini saymıyorum bile) sahiptir. Bu, §§11.3, 5, 6'da üzerinde durulan dördeyler ve Clifford ve Grassmann cebirlerini geneller. Gerçek matrisleri oluşturan (kendileri için kalın *italik* harfler kullanılan soyut doğrusal dönüşümler yerine) bileşenlerin dizilimi için *dik* kalın harfler (**A**, **B**, **C**, ...) kullanıyorum. Sabit n için $n\times n$ matrisine dikkati sınırlayarak, içerisinde toplama ve çarpma kavramlarının tanımlandığı bir sisteme, standart

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C},$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \qquad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{AB}$$

cebir kuralları geçerli olmak üzere, sahip oluruz. (**A** + **B**'nin her bir elemanı **A** ve **B**'nin ilgili elemanlarının basit biçimdeki toplamıdır.) Bununla birlikte çarpmanın değişme özelliğine sahip olmayız, bu durumda genellikle **AB** ≠ **AC** olur. Dahası yukarıda gördüğümüz gibi sıfır olmayan $n\times n$ her zaman terse sahip olmaz.

[13.17] Neden? Bunun özellikle, bileşenler diziliminin, sütunun bütününde 0'lara ya da iki özdeş sütuna sahip olduğu durumda meydana geldiğini gösterin. Ayrıca bu, iki özdeş sıra var olduğu durumda neden geçerlidir? *İpucu:* Bu son kısım için aşağıdaki determinant koşulunu göz önünde bulundurun.

[13.18] Niçin açık ifadeler kullanılmadığını gösterin.

[13.19] Şekil 12.18'de verilen diyagram biçimindeki bağıntıları kullanarak bu tanımın $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}$ ifadesini verdiğini dolaysız biçimde kanıtlayın.

[11] Matris kuramının tarihiyle ilgili, *bkz.* MacDuffee, 1933.

Ayrıca cebirin $m \times n$ *dikdörtgen* matris durumuna, m'nin n'ye eşit olma zorunluluğu bulunmamak üzere, genişlediği de belirtilmelidir. Buna karşın bir $m \times n$ matrisiyle $p \times q$ matrisi arasındaki toplama yalnızca $m = p$ ve $n = q$ olduğunda tanımlanır; bunlar arasındaki çarpmaysa, sonuç bir $m \times q$ matrisi olmak üzere yalnızca $n = p$ olduğunuda tanımlanır. Bu genişlemiş cebir, **x** "sütun vektörü" bir $n \times 1$ matris olarak düşünülmek üzere, yukarıda ele alınan **Tx** gibi çarpımları kapsar.[13.20]

GL(n) *genel doğrusal grubu* n–boyutlu bir vektör uzayının simetri grubudur ve açık biçimde tekil–olmayan $n \times n$ matrisin çarpımsal grubu olarak kavranır. Vektör uzayımızın *gerçel* olduğunu ve buna bağlı olarak matrisimizde görünen sayıların gerçel sayılar olduğunu vurgulamak istersek bu durumda bu doğrusal grubun bütününü GL(n, $\mathbb{R}$) olarak adlandırırız. Ayrıca karmaşık durumu da ele alıp GL(n, $\mathbb{C}$) *karmaşık* doğrusal grubun bütününü elde edebiliriz. Sırasıyla SL(n, $\mathbb{R}$) ve SL(n, $\mathbb{C}$) şeklinde, ya da daha kısaca temelde bulunan $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ alanları (*bkz.* §16.1) anlaşıldığında, yazılan bu grupların her biri, *özel* doğrusal grup olarak adlandırılır. Bunlar matrisleri 1'e eşit *determinantlara* sahip olmakla sınırlayarak elde edilir. Sırada determinant kavramının açıklanması olacak.

13.4 Determinantlar ve izler

$n \times n$ bir matrisin determinantı nedir? Matrisin elemanlarıyla hesaplanan, yalnızca ve yalnızca matris tekil olduğunda kaybolan bir *tekil sayıdır*. Diyagram biçimindeki notasyon determinantı açık şekilde uygun olarak açıklar; *bkz.* Şekil 13.8a. Bunun indis–biçimli notasyonu, $\epsilon^{a\ldots d}$ ve $\varepsilon_{e\ldots h}$ nicelikleri ters simetrik (Levi–Civita) tensörleri olmak üzere ve n–boyutlu bir uzay için, $a, \ldots, d$ ve $e, \ldots, h$ indislerinin her biri sayıca n adet olacak şekilde,

$$\epsilon^{a\ldots d}\varepsilon_{e\ldots d} = n!$$

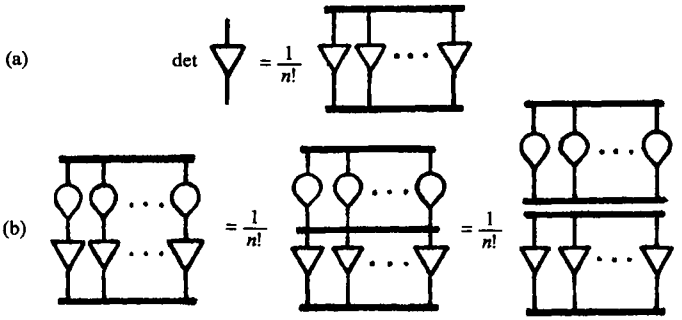
uyarınca normalize edilmek üzere

$$\frac{1}{n!}\epsilon^{ab\ldots d}T_a^e T_b^f \ldots T_d^h \varepsilon_{ef\ldots h}$$

ifadesidir.

Bu determinantı det (T_b^a) ya da det $\boldsymbol{T}$ (ya da bazen $|\boldsymbol{T}|$ ya da parantezin yerini dik çizgilerin aldığı matrisi oluşturan dizilimler) olarak gösterebiliriz. 2×2 ve 3×3 belirli matris durumlarında determinant

[13.20] Bunu açıklayın ve dikdörtgen matrislerle ilgili cebirsel kuralların tümünü ortaya koyun.



Şekil 13.8 (a) det (T^a_b) = det T = $|T|$ ile ilgili diyagram biçimindeki gösterim. (b) det (ST) = det S det T ifadesinin diyagram biçimindeki kanıtı. Ters simetrileme çizgisi orta terime eklenebilir çünkü onun kestiği indis çizgilerinde ters simetri zaten mevcuttur. *Bkz.* şekiller 12.17, 12.18.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = aej - afh + bfg - bdj + cdh - ceg$$

ile verilir.[13.21] Determinant, diyagram biçimindeki notasyonda (Şekil 13.8b) çok net şekilde doğru olarak görülebilecek önemli ve oldukça kayda değer

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

bağıntısını sağlar. İndis notasyonuyla yazıldığında

$$\epsilon^{a\ldots c}\varepsilon_{f\ldots h} = n!\,\delta^{[a}_{f}\ldots\delta^{c]}_{h}$$

ve

$$\epsilon^{ab\ldots c}\varepsilon_{fb\ldots c} = (n-1)!\,\delta^{a}_{f}$$

ifadelerine benzeyen kilit bileşenler Şekil 12.18'de[13.22] gösteriliyor.

Ayrıca bir matrise (ya da doğrusal dönüşüme) ait,

$$\text{iz}\,\mathbf{T} = T^a_a = T^1_1 + T^2_2 + \cdots + T^n_n,$$

iz kavramına da (diğer bir deyişle ana köşegen üzerindeki elemanlar toplamı, *bkz.* §13.3), bu diyagram biçimli olarak Şekil 13.9'da gösterilmek üzere, sahibiz. Bir determinantla ilgili durumdakinin aksine iki matrisin **AB** çarpımının iziyle bireysel olarak **A** ve **B**'nin izleri arasında belirli hiçbir ilişki mevcut değildir. Bunun yerine

[13.21] Bunları Şekil 13. 8'deki ifadeden türetin.

[13.22] Bunların niçin geçerli olduğunu gösterin.

$$\text{iz}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{iz}\,\mathbf{A} + \text{iz}\,\mathbf{B}$$

bağıntısına sahibiz.[13.23]

Determinantla, kendisiyle ilgili ε sayısının, karesi ε^2'yi (ve ayrıca daha yüksek üsler ε^2, ε^2, vb) göz ardı edebileceğimiz kadar "sonsuz küçük biçimde küçük" olarak değerlendirildiği bir $\mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{A}$ $n\times n$ matrisiyle verilen "sonsuz küçük" bir doğrusal dönüşümün determinantıyla ilgisi olan iz arasında önemli bir bağlantı mevcuttur. Böylece (ε^2, vb'yi göz ardı ederek)

$$\det\,(\mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{A}) = 1 + \varepsilon\,\text{iz}\,\mathbf{A}$$

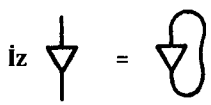
ifadesini buluruz.[13.24] Özellikle, SL(n)'nin sonsuz küçük elemanları, diğer bir deyişle *birim* determinant olmak üzere SL(n)'nin sonsuz küçük döndürmelerini temsil eden elemanları (GL(n)'ninkilere karşıt olarak), $\mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{A}$'daki sıfır ize sahip $\mathbf{A}$ tarafından nitelenir. Bunun önemini §13.10'da görüyor olacağız. Aslında yukarıdaki denklem, matrislerle ilgili $e^{\mathbf{A}}$ sıradan sayılardaki gibi aynı tanıma sahip olmak üzere,

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{iz}\,\mathbf{A}}$$

ifadesi[13.25] üzerinden *sonlu* doğrusal dönüşümlere, diğer bir deyişle

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + 1/2\mathbf{A}^2 + 1/6\mathbf{A}^3 + 1/24\mathbf{A}^4 + \cdots$$

ifadesine genişletilebilir. Bu konulara §13.6 ve §14.6'da döneceğiz.



Şekil 13.9 $\mathbf{T}(=T^a_a)$ iziyle ilgili diyagram biçimindeki notasyon.

13.5 Öz değerler ve öz vektörler

Doğrusal dönüşümlerle bağlantılı kavramlar arasındaki en önemlileri "öz değerler" ve "öz vektörler" olarak adlandırılanlardır. Bunlar §21.5 ve §§22.1,5'te göreceğimiz üzere kuantum mekaniği için ve matematiğin diğer pek çok alanı ve uygulaması için yaşamsaldır. Doğrusal bir T dönüşü-

[13.23] Bunu gösterin.

[13.24] Bunu gösterin.

[13.25] Bununla ilgili ifadeyi oluşturun. *İpucu*: Bir matrisle ilgili "kanonik biçimi", (§13.5'te açıklandığı gibi) onun öz değerleri biçiminde, ilk olarak bu öz değerlerin eşit olmadıklarını varsayarak (ve *bkz.* alıştırma [13.27]) kullanın. Daha sonra bazı öz değerlerin eşitliğinin bu tür kavramları geçersiz kılamayacağını göstermek üzere genel bir argüman kullanın.

münün bir *öz vektörü*, T'nin kendisinin bir katına gönderdiği sıfır olmayan karmaşık bir v vektörüdür. Bu demek olur ki,

$$Tv = \lambda T, \text{ diğer bir deyişle } T^a_b v^b = \lambda v^a$$

olacak şekilde karmaşık bir λ sayısı, ilgili *öz değer*, mevcuttur. Bu denklemi ayrıca $(T - \lambda I)v = 0$ olarak da yazabiliriz, böylece λ T'nin bir öz değeri olacaksa $T - \lambda I$ niceliği *tekil* olmak zorundadır. Tersine $T - \lambda I$ tekilse bu durumda λ T'nin bir öz değeridir. v bir öz değerse bu durumda ayrıca v'nin sıfır olmayan herhangi karmaşık bir katı da öz değerdir. Bu katların 1–boyutlu karmaşık uzayı T dönüşümünce değişmemiş bırakılır; v'yi öz vektör olarak niteleyen bir özellik (Şekil 13.10).

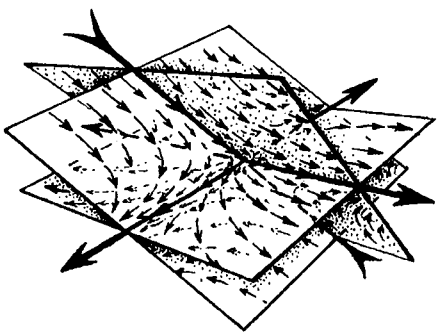
Yukarıdakilerden λ'nın T'ye ait bir öz değer olma koşulunun

$$\det (T - \lambda I) = 0$$

olduğunu görürüz. Bunu yazarak n'ince dereceden λ biçiminde bir polinom denklemi[13.26] elde ederiz. "Cebirin temel teoremi", §4.2, aracılığıyla $\det (T - \lambda I)$ şeklindeki λ–polinomunu, doğrusal çarpanlar olmak üzere, çarpanlarına ayırabiliriz. Bu, yukarıdaki ifadeyi, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ karmaşık sayıları T'nin çeşitli öz değerleri olmak üzere,

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

ifadesine indirger. Belirli durumlarda bu çarpanların bazıları çakışır, bu durumda *katlı* bir öz değere sahip oluruz. Bir λ_r öz değerine ilişkin m katlılığı $\lambda_r - \lambda$ çarpanının yukarıdaki çarpımda görünme sıklığının sayısıdır. T'nin öz değerlerinin, katlılıklara uygun biçimde sayılan toplam sayısı bir $n \times n$ matrisi için her zaman n'ye eşittir.[13.27]



Şekil 13.10 Doğrusal bir T dönüşümü eylemi. Öz değerleri her zaman orijinden geçen doğrusal uzaylar (burada üç doğru) oluşturur. Bu uzaylar T tarafından değişmemiş bırakılır. (Bu örnekte iki (eşit olmayan) pozitif öz değer (dışa yönelen oklar) ve bir negatif öz değer (içe yönelen oklar) mevcuttur.)

[13.26] Bu polinomun katsayılarını diyagram biçimli olarak gösterebilir misiniz? Bunları $n = 1$ ve $n = 2$ için çözün.

[13.27] $\det T = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ ve iz $T = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n$ olduğunu gösterin.

r katlılığındaki belirli bir λ öz değeri için ilgili öz değerlerin uzayı d boyutluluğunda, $1 \leq d \leq r$ olmak üzere, doğrusal bir uzay oluşturur. Üniter, Hermitsel ve kuantum mekaniğinde en çok ilgilenilen normal matrisleri (*bkz.* §13.9, §§22.4,6) içeren belirli tipteki matrisler için her zaman (verili r için $d = 1$'in en "genel" durum olması gerçeğine karşın) en yüksek $d = r$ boyutluluğuna sahip oluruz. Bu şanslı bir durumdur çünkü $d < r$ için geçerli (daha genel) durumlarla başa çıkmak daha zordur. Kuantum mekaniğinde öz değer katlılıkları *bozulmalar* olarak adlandırılır (*krş.* §§22.6, 7).

n-boyutlu bir **V** vektör uzayına ilişkin bir *temel*, n adet $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ vektörünün, bunlar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$'nin hepsi 0 olmamak üzere $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = 0$ biçimiyle herhangi bir ilişki mevcut olmamak anlamına gelecek şekilde *doğrusal olarak bağımsız* olmak üzere, bir $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ düzenlenmiş kümesidir. Böylece **V**'nin tüm elemanları bu temel elemanların eşsiz biçimdeki doğrusal bir birleşimidir.[13.28] Aslında bu özellik, doğrusal bağımsızlığın tek başına yeterli olmayıp **V**'nin sonsuz boyutlu olabildiği daha genel durumda bir temeli niteleyen şeydir.

Bu nedenle verili bir $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ temeli için **V**'nin herhangi bir $\boldsymbol{x}$ elemanı eşsiz biçimde, $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ $\boldsymbol{e}$'nin $\boldsymbol{x}$'e göre düzenlenmiş *bileşenler* kümesi olmak üzere (§12.3'le karşılaştırın),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n \\ &= x^j\boldsymbol{e}_j\end{aligned}$$

(bu j indisleri burada soyut ol*mamak* üzere) olarak yazılabilir. Tekil–olmayan doğrusal bir $\boldsymbol{T}$ dönüşümü bir temeli her zaman diğer bir temele gönderir; dahası $\boldsymbol{e}$ ve $\boldsymbol{f}$ verili herhangi iki temelse bu durumda her bir $\boldsymbol{e}_a$'yı kendisine karşılık gelen $\boldsymbol{f}_j$'ye gönderen eşsiz bir $\boldsymbol{T}$ mevcuttur:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{f}_j.$$

$\boldsymbol{e}$'ye göre alınan bileşenler bakımından $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$temel elemanlarına ait bileşenlerin kendileri sırasıyla (1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 0, 1)'dir. Diğer bir deyişle $\boldsymbol{e}_j$'nin bileşenleri $(\delta^1_j, \delta^2_j, \delta^3_j, \ldots, \delta^n_j)$'dir.[13.29] Tüm bileşenler $\boldsymbol{e}$ tabanına göre alındığında $\boldsymbol{T}$'nin, $\boldsymbol{f}_j$'nin $\boldsymbol{e}$ tabanındaki bileşenleri

$$(T^1_j, T^2_j, T^3_j, \ldots, T^n_j)$$

olmak üzere,[13.30] T^i_j matrisi olarak gösterildiğini görürüz. Doğrusal bir dönüşümle bir matris arasındaki kavramsal farkın, ilki soyutken ve bir ta-

[13.28] Bunu gösterin.

[13.29] Bu notasyonu açıklayın.

[13.30] Niçin? $\boldsymbol{e}_i$'nin $\boldsymbol{f}$ tabanındaki bileşenleri nedir?

bana dayanmazken sonrakinin tabana bağlı bir sunuma karşılık gelmesi olduğu anımsanmalıdır.

Artık, (varsa) T'ye ait her bir katlı öz değerin $d = r$'yi sağlaması koşuluyla, diğer bir deyişle öz uzay boyutluluğu kendi katlılığına eşit olmak koşuluyla, V için her biri T'ye ait bir öz değer olan bir taban $(e_1, e_2, ..., e_n)$ bulmak olasıdır.[13.31] İlgili öz değerler $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$:

$$Te_1 = \lambda_1 e_1, Te_2 = \lambda_2 e_2, ..., Te_n = \lambda_n e_n.$$

T, yukarıda olduğu gibi e tabanını f tabanına götürürse bu durumda f tabanındaki elemanlar yukarıdaki gibidir, böylece $f_1 = \lambda_1 e_1$, $f_2 = ë_2 e_2$, ..., $f_n = \lambda_n e_n$'ye sahip oluruz. Buradan e tabanıyla ilgili T'nin

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

köşegen matris biçimini aldığı sonucu çıkar; şöyle ki, kalan bileşenler sıfır olmak üzere, $T_1^1 = \lambda_1$, $T_2^2 = \lambda_2$, ..., $T_n^n = \lambda_n$'dir. Doğrusal bir dönüşümle ilgili bu *kanonik biçim* hem kavramsal hem de hesaplamaya ilişkin olarak oldukça kullanışlıdır.[12]

13.6 Temsil kuramı ve Lie cebiri

Grupların *temsil kuramı* olarak adlandırılan önemli (özellikle kuantum kuramı için önemli) bir fikirler bütünü mevcuttur. §13.1'deki tartışmada bir kareye ilişkin yansımalı–olmayan simetrilerin karmaşık sayılar tarafından temsil edilebildiğini, grup çarpımı karmaşık sayıların gerçek çarpımı olarak bire bir temsil edilmek üzere, gözlemlediğimizde grup gösterimiyle ilgili oldukça basit bir örnek gördük. Bununla birlikte Abelci olmayan gruplara, karmaşık sayıların çarpımı değişmeli olduğundan bu derece basit hiçbir şey uygulanamaz. Öte taraftan doğrusal dönüşümler (ya da

[13.31] Bunu kanıtlayabilir misiniz? *İpucu:* r katlılığının her bir öz değeriyle ilgili doğrusal olarak bağımsız r adet öz değer seçin. Tüm bu toplamın vektörleri arasındaki doğrusal bir bağıntının, bu bağıntı T'yle ardışık biçimde ön çarpıma uğratıldığında bir çelişkiye yol açtığını gösterin.

[12] Öz değerlerin tüm uzayı kapsadığı o bozulmuş durumlarda (diğer bir deyişle bir d'nin ilgili r'den küçük olduğu durumlarda) hâlâ kanonik bir biçim bulabiliriz fakat artık 1'lerin, bunlar yalnızca, köşegen terimleri *eşit* öz değerler (*Jordan normal biçimi*) olan kare bloklar içinde bulunmak üzere, ana köşegenin hemen üzerinde görünmesine izin veririz; *bkz.* Anton ve Busby, 2003. Açıktır ki Weierstrauss bu normal biçimi, Jordan'dan iki yıl önce, 1868'de (etkileyici biçimde) bulmuştu; *bkz* Hawkins, 1977.

matrisler) genellikle değişmeli değildir, bu durumda Abelci olmayan grupları onlar biçiminde temsil etmeyi akla yakın bir beklenti olarak değerlendirebiliriz. Aslında bu tür bir şeyle, O(3) döngü grubunu üç boyutta doğrusal dönüşümler biçiminde gösterdiğimiz §13.3'ün başında karşılaşmıştık.

22. bölümde göreceğimiz üzere kuantum mekaniği tümüyle doğrusal dönüşümlerle ilgilidir. Dahası, çeşitli simetri grupları modern parçacık fiziğinde, örneğin O(3) döngü grubu, görelilik kuramıyla ilgili simetri grupları (bölüm 18) ve parçacık etkileşimlerinin temelindeki simetrilerle (bölüm 25) ilgili yaşamsal öneme sahiptir. Şu halde bu grupların özellikle doğrusal dönüşümler biçiminde temsil edilmesinin kuantum kuramında temel rollere sahip oluşu şaşırtıcı değildir.

Kuantum kuramının (özelde 26. bölümdeki kuantum alan kuramı) sıklıkla *sonsuz* boyutlu uzayların doğrusal dönüşümleriyle ilgilendiği ortaya çıkıyor. Bununla birlikte basitlik için burada şeyleri yalnızca, sonlu boyutlu durumdaki doğrusal dönüşümlerce temsil edilişleriyle ilgili olarak ifade edeceğim. Bazı durumlarda önemli sayılabilecek farklılıklar olmasına karşın karşılaşacağımız fikirlerin çoğu sonsuz boyutlu gösterimler için de geçerlidir.

Grup gösterimi ne anlama gelir? Bir $\mathcal{G}$ grubunu ele alın. Temsil kuramı GL(n)'nin, $\mathcal{G}$'deki herhangi bir g elemanı için ona karşılık gelen (GL(n)'ye ait) doğrusal bir $\boldsymbol{T}(g)$ dönüşümünün, $\mathcal{G}$'deki çarpma kuralları GL(n)'nin işlemleri tarafından korunacak şekilde, diğer bir deyişle $\mathcal{G}$'nin herhangi iki g ve h elemanı için

$$\boldsymbol{T}(g)\,\boldsymbol{T}(h) = \boldsymbol{T}(gh)$$

İfadesine sahip olacağımız şekilde, mevcut olması özelliğindeki bir alt - grubunu (diğer bir deyişle $n\times n$ matrisin çarpımsal bir grubu) bulmakla ilgilenir. g'nin h'den farklı olduğu her durumda $\boldsymbol{T}(g)$, $\boldsymbol{T}(h)$'den farklıysa gösterim *bire bir* olarak adlandırılır. Bu durumda GL(n)'nin bir *alt grubu* olarak $\mathcal{G}$ grubunun bir *özdeş kopya*sına sahip oluruz.

Aslında sonlu her grup GL(n, $\mathbb{R}$)'de, n $\mathcal{G}$'nin düzeni olmak üzere,[13.32] bire bir temsile sahiptir ve bire bir olmayan oldukça fazla gösterim mevcuttur. Öte taraftan her sürekli grubun bir GL(n)'de bire bir temsile sahip olduğu pek de doğru değildir. Bununla birlikte grubun evrensel görünümleri hakkında kaygılanmazsak (yerel) bir temsil her zaman olasıdır.[13]

[13.32] Bunu gösterin. *İpucu*: Temsil edici matrisin her bir sütununu sonlu $\mathcal{G}$ grubunun ayrı bir elemanıyla ve ayrıca her bir sırayı ilgili grup elemanıyla işaretleyin. Matriste, $\mathcal{G}$'nin sırayı işaretleyen elemanı, sütunu işaretleyen elemanı ve $\mathcal{G}$'nin bu belirli matris tarafından temsil edilen elemanı arasında belirli bir bağıntının (bunu bulun!) geçerli olduğu her konuma bir 1 yerleştirin. Bu bağıntının geçerli olmadığı durumlarda 0 yerleştirin.

[13] Bu noktayı örneklemek üzere SL(n, $\mathbb{R}$)'yi (diğer bir deyişle GL(n, $\mathbb{R}$)'nin kendisinin birim-determinant elemanları) ele alın. Bu grup temelde, §11.3'te bir kitaba ilişkin kemer bağlamay-

Son derece kendine özgü Norveçli matematikçi Sophus Lie'a, 1842–1899, atfedilen ve sürekli gruplara ilişkin yerel kuramın bütünlüklü olarak ele alınmasına yol açan güzel bir kuram mevcuttur. (Aslında sürekli - gruplar genellikle "Lie grupları" olarak adlandırılır; *bkz.* §13.1.) Bu kuram *sonsuz küçük* grup elemanlarına ilişkin bir çalışmaya dayanır.[14] Grubun yerel yapısına ilişkin bütünlüklü bilgi sunan bu sonsuz küçük elemanlar bir tür cebir, *Lie cebiri* olarak adlandırılan cebir, tanımlar. Lie cebiri grubun tüm *evrensel* yapısını ortaya koymasa da bu normalde daha az öneme sahip bir konu olarak değerlendirilir.

Lie cebiri nedir? Sürekli bir $\mathcal{G}$ grubuna ait "sonsuz küçük" bir a elemanını temsil eden bir $\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{A}$ matrisine, ε "küçük" olarak kabul edilmek üzere, sahip olduğumuzu düşünün (§13.4'ün sonuyla karşılaştırın). Bu tür iki a ve b elemanının ab çarpımını temsil etmek üzere $\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{B}$'nin matris çarpımlarını oluşturduğumuzda, ε^2 niceliğini "hesaplamak için çok küçük" olarak görmezden gelmemize izin verilirse

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{I} + \varepsilon(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \varepsilon^2 \boldsymbol{AB} \\ &= \boldsymbol{I} + \varepsilon(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Bununla uyumlu olarak $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ matris *toplamı* iki sonsuz küçük a ve b elemanının *ab grup çapımını* temsil eder.

Aslında toplama işlemi Lie cebirinin $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots$ niceliklerine ilişkin parçasıdır. Bununla birlikte toplamı işlemi $\mathcal{G}$ Abelci olmayan bir grupken de değişmelidir, böylece yalnızca toplamları (aslında yalnızca $\mathcal{G}$ boyutunu) ele alırsak grubun yapısına ilişkin pek fazla şey yakalayamayız. $\mathcal{G}$'nin Abelci olmayan doğası

$$a\, b\, a^{-1}\, b^{-1}$$

şeklinde ifadeler olan *grup çeviricileri*nde ifade edilir. Bunu, $(\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I} - \varepsilon \boldsymbol{A} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A}^2 - \varepsilon^3 \boldsymbol{A}^3 + \cdots$ üslü seri ifadesine (bu seri her iki taraf $\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{A}$ ile çarpılarak kolayca kontrol edilmek üzere) dikkat ederek $\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{A}$ biçiminde yazalım. Şu hakde "hesaplamak için çok küçük" olarak göz ardı ettiğimiz şey ε^3'tür, fakat ε^2'yi

---

la ilgili döndürmeleri ele almak yoluyla SO(3)'ün $\widetilde{\mathrm{SO}}(3)$ ikili örtüsünü etkin biçimde bulduğumuz aynı yolla $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$'den elde edilen bir $\widetilde{\mathrm{SL}}(n, \mathbb{R})$ "ikili örtü"süne ($n \geq 3$ olmak koşuluyla) sahiptir. Bu nedenle $\widetilde{\mathrm{SO}}(3)$ olağan 3–uzaydaki bir *spinör nesne*nin döndürmelerine ait (yansımalı olmayan) gruptur. Aynı biçimde, §13.3'te tartışıldığı üzere, "sıkıştırma" ya da "germe"ye izin veren daha genel doğrusal dönüşümlere bağlı olan "spinör nesneleri" ele alabiliriz. Bu yolla *yerel olarak* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$'yle aynı olan fakat aslında hiçbir $\mathrm{GL}(m)$'de bire bir biçimde temsil edilemeyen $\widetilde{\mathrm{SL}}(n, \mathbb{R})$ grubuna ulaşırız. *Bkz.* not 15.9.

[14] Bu kavram iyi tanımlıdır; *krş.* not 13.4.

$$
\begin{aligned}
&(I+\varepsilon A)(I+\varepsilon B)(I+\varepsilon A)^{-1}(I+\varepsilon A)^{-1} \\
&= (I+\varepsilon A)(I+\varepsilon B)(I-\varepsilon A+\varepsilon^2 A^2)(I-\varepsilon B+\varepsilon^2 B^2) \\
&= I+\varepsilon^2(AB-BA)
\end{aligned}
$$

olduğundan tutarız.[13.34] Bu bize, $\mathcal{G}$'nin Abelci olmayan grup olması durumundaki kesin yolun izini sürersek "çeviriciler"e ya da

$$[A,B] = AB - BA$$

*Lie parantezleri*ne dikkat etmek zorunda olduğumuzu söyler. Lie cebiri artık +, onun tersi − ve [,] parantez işlemlerinin yineleyen uygulanması aracılığıyla, ayrıca (gerçel ya da karmaşık olabilen) basit sayılarla çarpmaya izin verilmesi de olağan olmak üzere, oluşturulur. Cebire ilişkin "toplamsal" görünüm (§11.1'deki dördeylerde olduğu gibi) alışıldık vektör uzayı yapısına sahiptir. Ek olarak Lie parantezi dağılmayı, vb, bir diğer deyişle

$$[A+B,C] = [A,C] + [B,C],\ [\lambda A,B] = \lambda[A,B],$$

özelliğini,

$$[A,B] = -[B,A]$$

ters simetri özelliğini (buradan ayrıca $[A,C+D] = [AC] + [AD]$, $[A,\lambda B] = \lambda[A,B]$ olur) ve *Jacobi özdeşliği*[13.35] olarak bilinen (daha genel bir biçimiyle §14.6'da karşılaşılacak olan) zarif

$$\big[A,[B,C]\big] + \big[B,[C,A]\big] + \big[C,[A,B]\big] = 0$$

bağıntısını sağlar.

Matrislerimiz $A, B, C, \ldots$ 'ye ilişkin vektör uzayları için (temsil bire birse, N, $\mathcal{G}$ grubunun boyutu olmak üzere) bir $(E_1, E_2, \ldots, E_N)$ temeli seçebiliriz. Çeşitli $[E_\alpha, E_\beta]$ çeviricilerini oluşturarak bunları

$$[E_\alpha, E_\beta] = \gamma_{\alpha\beta\chi} E_\chi$$

bağıntılarını (toplama uzlaşısını kullanarak) elde etmek üzere taban elemanları biçiminde ifade edebiliriz. N^3 bileşen nicelikleri, $\gamma_{\alpha\beta\chi}$, $\mathcal{G}$ için *yapı sabitleri* olarak adlandırılır. Yukarıdaki ters simetri ve Jacobi özdeşliği nedeniyle

$$\gamma_{\alpha\beta\chi} = -\gamma_{\beta\alpha\chi},\ \gamma_{[\alpha\beta\xi}\gamma_{\chi]\xi\zeta} = 0$$

ifadesini sağladıkları için (parantez notasyonu için §11.6'ya bakın) tümüyle bağımsız değildirler.[13.36] Bu bağıntılar Şekil 13.11'de diyagram biçimli olarak veriliyor.

[13.34] Bu "ε^2 düzeni" hesaplamasını ayrıntılı olarak açıklayın.

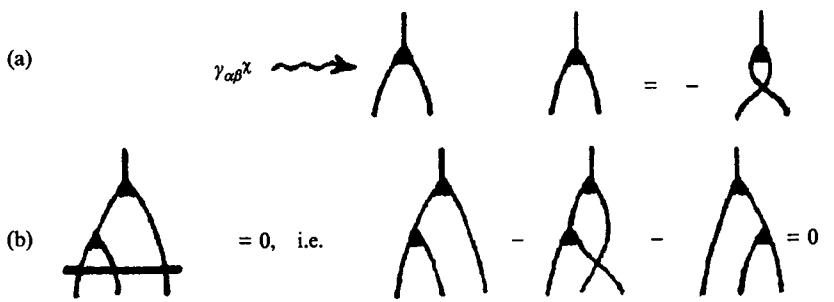
[13.35] Tüm bunları gösterin.

[13.36] Bunu gösterin.

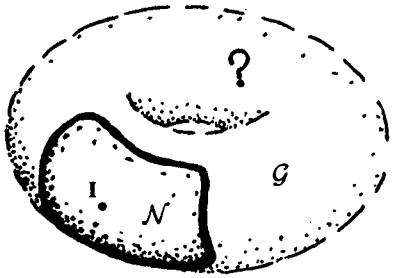
Birebir temsille ilgili Lie cebirinin yapısının (temel olarak $\gamma_{\alpha\beta\chi}$ yapı sabitlerinin bilgisi) $\mathcal{G}$ grubuna ait kesin yerel doğasını belirlemekte yeterli oluşu kayda değer bir gerçektir. Burada "yerel", özdeşlik elemanı I'yı, noktaları $\mathcal{G}$'nin farklı elemanlarını temsil eden $\tilde{\mathcal{G}}$ "grup manifoldu" içinde çevreleyen (yeterince küçük) N–boyutlu açık bir $\mathcal{N}$ bölgesi anlamına gelir (*bkz.* Şekil 13.12). Aslında, ilgili *sonlu* (diğer bir deyişle sonsuz küçük olmayan) bir gerçek grup elemanını bir $\boldsymbol{A}$ Lie grubu elemanından başlayarak §13.4'ün sonunda tanımlanan $e^{\boldsymbol{A}}$ "üs alma" işlemi aracılığıyla oluşturabiliriz. (Bu, §14.6'da biraz daha bütünlüklü olarak ele alınacak.) Bu nedenle sürekli grupların doğrusal dönüşümlerle temsili kuramı büyük oranda Lie cebirinin, aslında fizikteki normal uygulama olan bu tür dönüşümlerle temsil edilmesi çalışmasına aktarılmış olabilir.

Bu, Lie cebiri elemanlarının kendilerinin, dikkat çekici bir biçimde, dolaysız olarak sıklıkla fiziki nicelikler (daha sonra §22.8'de göreceğimiz üzere $\mathcal{G}$ grubu döngü grubu olduğunda örneğin açısal momentum) biçiminde yorumlanışa sahip olduğu kuantum mekaniğinde özellikle önemlidir.

Lie cebiri matrisleri yapısal olarak ilgili Lie grubu matrislerinden, doğrusal olmayan sınırlamalar yerine doğrusal olanlara bağlı olacak biçimde önemli ölçüde basit olmaya eğilimlidir. Bu işlem kuantum fizikçilerinin sevgilisidir!



Şekil 13.11 (a) α, β ve (b) Jacobi özdeşliğindeki ters simetriyi gösteren diyagram biçimindeki $\gamma_{\alpha\beta\chi}$ yapı sabitleri.



Şekil 13.12 Bir $\mathcal{G}$ Lie grubunun temsiliyle ilgili Lie cebiri (temel olarak $\gamma_{\alpha\beta\chi}$ yapı sabitlerinin bilgisi), $\mathcal{G}$'nin yerel yapısını belirler, diğer bir deyişle I özdeşlik elemanını çevreleyen (yeterince küçük) açık bir $\mathcal{N}$ bölgesi içindeki $\mathcal{G}$'nin yapısını ayarlar fakat bize $\mathcal{G}$'nin evrensel doğasına ilişkin bir şey söylemez.

13.7 Tensör temsil uzayları; indirgenebilirlik

Bir $\mathcal{G}$ grubunun daha özenli gösterimlerini, belirli birinden başlayarak oluşturmanın yolları mevcuttur. Bunu nasıl yaparız? $\mathcal{G}$'nin n–boyutlu bir **V** vektör uzayı üzerinde etkiyen doğrusal dönüşümlere ait bir $\mathcal{T}$ ailesince temsil edildiğini düşünün. Bu tür bir **V**, $\mathcal{G}$'yle ilgili bir *temsil uzayı* olarak adlandırılır. $\mathcal{G}$'nin herhangi bir t elemanı artık, $\boldsymbol{T}$ **V**'ye ait her bir $\boldsymbol{x}$'e, $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{Tx}$ biçiminde etki etmek üzere, $\mathcal{T}$'deki ilgili bir $\boldsymbol{T}$ doğrusal dönüşümü tarafından temsil edilir. Bunu (soyut) indis notasyonunda (§12.7), §13.3'teki gibi $x^a \longmapsto T^a_b x^b$ gibi ya da Şekil 13.6a'daki gibi diyagram biçimli olarak gösterebiliriz. Gelin verili **V**'den yola çıkarak $\mathcal{G}$'yle ilgili nasıl başkaca temsil uzayları bulabileceğimizi görelim.

Bir ilk örnek olarak §12.3'ten **V**'nin *ikili uzayı* **V***'ı anımsayın. **V***'ın elemanları **V**'den skalerlere yapılan doğrusal gönderimler olarak tanımlanır. $\boldsymbol{y}$'nin **V**'deki bir $\boldsymbol{x}$ elemanı üzerindeki eylemini indis notasyonunda (§12.7) $y_a x^a$ olarak yazabiliriz. $\boldsymbol{y} \bullet \boldsymbol{x}$ notasyonu daha önce bu ($\boldsymbol{y} \bullet \boldsymbol{x} = y_a x^a$) ifadesi için kullanılmıştı, fakat artık, $\boldsymbol{y}$'yi bir *sıra* vektörü ($1 \times n$ matris) ve $\boldsymbol{x}$'i *sütun* vektörü ($n \times 1$ matris) kabul ederek,

$$\boldsymbol{yx} = y_a x^a$$

matris notasyonunu kullanabiliriz. Artık bir *matris* dönüşümü olarak düşünülen $\mathbf{x} \longmapsto \boldsymbol{T}\mathbf{x}$ dönüşümümüzle uyumlu olarak ikili **V*** uzayı,

$$\mathbf{y} \longmapsto \mathbf{yS}, \text{ diğer bir deyişle } y_a \longmapsto y_b \mathbf{S}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}}$$

doğrusal dönüşümüne uğrar. Burada **S**, **T**'nin

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}^{-1}$$

*tersi*dir ve böylece $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{Tx}$ ise $\mathbf{yx}$'in $\longmapsto$ tarafından korunduğunu garanti altına almak üzere $\mathbf{y} \longmapsto \mathbf{yT}^{-1}$'e gereksinim duymamız nedeniyle

$$S^a_b T^b_c = \delta^a_c$$

olur.

Yukarıda bir **y** sıra vektörü kullanmamız bize standart olmayan bir çarpım düzeni verir. Şeyleri, bir **A** matrisinin $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ *devriğine* ait notasyonla diğer türlü yazmak daha alışıldıktır. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ matrisinin elemanları **A**'nınkilerle aynıdır, fakat sıra ve sütunlar yer değiştirmiştir. **A** kare ($n\times n$) ise, elemanları **A**'nın ana köşegeni boyunca yansıtılmış elemanlar olan $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$'de öyledir (*bkz.*§13.3). **A** dikdörtgen $m\times n$ ise $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ uygun biçimde yansıtılmış $n\times m$'dir. Bu nedenle $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ standart bir sütun vektörüdür ve yukarıdaki $\mathbf{y}\mapsto\mathbf{yS}$'yi, ^{T} yer değiştirme işlemi çarpmanın düzenini $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ biçiminde değiştirdiğinden

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mapsto\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$$

olarak yazabiliriz. Bu nedenle herhangi bir **V** temsil uzayına ilişkin ikili **V*** uzayının kendisinin $\mathcal{G}$'nin bir temsil uzayı olduğunu görürüz. Ters $^{-1}$ işleminin de çarpma düzenini, $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,[13.37] değiştirdiğine, böylece bir temsil için gerekli çarpma düzeninin yeniden oluştuğuna dikkat edin.

Benzer türdeki düşünceler tensörlerin **V**'den oluşturulmuş çeşitli vektör uzayları için de geçerlidir; *bkz.* §12.8. $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ değerlikli bir $\boldsymbol{Q}$ tensörünün (**V** vektör uzayı üzerinde) q alt ve p üst indisleriyle birlikte

$$Q^{f\ldots h}_{a\ldots c}$$

niceliği biçiminde bir tanımlamaya sahip olduğunu anımsayın. Tensörleri aynı değerlikteki diğer tensörlere ekleyebilir ve onları skalerlerle çarpabiliriz; Sabit değerlikli $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ tensörleri n^{p+q} (bileşenlerin toplam sayısı) boyutlu bir vektör uzayı oluşturur.[13.38] Kuramsal olarak $\boldsymbol{Q}$'yu ikili uzay **V***'ın q kopyası ve **V**'nin p kopyasıyla $(p,q\geq 0)$ ilgili *tensör çarpımı*,

$$\mathbf{V}^*\otimes\mathbf{V}^*\otimes\ldots\otimes\mathbf{V}^*\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}\otimes\ldots\otimes\mathbf{V},$$

biçiminde adlandırdığımız bir vektör uzayına ait olarak düşünürüz. ("Tensör çarpımı"na ilişkin bu kavrama biraz daha ayrıntılı olarak §23.3'te geleceğiz.) Bir tensöre ilişkin §12.8'de çoklu doğrusal bir fonksiyon olarak verilen soyut kuramsal tanımı anımsayın. Bu, (§23.8'de gerek duyacağımız çok parçacıklı kuantum durumundaki uygulamalarla ilgili, sonsuz boyutlu bir **V** durumunda belirli incelikler mevcut olsa da) buradaki amaçlarımız için yeterlidir.[15]

Doğrusal bir $x^a\mapsto T^a_b x^b$ dönüşümünün **V**'ye uygulandığı her durumda bu, yukarıdaki tensör çarpım uzayının

[13.37] Niçin?

[13.38] Niçin bu sayı?

[15] *Bkz.* Thirring, 1983.

$$Q^{f\ldots h}_{a\ldots c} \longmapsto S^{a'}_{a} \ldots S^{c'}_{c} T^{f}_{f'} \ldots T^{h}_{h'} Q^{f'\ldots h'}_{a'\ldots c'}$$

ifadesiyle verilen[13.39] ilgili bir doğrusal dönüşümüne sebep olur. Tüm bu indisler, neyin neyle toplandığından emin olmak için iyi bir görüş gücü ve dikkatli bir inceleme gerektirir; o halde Şekil 13.13'te gösterilen daha açık diyagram biçimli notasyonu öneririm. $Q_{\ldots}^{\ldots}$'nun her bir alt indisinin, y^a'daki gibi, ters $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$ matrisi (ya da daha çok $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$) tarafından ve her bir üst indisinin, x_a'daki gibi $\mathbf{T}$ tarafından dönüştürüldüğünü görürüz. Bu nedenle $\mathbf{V}$ üzerindeki $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$–değerli tensör uzayları ayrıca $\mathcal{G}$'yle ilgili n^{p+q} boyutlu bir gösterim uzayıdır.

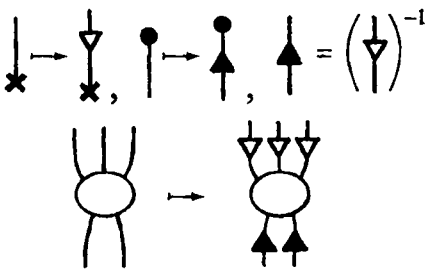
Bununla birlikte gösterim uzayları *indirgenebilir* olarak adlandırılan şeylere benzerdir. Bu durumu örneklemek üzere $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$–değerli bir Q^{ab} tensörü durumunu ele alalım. Bu tür herhangi bir tensör kendi *simetrik* $Q^{(ab)}$ ve *ters simetrik* $Q^{[ab]}$ kısımlarına,

$$Q^{(ab)} = \tfrac{1}{2}(Q^{ab} + Q^{ba}),\ Q^{[ab]} = \tfrac{1}{2}(Q^{ab} - Q^{ba})$$

olmak üzere, ayrılabilir:

$$Q^{ab} = Q^{(ab)} + Q^{[ab]}.$$

Simetrik uzay $\mathbf{V}_+$'nın boyutu $\frac{1}{2}n(n+1)$ ve *ters simetrik* uzay $\mathbf{V}_-$'nin boyutu $\frac{1}{2}n(n-1)$'dir.[13.40] $x^a \longmapsto T^a_b x^b$ dönüşümü ve böylece $Q^{ab} \longmapsto T^a_c T^b_d Q^{cd}$, altında simetrik ve ters simetrik kısımlar yine sırasıyla simetrik ve ters simet-



Şekil 13.13 V vektör uzayındaki x'e uygulanan $x^a \longmapsto \mathbf{T}^a_b x^b$doğrusal dönüşümü, (siyah bir üçgen olarak gösterilen) ters $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$'in kullanımıyla V* ikili uzayına ve buradan $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$–değerli Q tensörlerinin V* ⊗ ... ⊗ V* ⊗ V ⊗ ... ⊗ V uzaylarına genişler. $p = 3$ ve $q = 2$ durumu, Q, $Q^{cde}_{ab} \longmapsto S^{a'}_{a} S^{b'}_{b} T^{c}_{c'} T^{e}_{e'} Q^{c'd'e'}_{a'b'}$'ne uğrayan üç bacaklı ve iki kollu bir oval nesne olarak gösterilmektedir.

[13.39] Bunu gösterin.

[13.40] Bunu gösterin.

rik tensörlere dönüşür.[13.41] Bu nedenle $\mathbf{V}_+$ ve $\mathbf{V}_-$ uzayları $\mathcal{G}$ için ayrı ayrı gösterim uzaylarıdır. $\mathbf{V}$ için, temel elemanların ilk $\frac{1}{2}n(n+1)$ adedi $\mathbf{V}_+$'da ve kalan $\frac{1}{2}n(n-1)$ adedi $\mathbf{V}_-$'de olmak üzere, tüm matrisler $n^2 \times n^2$ "blok köşegen"

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

biçiminde olacak şe kildeki gösterimimizi elde ederiz. Burada $\mathbf{A}$ bir $\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)$ matrisi, $\mathbf{B}$ bir $\frac{1}{2}n(n-1) \times \frac{1}{2}n(n-1)$ matrisi ve iki $\mathbf{0}$ sıfırlara ait uygun dikdörtgen biçimli bloklar yerine kullanılır.

Bu biçimdeki bir gösterim, $\mathbf{A}$ matrisleriyle verilen gösterimle $\mathbf{B}$ matrisleriyle verilenlerin *dolaysız toplamı* olarak adlandırılır. Öyleyse $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$-değerli tensörler biçimindeki gösterim bu anlamda *indirgenebilirdir*.[13.42] "Dolaysız toplam" kavramı ayrıca her tür (belki sonsuz) sayıda daha küçük gösterime genişler.

Aslında "indirgenebilir gösterim" terimiyle, diğer bir deyişle gösterimlere ait tüm matrislerin bir şekilde daha karışık

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

biçimine konulabildiği bir taban seçimiyle ilgili, $\mathbf{A}$ $p \times p$, $\mathbf{B}$ $q \times q$, $\mathbf{C}$ $p \times q$ ve $p, q \geq 1$ (sabit p ve q için) olmak üzere, daha genel bir anlam mevcuttur. Gösterim matrislerinin tümünün bu biçimde olduğu durumda $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin her biri bireysel olarak $\mathcal{G}$'nin (daha küçük) bir gösterimini oluşturur.[13.43] $\mathbf{C}$ matrislerinin tümü sıfırsa, gösterimin bu iki daha küçük gösterimin toplamı olduğu daha önceki durumu elde ederiz. Bir gösterim indirgenebilir değilse ($\mathbf{C}$ olsun ya da olmasın), *indirgenemez* olarak adlandırılır. Bir gösterime, onun indirgenemez gösterimlerin dolaysız toplamı olduğu yukarıdaki durumla (sıfır olmayan $\mathbf{C}$'yle birlikte) hiçbir zaman karşılaşmazsak, *tümüyle indirgenebilir* denir.

Sürekli gruplara ait *yarı basit* olarak bilinen önemli bir sınıf mevcuttur. Yaygın olarak çalışılmış bu grup §13.2'de değinilen basit grupları içerir. Yarı basit tıkız gruplar *tüm* gösterimlerinin tümüyle indirgenebilir olduğuna ilişkin hoş bir özelliğe sahiptir. ("Tıkız"ın açıklaması için §12.6 ve Şekil 12.13'e bakın.) Bu tür bir grubun *indirgenemez* gösterimleri üzerinde, her bir gösterim bu indirgenemez olanların yalnızca dolaysız bir top-

---

[13.41] Bunu açıklayın.

[13.42] $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$-değerli tensörlerin gösterim uzaylarının da indirgenebilir olduklarını gösterin. *İpucu*: Bu tür herhangi bir tensörü "iz serbest" bir parçayla "iz"li bir parçaya ayırın.

[13.43] Bunu doğrulayın.

lamı olmak üzere, çalışmak yeterlidir. Aslında bu tür bir grubun indirgenemez her gösterimi sonlu boyutludur (tümüyle indirgenebilir ol*ma*yan gösterimlerin ortaya çıkabildiği durumlarda yarı basit bir grubun tıkız olmayan oluşuna izin verirsek durum bu olmaz).

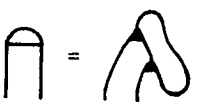
Bir yarı basit grup nedir? Lie parantezlerini belirtip $\mathcal{G}$ grubunun yerel yapısını tanımlayan §13.6'daki "yapı sabitleri"ni, $\gamma_{\alpha\beta}^{\chi}$, anımsayın. "Killing biçimi", κ, olarak bilinen[16] ve $\gamma_{\alpha\beta\chi}$'den oluşturulabilen hatırı sayılır ölçüde önemli bir nicelik mevcuttur:[13.44]

$$\kappa_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\zeta\xi}\gamma_{\beta\xi\zeta} = \kappa_{\beta\alpha}.$$

Bu ifadenin diyagram durumundaki biçimi Şekil 13.14'te veriliyor. $\mathcal{G}$'nin yarı basit olmasının koşulu $\kappa_{\alpha\beta}$ matrisinin tekil olmamasıdır.

Yarı basit bir grubun tıkızlığıyla ilgili bazı açıklamalar uygun olacak. $\gamma_{\alpha\beta\chi}$ yapı sabitlerinin verili bir kümesi için, onları gerçel sayılar olarak kabul edebileceğimiz varsayımıyla, onlardan elde edilen gerçel ya da karmaşık Lie cebirini ele alabiliriz. Karmaşık durumda tıkız bir $\mathcal{G}$ grubu elde etmeyiz, fakat gerçel durumda böyle olabilir. Aslında tıkızlık gerçel durumda $-\kappa_{\beta\alpha}$, *pozitif belirli* (anlamına §13.8'de geleceğimiz terim) olarak adlandırılan şey olduğunda ortaya çıkar. Sabit $\gamma_{\alpha\beta\chi}$ için, gerçel bir $\mathcal{G}$ grubu durumunda, yalnızca aynı $\gamma_{\alpha\beta\chi}$fakat Lie cebirindeki karmaşık katsayılarla birlikte kullanılarak ortaya çıkan $\mathcal{G}$'ye ilişkin $\mathbb{C}\mathcal{G}$ *karmaşıklaştırma*sını (en azından yerel olarak) oluşturabiliriz. Bununla birlikte farklı gerçel $\mathcal{G}$ grupları bazen aynı[17] $\mathbb{C}\mathcal{G}$'ye neden olabilir. Bu farklı gerçel grupları karmaşık grupların farklı *gerçel biçimleri* olarak adlandırılır. Buna ilişkin önemli örnekleri daha sonraki bölümlerde, özellikle, 4 boyutta Öklitçi hareketler ve özel göreliliğe ilişkin Lorenz/Poincaré simetrilerinin karşılaştı-

'Killing biçimi' :



Şekil 13.14 $\gamma_{\alpha\zeta\xi}$ yapı sabitleri ile $\kappa_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\zeta\xi}\gamma_{\beta\xi\zeta}$ olarak tanımlanan $\kappa_{\alpha\beta}$ "Killing biçimi".

---

[16] Burada yine matematiksel kavramların adlandırılmasıyla ilgili bir kapris örneğimiz mevcut. Bu konuda geleneksel olarak Cartan'ın adına bağlanan, *örn.* "Cartan cebiri, Cartan tamsayısı", büyük önemdeki pek çok kavram orijinal olarak Killing'e aitken, *bkz.* §13.2, "Killing biçimi" olarak andığımız şey aslında Cartan'a aittir; *bkz.* Hawkins, 2000, §6.2. Bununla birlikte, §30.6'da karşılaşacağımız "Killing vektörü" gerçekten Killing'e ait*tir*. Hawkins, 2000, s. 128, not 20.

[13.44] Neden $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha}$'dır?

[17] "Aynı" sözcüğünü bu tür bağlamda kullanışım esnasında matematiksel olarak kasıtlı biçimde biraz özensizim. Kesin matematiksel terim "izomorfik"tir.

rıldığı §18.2'de görüyor olacağız. Herhangi yarı basit karmaşık bir Lie - grubunun, tıkız olan kesin olarak bir tek gerçel $\mathcal{G}$ biçimine sahip olması dikkat çekici bir özelliktir.

13.8 Ortogonal gruplar

Şimdi ortogonal gruba dönelim. §13.3'ün başında O(3) ya da SO(3)'ün olağan Kartezyen (x, y, z) koordinatlarına sahip 3–boyutlu gerçel bir vektör uzayının doğrusal dönüşümleri olarak,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

küresi (üst indis 2, olağan "karesi" anlamına gelir) değişmez bırakılmak üzere, bire bir biçimde nasıl gösterildiğini görmüştük. Gelin bu denklemi indis notasyonu biçiminde (§12.7) yazalım, böylece onu n boyuta genelleyebiliriz. Küremizin denklemi artık, $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1$ yerine kullanılan

$$g_{ab}x^a x^b = 1$$

biçiminde, g_{ab} bileşenleri

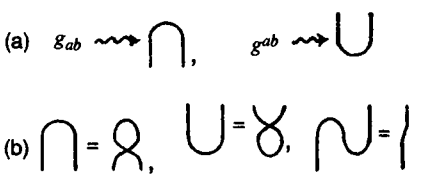
$$g_{ab} = \begin{cases} 1, a = b \; ise \\ 0, a \neq b \; ise \end{cases}$$

tarafından verilmek üzere, yazılabilir. Diyagram biçimli notasyonda g_{ab} için Şekil 13.15a'da gösterildiği üzere basit şekilde bir "nal" kullanmayı öneriyorum. g^{ab}notasyonunu (g_{ab}'deki *aynı* açık bileşenlerle) ayrıca *ters*

$$g_{ab}g^{bc} = \delta^c_a = g^{cb}g_{ba}$$

niceliği (Şekil 13.15a'daki "ters çevrili nal") için de kullanacağım.

Kafası karışmış okuyucu haklı olarak neden §13.3'te δ^a_b'yle gösterdiğim kesin biçimde aynı matris bileşenleriyle ilgili olarak iki yeni notasyonu, diğer bir deyişle g_{ab} ve g^{ab}'yi ortaya koyduğumu sorabilir! Sebep notasyonun tutarlılığıyla ve bir



Şekil 13.15 (a) "Nal" diyagram biçimli notasyonda metrik g_{ab} ve tersi g^{ab}. (b) Diyagram biçimli notasyonda $g_{ab} = g_{ba}$ (diğer bir deyişle $g^T = g$), $g_{ab} = g^{ba}$ ve $g_{ab}g^{bc} = \delta^c_a$ bağıntıları.

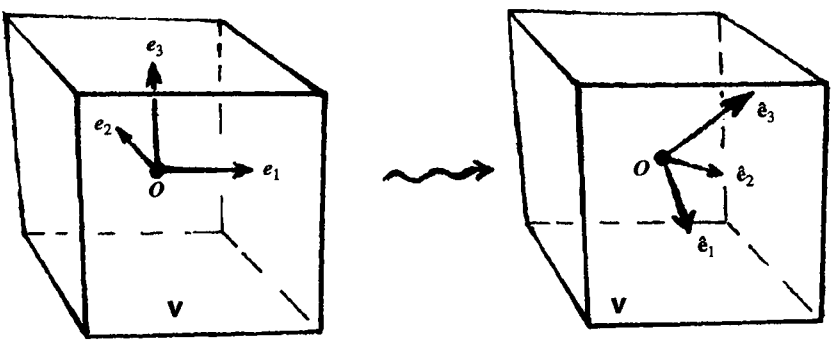
$$x^a \longmapsto t^a_b x^b$$

yer değişikliği uyarınca, *koordinatlara* doğrusal bir dönüşüm uygulandığında ne olduğuyla ilgilidir. Bu değişiklikteki t^a_b tekil değildir ve böylece bir s^a_b tersine sahiptir:

$$t^a_b s^b_c = \delta^a_c = s^a_b t^b_c.$$

Aslında biçimsel olarak bu, §§13.3,7'de ele aldığımız doğrusal dönüşüm tipiyle aynıdır, fakat artık onu oldukça farklı bir yolla düşünürüz. O bölümlerde doğrusal dönüşümümüz *aktif* olarak düşünülüyordu ve böylece **V** vektör uzayı aslında (kendi üzerinden) *hareket etmiş* olarak görülüyordu. Dönüşümü burada, ele aldığımız nesneleri, ve aslında **V** vektör uzayının kendisini, noktasal olarak sabit kalması anlamında *pasif* olarak düşünüyoruz, fakat koordinatlar biçimindeki gösterimler değiştirilir. Bunu ortaya koymanın diğer bir yolu daha önce (vektör/tensör niceliklerinin bileşenler biçimindeki gösterimleri için[18]) bir süre kullandığımız $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ tabanının başka bir tabanla değiştirilmesidir. *Bkz.* Şekil 13.16.

Bir tensörün aktif dönüşümüyle ilgili §13.7'de gördüğümüz şeyle dolaysız uygunluk içinde bir $\boldsymbol{Q}$ tensörünün $Q^{a\ldots c}_{p\ldots r}$ bileşenlerindeki ilgili pasif değişim



Şekil 13.16 Bir V vektör uzayındaki pasif bir dönüşüm V'yi noktasal olarak sabit bırakır fakat koordinat tanımlamasını değiştirir, diğer bir deyişle $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ tabanı diğer bir tabanla değiştirilir ($n = 3$ durumu gösteriliyor).

---

[18] Bu noktaya kadar bu işlem hakkında pek açık olmadım. **V** için bir $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ tabanı $\boldsymbol{e}^i \bullet \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$ özelliğine sahip, **V*** için $\boldsymbol{e}^* = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ tabanındaki bir *ikili uzay*la ilgilidir. $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$-değerli bir $\boldsymbol{Q}$ tensörünün bileşenleri §12.8'in çoklu doğrusal fonksiyonunu p adet ikili tabanlı elemanı ve q adet taban elemanına uygulayarak elde edilir: $Q^{f\ldots h}_{a\ldots c} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{e}^f, \ldots, \boldsymbol{e}^h; \boldsymbol{e}_a, \ldots, \boldsymbol{e}_c)$.

$$Q^{a\ldots c}_{p\ldots r} \longmapsto t^a_d \cdots t^c_f \, Q^{d\ldots f}_{j\ldots l} \, s^j_p \cdots s^l_r$$

ifadesiyle verilir.[13.45] Bunu δ^a_b'ye uygulayarak ona ait bileşenlerin tümünün değişmemiş olduğunu görürüz[13.46] oysa ki durum g_{ab} için böyle *değildir*. Dahası bu tür genel bir koordinat değişiminden sonra g^{ab} bileşenleri g_{ab}'den (ters matrisler) oldukça farklı olacaktır. Bu nedenle ek g^{ab} ve g_{ab} sembolleriyle ilgili neden onların, δ^a_b'nin koordinat sisteminin özel biçimlerinde ("Kartezyen" olanlar) yaptığı gibi yalnızca aynı bileşenler matrisini temsil edebilmeleri ve genelde bileşenlerin yalnızca *farklı* olmasıdır. Bu, koordinat sisteminin normalde bu özel biçime (Kartezyen) sahip olacak biçimde düzenlenemediği genel görelilikle ilgili özel bir öneme sahiptir.

Genel bir koordinat değişimi g_{ab} bileşenler matrisini, tümüyle genel bir matris olmasa da daha karışık hale getirebilir. *Simetrik* bir matris veren a ve b arasındaki simetri özelliğini korur. "Simetrik" terimi bize bileşenlerin kare diziliminin kendisine ait ana köşegen boyunca simetrik, diğer bir deyişle $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$ olduğunu söyler. İndis notasyonlu terimlerde bu simetri iki

$$g_{ab} = g_{ba}, \; g^{ab} = g^{ba}$$

denk[13.47] biçiminden biri olarak ifade edilir; bu denklemlerin diyagram biçimleri için Şekil 13.15b'ye bakın.

Ters yönde gitmekten ne haber? Tekil olmayan herhangi bir gerçel $n \times n$ simetrik matris Kronecker deltasına ilişkin bir bileşen biçimine indirgenebilir mi? Pek değil; koordinatların gerçel bir doğrusal dönüşümüyle indirgenemez. Bu şekilde indirgenebileceği şey ana köşegen üzerinde mevcut bazı 1 ve –1 terimleri dışında aynı biçimdir. Bu 1 terimlerinin p sayısı ve –1 terimlerinin q sayısı birer *değişmez*dir; demek oluyor ki başka bazı gerçel doğrusal dönüşümleri deneyerek farklı bir sayı elde edemeyiz. Bu değişmez (p, q) $\boldsymbol{g}$'nin *imza*sı olarak adlandırılır. (imza olarak adlandırılan bazen $p - q$'dur; bazen yalnızca her bir işaret uygun sayıda olmak üzere $+\ldots+-\ldots-$ şeklinde yazılır.) Aslında bu yalnızca *tekil* bir $\boldsymbol{g}$ için işler, fakat böylece ana köşegen üzerinde ayrıca birkaç 0'a gerek duyarız ve 0'lar da 1'lerin ve –1'lerin sayısı gibi imzanın bir parçası haline gelir. $\boldsymbol{g}$ tekil olmayacak ve $q = 1$ olacak şekilde yalnızca 1'lere sahipsek böylece $\boldsymbol{g}$ *pozitif belirli*dir deriz. $p = 1$ ve $q \neq 0$ için tekil olmayan bir $\boldsymbol{g}$, bu bağlamdaki önemli çalışması görelilik kuramının yapı taşlarından birini oluşturan Hollandalı fizikçi H. A. Lorentz (1853–1928), anısına *Lorentzci* olarak adlandırılır; *bkz.* §§17.6–9 ve §§18.1–3.

[13.45] Bunu kurmak üzere not 1.18'i kullanın.

[13.46] Niçin?

[13.47] Neden denk?

Pozitif belirli bir **A** matrisinin belirli başka bağlamlarda kayda değer önemdeki alternatif bir nitelendirilişi gerçel simetrik **A** matrisinin tüm $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$'lar için

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$$

bağıntısını sağlamasıdır. İndis notasyonunda bu şudur: "x^a vektörü kaybolmadıkça $A_{ab}x^a x^b > 0$."[13.48] Bu durum > yerine ≥'le sağlanırsa (öyleyse artık sıfır olmayan bir **x** için $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$' izin veririz) **A** *negatif olmayan belirli*dir (ya da *pozitif yarı belirli*) deriz.

Uygun koşullar altında tekil olmayan simetrik bir g_{ab} $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$–tensörü *metrik*, ya da $\boldsymbol{g}$ pozitif belirli olmadığında bazen *sözde metrik* olarak adlandırılır. Bize biraz eğriler üzerindeki "uzaklık" kavramı hakkında fikir sunan $\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b$ karesiyle tanımlı d*s* niceliğini kullanacaksak bu terminoloji geçerlidir. Bu kavramın eğik manifoldlarda nasıl uygulandığını §14.7'de ve Lorentzci durumda bize gerçekte görelilik kuramının *zamanı* olan bir "uzaklık" kavramını nasıl sunduğunu §17.8'de görüyor olacağız. Bazen

$$|\boldsymbol{v}| = (g_{ab}v^a v^b)^{\frac{1}{2}}$$

niceliğine v^a indis biçimindeki $\boldsymbol{v}$ vektörünün *uzunluğu* olarak değiniriz.

O(n) ortogonal grubunun tanımına dönelim. Bu basit olarak verili bir pozitif belirli $\boldsymbol{g}$'yi koruyan n boyuttaki, *ortogonal* dönüşümler olarak adlandırılan, doğrusal dönüşümlerin grubudur. $\boldsymbol{g}$'yi "korumak" bir $\boldsymbol{T}$ ortogonal dönüşümünün

$$g_{ab}T^a_c T^b_d = g_{cd}$$

bağıntısını sağlamak zorunda olduğu anlamına gelir. Bu, §13.7'de açıklanan (aktif) tensör dönüşüm kuralının g_{ab}'ye uygulanan bir örneğidir (ve bu denklemin diyagramın biçimli durumu için Şekil 13.17'ye bakın). Bunu söylemenin başka bir yolu önceki paragraftaki $\mathrm{d}s^2$ metrik biçiminin ortogonal dönüşümlerce değiştirilmemesidir. g_{ab} bileşenlerinin gerçekten Kronecker deltası (bu aslında §§13.1,3'te verilen O(3)'ün tanımını sunar) olduğunda ısrar edebiliriz, fakat g_{ab}'nin pozitif belirli $n\times n$ dizilimini ne şekilde seçersek seçelim grubun aynı[19] olduğu ortaya çıkar.[13.49]

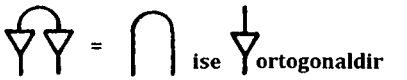
g_{ab}'nin Kronecker deltası olarak belirli bileşen şeklinde gerçekleştirmesiyle ortogonal dönüşümlerimizi

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$$

[13.48] Bu nitelendirmeyi doğrulayabilir misiniz?

[19] *Bkz.* not 13.3.

[13.49] Neden olduğunu açıklayın?



Şekil 13.17 $g_{ab}T^a_cT^b_d = g_{cd}$ ise T ortogonal bir dönüşümdür.

ifadesini sağlayarak açıklayan matrisler[13.50] *ortogonal matrisler* olarak adlandırılır. Gerçel ortogonal $n\times n$ matrisler $O(n)$ grubuna ilişkin somut bir gerçekleştirme sunar. Yansımalı olmayan $SO(n)$ grubuna özelleşmek için determinantın bire eşit olmasına gerek duyarız:[13.51]

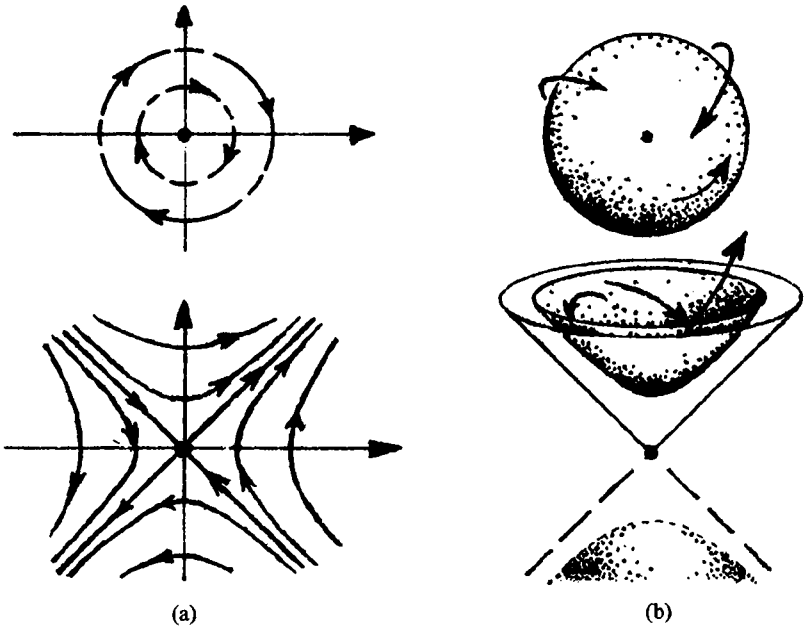
$$\det T = 1.$$

Ayrıca, daha genel (p,q) imzasına sahip g'nin tekil olmasa da pozitif belirli olması zorunlu olmadığı durumda elde edilen ilgili *sözde ortogonal* $O(p,q)$ ve $SO(p,q)$ gruplarını da ele alabiliriz. $p = 1$ ve $q = 3$ (ya da eşdeğer biçimde $p = 3$ ve $q = 1$) olan durum *Lorentz* grubu olarak adlandırılır ve yukarıda belirtildiği üzere görelilik kuramında temel bir rol oynar. Ayrıca Lorentz grubunun (zaman yansımalarını göz ardı edersek) §2.7'de açıklanan hiperbolik 3–uzaya ilişkin simetri grubuyla ve ayrıca (uzay yansımalarını göz ardı edersek) §8.2'de görüldüğü üzere çifte–doğrusal (Möbius) dönüşümlerle gerçekleştirilen Riemann küresine ilişkin simetri grubuyla aynı olduğunu bulacağız. Bu dikkate değer gerçeklerin açıklamasını özel görelilik kuramına ilişkin Minkowski uzayzaman geometrisini inceleyeceğimiz zamana kadar (§§18.4,5) ertelemek en iyisi olacak. Ayrıca §33.2'de bu gerçeklerin burgaç kuramıyla ilgili yeni ufuklar açıcı bir öneme sahip olduğunu göreceğiz.

Sabit bir n ve $p + q = n$ ile ilgili çeşitli $O(p,q)$ grupları ne kadar "farklıdır?" (Şekil 13.18'de $n = 2$ ve $n = 3$ için pozitif belirli ve Lorentzci durumları karşılaştırılıyor.) Tümü aynı $\frac{1}{2}n(n-1)$ boyutuna sahip olarak birbirleriyle yakından ilişkilidir; bunlar $O(n)$'nin *karmaşıklaştırılması* olan bir ve aynı karmaşık $O(n,\mathbb{C})$ grubunun *gerçel biçimleri* olarak adlandırılan şeydir. Bu karmaşık grup $O(n)$ $(= O(n,\mathbb{R}))$'yle aynı biçimde, fakat doğrusal dönüşümlerin *karmaşık* olmasına izin verilerek tanımlanır. Aslında bu bölümdeki düşüncelerimi gerçel doğrusal dönüşümler biçiminde ifade etmiş olsam da, "karmaşığın" her yerde "gerçel" yerine geçtiği paralel bir tartışma da söz konusudur. (Bu nedenle x^a koordinatları ve de böylece matrislerimizin bileşenleri karmaşık hale gelir.) Yukarıda söylenenler arasındaki

[13.50] Bunu açıklayın. Sözde ortogonal (sonraki paragrafta tanımlanan) durumlardaki T^{-1} nedir?

[13.51] Bunun niçin $\varepsilon_{a\ldots c}$ hacim biçimini korumayla eşdeğer, diğer bir deyişle $\varepsilon_{a\ldots c}T^a_p\ldots T^c_r = \varepsilon_{p\ldots r}$, olduğunu açıklayın. Dahası işaretinin korunması niçin yeterlidir?



Şekil 13.18 (a) O(2, 0) ve O(1, 1) karşılaştırılmaktadır. (b) Her bir durumda "birim küre" gösterilerek O(3, 0) ve O(1, 2) benzer biçimde karşılaştırılır. O(1, 2) için (*bkz.* §§2.4,5, §18.4) bu "küre" hiperbolik bir düzlemdir (ya da o türün iki kopyası).

tek temel fark *imza* kavramıyla ortaya çıkar. g_{ab}'nin köşegen biçimli gerçekleşmesinde -1'i $+1$'e çevirebilen karmaşık doğrusal koordinat dönüşümleri mevcuttur,[13.52] ayrıca *tersi* de geçerlidir, böylece elimizde anlamlı bir imza kavramı mevcut değildir. Karmaşık durumda $\boldsymbol{g}$'nin tek değişmezi[20] onun, köşegen şeklindeki gerçekleştirmesinde bulunan sıfır olmayan terimlerin sayısı olup *mertebe* şeklinde adlandırılan şeydir. Tekil olmayan bir $\boldsymbol{g}$'yle ilgili mertebe en büyük, diğer bir deyişle n olmak zorundadır. Bu çeşitli gerçel biçimler arasındaki fark ne zaman önemlidir, ne zaman değildir? Bu hassas bir soru olabilir fakat fizikçiler ayrımlar hakkında, bunlar önemli olabilseler bile, oldukça rahattırlar. Pozitif belirli durum grubun tıkız olması gibi bir üstünlüğe sahiptir ve bu tür durumlarla ilgili çoğu matematikçi huzurludur (*bkz.* §13.7). İnsanlar bazen sonuçları kaygısızca tıkız durumlardan tıkız olmayan durumlara ($p \neq 0 \neq q$) naklederler

[13.52] Niçin?

[20] *Bkz.* not 13.10. Okuyucunun, §13.5'teki T^a_b bu kadar çok değişmeze, diğer bir deyişle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ *öz değerler*inin tümüne, sahip olabilirken g_{ab}'nin neden olmadığıyla ilgili kafası karışabilir. Yanıt basit biçimde, farklı indis konumlandırmada gizlenen dönüşüm davranışındaki farkta bulunmaktadır.

fakat bu çoğu kez doğru değildir. (Örneğin tıkız durumda yalnızca sonlu boyutlu gösterimlerle ilgilenilmesi gerekir fakat tıkız olmayan durumda ek olarak sonsuz boyutlu gösterimler ortaya çıkar.) Öte taraftan ayrımları görmezden gelerek kayda değer kavrayışların elde edilebileceği başkaca durumlar da mevcuttur. (Bunu, hiperbolik bir üçgenin alanının, §2.4'te verilen, Lambert'in keşfi olan açılar biçimindeki denklemiyle karşılaştırabiliriz. Bu bazı koordinatların sanal değerlere sahip olması anlamına gelen bir imza değişimiyle benzerdir. §18.4'teki Şekil 18.9'da Lambert'in Öklitçi olmayan geometriye yaklaşımının mükemmel derecede gerekçelendirilebilir olduğu durumu oluşturmaya çalışacağım.)

$O(n, \mathbb{C})$'nin olası farklı gerçel biçimleri matris elemanları üzerindeki belirli *eşitsizlikler* kümesiyle ayırt edilir (örneğin det $\boldsymbol{T} > 0$). *Kuantum kuramının* bir özelliği bu tür eşitsizliklere fiziki süreçlerde çoğu kez *uyulmamasıdır*. Örneğin *sanal* nicelikler bir anlamda kuantum mekaniğinde fiziki olarak *gerçel* bir öneme sahip olabilirler böylece farklı imzalar arasındaki ayrım bulanıklaşabilir. Öte taraftan kendi izlenimime göre fizikçiler bu konularla ilgili çoğu kez olmaları gerekenden bir miktar daha az dikkatlidirler. Aslında bu sorun birtakım modern kuram incelememizde (§28.9,§31.11, §32.3) bizim için dikkate değer bir anlama sahip olacak fakat daha fazlasını sonraya saklayalım. Bu daha önce §11.2'de çıtlattığım "kurtlu konserve kutusu"dur!

13.9 Üniter gruplar

$O(n, \mathbb{C})$ grubu bize bir "döndürme grubu" kavramının gerçel sayılardan karmaşık sayılara genellenebildiği *bir* yol sunar. Bununla birlikte belirli bağlamlarda daha büyük bir öneme sahip başka bir yol da mevcuttur. Bu *üniter* grup kavramıdır.

"Üniter" ne anlama gelir? Ortogonal grup, eşdeğer biçimde $g_{ab}x^a x^b$ ya da $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\mathbf{x}$ olarak yazabildiğimiz bir *ikinci dereceli biçimin* korunumuyla ilgilidir. Üniter bir grupla ilgili olarak, bunun yerine (önemli 19. yüzyıl Fransız matematikçisi Charles Hermite, 1822–1901, ardından) bir *Hermitsel* biçimi denen şeyi koruyan *karmaşık* doğrusal dönüşümleri kullanırız.

Hermitsel biçim nedir? İlk olarak ortogonal duruma dönelim. İkinci dereceli bir biçim ($\boldsymbol{x}$'te) yerine eşdeğer şekilde *çifte–doğrusal*

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g_{ab}x^a x^b = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\mathbf{y}$$

biçimini kullanabilirdik. Bu, §12.8'de verilen $\boldsymbol{g}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$–tensörüne uygulandığı gibi, bir tensöre ilişkin "çoklu doğrusal fonksiyon" tanımının belirli bir

örneği olarak ortaya çıkar (ve $y = x$ koyarak yukarıdaki ikinci dereceli biçimi yeniden elde ederiz). g'nin simetrisi böylece

$$g(x, y) = g(y, x)$$

olarak ve

$$g(x, y + w) = g(x, y) + g(x, w),\ g(x, \lambda y) = \lambda g(x, y)$$

olarak ifade edilir. *Çifte–doğrusallık* için ayrıca *ilk* değişken x'te doğrusallığa gereksinim duyarız fakat bu artık simetrinin sonucudur.

Bir $h(x, y)$ *Hermitsel biçimi*, daha çok,

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}$$

Hermitsel simetrisi ile birlikte ikinci değişken y'deki

$$h(x, y + w) = h(x, y) + h(x, w),\ h(x, \lambda y) = \lambda h(x, y)$$

doğrusallığı sağlar. Hermitsel simetrisi artık ilk değişkendeki *karşı–doğrusallık* denen şey anlamına gelir:

$$h(x + w, y) = h(x, y) + h(w, y),\ h(\lambda x, y) = \bar{\lambda} h(x, y).$$

Ortogonal bir grup (tekil–olmayan) çifte–doğrusal simetrik bir biçimi korurken karmaşık doğrusal dönüşümleri koruyan tekil olmayan bir Hermitsel biçim bize üniter bir grup verir.

Bu tür biçimler bizim için ne yapar? Tekil olmayan çifte–doğrusal bir g biçimi (simetrik olması şart değil) bize, x ve y'nin kendisine ait olduğu ve ikili uzayı $\mathbf{V}^*$ olan $\mathbf{V}$ vektör uzayını saptamanın araçlarını sunar. Bu nedenle v $\mathbf{V}$'ye aitse $g(v,)$ bize $\mathbf{V}$'nin x elemanını $\mathbf{V}$ üzerinde $g(v, x)$ sayısına dönüştüren doğrusal bir gönderim sunar. Farklı bir anlatımla, $g(v,)$ $\mathbf{V}^*$'a ait bir elemandır (*bkz.* §12.3). İndis biçiminde $\mathbf{V}^*$'a ait bu eleman geleneklere göre aynı çekirdek v harfiyle fakat indisi g_{ab} tarafından

$$v_b = v^a g_{ab}$$

uyarınca düşürülmüş (ayrıca *bkz.* §14.7) biçimde yazılan $v^a g_{ab}$ kovektörüdür. Bu işlemin tersi v_a'nın indisi ters metrik g^{ab} $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$–tensörünün kullanımıyla yükseltilerek gerçekleştirilir:

$$v^a = g^{ab} v_b.$$

Hermitsel durumunda bunun benzerine gereksinim duyacağız. Önceki gibi, v elemanının $\mathbf{V}$ vektör uzayından her bir seçimi bize $\mathbf{V}^*$ ikili uzayının bir $h(v,)$ elemanını sunar. Bununla birlikte fark artık $h(v,)$, v'ye doğrusal olmal yerine karşı–doğrusal biçimde bağlıdır; bu nedenle $h(\lambda v,) = \bar{\lambda} h(v,)$ olur.

Bunu söylemenin eşdeğer bir yolu $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{v},)$'nin $\overline{\boldsymbol{v}}$'de, bu $\overline{\boldsymbol{v}}$ vektör niceliği $\boldsymbol{v}$'nin "karmaşık eşleniği" olmak üzere, *doğrusal*dır. Bu karmaşık eşlenik vektörlerini ayrı bir $\overline{\boldsymbol{v}}$ vektör uzayı oluşturmak üzere değerlendiririz. Bu bakış açısı, karmaşık eşlenik elemanlar için apreli ve apresiz indisler arasında kaynaşmaya (toplama) izin verilmeyen farklı bir "alfabe"nin, diyelim ki $a', b', c', \ldots$,'nin kullanıldığı (soyut) indis notasyonu için özel olarak kullanışlıdır. Karmaşık eşleme işlemi üslü indislerin yerlerini üssüzlerle değiştirir. İndis notasyonunda Hermitsel biçimimiz her tipten bir (alt) indisle $h_{a'b}$ niceliklerinin bir dizilimi olarak gösterilir, böylece "Hermitsellik"

$$h_{a'b} = \overline{h_{b'a}}$$

biçiminde ifade edilmek üzere ($\overline{x}^{a'}$, x^a elemanının karmaşık eşleniği olacak şekilde)

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = h_{a'b}\overline{x}^{a'}y^b$$

olur.

$h_{a'b}$ niceliklerinin dizilimi bir indisi düşürüp yükseltmemize olanak sağlar fakat o artık üslü indisleri üssüz olanlarla değiştirir, ayrıca tersi de geçerlidir, böylece bizi karmaşık eşlenik uzayın ikiliğine sevk eder:

$$\overline{v}_b = \overline{v}^{a'}h_{a'b}, \; v_{a'} = h_{a'b}v^b.$$

Bu işlemlerin tersi için, Hermitsel biçim tekil olmayan (diğer bir deyişle $h^{ab'}$ bileşnlerinin matrisi tekil olmayandır) olarak varsayılmak üzere, $h_{a'b}$'nin tersi $h^{ab'}$'ye gerek duyarız;

$$h^{ab'}h_{b'c} = \delta^a_c, \; h_{a'b}h^{b'c} = \delta^{c'}_{a'}$$

buradan da[13.53]

$$\overline{v}^{a'} = \overline{v}_b h^{b'a}, \; v^a = h^{ab'}v_{b'}.$$

Tüm üslü indislerin her tür tensör niceliğine indis–ten–indise uygulanabilen yukarıdaki bağıntıların etkisiyle $h_{a'b}$ kullanılarak ortadan kaldırılabildiğine dikkat edin. Bu sebeple karmaşık eşlenik uzayı oldukça ayrı bir uzay olmak zorunluluğu yerine ikili uzayla "tanımlanır."

Bu tanımlamayı ikiliyle (genelde indis notasyonunda yazılmamasına karşın) birlikte karmaşık eşleme kavramına dahil eden "karmaşık eşleme" işlemi matematik ve fiziğin pek çok diğer alanında (örneğin burgaç kuramı, *bkz.* §33.5) olduğu gibi kuantum mekaniği için de merkezi önemdedir. Kuantum mekaniğiyle ilgili yazında bu, sıklıkla bir *hançer*le, "†" fakat bazen de bir *yıldız işareti*yle, "*", gösterilir.

[13.53] Bu bağıntıları h^{ab} 'ne ilişkin notasyon tutarlılığını açıklayarak doğrulayın.

Ben matematik yazınında daha olağan olan yıldız işaretini tercih ediyorum, burada onu kalın harf karakteriyle kullanacağım. Yıldız işareti burada uygundur çünkü V vektör uzayıyla onun V* ikiliğinin rollerini değiştirir. Karmaşık $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ değerlik tensörü (yukarıdaki gibi tüm üslü indisler ortadan kaldırılarak) * tarafından bir $\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ değerlik tensörüne dönüştürülür. Bu nedenle *'ın eylemiyle üst indisler alt, alt indisler üst indis haline gelir. Skalerlere uygulandığında *, basit olarak olağan karmaşık eşleme işlemidir. * işlemi Hermitsel $\boldsymbol{h}$ biçiminin kendisine eşdeğer bir kavramdır.

En bilindik ($h_{a'b}$ bileşenleri Kronecker deltası olarak kabul edildiğinde ortaya çıkan) Hermitsel eşleme işlemi, bileşenleri üst indislerin alt ve alt indislerin üst indis olarak okunacağı şekilde yeniden düzenleyerek her bir elemanın basitçe karmaşık eşleniğini alır. Bundan dolayı, doğrusal bir dönüşümün bileşenler matrisi, karmaşık eşleniğinin devriğine (bazen matrisin *eşlenik devriği* olarak adlandırılır) götürülür, böylece 2×2 durumunda

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

ifadesine sahip oluruz. *Hermitsel matris* bu anlamda kendi Hermitsel eşleniğine eşit olan matristir. Bu kavram ve daha genel soyut *Hermitsel işlemci* kuantum kuramında son derece önemlidir.

Herhangi bir karmaşık z sayısı için her biri aynı değerlikte olan $\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{U}$ tensörlerine uygulanan *

$$(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U})^* = \boldsymbol{T}^* + \boldsymbol{U}^*,$$
$$(z\boldsymbol{T})^* = \bar{z}\boldsymbol{T}^*$$

anlamında *karşı–doğrusal*dır. * eylemi ayrıca tensörlerin çarpımını da korumak zorundadır fakat indis konumlarının ters çevrilmesi nedeniyle o kaynaşma düzenini de ters çevirir; özellikle * doğrusal dönüşümlere uygulandığında çarpma düzeni tersine döner:

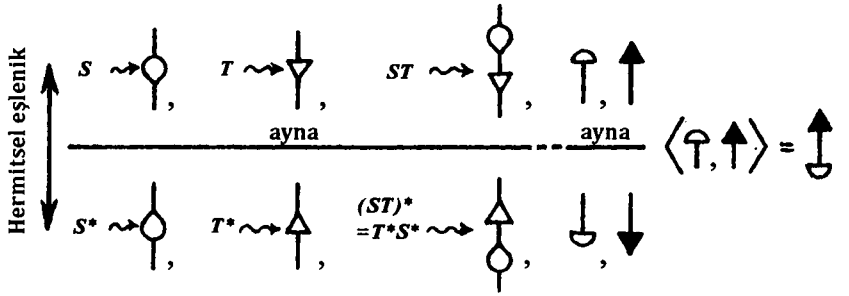
$$(\boldsymbol{LM})^* = \boldsymbol{M}^*\boldsymbol{L}^*.$$

Diyagram biçimli notasyonda bu tür bir eşleme işlemini yatay düzlemdeki bir yansıma olarak göstermek oldukça kullanışlıdır. Bu, gerektiği gibi üst ve alt indisleri değiştirir; *bkz.* Şekil 13.19.

* işlemi V'nin iki elemanı $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ arasında bir *Hermitsel skaler çarpım*, diğer bir deyişle $\boldsymbol{v}^*$ kovektörüyle $\boldsymbol{w}$ vektörünün skaler çarpımını (farklı bağlamlardaki farklı kavramlar yararlı olmak üzere) tanımlamamıza olanak sağlar:

$$\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}\rangle = \boldsymbol{v}^* \bullet \boldsymbol{w} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

(ve *bkz.* Şekil 13.19) ve



Şekil 13.19 Yatay bir düzlemdeki yansıma olarak uygun biçimde gösterilen Hermitsel eşleme (*) işlemi. Bu, "kollar"la "bacaklar"ı yer değiştirir ve çarpma düzenini ters rir: $(ST)^* = T^*S^*$. Hermitsel skaler $\langle v|w\rangle = v^*w$ çarpımıyla ilgili diyagram biçimli ifade veriliyor (böylece onun karmaşık eşleniğini almak diyagramı sağ köşede alt–üst olacak biçimde yansıtır).

$$\langle v|w\rangle = \overline{\langle w\,|\,v\rangle}$$

ifadesine sahip oluruz. $w = v$ belirli durumunda v'nin *'a göre *norm*unu elde ederiz:

$$\|v\| = \langle v|v\rangle.$$

V için bir $(e_1, e_2 \ldots, e_n)$ *tabanı* seçebiliriz ve böylece bu temeldeki $h_{a'b}$ bileşenleri basitçe, Hermitsel bir matrisin elemanlarını oluşturan n^2 karmaşık

$$h_{a'b} = h(e_a, e_b) = \langle e_a|e_b\rangle$$

sayılarıdır. $(e_1, \ldots, e_n)$ tabanı

$$\langle e_i|e_j\rangle = \begin{cases} \pm 1 \; i = j \; ise \\ 0 \; i \neq j \; ise \end{cases}$$

ifadesi sağlanıyorsa *'a göre *sözde ortonormal* olarak adlandırılır; $\pm$ işaretlerinin tümünün + olduğu, diğer bir deyişle her bir ± 1'in yalnızca 1 olduğu, durumda taban *ortonormal*dir.

Sözde ortonormal taban her zaman bulunabilir fakat pek çok seçenek mevcuttur. Bu tür herhangi bir tabanla ilgili olarak $h_{a'b}$ matrisi köşegenlidir ve köşegen boyunca yalnızca 1'ler ve –1'ler mevcuttur. 1'lerin toplam sayısı p, ve buradan hareketle –1'lerin toplam sayısı q, verili bir * için herhangi belirli bir taban seçiminden bağısız olarak her zaman aynıdır. Bu bize, * işlemiyle ilgili (p, q) *imzasına* ilişkin değişmez kavramı tanımlama olanağı sunar.

$q = 0$ ise, * *pozitif belirli*dir deriz. Bu durumda[21] sıfır olmayan herhangi bir vektörün normu her zaman pozitiftir:[13.54]

$$v \neq 0, \|v\| > 0 \textit{ anlamına gelir.}$$

Bu "pozitif belirli" kavramının §13.8'dekini karmaşık duruma genellediğine dikkat edin.

Tersi T^* olan doğrusal bir T dönüşümü,

$$T^{-1} = T^*, \text{ diğer bir deyişle } TT^* = I = T^*T,$$

*'ın pozitif belirli olduğu durumda *üniter* ve diğer durumlarda *sözde üniter* olarak adlandırılır.[13.55] "Üniter matris" terimi, * olağan eşlenik değiştirme işlemi olarak, $T^{-1} = \overline{T}$ olacak şekilde, kullanıldığında yukarıdaki bağıntıyı sağlayan bir T matrisine karşılık gelir.

n boyuttaki üniter dönüşümlere ya da $(n \times n)$ üniter matrislere ilişkin - gruplar *üniter* $\mathrm{U}(n)$ *grubu* olarak adlandırılır. Daha genel olarak, * (p, q) imzasına sahip olduğunda sözde üniter $\mathrm{U}(p, q)$ grubunu elde ederiz.[22] Dönüşümler birim determinanta sahipse buradan hareketle $\mathrm{SU}(n)$ ve $\mathrm{SU}(p, q)$'yu elde ederiz. Üniter dönüşümler kuantum mekaniğinde temel bir rol oynar (ve ayrıca pek çok saf matematiksel bağlam içerisinde büyük değere sahiptir).

13.10 Simplektik gruplar

Önceki iki bölümde ortogonal ve üniter gruplarla karşılaştık. Bunlar *klasik gruplar* olarak adlandırılan şeylerdir, diğer bir deyişle istisna olanlardan farklı basit Lie gruplarıdır; *bkz.* §13.2. Klasik gruplara ait liste *simplektik* grup ailesiyle tamamlanır. Simplektik gruplar özellikle §20.4'te göreceğimiz üzere *klasik* fizikte ve ayrıca kuantum fiziğinin özellikle sonsuz boyutlu durumunda (§26.3) büyük öneme sahiptir.

Simplektik grup nedir? Yeniden çifte–doğrusal biçim kavramına dönelim fakat ortogonal grubu tanımlamakta gereken $(g(x, y) = g(y, x))$ simetrisi yerine

---

[21] Pozitif belirli durumda $(e_1{}^*, e_2{}^* \ldots, e_n{}^*)$'ın $(e_1, e_2 \ldots, e_n)$'ye, not 13.18'deki anlamda, bir *ikili taban* olduğuna dikkat edin.

[13.54] Bunu gösterin.

[13.55] Bu dönüşümlerin kesin biçimde v vektörleriyle v^* kovektörleri arasındaki Hermitsel uyumluluğu ve h_{ab} terimini koruyan dönüşümler olduğunu gösterin.

[22] Sabit $p + q = n$'yle ilgili $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$'nin yanısıra $\mathrm{U}(p, q)$ gruplarının tümü aynı karmaşıklaştırmaya, diğer bir deyişle $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, sahiptir ve bunların tümü bu karmaşık grubun farklı gerçel biçimleri olarak değerlendirilebilir.

$$s(x,y) = -s(y,x)$$

ters simetrisini, ilk değişken x'teki doğrusallığın artık *ters* simetrinin sonucu olarak geldiği

$$s(x,y+w) = s(x,y) + s(x,w),\ s(x,\lambda y) = \lambda s(x,y)$$

doğrusallığıyla birlikte konuya katalım. Ters simetrik biçimimizi tıpkı simetrik durumdaki gibi

$$s(x,y) = x^a s_{ab} y^b = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{y}$$

olarak fakat **S** s_{ab}'nin bileşenler matrisi olmak ve s_{ab}

$$s_{ba} = -s_{ab} \text{ diğer bir deyişle } \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{S}$$

ifadesi biçimde ters simetrik olmak üzere, yazabiliriz. **S**'nin tekil olmamasına gerek duyarız. Böylece s_{ab},

$$s_{ab}s^{bc} = \delta^c_a = s^{cb}s_{ba}$$

ifadesini, $s^{ab} = -s^{ba}$ olmak üzere sağlayan[23] bir terse, s^{ab}, sahiptir.

Bir simetrik matrisle benzerlik kurarak ters simetrik bir **S** matrisinin kendi devriğinin *eksi* işaretlisine eşit olduğunu belirtelim. Ters simetrik bir $n\times n$ matrisi **S**'nin yalnızca n'nin çift olması durumunda tekil olmayan olabileceğini gözlemlemek önemlidir.[13.56] Burada n, **x** ve **y**'nin ait olduğu V uzayının boyutudur ve aslında n'yi çift kabul ederiz.

Bu tür tekil olmayan ters simetrik bir s_{ab}'yi (ya da eşdeğer olarak çifte–doğrusal **s** biçimini)

$$s_{ab}T^a_c T^b_d = s_{cd},\ \text{diğer bir deyişle } \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{S}$$

anlamında koruyan GL(n)'ye ait **T** elemanları *simplektik* olarak ve bu elemanların grubu bir *simplektik grup* olarak adlandırılır (§20.4'te göreceğimiz üzere klasik mekanikte oldukça dikkate değer önemdeki bir grup). Bununla birlikte bu terminolojiyle ilgili yazında bazı kafa karıştırıcı şeyler mevcuttur. Simplektik (gerçel) bir grubu matematiksel olarak, *karmaşık* T^a_b'nin (ya da T) yukarıdaki bağıntıyı sağlayan grubu olan, *karmaşık* simplektik $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n,\mathbb{C})$ grubuna ilişkin gerçel bir biçim şeklinde tanımlamak çok daha doğrudur. Henüz tanımlanan belirli gerçel biçim tıkız değildir fakat

[23] Şu halde s_{ab} ve s^{ab}'yi, tıpkı g_{ab} ve g^{ab}'deki gibi, tensörlerin indislerini yükseltir ve düşürür biçimde kullanabiliriz, böylece $v_a = s_{ab}v^b v^a = s^{ab}v_b$ olur, *bkz.* §13.8; fakat ters simetri nedeniyle indislerin düzeninin tutarlı biçimde oluşturulmasında biraz dikkatli olmak zorundayız. 2–spinör analizini bilen okuyucular, *bkz.* Penrose ve Rindler, 1981, cilt 1, s_{ab}'miz ve o kalkülüsün ε_{AB}'si arasında bulunan hafif bir notasyon uyuşmazlığını fark etmiş olabilirler.

[13.56] Bunu kanıtlayın.

§13.7'nin sonundaki uyarılarla uyumlu biçimde, $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n, \mathbb{C})$ yarı basit olmak üzere, bu karmaşık grubun tıkız *olan* başka bir biçimi mevcuttur ve normalde (gerçel) simplektik $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n)$ grubu olarak anılan budur.

Bu farklı gerçel biçimleri nasıl buluruz? Aslında ortogonal gruplardaki gibi, ortogonal ve üniter gruplar durumundaki kadar iyi bilinmeyen bir *imza* kavramı mevcutur. s_{ab}'yi koruyan gerçel dönüşümlere ilişkin simplektik grup $\left(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n\right)$ imzasının "ayrık imza" durumu olur. Simplektik grup tıkız durumda $(n, 0)$ ya da $(0, n)$ imzasına sahiptir.

Bu imza nasıl tanımlanır? p ve q doğal sayılarının, $p + q = n$ olacak şekilde her bir çifti için karmaşık $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n, \mathbb{C})$ grubuna ilişkin ilgili bir "gerçel biçim"i, yalnızca (p, q) imzası için ayrıca sözde üniter, diğer bir deyişle $\mathrm{U}(p, q)$'ya ait olan (*bkz.* §13.9) o elemanları alarak tanımlayabiliriz. Bu bize (sözde) simplektik $\mathrm{Sp}(p, q)$ grubunu verir.[24] (Bunu dile getirmenin diğer bir yolu $\mathrm{Sp}(p, q)$'nun $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n, \mathbb{C})$ ile $\mathrm{U}(p, q)$'nun kesişimi olduğunu söylemektir.) İndis notasyonu biçiminde $\mathrm{Sp}(p, q)$'yu, ters simetrik s_{ab} ve $h_{a'b}$ bileşenlerinin Hermitsel bir **H** matrisinin her ikisini de, **H** (p, q) imzasına sahip olmak üzere (böylece **H**'nin p adet 1 girişli ve q adet -1 girişli olduğu sözde ortonormal bir temel bulabiliriz; *bkz.* §13.9),[25]

$$\bar{T}^{a'}_{b'} T^{a}_{b} h_{a'a} = h_{b'b}$$

ifadesindeki anlamda yukarıdaki gibi koruyan karmaşık doğrusal T^a_b dönüşümlerinin grubu olarak tanımlayabiliriz. *Klasik* tıkız simplektik $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n)$ grubu benim $\mathrm{Sp}(n, 0)$'ımdır (ya da $\mathrm{Sp}(0, n)$) fakat klasik fizikteki en önemli biçim $\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n\right)$'dir.[13.57]

Ortogonal ve üniter gruplarda olduğu gibi kendisiyle ilgili s_{ab} bileşenlerinin özellikle basit bir biçime sahip olduğu temel seçimleri bulabiliriz. Bununla birlikte tek ters simetrik köşegen matris sıfır olduğundan artık bu biçimi köşegen biçimli olarak kabul edemeyiz! Bunun yerine s_{ab} matrisini ana köşegen boyunca 2×2 bloktan oluşan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[24] Bu çeşitli gerçel biçimlerle ilgili standart bir terminoloji ya da notasyondan haberdar değilim, o halde $\mathrm{Sp}(p, q)$ notasyonu var olan amaçlar için uydurulmuştur.

[25] Aslında $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n, \mathbb{C})$'nin her elemanı birim determinanta sahiptir, böylece $\mathrm{SO}(n)$ ve $\mathrm{SU}(n)$'yle benzerlik içinde, bir "$\mathrm{SSp}(\frac{1}{2}n)$"ye gerek duymayız. Bunun nedeni, Levi–Civita'nın ε ...'sı için s_{ab} biçiminde bir ifadesinin ("Pfaff") mevcut oluşudur.

[13.57] Bu reçeteyi kullanarak Sp(1) ve Sp(1, 1)'le ilgili açık tanımlar bulun. $\mathrm{Sp}(n, 0)$ gruplarının niçin tıkız olduklarını görebiliyor musunuz?

biçiminde olarak kabul edebiliriz. Tanıdık $\mathrm{Sp}(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n)$ ayrık imza durumunda bu biçimi koruyan *gerçel* doğrusal dönüşümleri alabiliriz. Genel $\mathrm{Sp}(p,q)$ durumu, gerçel dönüşümler yerine (p,q) imzalı sözde üniter olanlar alınarak gösterilir.[13.58]

$\boxtimes$ ve q'nun çeşitli (küçük) değerleri için ortogonal, üniter ve simplektik grupların bazıları aynı Lie cebirine (*krş.* §13.6) sahip olmak anlamında aynı ("izomorfik") ya da en azından yerel olarak aynıdır ("yerel olarak izomorfik").[26] En temel örnek, bir çemberin yansımalı olmayan simetri grubunu açıklayan, karmaşık $e^{i\theta}$ sayılarının (θ gerçel) birim modülüne ilişkin çarpımsal grup olan üniter U(1) grubuyla aynı olmak üzere, SO(2) grubudur.[13.59] SU(2) ve Sp(1)'in aynı olmaları ve yerel olarak SO(3)'le aynı olmaları (bu son grubun, §11.3'te açıklandığı üzere, 3–uzaydaki döndürmelerin dördeylerle ilgili gösterimlerinin iki katlı doğasıyla uyumlu olan iki katlı örtüsü olarak) gerçeği fizik için belirli bir öneme sahiptir. Bu *spin*le ilgili (§22.8) kuantum fiziği açısından büyük öneme sahiptir. Sp(1,ℂ)'yle aynı olmak üzere SL(2,ℂ)'nin Lorentz grubu O(1,3)'ün (yine onun iki katlı bir örtüsü olarak) yansımalı olmayan kısmıyla yerel olarak aynı olması görelilik kuramı bakımından önemlidir. Ayrıca SU(1, 1), Sp(1, 1) ve SO(2, 1)'in aynı olduklarını buluruz ve pek çok başkaca örnek de mevcuttur. SU(2, 2) ve O(2, 4) grubunun yansımalı olmayan kısmı arasındaki yerel özdeşlik burgaç kuramı bakımından özellikle dikkate değerdir (*bkz.* §33.3).

Simplektik bir gruba ilişkin Lie cebiri

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{S} + \mathbf{S}\,\mathbf{X} = 0, \text{ diğer bir deyişle } \mathbf{S}\,\mathbf{X} = (\mathbf{S}\,\mathbf{X})^{\mathrm{T}}$$

matris denkleminde $\mathbf{X}$ için çözümler arayarak elde edilir, böylece sonsuz küçük (Lie cebiri elemanı) $\mathbf{X}$ dönüşümü basitçe simetrik bir $n\times n$ matrisin $\mathbf{S}^{-1}$'le çarpımıdır. Bu simplektik grubun $\frac{1}{2}n(n+1)$ boyutluluğunun doğrudan görülmesine olanak sağlar. $\mathbf{X}$'in iz serbest olması zorunluluğuna (diğer bir deyişle $\mathbf{X} = 0$; *bkz.* §13.4) dikkat edin.[13.60] Ayrıca ortogonal ve üniter gruplarla ilgili Lie cebiri sırasıyla ters simetrik matrisler ve Hermitsel matrislerin saf sanal katları biçiminde, ilgili boyutlar $n(n-1)/2$ ve n^2 olmak üzere, kolaylıkla elde edilir.[13.61]

[13.58] $p = q = 1/2$ durumu için bu iki farklı tanımın niçin eşdeğer olduğunu gösterin.

[26] *Bkz.* not 13.17

[13.59] Niçin aynılar?

[13.60] $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{S} + \mathbf{S}\,\mathbf{X} = 0$ denkleminin nereden geldiğini ve neden $\mathbf{S}\,\mathbf{X} = (\mathbf{S}\,\mathbf{X})^{\mathrm{T}}$ olduğunu açıklayın. İz $\mathbf{X}$ niçin yok olur? Lie cebirini açık olarak gösterin. O neden bu boyuttadır?

[13.61] Lie cebirlerini açıklayın ve bu boyutları elde edin.

§13.4'ten hareketle, dönüşümlerin birim determinanta sahip olmaları için sonsuz küçük $\mathbf{X}$ elemanının yok olması gerektiğini belirtelim. Bu, (yukarıda belirtilen) simplektik durumda otomatiktir ve ortogonal durumda sonsuz küçük elemanların hepsi birim determinanta sahiptir.[13.62] Üniter durumda, ek bir koşul SU(n)'yle ilgili kısıtlamadır (iz $\mathbf{X} = 0$) böylece grubun boyutu $n^2 - 1$'e indirgenir.

§13.2'de değinilen, bazen ($m = 1, 2, 3, \ldots$ için) A_m, B_m, C_m, D_m'yle gösterilen *klasik gruplar* basitçe sırasıyla, §§13.8–10'da incelediğimiz SU($m + 1$), SO($2m + 1$), Sp(m) ve SO($2m$)'dir ve yukarıdan aslında, §13.2'de ileri sürüldüğü gibi, ilgili $m(m + 2)$, $(2m + 1)$, $m(2m + 1)$ ve $m(2m - 1)$ boyutlarına sahip olduklarını görürüz. Böylece okuyucu, klasik basit grupların tümüne kısacık bir süre bakış atma fırsatına sahip oldu. Gördüğümüz üzere bu tür gruplar ve diğer bazı çeşitli "gerçel biçimler" (onlara ait karmaşıklaştırmalar) fizikte önemli roller oynar. Sonraki bölümde bununla ilgili bir miktar tanışıklık kazanacağız. Bu bölümün başında belirtildiği üzere modern fiziğe göre tüm fiziki etkileşimler, teknik olarak tam simetrilere sahip uzaylara yaşamsal biçimde bağlı olan "ayar bağlantıları"nca yönetilir. Bununla birlikte hâlâ "ayar kuramı"nın ne olduğunu bilmeye gerek duymaktayız. Bu, 15. bölümde açığa çıkacak.

[13.62] Neden ve bu geometrik olarak ne anlama geliyor?

14

MANİFOLDLAR ÜZERİNDEKİ ANALİZ

14.1 Bir manifold üzerinde türev alma?

Önceki bölümde (§§13.3,6–10'da) simetri gruplarının vektör uzayları üzerinde, bu uzaylara ait doğrusal dönüşümlerce gösterilerek nasıl etki edebildiklerini gördük. Belirli bir grupla ilgili olarak vektör uzayını, dönüşümlerce korunan özel bir *yapıya* sahip biçimde düşünebiliriz. Bu "yapı" kavramı önemlidir. Örneğin, ortogonal grup durumunda (§13.8) metrik, bir yapı olabilir ya da üniter bir grup (§13.9) tarafından korunur biçimdeki Hermitsel bir yapı olabilir. Daha önce belirtildiği gibi, grupların vektör uzayları üzerindeki hareketler biçiminde gösterim kuramı genel bir şekilde matematik ve fiziğin pek çok alanında, özellikle daha sonra göreceğimiz üzere (özellikle §22.2'de), Hermitsel (skaler çarpım) yapılı vektör uzaylarının kendisi için esaslı bir ardalan oluşturduğu kuantum fiziğinde büyük öneme sahiptir.

Bununla birlikte bir vektör uzayının kendisi çok özel bir uzay türüdür ve modern fiziğin büyük kısmının matematiğiyle ilgili çok daha genel bir şeyler gereklidir. Öklit'in eski geometrisi bile vektör uzayı değildir çünkü bir vektör uzayı belirli bir ayırt edilmiş noktaya, diğer bir deyişle (sıfır vektörüyle verilen) *başlangıç notasına* sahip olmak zorundadır, oysa ki Öklitçi geometride her nokta eşit bir temeldedir. Gerçekte Öklitçi uzay *afin* uzay olarak adlandırılan şeyin bir örneğidir. Afin uzay bir vektör uzayına benzer fakat başlangıç noktasını "unuturuz"; aslında o tutarlı bir *paralelkenar*[14.1], [14.2] kavramı bulunduran bir uzaydır. Belirli bir noktayı

[14.1] $[a,b;c,d]$ "*abcd* bir paralelkenar oluşturur ifadesi yerine kullanılsın (a, b, c ve d §5.1'de olduğu gibi döngüsel olarak alınmak üzere). Şunları aksiyom olarak kabul edin: (i) herhangi a, b ve c için $[a,b;c,d]$ olacak biçimde bir d mevcuttur; (ii) $[a,b;c,d]$ ise bu durumda $[b,a;d,c]$ ve $[a,c;b,d]$; (iii) $[a,b;c,d]$ ve $[a,b;e,f]$ ise bu durumda $[c,d;e,f]$. Herhangi seçili bir nokta ayrılıp başlangıç noktası olarak işaretlendiğinde bu cebirsel yapının bir "vektör uzayı"nınkine, §11.1'de verilen biçimde bir "skaler çarpım" işlemi olmaksızın indirgendiğini gösterin; bu demek oluyor ki ek bir Abelci grubuna ilişkin kuralları elde ederiz, *bkz.* alıştırma 13.2.

[14.2] Bunun Abelci olmayan duruma nasıl genelleneceğini görebiliyor musunuz?

başlangıç noktası olarak belirler belirlemez bu bize "paralelkenar kuralı" yoluyla vektör toplamayı tanımlama olanağı sağlar (*bkz.* §13.3, Şekil 13.4).

Einstein'ın kayda değer genel görelilik kuramının eğik uzayzamanı bir vektör uzayından kesinlikle daha geneldir; o bir 4–manifolddur. Yine de onun uzayzaman geometrisi kavramı, tek başına (12. bölümde çalışılmış olan) pürüzsüz bir manifold yapısına ek olarak (yerel) bir yapıya gereksinim duyar. Benzer şekilde (§12.1'de kısaca ele alınmış olan) fiziki sistemlerin düzenleme uzayları ya da faz uzayları da yerel yapılara sahip olmaya eğilimlidir. Bu gerekli yapıyı nasıl tayin ederiz? Bu tür (metrik bir yapı durumundaki) yerel yapı, noktalar arasındaki "uzaklığın" ya da (simplektik bir yapı durumunda belirtildiği gibi, *krş.* §13.10) bir yüzeyin "alanının" ya da (bir Riemann yüzeyinin konformal yapısındaki gibi; *bkz.* §8.2) eğriler arasındaki "açının", vb bir ölçüsünü sunabilir. Değinilen tüm örneklerdeki vektör uzay kavramları, sorgulanan vektör uzayı $\mathcal{M}$ manifoldunun tipik bir p noktasına ait n–boyutlu $\mathcal{T}_p$ *tanjant uzayı* olmak üzere ($\mathcal{T}_p$'yi $\mathcal{M}$'deki p'nin yakın çevresinde "sonsuz biçimde gerilmiş" olarak düşünebiliriz; *bkz.* Şekil 12.6), bize bu yerel geometrinin ne olduğunu söylemesi gereken şeylerdir.

Bu nedenle, 13. bölümde karşılaştığımız çeşitli grup yapıları ve tensörler, bir manifoldun bireysel noktalarında yerel bir anlama sahip olabilir. Einstein'ın eğri uzayzamanının aslında her bir tanjant uzayında Lorentzci bir (sözde) metrik (§13.8) tarafından verilen yerel bir yapıya sahip olduğunu bulacağız, oysa ki klasik mekaniğin faz uzayları (*krş.* §12.1) yerel simplektik yapılara (§13.10) sahiptir. Yapıya sahip manifoldlara ilişkin tüm bu örnekler modern fiziki kuramda yaşamsal roller oynar. Bununla birlikte, bu tür uzaylar içinde kalkülüsün hangi biçimi uygulanabilir?

Henüz belirtildiği gibi, 12. bölümde çalıştığımız n–boyutlu uzayların daha fazla yerel yapı belirtilmeden yalnızca pürüzsüz olmaları gereklidir. Bu tür yapısız bir pürüzsüz $\mathcal{M}$ manifoldunda olarak az sayıda analiz temelli anlamlı işlem mevcuttur. En önemlisi, genellikle $\mathcal{M}$ içerisinde uygulanabilecek genel bir türev alma kavramına bile sahip değiliz.

Bu noktayı açıklamalıyım. Herhangi belirli bir koordinat yamasında ilgilenilen çeşitli niceliklerin, o yamadaki her bir x^1, x^2, ..., x^n koordinatına göre türevini $\partial/\partial x^1$, $\partial/\partial x^2$, ..., $\partial/\partial x^n$ (kısmi) türev işlemcilerini kullanarak (*bkz.* §10.2) basit biçimde kesinlikle alabiliriz. Çoğu durumda fakat yanıtlar geometrik olarak anlamsızdır çünkü koordinatların yapılmış olan belirli (rasgele) seçimlerine bağlıdırlar ve yanıtlar bir yamadan diğerine geçerken genellikle birbirine uymaz (*krş.* Şekil 10.7).

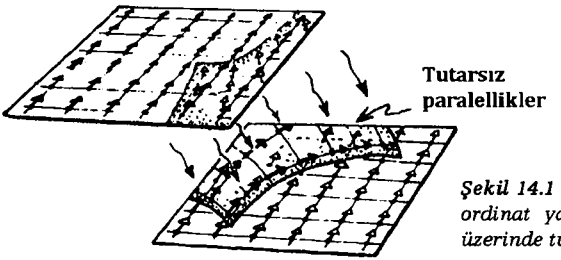
Bununla birlikte §12.6'da, gerçekte genel (yapısız) bir pürüzsüz n–manifoldda geçerli olan ve bir yamadan diğerine değişmeyen önemli bir tü-

rev alma kavramını, diğer bir deyişle türevsel bir biçimin *dışsal türevini*, not etmiştik. Yine de bu işlem, yalnızca p–biçimlilerde uygulandığı, dahası bu tür bir p–biçimlinin nasıl değiştiğiyle ilgili pek fazla bilgi vermediğinden, kendi kapsamında bir şekilde sınırlıdır. Genel bir pürüzsüz manifold üzerindeki bir niceliğe ait daha tam bir "türev" kavramı verebilir miyiz? Bu tür bir kavram herhangi bir koordinat yaması üzerindeki noktaları işaretlemek üzere seçilmiş olabilecek herhangi belirli bir koordinattan bağımsız olarak tanımlanmalıdır. Aslında manifoldlarda uygulanabilecek ve konumdan konuma hareket ettiğimizde bir vektör ya da tensör alanının nasıl değiştiğini ifade etmemize olanak sağlayacak bir tür koordinattan bağımsız kalkülüse sahip olmak iyi olurdu. Bu nasıl başarılabilir?

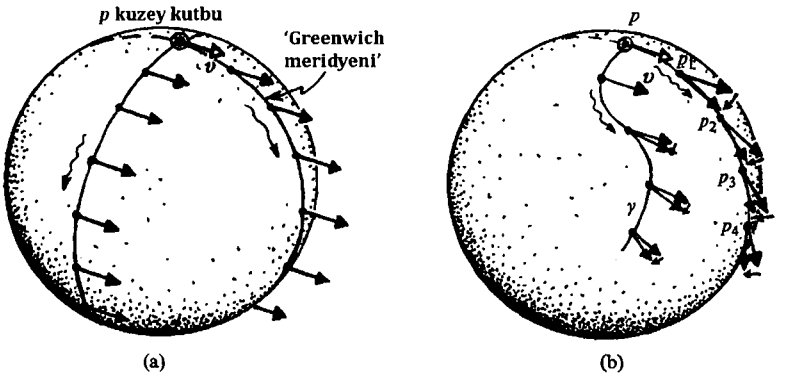
14.2 Paralel taşıma

§10.3 ve §12.3'ten, genel bir pürüzsüz n–manifoldu $\mathcal{M}$ üzerindeki bir *skaler* Φ alanı durumunda aslında onun "değişim oranı"na ilişkin uygun bir ölçü olarak, diğer bir deyişle, $d\Phi = 0$ Φ'nin ($\mathcal{M}$'nin bağlantılı bölgeleri boyunca) sabit olduğu koşul olmak üzere, 1–biçimli $d\Phi$'yi sağlayabildiğimizi anımsayın. Bununla birlikte bu fikir genel bir tensör niceliği için geçerli olmayacaktır. Bir ξ vektör alanı için bile geçerli olmayacaktır. Niçin? Bir sorun, genel bir manifoldda sabit olan herhangi uygun bir ξ kavramına (birazdan göreceğimiz üzere) sahip olmayışımızdır, oysa ki ξ'ye uygulanan herhangi özgüvenli bir türev alma işlemi ("gradyan"), ortadan yok oluşunun ξ'nin sabitliğine işaret etmesi özelliğine sahip olmalıdır (aslında $d\Phi = 0$ skaler bir Φ alanının sabitliğine işaret eder). Daha genel olarak "sabit olmayan" bir ξ'yle ilgili bu tür bir türev işleminin ξ'nin sabitlikten sapmasını ölçüyor olma zorunluluğunu bekleriz.

Genel bir n–manifoldu $\mathcal{M}$ üzerindeki bu vektör "sabitliği" kavramında neden bir sorun mevcuttur? Olağan Öklitçi uzaydaki sabit bir ξ vektör alanı, geometrik tanımındaki tüm "oklar"ın birbirine paralel olması özelliğinde olmalıdır. Bu nedenle bir tür "paralellik" kavramı $\mathcal{M}$'nin yapısının parçası olmalıdır. Bununla ilgili olarak, 2. bölümdeki tartışmanın merkezinde olan Öklit'in beşinci önermesi konusu akılda tutularak kaygılanılabilir. Hiperbolik geometri örneğin, her yerde açıkça "paralel" olarak ele alınabilen vektör alanlarını kabul etmez. Her koşulda, "paralellik" kavramı, $\mathcal{M}$'nin yalnızca pürüzsüz bir manifold olmanın üstünlüğü yoluyla sahip olacağı bir şey değildir. Şekil 14.1'de, Ökitçi düzlemin iki yamasından bir araya eklenmiş bir 2–manifold durumunun güçlüğü gösterilmektedir. Öklitçi normal "paralel" kavramı bir yamadan diğerine tutarlı değildir.



Şekil 14.1 Öklitçi "paralel" kavramı koordinat yamaları arasındaki çakışma üzerinde tutarsız olma eğilimindedir.



Şekil 14.2 S^2 küresi üzerindeki paralellik. Greenwich meridyeni boyunca uç veren $\boldsymbol{v}$ tanjant vektörüyle birlikte kuzey kutbundaki p'yi seçin. S^2'nin diğer noktalarındaki hangi tanjant vektörlerini $\boldsymbol{v}$'ye "paralel" olarak değerlendirmeliyiz? (a) S^2'nin $\mathbb{E}^3$ içerisine yerleştirilmesinden elde edilen Öklitçi dolaysız "paralel" kavramı (Greenwich meridyenine dik olan meridyeni dışta tutarsak) geçerli olmaz çünkü paralel $\boldsymbol{v}$'ler S^2'ye tanjant olarak kalmaz. (b) Bu, $\boldsymbol{v}$'yi verili bir γ eğrisi boyunca, küreye olan tanjantlığı sürekli biçimde geri yansıtmak yoluyla hareket ettirerek düzeltilebilir. (γ'nın her aşamada geri yansıyan çok fazla sayıdaki küçük $p_0p_1, p_1p_2, p_2p_3, \ldots$ parçalarından oluştuğunu düşünün. Sonra parçalar git gide daha küçük hale getirilirken limit alın.) Bu *paralel taşıma* kavramı Greenwich meridyeniyle ilgili fakat ayrıca genel bir γ'yla da ilgili olarak belirtilir.

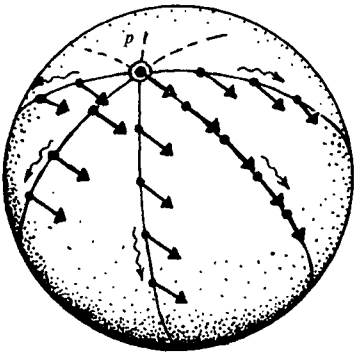
Ne tür paralellik kavramının uygun olduğuna ilişkin bir miktar kavrayış kazanmak üzere, ilk olarak olağan bir 2–boyutlu S^2 küresinin gerçek geometrisini incelemek yararlı olacaktır. S^2 üzerinde belirli bir p noktası (kesinlik için kuzey kutbu üzerinde diyelim) ve p'de de belirli bir $\boldsymbol{v}$ tanjant vektörü (Greenwich meridyeni boyunca uç veren diyelim, *bkz.* Şekil 14.2a) seçelim. S^2'nin diğer noktalarındaki diğer hangi tanjant vektörlerini $\boldsymbol{v}$'ye "paralel" olarak değerlendirmeliyiz? Basitçe, S^2'nin Öklitçi 3–uzay içerisine standart biçimde yerleştirilmesinden miras kalan Öklitçi "paralel" kavramını kullanırsak böylece S^2'ye ait q'nun çoğu noktasında S^2'ye tanjant olan $\boldsymbol{v}$'ye bu anlamda "paralel" hiçbir vektörün, q'daki tanjant düzlemi

v'nin doğrultusunu genellikle içermediği için mevcut olmadığını görürüz. (Yalnızca p'deki Greenwich meridyenine dik olup p'den geçen büyük çember, üzerinde S^2'ye tanjant olan v'ye bu anlamda "paralel" vektörlerin bulunduğu noktalar içerir.) S^2 üzerindeki uygun paralellik kavramı yalnızca tanjant vektörlerine atıfta bulunmalıdır, o halde v'nin doğrultusunu q'ya ait tanjant düzlemine geri çekebilmek için q'yu p'den derece derece uzaklaştırarak elimizden gelenin en iyisini yapmak zorundayız. Aslında bu fikir çalışır ve son derece güzel çalışır fakat artık içerisinde, elde ettiğimiz paralellik kavramının üzerinde q'yu p'den uzaklaştırdığımız *yola bağlı* olduğu yeni bir özellik mevcuttur.[1] Paralellik kavramındaki bu yol bağımlılığı yeni temel bileşendir ve ona ait versiyonlar Einstein'ın genel göreliliğine ek olarak parçacık etkileşimlerine ilişkin modern kuramların tümünün temelini oluşturur.

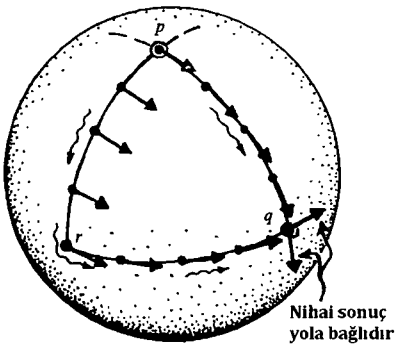
Bunu biraz daha iyi anlamaya çalışalım. S^2 üzerinde p noktasında başlayıp başka bir q noktasında biten bir γ yolunu ele alalım. γ'nın çok fazla sayıdaki, N, küçük p_0p_1, p_1p_2, p_2p_3, ..., $p_{N-1}p_N$ parçalarından oluştuğunu, başlangıç noktası $p_0 = p$ ve son parça $p_N = q$'da bitmek üzere, düşünmeliyiz. Kafamızda v'yi, kendisine paralel olarak bu $p_{r-1}p_r$ parçalarından her biri boyunca γ üzerinde hareket etttirdiğimizi, daha önce Öklitçi çevre 3–uzayı kullanmamız anlamında, canlandırırız ve sonra v'yi p_r'deki tanjant uzayına yansıtırız. *Bkz.* Şekil 14.2b. Bu işlemle birlikte, bütünüyle yüzey içinde yapma olanağının yakınlığı kadar, γ üzerinde kaba bir anlamda p'den q'ya kendisine paralel şekilde kaydığını düşünebileceğimiz q'daki bir tanjant vektörüne ulaşırız. Aslında bu işlem hafifçe γ'nın birbirini izleyen parçalar tarafından nasıl yaklaşıklaştırıldığına bağlı olacaktır fakat parçalar git gide daha küçük hale gelirken, limitte, γ'yı parçalarına ayırdığımız yolun kesin ayrıntılarına bağlı olmayan iyi tanımlı bir yanıt elde ederiz. Bu işlem v'nin γ boyunca *paralel taşıma*sı olarak adlandırılır. Şekil 14.3'te bu paralel taşımanın p'den başlayan beş farklı yol (tüm büyük çemberler) üzerinde neye benzeyeceğini belirttim.

Öyleyse yukarıda değinilen bu yol farkı bağımlılığı nedir? Şekil 14.4'te S^2 üzerinde p ve q noktalarını ve biri dolaysız büyük çember rotası ve diğeri ara r noktasında birleştirilmiş bir büyük çember yayı çiftinden oluşan p'den q'ya iki yolu işaretledim. Şekil 14.3'ün geometrisinden bu iki yol üzerindeki (biri kendi üzerinde bir köşeye sahiptir fakat bu önemli değil)

[1] Aslında, ne olursa olsun v'ye S^2'nin tüm noktalarında sürekli biçimde bir "paralel" atamanın hiçbir yolu olamamasının topolojik bir nedeni mevcuttur ("küresel bir köpeğin saçlarını tarama" sorunu!). Bununla birlikte S^3'le ilgili benzer bir ifade, §15.4'te verilen Clifford paralellerinin oluşturuluşunun gösterdiği üzere doğru değildir.



Şekil 14.3 v'nin beş farklı yol (tüm büyük çemberler) üzerindeki paralel taşınması.



Şekil 14.4 Paralel taşımanın yol bağımlılığı. Bu biri dolaysız büyük çember rotası ve diğeri ara r noktasında birleştirilmiş bir büyük çember yayı çiftinden oluşan p'den q'dan geçen iki ayrı yol kullanılarak gösterilir. Bu iki yol üzerindeki paralel taşıma q'da bir dik açılık döndürme kadar farklılaşan sonuçlar verir.

paralel taşımanın birbirinden, bu durumda bir dik açılık döndürme kadar ayrışan oldukça farklı iki sonuç verdiğini görürüz. Farklılığın yalnızca vektörün yönündeki döndürme olduğuna dikkat edin. Bu belirli biçimde tanımlanan paralel taşıma kavramının vektör uzunluğunu her zaman koruyacağına ilişkin genel nedenler mevcuttur. (Bununla birlikte durumun, kendisi için bu olmadığı farklı türde "paralel taşımalar" da mevcuttur.) Bu konular bizim için ilerleyen bölümlerde (§14.8, §§15.7,8, §19.4) öneme sahip olacak. Bu açısal farklılığı, γ yolumuz, paralel–taşınmış tanjant vektörünün başlangıçtaki ve sonuçtaki yönleri arasında bir farklılığın olası olduğu kapalı bir döngü (böylece $p = q$) olduğu durumda uç bir biçimde görebiliriz. Aslında birim yarıçaptaki kesin bir geometrik küreyle ilgili olarak farklılık, radyanla ölçüldüğünde kesinlikle döngünün toplam (negatif kabul edilen negatif anlamdaki bölgelerle çevrili) alanına eşit olan bir döndürme açısıdır.[14.3]

[14.3] Bu savı, Harriot'un küresel bir üçgenin alanıyla ilgili §2.6'da verilmiş 1603 tarihli denklemidenklemini kullanabileceğiniz küresel bir üçgen (S^2 üzerinde büyük çember yaylarından oluşmuş üçgen) durumunda doğrulayabilir misiniz bakın.

14.3 Kovaryant türev

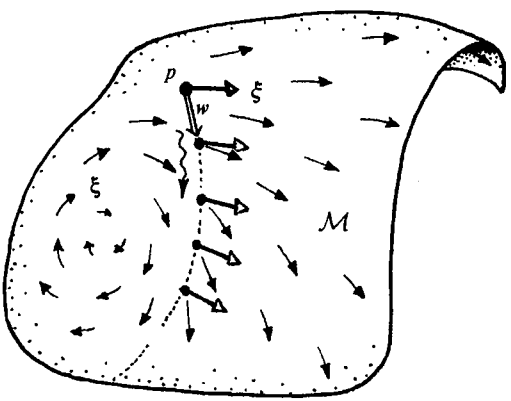
Örneğin bunun gibi bir "paralel taşıma" kavramını vektör alanlarına (ve buradan hareketle genel olarak tensörlere) ilişkin uygun bir *türev alma* kavramını tanımlamakta nasıl kullanabiliriz? Esas düşünce, bir vektör (ya da tensör) alanının aslında p noktasından uzak bir yöndeki davranış şeklini, p'den o aynı yönde sonrakinden ilkini çıkararak elde edilen aynı vektörün paralel taşımasıyla karşılaştırabilmemizdir. Bunu sonlu bir γ eğrisi üzerinde uygulayabiliriz bir vektör alanının (ilk) türevini tanımlamak için yalnızca p'den uzak sonsuz küçük bir yer değişikliğine gerek duyarız ve bu eğrinin yalnızca p'den "başladığı" yola, diğer bir deyişle o yalnızca γ'nın p'deki $\boldsymbol{w}$ tanjant vektörüne (Şekil 14.5) bağlıdır. Bu türde bir yolla ortaya çıkan türev alma kavramını, *kovaryant türev işlemcisi* ya da kısaca *bağlantı* olarak adlandırılan bir ∇ sembolüyle göstermek olağandır.

Bu tür bir işlemcideki (ve S^2'yle ilgili üstteki özette tanımlanmış kavram için doğru olduğu açığa çıkan) temel gereksinim onun *doğrusal olarak* $\boldsymbol{w}$ vektörüne bağlı oluşudur. Bu nedenle, $\boldsymbol{w}$'nun yer değiştirmesiyle tanımlanan kovaryant $\underset{\boldsymbol{w}}{\nabla}$ türevini yazarsak bu, bu tür iki $\boldsymbol{w}$ ve $\boldsymbol{u}$ vektörünün yer değiştirmesiyle (yön) ilgili

$$\underset{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}}{\nabla} = \underset{\boldsymbol{w}}{\nabla} + \underset{\boldsymbol{u}}{\nabla}$$

ifadesini sağlamalıdır ve bir λ skaler çarpanı için

$$\underset{\lambda\boldsymbol{w}}{\nabla} = \lambda \underset{\boldsymbol{w}}{\nabla}$$



Şekil 14.5 Kovaryant türev kavramı paralel taşımayla bağıntılı olarak anlaşılabilir. $\mathcal{M}$'deki bir ξ vektör alanının bir noktadan diğerine (siyah uçlu oklar) değişme biçimi paralel taşımayla sunulan (beyaz uçlu oklar) standarttan ayrılması yoluyla ölçülür. Bu kıyaslama (p'den başlayarak) tüm bir γ eğrisi boyunca yapılabilir fakat p'deki $\underset{\boldsymbol{w}}{\nabla}$ kovaryant ilk türeviyle ilgili yalnızca γ'ya p'de tanjant olup p'deki ξ'nin $\boldsymbol{w}$ yönündeki kovaryant $\underset{\boldsymbol{w}}{\nabla}\xi$ türevini belirleyen $\boldsymbol{w}$ vektörünü bilmemiz gerekir.

olur. Vektör sembolünü ∇ sembolünün altına yerleştirmek notasyon olarak tuhaf görülebilir, aslında öyledir de! Bununla birlikte, örneğin "∇_w" gibi bir ifadenin kullanımıyla ilgili matematikçilerin ve fizikçilerin notasyonu arasında gerçek bir karışıklık mevcuttur. Matematikçimize göre bunun, benim burası için kullandığım "$\underset{w}{\nabla}$" işlemini göstermesi olasıyken fizikçimiz w'yu bir vektör alanı yerine bir *indis* olarak yorumlamaya yatkındır. Fizikçinin notasyonunda $\underset{w}{\nabla}$ işlemcisini

$$\underset{w}{\nabla} = w^a \nabla_a$$

şeklinde ifade ederiz ve üstteki doğrusallık basit olarak notasyondaki tutarlılığı yansıtır:

$$(w^a + u^a)\nabla_a = w^a\nabla_a + u^a\nabla_a \text{ ve } (\lambda w^a)\nabla_a = \lambda(w^a\nabla_a).$$

∇ üzerine bir alt indis yerleştirmek onun bir vektör alanına ikili oluşuyla (üstteki doğrusallıkta yansıtıldığı üzere; *bkz.* §12.3) tutarlıdır, diğer bir deyişle ∇ ($\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$değerlikli bir işlemci anlamına gelen) bir kovektör işlemcisidir. Bu nedenle ∇ bir ξ vektör alanına ($\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ değerlikli) etki ettiğinde sonuçtaki $\nabla\xi$ niceliği $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$–değerli bir tensördür. Bu, indis notasyonunda $\nabla\xi$ tensörüyle ilgili bileşen (ya da soyut indis) ifadesi için $\nabla_a\xi^a$ notasyonunun kullanımı yoluyla açık hale getirilir. Aslında ∇ işlemcisinin ufkunu vektörlerden genel değerlikli tensörlere genişletmenin doğal bir yolu mevcuttur; ∇ işlemcisinin $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$–değerli T tensörü üzerinde $\begin{bmatrix}p\\q+1\end{bmatrix}$–değerli ∇T tensörüyle sonuçlanan etkisi. Bunu başarmaya ilişkin kurallar indis notasyonuyla uygun biçimde aktarılabilir fakat matematikçinin notasyonunda birazdan göreceğimiz bir tuhaflık söz konusudur.

Vektör alanları üzerine etkisinde ∇, türevsel d işlemcisinin §12.6'da sağladığı türdeki kuralları, ξ ve η vektör alanları ve λ skaler bir alan olmak üzere, sağlar:

$$\nabla(\xi + \eta) = \nabla\xi + \nabla\eta$$

ve Leibniz yasası

$$\nabla(\lambda\xi) = \lambda\nabla\xi + \xi\nabla\lambda.$$

Bir bağlantının normal gereklerinin parçası olarak ∇'nın skaler bir alan üzerindeki etkisi d gradyanının (dışsal türev) o skaler üzerindeki etkisiyle özdeş olmaktadır:

$$\nabla\Phi = \mathrm{d}\Phi.$$

∇'nın genel bir tensör alanına genişlemesi izleyen iki kural tarafından eşsiz biçimde[14.4] tanımlanır. İlki (aynı değerlikteki T ve U tensörleriyle ilgili) *toplanırlık*

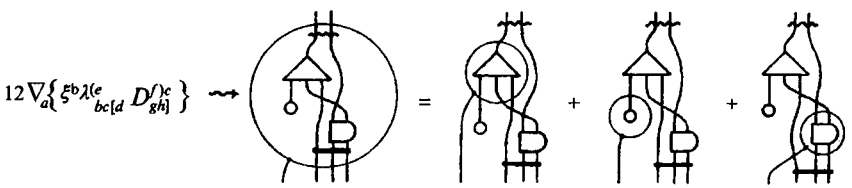
$$\nabla(T + U) = \nabla T + \nabla U,$$

ve ikincisi Leibniz yasasının uygun biçiminin geçerli oluşudur. İndislerden kaçınan bu Leibniz yasasının, özellikle matematikçinin notasyonunda, ifade edilmesi biraz tuhaftır. Bu yasanın kaba biçimi

$$\nabla(T \bullet U) = (\nabla T) \bullet U + T \bullet \nabla U$$

ifadesidir fakat bunun açıklanması gerekir. Nokta, •, daraltılmış bir çarpım biçimini, T'nin bir üst ve alt indis kümesinin U'nun bir üst ve alt indis kümesiyle daraltıldığı (kümelerin anlamsız olabilmesine, çarpıma hiçbir daralma olmaksızın bir *dış* çarpım haline gelecek şekilde izin veren) bir biçimi belirtmek içindir. Üstteki denklemde sağ taraftaki tüm terimlerin daralmaları kesin biçimde sol taraftakileri yansıtmalıdır ve ∇ üzerindeki indis harfleri tüm ifade boyunca aynı olmalıdır.

Matematikçinin, Leibniz tensör yasasıyla tam olarak anlatmak istediğimiz şeyi ifade eden denklemi yazmakla ilgili, indislere değinilmeyen, notasyonunda özel bir tuhaflık mevcuttur. ∇ yerine $\underset{w}{\nabla}$ kullanırsak bu durum, w ∇ üzerindeki indisi izlediğinden hafifçe azalır ve dilersek buna benzer bir şeyi diğer indislerle de, her birini (∇ tarafından etki edilmeyen) bir vektör ya da kovektör alanıyla daraltarak yapabiliriz. Benim görüşüme göre işler indislerle daha açıktır fakat türev almanın türevi alınacak şey etrafına bir halka çizilerek gösterildiği diyagram biçimli notasyonda çok daha açıktır. Şekil 14.6'da bunu Leibniz tensör yasasını temsil eden bir örnekle gösterdim.



Şekil 14.6 Diyagram biçimli notasyonda kovaryant türev alma türevi alınacak niceliğin etrafına bir halka çizerek kolayca gösterilir. Burada bu, Leibniz tensör yasasının $\nabla_a\{\xi^b\lambda^{(e}{}_{bc[d}D^{f)c}{}_{gh]}\}$ ifadesine uygulanan örnekle gösteriliyor (*bkz.* Şekil 12.17). (Ters simetri çarpanı "12"yi verir.)

[14.4] Neden eşsiz biçimde olduğunu açıklayın. *İpucu*: ∇'nın $\alpha \bullet \xi$, vb üzerindeki etkisini göz önüne alın.

Tüm bunlar ayrıca ∇_a yerine kullanılan koordinat türevi" işlemcisi $\partial/(\partial x^a)$ için de doğrudur. Aslında herhangi bir koordinat yamasında $\partial/(\partial x^a)$'yı o yamadaki, *koordinat bağlantısı* olarak adlandıracağım belirli bir bağlantıyı tanımlamakta kullanabiliriz. Koordinatlar rasgele olduğundan bu çok da ilginç bir bağlantı değildir. (Bu, tüm koordinat çizgilerinin "paralel" sayıldığı bir "paralellik" kavramı sunar.) İki koordinat yaması arasındaki çakışmada bir yama üzerindeki koordinatlarla tanımlı bağlantı genellikle diğeri üzerinde tanımlananla uyuşmaz (*bkz.* 14.1). Koordinat bağlantısı "ilginç" (kesinlikle fiziki olarak ilginç değil) olmasa da açık ifadelerde çok sıklıkla kullanışlıdır. Nedeni, iki bağlantı arasındaki farkı aldığımızda bir $\boldsymbol{T}$ tensör niceliği üzerindeki bu fark alma eylemi her zaman $\boldsymbol{T}$ ve $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ değerlikli bir belirli $\boldsymbol{\Gamma}$ tensör niceliği biçiminde tümüyle cebirsel olarak (diğer bir deyişle herhangi bir türev alma olmaksızın) ifade edilebilir.[14.5] Bu durum, $\boldsymbol{\nabla}$'nın herhangi bir $\boldsymbol{T}$ tensörü üzerindeki eylemini, açık olarak koordinat türevlerinin[2] $T^{a\ldots c}_{d\ldots f}$ bileşenleriyle birlikte Γ^a_{bc} bileşenlerini içeren bazı ek terimler biçiminde ifade etmemize olanak sağlar.[14.6]

14.4 Eğrilik ve torsiyon

Koordinat bağlantısı, genel durumun aksine kendi içinde yola bağlı olmayan bir paralellik tanımlayan oldukça özel türde bir bağlantıdır. Bu,

---

[14.5] İfadeyi açık biçimde yazarak bunu gösterebilir misiniz? *İpuçları*: İlk olarak bir ξ vektör alanı üzerindeki iki bağlantı arasında, yanıtı $\xi^c\Gamma^a_{bc}$ indis biçimli olarak veren fark alma eylemine bakın; ikincisi, bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörü üzerine etki eden bağlantıların bu farkının $-\alpha_c\Gamma^c_{ba}$ indis biçimine sahip olduğunu gösterin; üçüncüsü, $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$-değerli bir $\boldsymbol{T}$ tensörünün tanımını q vektörlerinin p kovektörleri üzerindeki çoklu-doğrusal bir fonksiyonu biçiminde kullanarak (*krş.* §12.8), $\boldsymbol{T}$ üzerine etki eden bağlantılar arasındaki farkla ilgili genel indis ifadesini bulun.

[2] Fizik ve daha eski matematik literatürünün çoğunda $\partial/\partial x^a$ koordinat türevi, türevi alınacak niceliğe eklenmiş indis listesinin en sağ tarafına virgülü izleyen bir alt a indisi eklenerek belirtilir. ∇_a durumunda virgül yerine sıklıkla noktalı virgül kullanılır.

"∇_a"notasyonu soyut-indis notasyonuyla (§12.8) uyumludur ve Kitabın ana metninde bulunan daha sonraki denklemler bu şekilde okunabilir/okunmalıdır. Ayrıca bu notasyonda koordinat ifadeleri de oldukça etkili biçimde ele alınabilir fakat ayırt edilebilir iki tür indis gereklidir; bileşen ve soyut, *bkz.* Penrose, 1968; Penrose ve Rindler 1984.

[14.6] Bunun bir uygulaması olarak iki bağlantıyı $\boldsymbol{\nabla}$ ve koordinat bağlantısı biçiminde alın. $\boldsymbol{\nabla}$'nın herhangi bir tensör üzerindeki eylemiyle ilgili, Γ^a_{bc} bileşenlerinin $\Gamma^a_{b1} = \nabla_b\delta^a_1, \ldots, \Gamma^a_{bn} = \nabla_b\delta^a_n$ ifadesinden hareketle, diğer bir deyişle $\boldsymbol{\nabla}$'nın her bir $\delta^a_1, \ldots, \delta^a_n$ koordinat vektörü üzerindeki eylemi biçiminde, açık biçimde nasıl elde edildiğini göstererek, bir koordinat ifadesi bulun. (Burada a §12.8'le uyumlu olarak bir "soyut indis" biçiminde düşünülebilecek olan bir vektör indisidir, böylece "δ^a_1", vb, aslında basit olarak bileşen kümelerini değil vektörleri gösterir fakat n yalnızca uzayın boyutunu gösterir. Koordinat bağlantısının bu koordinat vektörlerinden her birini ortadan kaldırdığına dikkat edin.)

koordinat türevi işlemcilerinin (§10.2'de $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$ biçiminde belirtilmiş olan) yer değiştirme gerçeğiyle ilgilidir:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b} = \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x^a}.$$

Bunu söylemenin başka bir yolu $\partial^2/\partial x^a \partial x^b$ niceliğinin (ab indislerinde) simetrik olduğunu belirtmektir. Bunun paralelliğin yol bağımsızlığıyla ne ilgisi olduğunu birazdan göreceğiz. Genel bir ∇ bağlantısıyla ilgili olarak bu simetri özelliği $\nabla_a \nabla_b$ için geçerli değildir. $\nabla_{[a}\nabla_{b]}$ ters simetrik kısmı, biri $\boldsymbol{\tau}$ tensörünün *torsiyonu* olarak adlandırılan $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ değerlikli, diğeri $\boldsymbol{R}$ tensörünün *eğriliği* olarak adlandırılan $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ değerlikli özel iki tensör sonucuna neden olur. Torsiyon, $\nabla_{[a}\nabla_{b]}$'nin skaler bir nicelik üzerindeki eylemi yok olmayı başaramadığında söz konusu olur. Fiziki kuramların çoğunda ∇ *torsiyon serbest*, diğer bir deyişle $\boldsymbol{\tau} = 0$, olarak kabul edilir ve bu, hayatı kesinlikle kolaylaştırır. Yine de örneğin, önemli bir fiziki rol oynayan sıfır olmayan bir torsiyonu kullanan süper kütleçekim ve Einstein–Cartan–Sciama–Kibble spin/torsiyon kuramları gibi bazı kuramlar mevcuttur; *bkz.* not 19.10, §31.3. Torsiyon söz konusu *olduğunda*, kendisine ait ab'de ters simetrik olan τ^a_{bc} indis ifadesi

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\Phi = \tau_{ab}{}^c \nabla_c \Phi$$

ile tanımlanır.[14.7] Torsiyon serbest durumda[14.8] $\boldsymbol{R}$ *eğrilik* tensörü

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\xi^d = R^d_{abc}\xi^c$$

ile[14.9] tanımlanabilir.[3]

Bu konuda genel olarak pek çok göz korkutucu küçük ifadeyle uğraşacağız bu nedenle bu kilit ifadelerin diyagram biçimli türünü öneririm, *örn.* Şekil 14.7a, b. Ayrıca indisli ifadelerin uygun olan her koşulda §12.8'de olduğu gibi soyut indisli tensörler olarak okunmasını öneririm. (İndis düzeni, işaretler, vb hakkındaki yazında farklı pek çok eğilim bulunur. Okuyucuyu eğilimli olduğum kullanıma maruz bırakıyorum, en azından tek yazarı olduğum sayfalarda!). R^d_{abc}'nin ilk indis çifti ab'de ters simetrik, diğer bir deyişle

[14.7] Sağ tarafın niçin bu genel biçime sahip olması gerektiğini açıklayın; τ^a_{bc} bileşenlerini Γ^a_{bc} biçiminde bulun. *Bkz.* alıştırma [14.6].

[14.8] Torsiyon söz konusu olunca bu ifadeyi daha tutarlı yapmak üzere fazladan hangi terimin gerektiğini gösterin.

[14.9] Bir kovektör üzerinde etkiyen $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$ için ilgili ifade nedir? $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ değerlikli genel bir tensörle ilgili ifadeyi türetin.

[3] İndis dereceleme gereksinimi, bir metrik sunulduğunda (§14.7) indislerin düşürülüp yükseltilmesi için boşluklara gerek olmasından kaynaklanır.

$$R^d_{bac} = -R^d_{abc},$$

olması (*bkz.* Şekil 14.7c) gerçeği $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a = 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}$'nin ilgili ters simetrisi dolayısıyla açıktır. Bu ters simetrinin önemini birazdan göreceğiz. Torsiyon serbest durumda ek bir simetri bağıntısına[14.10] (Şekil 14.7d),

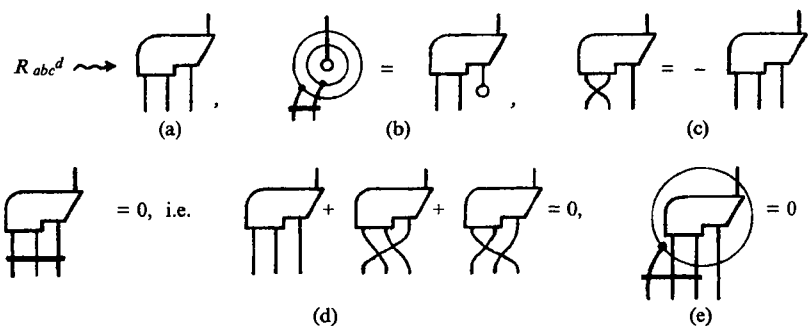
$$R^d_{[abc]} = 0, \text{ diğer bir deyişle } R^d_{abc} + R^d_{bca} + R^d_{cab} = 0,$$

sahibiz. Bu bağıntı bazen "ilk Bianchi özdeşliği" olarak adlandırılır. Bunu *Bianchi simetrisi* olarak adlandıracağım. *Bianchi özdeşliği* terimi (Şekil 14.7e) normalde torsiyon yokluğunda bu tür "ikinci" bir

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}^{\ \ \ e} = 0, \text{ diğer bir deyişle } \nabla_a R^e_{bcd} + \nabla_b R^e_{cad} + \nabla_c R^e_{abd} = 0$$

özdeşliği[14.11] için saklı tutulur. Bianchi özdeşliği §19.6'da göreceğimiz üzere Einstein'ın alan denkleminin temel taşıdır.

Eğrilik, bağlantının yol bağımlılığını ifade eden temel niceliktir (en azından yerel ölçekte). Bir vektörü $\mathcal{M}$ uzayındaki küçük bir döngü etrafında, ∇'yla tanımlanan paralel taşıma kavramını kullanarak taşımayı kafamızda canlandırırsak böylece başlangıç noktasına döndüğümüzde o vektörün ne kadar değiştiğini ölçenin $\boldsymbol{R}$ olduğunu buluruz. En kolayı döngüyü $\mathcal{M}$ uzayında çizilmiş bir "sonsuz küçük paralelkenar" olarak düşünmektir. (∇ torsiyon serbest olduğunda, göreceğimiz üzere, bu tür paralelkenarlardan yeteri kadar "bulunur".) Bununla birlikte ilk olarak buradaki çeşitli kavramların açıklanması gerek.



Şekil 14.7 (a) Eğrilik tensörü R^d_{abc} için diyagram biçimli uygun bir notasyon. (b) Ricci özdeşliği, $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\xi^d = R^d_{abc}\xi^c$. (c) Ters simetri, $R^d_{bac} = -R^d_{abc}$. (d) $R^d_{abc} + R^d_{bca} + R^d_{cab} = 0$'a indirgenen Bianchi simetrisi, $R^d_{[abc]} = 0$. (e) Bianchi özdeşliği, $\nabla_{[a}R^e_{bc]d} = 0$.

[14.10] İlk olarak "diğer bir deyişle"yi açıklayın; sonra bunu R^d_{abc}'yi tanımlayan yukarıdaki denklemden, $\nabla_{[a}\nabla_b(\xi^d\nabla_{d]}\Phi)$ ifadesini açmak yoluyla türetin. (Diyagramlar yardımcı olabilir.)

[14.11] Bunu R^d_{abc}'yi tanımlayan yukarıdaki denklemden, $\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{d]}\xi^e$ ifadesini iki biçimde açmak yoluyla türetin. (Diyagramlar yine yardımcı olabilir.)

14.5 Jeodeziler, paralelkenarlar ve eğrilik

Kendimize bir paralelkenar oluşturmak için ilk olarak ∇ bağlantısıyla tanımlanmış haldeki *jeodezi* kavramını ele alalım. Jeodeziler bizim için farklı nedenlerden dolayı önemlidir. Onlar Öklitçi geometrinin düz çizgilerinin benzeridir. Üstte ele alınan S^2 küre örneğimizde (Şekiller 14.2–14.4) jeodeziler küre üzerindeki büyük çemberlerdir. Daha genel olarak Öklitçi uzaydaki eğik bir yüzeyle ilgili olarak en kısa uzunluktaki eğriler (yüzey boyunca sıkıca gerilmiş bir sicimle kaplanmış şekildeki) jeodezilerdir. Jeodezilerin Einstein'ın, uzayzamanda serbest düşüş yapan cisimleri açıklayan yolları gösteren genel göreliliğiyle ilgili temel bir öneme sahip olduğunu daha sonra (§17.9) göreceğiz. ∇ bağlantımız bize jeodezi kavramını nasıl sağlar? Temel olarak jeodezi, ∇'yla tanımlanan paralellik uyarınca, "kendisine paralel" devam eden bir γ eğrisidir. Bu gereksinimi tam olarak nasıl ifade edebiliriz? $\boldsymbol{t}$ vektörünün (diğer bir deyişle t^a) γ'ya tüm γ boyunca tanjant olduğunu düşünün. Yönünün γ boyunca kendisine paralel kalması gereksinimi

$$\overset{\nabla}{\underset{t}{}}\boldsymbol{t} \propto \boldsymbol{t}, \text{ diğer bir deyişle } t^a\nabla_a t^b \propto t^b$$

olarak ifade edilebilir[4] ($\propto$ sembolü "orantılıdır" yerine kullanılmak üzere; *bkz.* §12.7). Bu koşul sağlandığında $\boldsymbol{t}$, onu γ boyunca izlediğimizde esneyebilir ya da daralabilir fakat ∇'yla tanımlanan paralellik kavramı uyarınca yönü "aynı şekilde uç vermeye devam eder." Bu "esneme ya da daralma"nın $\boldsymbol{t}$ vektörünün kendisi γ boyunca sabit kalacak şekilde gerçekleşmediğini iddia etmek istersek bu durumda $\boldsymbol{t}$ tanjant vektörünün γ üzerinde *paralel taşındığı*na ilişkin, diğer bir deyişle, $\boldsymbol{t}$ (t^a indis biçimli) vektörü γ'ya γ boyunca *tanjant* olmak üzere, tüm γ boyunca geçerli olan

$$\overset{\nabla}{\underset{t}{}}\boldsymbol{t} = 0, \text{ diğer bir deyişle } t^a\nabla_a t^b = 0$$

daha güçlü koşulu isteriz.

Bu daha güçlü denklem aracılığıyla yalnızca $\boldsymbol{t}$'nin yönü değil fakat "ölçeği" de γ boyunca sabit tutulmuş olur. Bu ne demektir? Belirtilmesi gereken ilk şey (uygun bir şekilde pürüzsüz) bir u koordinatı tarafından parametreleştirilmiş (ille de jeodezi olması gerekmeyen) herhangi bir eğrinin, eğri boyunca kendi $\boldsymbol{t}$ tanjant vektörleriyle ilgili belirli bir ölçekleme seçimiyle ilgili oluşudur. Şöyle ki bu $\boldsymbol{t}$'nin, eğri üzerindeki u'ya göre türev

[4] Açıkçası ∇ yalnızca $\mathcal{M}$'de bulunan eğriler boyunca değil $\mathcal{M}$'de tanımlı alanlarda da etki eder fakat bu denklem işlemci yalnızca eğri boyunca olan yönde türev aldığı için anlamlıdır. Dilersek $\boldsymbol{t}$'nin tanım bölgesini $\mathcal{M}$'nin içine γ'dan dışarı doğru rasgele şekilde pürüzsüzce genişletilmiş olarak düşünebiliriz. Bunun yapıldığı kesin biçim yersizdir çünkü $\boldsymbol{t}$ üzerindeki denklemin geçerliliğini yalnızca γ boyunca ararız.

(d/du) alınması yerine kullanılmasıdır. Bu koşulu alternatif olarak eğri boyunca

$$\boldsymbol{t}(u) = 1$$

ya da

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{t}} u = 1, \text{ diğer bir deyişle } t^a \nabla_a u = 1$$

biçiminde yazabiliriz.[14.12] Daha güçlü seçenek $\boldsymbol{t}$–ölçeklemesi, kendisi için $\overset{\nabla}{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{t} = 0$'ın belirli tipte bir u parametresiyle ilgili olduğu bir γ jeodeziği durumunda γ boyunca bir *afin* parametresi[14.13] olarak bilinir. *Bkz.* Şekil 14.8. Eğriler boyunca uygun bir "uzaklık" kavramına sahip olduğumuzda afin parametremizi genellikle bu uzaklığın ölçüsü olarak seçebiliriz. Yine de afin parametreleri daha geneldir. Örneğin görelilik kuramında bu tür parametrelere *ışık ışınları* için gerek duyduğumuz açığa çıkar, buradaki uygun "uzaklık ölçüsü" yararsızdır çünkü sıfırdır! (*Bkz.* §17.8 ve §18.1.)

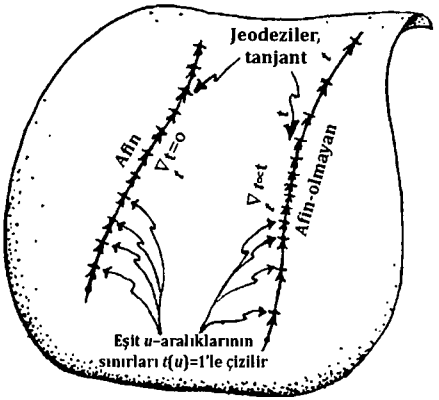
Şimdi jeodezilerden oluşan bir paralelkenar oluşturmaya çalışalım. $\mathcal{M}$'deki p noktasından başlayın ve p'deki ilgili $\boldsymbol{L}$ ve $\boldsymbol{M}$ tanjant vektörleri ve l ve m afin parametreleriyle birlikte p noktasından iki λ ve μ jeodezisi çizin. Pozitif bir ε sayısı seçin ve p'den q noktasına ulaşmak üzere λ boyunca $l = \varepsilon$ afin uzaklığını ve ayrıca p'den r noktasına ulaşmak üzere μ boyunca $m = \varepsilon$ afin uzaklığını ölçüp ayırın; *bkz.* Şekil 14.9a. (Sezgisel olarak jeodezi parçaları pq ve pr'yi küçük bir ε için sırasıyla $\varepsilon\boldsymbol{L}$ ve $\varepsilon\boldsymbol{M}$ "ok uzunluğu"na sahip biçimde düşünebiliriz. Paralelkenarı tamamlamak üzere, q'dan yeni bir μ' jeodezisi boyunca $\boldsymbol{M}$'ye "paralel" bir yönde ayrılmalıyız. Bu "paralel" koşulunu başarmak için $\boldsymbol{M}$'yi p'den q'ya λ boyunca hareket ettirmeliyiz (bu, λ boyunca $\boldsymbol{M}$'nin $\nabla_L M = 0$'ı sağlamasına gerek duyduğumuz anlamına gelir). Şimdi, paralelkenarın son köşesini, q'dan μ' boyunca $m = 1$ afin uzaklığıyla ölçülüp ayrılmış s noktasına yerleştirmeye çalışırız. Bununla birlikte bu son köşeyi alternatif biçimde diğer yoldan ilerleyerek yerleştirmeye çalışabiliriz: r'den λ' boyunca son s' noktasına, λ' jeodezisi r'den μ boyunca p'den r'ye paralel taşımayla taşınmış $\boldsymbol{M}$ yönünde $l = \varepsilon$ afin uzaklığı kadar ilerleyin. Bütünüyle tatmin edici bir paralelkenar için bu son alternatif s ve s' noktalarının aynı nokta ($s = s'$) olmasına gerek duyarız!

Bununla birlikte (örneğin Öklitçi geometri gibi) çok özel durumlar dışında bu iki nokta farklı olacaktır. (§2.1'deki kare oluşturma girişimlerimizi anımsayın!) Bu noktalar, $\varepsilon\boldsymbol{L}$ ve $\varepsilon\boldsymbol{M}$ vektörleri gerekli şekilde "küçük" olarak kabul edilirse, "çok" farklı olmayacaktır. Tam olarak ne kadar fark-

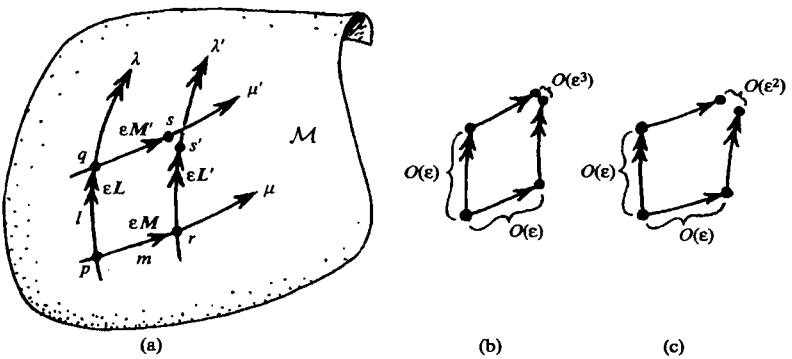
---

[14.12] Tüm bu koşulların eşdeğer olduğunu gösterin.

[14.13] u ve v t'nin γ üzerindeki iki farklı seçimiyle ilgili olarak iki afin parametresiyse, A ve B γ üzerindeki sabitler olmak üzere, $v = Au + b$ olduğunu gösterin.



Şekil 14.8 Bir γ eğrisi boyunca tanımlı herhangi bir u parametresi için γ'ya tanjant olan t vektörlerinin bir alanı, t γ boyunca $\mathrm{d}/\mathrm{d}u$ (eşdeğer olarak $t(u) = 1$ ya da $t^a\nabla_a u = 1$) yerine kullanılmak üzere u'yla ilgilidir. γ bir jeodeziyse, t γ boyunca paralel taşındığında u'ya bir afin parametresi denir, böylece yalnızca $\nabla_t t \propto t$ olmak yerine $\nabla_t t = 0$ olur. Bir afin parametresi ∇ uyarınca γ boyunca "eşit şekilde ayrılmış"tır.



Şekil 14.9 (a) Jeodezilerden oluşan bir paralelkenar yapmaya çalışma. p'deki ilgili L ve M tanjant vektörleri ve l ve m afin parametreleriyle birlikte p noktasından geçen iki λ ve μ jeodezisi alın. q'yu λ boyunca p'den geçen bir $l = \varepsilon$ afin uzaklığı ve r'yi (sabit bir $\varepsilon > 0$ küçük sayısıyla birlikte) μ boyunca p'den geçen bir $m = \varepsilon$ afin uzaklığı olarak kabul edin. pq ve pr jeodezi parçaları sırasıyla εL ve εM "ok uzunlukları"na sahiptir. Paralel kenarı tamamlamak üzere M'yi, λ boyunca p'den q'ya paralel taşıma yoluyla bize, μ' boyunca q'dan s'ye yeni "paralel" $\varepsilon M'$ üzerindeki bir afin uzaklık tarafından genişletilen μ''nden μ'ye komşu bir jeodezi verecek şekilde taşıyın. Benzer şekilde L'yi, μ boyunca p'den r'ye paralel taşıma yoluyla hareket ettirin ve λ' boyunca $m = \varepsilon$ afin uzaklığı q'dan ölçülüp çıkarılmış bir $\varepsilon L'$ paralel oku yoluyla r'den s''ne genişletin. (b) Genellikle $s \neq s$ olur ve paralelkenar tam olarak kapanmakta başarısız olur fakat bu boşluk τ torsiyonu yok olursa yalnızca $O(\varepsilon^3)$ olur. (c) Sıfır olmayan bir τ torsiyonu söz konusuysa bu kendini bir $O(\varepsilon^2)$ terimi olarak gösterecektir.

lı oldukları τ torsiyonuyla ilgilidir. Bunu hakkıyla anlamak için kalkülüs kavramları yolunda şu ana dek sunduğumdan oldukça fazlasına gerek duyacağız. Temel nokta, Öklitçi geometriden ilgili sapmaları küçük ε niceliğimizin seçimine bağlı bir ölçekte ortaya çıkıyor olarak düşünebilmemizdir. Düzlükten sapma ölçülerinin gerçek boyutlarıyla değil fakat ε git gide

küçülürken sıfıra gitme eğilimlerinin oranıyla ilgilenmekteyiz. Bu nedenle bu niceliklerin kesin değeriyle özel olarak ilgili değiliz fakat bu tür bir $\boldsymbol{Q}$ niceliğinin ε, ya da ε^2 ya da ε^3 kadar ya da belki ε'un belirli başka bir fonksiyonu kadar hızlı yaklaşıp yaklaşmadığını öğrenmek isteriz. (Bu türdeki bir şeyi §13.6'da zaten görmüştük.) Burada "kadar hızlı", bir koordinat sisteminde ifade edildiğinde $\boldsymbol{Q}$'nun bileşenlerinin mutlak değerinin pozitif bir sabitle ε ya da ε^2 ya da ε^3'ün ya da durum gerektirdiğinde ε'un belirli başka bir fonksiyonuyla çarpımından küçük olması anlamına gelir. (Bunun sonucu olarak "kadar hızlı", "–den hızlı"yı da içerir.) Bu durumlarda $\boldsymbol{Q}$ sırasıyla ε, ε^2 ya da ε^3, vb *düzeninde*dir deriz ve bunu $O(\varepsilon)$ ya da $O(\varepsilon^2)$ ya da $O(\varepsilon^3)$, vb şeklinde yazarız. Bu, "küçüklük düzeni" kavramının hassas ve güçlü bir kavram oluşunun nedenlerinden biri olarak koordinatların belirli seçiminden bağımsızdır. Buradaki açıklamam çok kısa oldu, girişken olmayan ilgili okuyucuyu bu kayda değer ve her yerde bulunan konuyla ilgili yazına sevk ediyorum.[5] Sezgisel olarak yalnızca $O(\varepsilon^3)$'ün, kendisi de $O(\varepsilon)$'ten çok küçük olan $O(\varepsilon^2)$'den oldukça fazla küçük olmasını aklımızda tutmaya gerek duyarız.

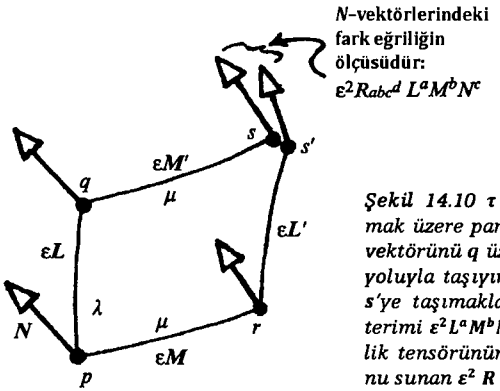
Giriştiğimiz paralelkenara geri dönelim. p'deki orijinal $\varepsilon\boldsymbol{L}$ ve $\varepsilon\boldsymbol{M}$ vektörlerinin ikisi de $O(\varepsilon)$'dur, böylece pq ve pr kenarlarının ikisi de $O(\varepsilon)$'dur ve böylece qs ve rs''nde öyledir. ss' "boşluğu"nun ne kadar büyük olmasını bekleriz? Yanıt şudur ki, bağlantı torsiyon serbestse, bu durumda ss' her zaman $O(\varepsilon^3)$'tür. *Bkz.* Şekil 14.9b. Aslında bu özellik torsiyon serbest durumu tümüyle niteler. Sıfır olmayan bir $\boldsymbol{\tau}$ torsiyonu söz konusu olduğunda bu kendisini bir $O(\varepsilon^2)$ terimi olarak (bir) paralelkenarda gösterecektir. *Bkz.* Şekil 14.9c.[14.14] Bazen torsiyonun yok olması, ("ε^2 düzenine kapalı"yı ifade etmek üzere) paralelkenarların (görece hafif biçimde) kapanmasının koşuludur deriz.

Şimdi torsiyonun yok olduğunu varsayın. Paralelkenarımızı eğriliği yorumlamak üzere kullanabilir miyiz? Aslında yapabiliriz. p'de üçüncü bir $\boldsymbol{N}$ vektörüne sahip olduğumuzu düşünelim. Bunu paralelkenarımız etrafında q üzerinden p'den s'ye paralel taşıma yoluyla taşıyalım ve bu durumu vektörü r üzerinden p'den s''ne taşımakla karşılaştıralım. (Bu karşılaştırma torsiyon yok olduğunda ε^2 düzeninde anlamlıdır çünkü böylece s ve s' arasındaki boşluk $O(\varepsilon^3)$ olur ve göz ardı edilebilir. Torsiyon yok olmadığında ek torsiyon terimleriyle ilgili kaygılanmalıyız; *bkz.* alıştırma [14.7].) pqs taşıması ve prs' taşımasının sonuçları arasındaki farka ilişkin yanıtı

$$\varepsilon^2 L^a M^b N^c R^d_{abc}$$

[5] *Örn. bkz.* Nayfeh, 1993; Simmonds ve Mann, 1998.

[14.14] Bu terimi bulun.

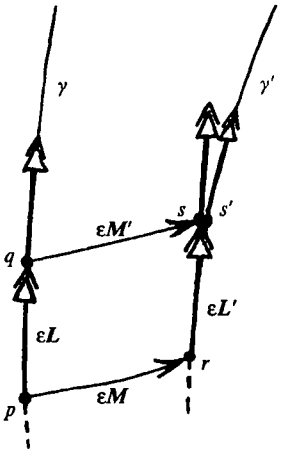


*Şekil 14.10 $\tau = 0$ olduğunda eğriliği yorumlamak üzere paralelkenarı kullanın. Üçüncü bir **N** vektörünü **q** üzerinden p'den s'ye paralel taşıma yoluyla taşıyın ve bunu, onu r üzerinden p'den s'ye taşımakla karşılaştırın. Farkı ölçen $O(\varepsilon^2)$ terimi $\varepsilon^2 L^a M^b N^c R^d_{abc}$'dir, diğer bir deyişle **R** eğrilik tensörünün dolaysız geometrik bir yorumunu sunan ε^2 **R** (**L**, **M**, **N**).*

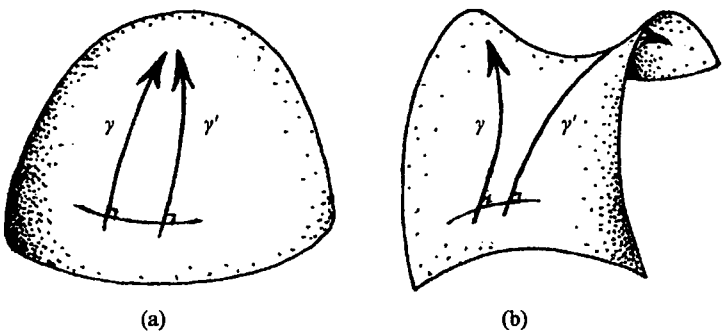
olarak buluruz. Bu bize ***R*** eğrilik tensörünün oldukça dolaysız geometrik bir yorumunu sunar; *bkz.* Şekil 14.10. (Bu yorumlamanın eşdeğer bir versiyonu, ***N***'yi tüm paralelkenar etrafında, paralelkenarın köşelerindeki $O(\varepsilon^3)$ çelişkilerini göz ardı etmek üzere, aynı *p* noktasından başlayıp orada biten bir taşıma işini düşünürsek elde edilir. ***N***'nin başlangıç ve bitiş değerleri arasındaki fark yine yukarıdaki $\varepsilon^2 L^a M^b N^c R^d_{abc}$ niceliği olur.)

R^d_{abc}'nin *ab*'deki ters simetrisini anımsayın. Bu, üstteki ifadenin, $L^a M^b$'nin yalnızca ters simetrik $L^{[a}M^{b]}$ kısmına, diğer bir deyişle $\boldsymbol{L}\wedge\boldsymbol{M}$ kama çarpımına duyarlı olması anlamına gelir; *bkz.* §11.6. Bu nedenle o, *p*'deki ilgili ***L*** ve ***M*** tarafından kapsanan bir 2–düzlem elemanıdır. $\mathcal{M}$'nin kendisinin bir 2–yüzey olduğu durumda (2–yüzey elemanının *p*'de $\mathcal{M}$'ye tanjant olması gerektiğinden) yalnızca bir tek bağımsız eğrilik elemanı mevcuttur. Bu bileşen bize §2.6'da bahsettiğim, küre, Öklitçi düzlem ve hiperbolik uzayın yerel geometrilerini ayırt etmeye hizmet eden bir 2–yüzeyli *Gauss eğriliği* sunar. Yüksek boyutlarda işler, $\boldsymbol{L}\wedge\boldsymbol{M}$ iki düzlem elemanının olası farklı seçimlerinden kaynaklanan eğriliğin daha çok bileşeni olduğu için daha karışıktır.

Özel öneme sahip eğriliğin bu geometrik yorumunun belirli bir versiyonu mevcuttur. Bu, ***N*** vektörü ***L***'yle aynı olacak biçimde seçilirse ortaya çıkar. Böylece paralelkenarımızın *pq* ve *rs'* kenarlarını sırasıyla yakındaki iki γ ve γ' jeodezisinin parçaları olarak ve ***L*** vektörünü bu jeodezilere tanjant olarak düşünebiliriz. *p*'deki $\varepsilon\boldsymbol{M}$ vektörü *p* noktasındaki γ''nden uzaklaşan γ'nın yer değişikliğini ölçer. ***M*** bazen *bağlayıcı vektör* olarak adlandırılır. γ ve γ' jeodezileri yola birbirlerine (bu bağlayıcı vektörün iki "ucu"nda karşılaştırıldığında, diğer bir deyişle *pr* boyunca) paralel olarak başlar. ***L*** (= ***N***) vektörünü ikinci *prs'* rotası boyunca paralel taşımayla *s''*ne taşımak onu *s'* noktasında γ' jeodezisine tanjant olarak bırakır. Bu-



Şekil 14.11 Jeodezik sapma: Şekil 14.10'un paralelkenarında $N = L$ seçin. pq ve rs' kenarları iki komşu (γ, λ olmak ve γ', λ' olmak üzere) γ ve γ' jeodezisinin, paralel-gelişen L ve L' tanjant vektörleriyle birlikte, p'deki bağlayıcı vektör M olmak üzere, sırasıyla p ve r'den başlayan parçalarıdır. γ ve γ' arasındaki jeodezik sapma L'nin prs' ve pqs rotaları boyunca paralel yer değiştirmelerinin sonuçları arasındaki farkla ölçülür, bu da temelde $\varepsilon^2 L^a M^b N^c R^d_{abc}$'dir.



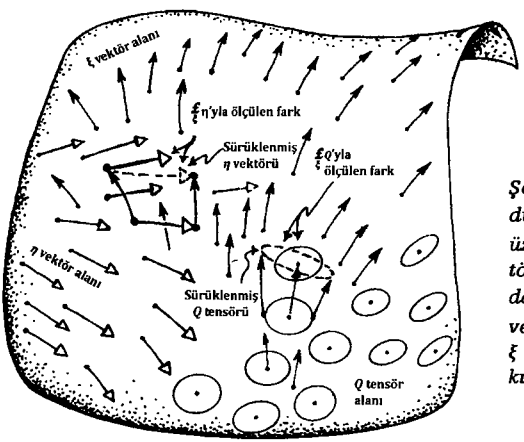
Şekil 14.12 $\mathcal{M}$ bir 2–yüzey olduğunda jeodezik sapma; (a) γ ve γ' jeodezileri birbirlerine doğru büküldüğünde pozitif (Gauss) eğriliğinde ve (b) dışa doğru büküldüğünde negatif eğriliktedir.

nunla birlikte L'yi ilk rota pqs boyunca paralel taşımayla s'ye getirirsek böylece γ'nın yakınındaki başka bir γ'''ne ilişkin, γ'' hafifçe "sonraki" bir q noktasından γ'ya paralel olarak yola çıkmak üzere, başlangıç vektörüne varırız. L'nin bu iki versiyonu (biri s''nde ve diğeri s'de) arasındaki $O(\varepsilon^2)$ farkı, diğer bir deyişle $\varepsilon^2 L^a M^b N^c R^d_{abc}$, γ''nden uzaklaşan γ'nın "göreli ivmesini" ya da "jeodezik sapma"sını ölçer. *Bkz.* Şekil 14.11. (Bu jeodezik sapma matematiksel olarak *Jacobi denklemi* olarak bilinen şey tarafından açıklanır.) Şekil 14.12'de bu Jeodezik sapmayı, $\mathcal{M}$'nin sırasıyla pozitif ve negatif (Gauss) eğriliğindeki birer 2–yüzey olduğu durumda gösterdim. Eğrilik pozitif olduğunda paralel olarak başlayan komşu jeodeziler birbirlerine doğru bükülür; negatif olduğunda dışa doğru bükülür. Bunun Einstein'ın genel göreliliğiyle ilgili derin önemini §17.5 ve §19.6'da göreceğiz.

14.6 Lie türevi

Bir ∇ bağlantısıyla ilgili paralelliğin yola bağlılığına ilişkin yukarıdaki tartışmada şeyleri fizikçinin indis notasyonunu kullanarak gösteriyordum. Matematikçinin notasyonunda bu belirli ifadelerin dolaysız benzerleri kolayca yazılmaz. Bunun yerine hafifçe farklı bir rota izlemek doğal hale gelir. (Notasyondaki farklılıkların bir konuyu bazen kavramsal olarak nasıl farklı yönlere sürüklediğini görmek dikkat çekicidir!) Bu rota, §13.6'da aynı isimle sunulandan daha genel bir işlem olan *Lie parantezi* olarak bilinen başka bir türev alma işlemini içerir. Sonuçta bu *Lie türevi* olarak bilinen önemli bir kavramla ilgili belirli bir örnektir. Bu işlemler aslında bağlantıya ilişkin herhangi belirli bir seçimden bağımsızdır (ve böylece pürüzsüz bir genel yapısız manifoldda geçerli olur) ve Lie türevi ile Lie parantezini, bu bölümün sonunda onların eğrilik ve torsiyonla ilişkilerine dönmeden önce genel olarak tartışmak yerinde olacaktır.

Bununla birlikte bir Lie türevini bir $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde tanımlamak için bir ξ vektör alanının $\mathcal{M}$ üzerinde önceden atanmış olmasına gerek duyarız. Öyleyse $\underset{\xi}{\pounds}$ şeklinde yazılan Lie türevi ξ vektör alanıyla ilgili olarak kabul edilen bir işlemdir. $\underset{\xi}{\pounds}\boldsymbol{Q}$ türevi bir $\boldsymbol{Q}$ niceliğinin, o ξ vektör alanı tarafından basit biçimde "sürüklenmiş olsa" ne olacağıyla karşılaştırılarak nasıl değiştiğini ölçer. *Bkz.* Şekil 14.13. Genellikle tensörler (ve hatta tensörlerden farklı bazı kavramlar, örneğin bağlantılar) için geçerlidir. Başlangıç olarak yalnızca bir $\boldsymbol{\eta}$ $(= \boldsymbol{Q})$ *vektör* alanının başka bir ξ vektör alanına göre türevini ele alırız. Aslında bunun §13.6'da "Lie parantezi" olarak değindiğimiz işlemle daha genel bir bağlamda aynı olduğunu görürüz. Bunun bir $\boldsymbol{Q}$ tensör alanına nasıl genelleneceğini daha sonra göreceğiz.



Şekil 14.13 Genel bir $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı $\underset{\xi}{\pounds}$ Lie türevi $\mathcal{M}$ üzerinde verili bir pürüzsüz ξ vektör alanına göre alınır. Bu durumda $\underset{\xi}{\pounds}\boldsymbol{Q}$ bir $\boldsymbol{Q}$ niceliğinin (örn. bir $\boldsymbol{\eta}$ vektör alanı ya da $\boldsymbol{Q}$ tensör alanı), ξ tarafından "sürüklenen" niceliğe kıyasla nasıl değiştiğini ölçer.

§12.3'ten, bir vektör alanının kendisinin *skaler alanlar* $\Phi, \Psi, \ldots$ üzerinde, (i) $\xi(\Phi + \Psi) = \xi(\Phi) + \xi(\Psi)$, (ii) $\xi(\Phi\Psi) = \Psi\xi(\Phi) + \Phi\xi(\Psi)$ ve (iii) k sabitse $\xi(k) = 0$ yasalarını sağlayarak etkiyen türevsel bir işlemci olarak yorumlanabilir.

$$\omega(\Phi) = \xi(\eta(\Phi)) - \eta(\xi(\Phi))$$

ifadesiyle tanımlanan ω işlemcisinin bu aynı üç yasayı, ξ ve η ve böylece ω'nın da ayrıca bir vektör alanı olmaları zorunluluğu koşuluyla, sağladığını görmek[14.15] dolaysız bir konudur. ξ ve η işlemlerine ait üstteki *çevirici* sıklıkla *Lie parantezi* notasyonunda (§13.6'daki gibi) yazılır:

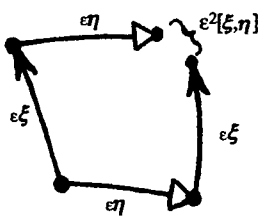
$$\omega = \xi\eta - \eta\zeta = [\xi, \eta].$$

İki vektör alanı ξ ve η'nin arasındaki işlemciye ilişkin geometrik anlam Şekil 14.14'te gösteriliyor. Alternatif biçimde (her biri $O(\varepsilon)$ olarak kabul edilen) ξ ve η'den yapılmış bir "oklar" dörtgeni oluşturmaya çalışırız ve ω'nın ($O(\varepsilon^2)$ düzenindeki) "boşluğu" ölçtüğünü buluruz. Değişmenin

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi], \qquad [\xi + \eta, \zeta] = [\xi, \zeta] + [\eta, \zeta]$$
$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \zeta]] + [\zeta, [\xi, \eta] = 0$$

bağıntılarını, §13.6'da gördüğümüz üzere bir Lie grubunun sonsuz küçük elemanlarına ait çeviricinin yaptığı gibi sağladığını doğrulayabiliriz.[14.16]

Değişme özelliğimiz üstte tanımlandığı üzere, bir Lie grubunun sonsuz küçük elemanlarıyla ilgili cebirle nasıl ilişkilenir? Bunu açıklamak üzere kısaca konu dışına çıkayım. Grubu, noktaları Lie grubumuzun elemanları olan (*grup* manifoldu olarak adlandırılan) bir $\mathcal{G}$ manifoldu olarak düşünürüz. Daha genel olarak elemanların üzerine etki ettiği herhangi bir $\mathcal{H}$ manifoldunu pürüzsüz dönüşümler olarak (örneğin S^2 küresi gibi; döndürme grubu $\mathcal{G} = SO(3)$ durumunda, *bkz.* Şekil 13.2) düşünebiliriz. Yine de şimdilik öncelikli olarak, daha genel bir $\mathcal{H}$ durumu yerine, tüm $\mathcal{G}$ grubu nun Lie



Şekil 14.14 İki vektör alanı ξ ve η arasındaki $[\xi, n](= {}^{\varepsilon}_{\xi}\eta)$ Lie parantezi, alternatif biçimde $\varepsilon\xi$ ve $\varepsilon\eta$'dan yapılan $O(\varepsilon)$ "okları"nın tamamlanmamış bir dörtgenindeki $O(\varepsilon^2)$ boşluğunu ölçer.

[14.15] Gösterin.

[14.16] Yapın.

cebirinin yapısıyla nasıl ilişkilendiğiyle ilgili olduğumuzdan, $\mathcal{G}$ grup manifolduyla ilgilenmekteyiz. Sonsuz küçük grup elemanları $\mathcal{G}$ üzerindeki (ya da aslında $\mathcal{H}$) belirli vektör alanları olarak resmedilmelidir. Şöyle ki, $\mathcal{G}$'yi, $\mathcal{G}$ üzerindeki ilgili vektör alanı ξ boyunca sonsuz küçük biçimde "hareket ettirmeyi", grubun her bir elemanını ξ'yle gösterilen sonsuz küçük elemanlarla ön–çarpmaya karşılık gelen dönüşümü ifade etmek üzere düşünürüz. *Bkz.* Şekil 14.15a. Küçük bir pozitif ε niceliği seçerek, I özdeşlik - grup elemanı sıfır harekete karşılık gelmek üzere, $\varepsilon\xi$'yi $\mathcal{G}$'nin ξ vektör alanı boyunca bir $O(\varepsilon)$ hareketi olarak düşünebiliriz. Bu tür iki küçük grup hareketinin $\varepsilon\xi$ ve $\varepsilon\eta$ çarpımı $O(\varepsilon)$'a, ikisinin $\varepsilon\xi + \varepsilon\eta$ toplamınca verilir, böylece $\varepsilon\xi$ ve $\varepsilon\eta$'yi gösteren "oklar" paralelkenar yasası uyarınca toplanır (Şekil 14.15b). Bu bize fakat grubun yapısı hakkında (aslında gruba ait I özdeşlik elemanındaki tanjant uzayının toplamsal yapısını henüz ortaya koyduğumuzdan yalnızca *boyutu* hakkında) çok az bilgi verir. Grup yapısını elde etmek üzere $O(\varepsilon^2)$'ye gitmemiz gerekir ve bu §13.6'daki gibi, $\xi\eta - \eta\xi = [\xi, \eta]$ *çeviricisine* bakarak yapılır. Şu halde $\varepsilon^2[\xi, \eta]$, başlangıç kenarları I orijininde $\varepsilon\xi$ ve $\varepsilon\eta$ olan "paralelkenar"daki $O(\varepsilon^2)$ boşluğuna karşılık gelir. İlgili "paralellik" kavramı grup eyleminden, torsiyona esasen herhangi bir eğrilik değil ama bağlantı veren gerekli "paralel taşıma" kavramını sunarak gelir.[14.17] *Bkz.* Şekil 14.15c.

§13.6'da belirttiğimiz üzere, bu vektör alanlarına ilişkin Lie cebiri grubun tüm (yerel) yapısını sağlar. Olağan bir *sonlu* (diğer bir deyişle sonsuz küçük olmayan) x grup elemanını bir ξ Lie cebiri elemanı yoluyla elde etme işlemi burada belirtilebilir. Buna *üs alma* denir (*krş.* §5.3, §13.4):

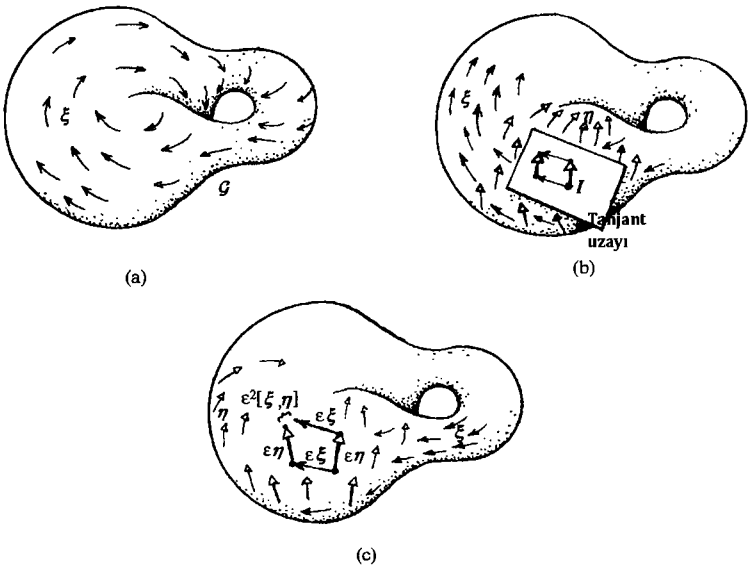
$$x = e^{\xi} = I + \xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3 + \cdots.$$

Burada ξ^2 "ξ'yi iki kez uygulamaya ilişkin ikinci türev işlemcisi", vb anlamına gelir (ve I birim işlemcidir). Bu temel olarak, §6.4'te açıklandığı üzere Taylor teoreminin bir biçimidir.[14.18] Sonlu iki grup elemanı x ve y'nin çarpımı böylece $e^{\xi}e^{\eta}$ ifadesinden elde edilir. Bu, $e^{\xi+\eta}$'dan (§5.3'le karşılaştırın), tümüyle ξ ve η'lı şekildeki Lie cebiri ifadesinden[6] oluşturulan bir ifadeyle farklılaşır.

[14.17] Niçin torsiyon vaken hiç eğrilik bulunmadığını açıklamaya çalışın.

[14.18] a sabit olduğunda neden $e^{a\,d/dy}f(y) = f(y+a)$ olduğunu açıklayın.

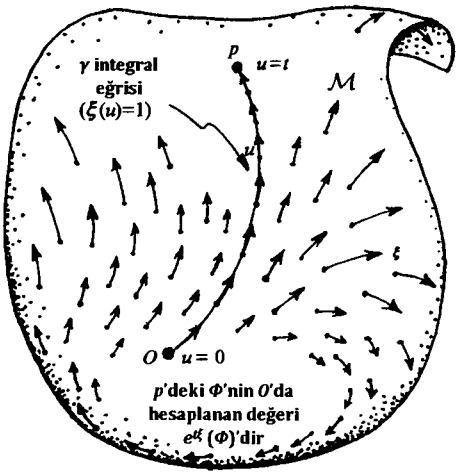
[6] Çeviricilere ilişkin Lie cebirinin açık rolünü, ilk birkaç terimi üç nokta ξ ve η katlı çeviricileri, diğer bir deyişle ξ ve η tarafından oluşturulan bir Lie cebiri elemanı şeklinde devam eden ifadeler yerine kullanılmak üzere $e^{\xi}e^{\eta} = e^{\xi+\eta+\frac{1}{2}[\xi,\eta]+\frac{1}{12}([\xi,[\xi,\eta]]+[[\xi,\eta],\eta]+\cdots}$ ifadesinde açık biçimde verilen *Baker–Campbell–Hausdorff* denkleminde görürüz.



Şekil 14.15 Sürekli $\mathcal{G}$ grup manifoldunda geometrik olarak yorumlanmış Lie cebiri işlemleri. (a) $\mathcal{G}$'ya ait her bir elemanın sonsuz küçük bir ξ elemanıyla (Lie cebiri elemanı) önçarpımı $\mathcal{G}$'ye ilişkin sonsuz küçük bir yer değiştirme sonucunu, diğer bir deyişle $\mathcal{G}$ üzerindeki bir ξ vektör alanını, verir. (b) Birince derecede, bu tür sonsuz küçük ξ ve η hereketinin çarpımı, yalnızca (I'daki) tanjant uzayının yapısını yansıtarak, $\xi + \eta$'yı verir. (c) I'daki alternatif kenarlar $\varepsilon\xi$ ve $\varepsilon\eta$'ya sahip "paralelkenar"daki $O(\varepsilon^2)$ boşluğunu sunan $\varepsilon^2[\xi,\eta]$ yerel grup yapısı ikinci derecede görünür.

Üs alma işleminin bir versiyonu e^{ξ}'nin ($\mathcal{M}$ ve ξ analitik, diğer bir deyişle C^{ω}–pürüzsüz varsayılmak üzere, *bkz.* §6.4) genel bir $\mathcal{M}$ manifoldundaki ξ vektör alanında da geçerli oluşu belirtilebilir. §12.3'ten (ve Şekil 10.6) seçili küçük ε'la birlikte $\varepsilon\xi(\Phi)$'nin, $\varepsilon\xi$'yi gösteren "ok"un sonundan ucuna skaler bir Φ'ye ilişkin $O(\varepsilon)$ artışını ölçtüğünü anımsayın. Daha tam biçimde, $e^{t\xi}(\Phi)$ niceliği bir O başlangıç noktasından $u = t$ parametre değeriyle, u parametre değeri $\xi(u) = 1$ şeklinde ölçeklenmek üzere, verilen bir son noktaya "ξ–okları" boyunca gittiğimizde ulaşılan Φ *toplam* değerini ölçer (*krş.* §14.5 ve Şekil 14.8). $e^{t\xi}(\Phi)$'yle ilgili üslü seri ifadesindeki tüm türevler (diğer bir deyişle $\xi^r(\Phi)$ durumundaki r'inci türev) O'da (yakınsaklık varsayılarak) değerlendirilmelidir. "Oklar boyunca gitmek", tanjant vektörleri ξ–vektörleri olan eğri anlamındaki ξ'nin "integral eğrisi" boyunca gitmek anlamına gelir. *Bkz.* Şekil 14.16.[7]

[7] Biraz daha kesin olarak bu eğri üzerinde sabit $x^2, x^3, \ldots, x^n$ koordinatlarını $x^1 = t$'yle birlikte seçebiliriz; böylece eğri boyunca $\xi = \partial/\partial t$ olur. Yukarıdaki reçetenin bize kısaca $e^{t\xi}(\Phi)$ verdiğini söyleyen Taylor teoremidir, §6.4.



Şekil 14.16 $\mathcal{M}$ 'deki bir ξ vektör alanının integral eğrisi "ξ–oklarını izleyen", diğer bir deyişle tanjant vektörleri ξ–vektörleri olan, $\xi(u) = 1$ anlamındaki ilgili u parametresine sahip bir γ eğrisidir (krş. §14.5 ve Şekil 14.8). $\mathcal{M}$ ve ξ'nin skaler alan Φ gibi analitik (C^ω) olduğunu ve γ'nın bir O ($u = 0$) taban noktasından başka bir p ($u = t$) noktasına gerildiğini varsayın. Böylece (yakınsaklık varsayarak) Φ'nin p'deki değeri O'da hesaplanan $e^{t\xi}(\Phi)$ niceliğiyle, $e^{t\xi} = 1 + t\xi + \frac{1}{2}t^2\xi^2 + t^3\frac{1}{6}\xi^3 + \cdots$ olmak ve ξ^r γ boyunca O'daki r'inci türev d^r/du^r yerine kullanılmak üzere, verilir.

Şu halde, Lie *türevi*nin tanımı nedir? İlk olarak Lie parantezini basitçe η vektör alanı üzerine etkiyen bir (ξ'ye bağlı) $\underset{\xi}{\pounds}$ işlemi olarak yeniden yazarız:

$$\underset{\xi}{\pounds}\eta = [\xi, \eta].$$

Bu bir $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$–tensörü η'nın $\underset{\xi}{\pounds}$ Lie türevine (ξ'ye göre) ilişkin tanımıyla ilgilidir. Bunu verili bir torsiyon–serbest ∇ bağlantısı biçiminde yazmak isteriz. Gerekli

$$\underset{\xi}{\pounds}\eta = \underset{\xi}{\nabla}\eta - \underset{\xi}{\nabla}\xi, \text{ diğer bir deyişle } \left(\underset{\xi}{\pounds}\eta\right)^a = \xi^a\nabla_a\eta^b - \eta^a\nabla_a\xi^b$$

ifadesi (diyagram biçimiyle ilgili olarak *bkz.* Şekil 14.17a) $\xi(\Phi) = \xi^a\nabla_a\Phi$, vb kullanarak dolaysızca elde edilebilir.[14.19], [14.20] Genel bir tensöre ilişkin Lie türevini elde etmek için $\underset{\xi}{\pounds}$'nin, bir $\underset{\xi}{\nabla}$ bağlantısınınkilere benzeyen kuralları sağlaması kuralını (ξ'de doğrusallık yokluğu dışında) devreye sokarız. Bunlar; bir Φ skalerine ilişkin $\underset{\xi}{\pounds}\Phi = \xi(\Phi)$, aynı değerlikli T ve U tensörlerine ilişkin $\underset{\xi}{\pounds}(T + U) = \underset{\xi}{\pounds}T + \underset{\xi}{\pounds}U$, her bir terimdeki daralma düzenlemesi aynı olmak üzere $\underset{\xi}{\pounds}(T \bullet U) = \left(\underset{\xi}{\pounds}T\right) \bullet U + T \bullet \underset{\xi}{\pounds}U$'dur. Sonuç olarak herhangi bir tensör üzerindeki $\underset{\xi}{\pounds}$ eylemi bunları ve $\underset{\xi}{\pounds}\eta = [\xi, \eta]$'yı eşsiz biçimde izler.[8]

[14.19] Bu denklemi $\underset{\xi}{\pounds}\eta$ için türetin.

[14.20] Torsiyon alıştırma [14.18]'in denklemini nasıl değiştirir?

[8] Skaler bir Φ niceliğinin değerini sonlu bir uzaklıkta elde eden ξ'ye ilişkin üs almaya, $e^{t\xi}$, benzer şekilde sonlu bir uzaklıkta "sürüklenmiş" bir karşılaştırma noktasına karşı ölçülmek üzere bir Q tensörü elde etmek için ξ yerine ilgili bir $\underset{\xi}{\pounds}$ ifadesi mevcuttur.

Özellikle bir α kovektörü ($\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$–değerlikli) için ($\nabla$ torsiyon serbest olmak üzere)

$$\overset{\pounds}{\xi}\boldsymbol{\alpha} = \overset{\nabla}{\xi}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\bullet(\nabla\xi),\ \text{diğer bir deyişle}\ (\overset{\pounds}{\xi}\alpha)_a = \xi^b\nabla_b\alpha_a + \alpha_b\nabla_a\xi^b$$

olur; *bkz.* Şekil 14.17b. Diyelim ki $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$değerlikli bir $\boldsymbol{Q}$ tensörüyle ilgili böylece

$$\overset{\nabla}{\xi}Q^c_{ab} = \xi^u\nabla_u Q^c_{ab} + Q^c_{ub}\nabla_a\xi^u + Q^c_{au}\nabla_b\xi^u - Q^u_{ab}\nabla_u\xi^c.$$

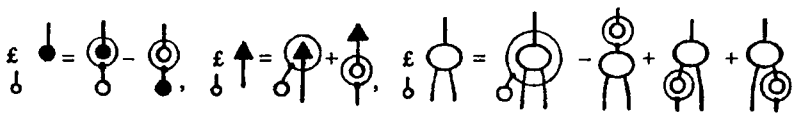
ifadesine sahip oluruz (Şekil 14.17c)[14.21]

ξ ve üzerine etki ettiği bir $\boldsymbol{Q}$ (tensör alanı) niceliğinin her ikisine ilişkin bir fonksiyon olarak ele alınan Lie türevinin bağlantıdan *bağımsız* olduğunu, diğer bir deyişle hangi torsiyon serbest ∇_a işlemcisini seçersek seçelim aynı olduğunu belirtelim. (Bu sonuç, $\overset{\pounds}{\xi}$'nin eşsiz biçimde "d" gradyan işlemcisiyle tanımlanmasını izleyen bir sonuçtur.) Özelde, ∇_a yerine (seçeceğimiz herhangi bir yerel koordinat sisteminde) koordinat türev işlemcisi $\partial/\partial x^a$'yı kullanabiliriz ve aynı yanıtla karşılaşırız. Torsiyonla bir bağlantıya sahip olsak bile onu, torsiyon serbest olup, verili bağlantıdan eşsiz biçimde, bu bağlantının torsiyonunu ilkinden "çıkararak" elde edilmek şeklinde tanımlanan ikinci bir bağlantı biçiminde ifade ederek hâlâ kullanabiliriz.[14.22]

Lie türevi bu bağlantı bağımsız özelliği,

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{\alpha})_{\mathrm{ab\ldots d}} = \nabla_{[a}\alpha_{b\ldots d]},$$

$\alpha_{b\ldots d}$ indis ifadeli herhangi p–biçimli bir $\boldsymbol{\alpha}$ yoluyla dışsal türevle (*bkz.* §12.6) paylaşır; *bkz.* Şekil 14.18. Bu, §12.6'daki ifadeyle, orada *koordinat bağlantısı* $\partial/\partial x^a$'nın açık biçimde kullanılması dışında aynı ifadedir.



(a) (b) (c)

Şekil 14.17 Lie türevi diyagramları. (a) Bir $\boldsymbol{\eta}$ vektörü için: $\left(\overset{\pounds}{\xi}\boldsymbol{\eta}\right)^a = \xi^a\nabla_a\eta^b - \eta^a\nabla_a\xi^b$; (b) bir $\boldsymbol{\alpha}$ kovektörü için: $(\overset{\pounds}{\xi}\boldsymbol{\alpha})_a = \xi^b\nabla_b\alpha_a + \alpha_b\nabla_a\xi^b$; ve ($\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$–değerli) bir $\boldsymbol{Q}$ tensörü için: $\overset{\nabla}{\xi}Q^c_{ab} = \xi^u\nabla_u Q^c_{ab} + Q^c_{ub}\nabla_a\xi^u + Q^c_{au}\nabla_b\xi^u - Q^u_{ab}\nabla_u\xi^c$.

[14.21] Üstteki kovektör denklemini doğrulayarak eşsizliği oluşturun ve genel bir tensöre ilişkin Lie türevini açık biçimde verin.

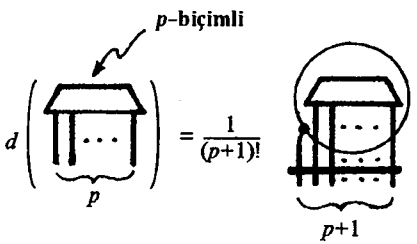
[14.22] Bu ikinci bağlantının nasıl bulunduğunu, bağlantılar arasındaki "Γ" farkını alt iki indisinde ters simetrik olacak biçimde alarak gösterin.

Üstteki ifadenin aslında torsiyon serbest bağlantıya ilişkin seçimden bağımsız olduğu zaten biliniyordu.[14.23] Dahası $d^2\alpha = 0$ kilit özelliği hemen bu ifade sonucunda gelir.[14.24] Bu anlamda bağlantı bağımsız belirli daha başka özel ifadeler de ayrıca mevcuttur.[9]

En sonunda, $\mathcal{M}$ manifoldumuz üzerindeki ∇ bağlantılı eğiklik sorununa döndüğümüzde eğriliğin tanımı için matematikçinin notasyonundaki Lie parantezine gereksinimimiz olduğunu görürüz; $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ $L^a M^b N^c R^d_{abc}$ anlamına gelmek üzere

$$\left(\nabla_{\boldsymbol{L}}\nabla_{\boldsymbol{M}} - \nabla_{\boldsymbol{M}}\nabla_{\boldsymbol{L}} - \nabla_{[\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}]}\right)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$$

olur.[14.25] Ek bir çevirici terimin dahil olması bu notasyonun bir dezavantajı olarak kabul edilirken (fizikçinin notasyonunda ek bir terime gerek duyan torsiyonun aksine) artık torsiyona otomatik olarak izin verilen dengeleyici bir avantaj mevcuttur. Çevirici terimin geometrik önemini anımsayın (Şekil 14.14). O, $\boldsymbol{L}$ ve $\boldsymbol{M}$ vektör alanlarından yapılmış $O(\varepsilon)$ dörtgenindeki bir $O(\varepsilon^2)$ "boşluğu"na izin verir. Aslında şimdi etrafında $\boldsymbol{N}$ vektörünü taşıdığımız döngünün (daha önce gereken düzende) bir "paralelkenar" olarak düşünülmesinin gerekmemesine, yalnızca (eğri çizgisel) bir dörtgen olarak düşünülebileceğine ilişkin ek bir avantaj mevcuttur. *Bkz.* Şekil 14.19. $[\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}] = 0$ olursa bu durumda dörtgen ($O(\varepsilon^2)$ düzeninde) kapanır.



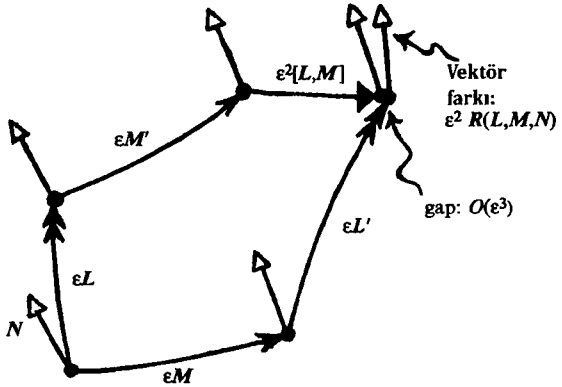
Şekil 14.18 Bir $\boldsymbol{p}$–biçimlinin $\mathbf{d}(\alpha)_{\mathbf{ab...d}} = \nabla_{[a}\alpha_{b...d]}$ dış türevine ilişkin diyagram.

[14.23] Bunu oluşturun ve bir τ torsiyon tensörünün varlığının ifadeyi nasıl değiştirdiğini gösterin.

[14.24] Bunu gösterin.

[9] *Bkz.* Schouten, 1954; Penrose and Rindler, 1984, s. 202.

[14.25] Fizikçinin önceki ifadesiyle (torsiyon yok olursa) denkliğini ortaya koyun.



Şekil 14.19 "Matematikçinin notasyonu" $\left(\underset{L}{\nabla} M - \underset{M}{\nabla} L - \underset{[M,L]}{\nabla}\right) N = R(L,M,N)$'deki bir N vektörünün $\varepsilon L, \varepsilon M, \varepsilon L', \varepsilon M'$ kenarlarına sahip (tamamlanmamış) bir "dörtgen" etrafındaki paralel taşımasındaki $O(\varepsilon^2)$ uyumsuzluktan kaynaklanan eğrilik. Lie parantezi katkısı, $\varepsilon^2[L,M]$, $O(\varepsilon^2)$ boşluğunu $O(\varepsilon^3)$ düzeninde doldurur. ($R(L,M,N)$ vektörünün indis biçimi $L^a M^b N^c R^d_{abc}$'dir.)

14.7 Bir metriğin sizin için yapabileceği şey

Bu noktaya kadar ∇ bağlantısının manifoldumuz $\mathcal{M}$'ye basitçe *atanmış* olduğunu göz önünde bulunduruyorduk. Bu durum $\mathcal{M}$'ye belirli tipte bir yapı sağlar. Bununla birlikte bir bağlantıyı daha çok, $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlı bir *metrik*ten kaynaklanan ikincil bir yapı olarak düşünmek epey olağandır. §13.8'den, bir metriğin (ya da sözde metrik) tekil olmayan $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$–değerli bir g tensörü olduğunu anımsayın. g'nin pürüzsüz bir tensör *alanı* olmasına gerek duyarız, böylece g $\mathcal{M}$'ye ait değişik noktalardaki tanjant uzaylarında geçerli olur. Kendisine bu şekilde bir metrik atanmış bir manifold *Riemanncı* ya da belki *sözde Riemanncı* olarak adlandırılır.[10] (Büyük matematikçi Bernhardt Riemann'la 7 ve 8. bölümlerde karşılaşmıştık. Riemann, bir metriğe sahip n–boyutlu bir manifolda ilişkin bu konuyu, Gauss'un "Riemanncı" 2–manifoldlar üzerine olan daha önceki çalışmasını izleyerek temellendirdi. Normalde "Riemanncı" terimi g'nin pozitif belirli olduğu durumlar (*bkz.* §13.8) için saklanır. Bu durumda herhangi pürüzsüz bir eğri boyunca, onun üzerindeki ds'nin integraliyle (Şekil 14.20) tanımlanan (pozitif) bir *uzaklık* ölçüsü,

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$$

[10] Bazı matematik kitaplarında belirsiz durum için "yarı Riemanncı" terimi kullanılmıştır, *bkz.* O'neill, 1983 fakat bana öyle geliyor ki "sözde Riemanncı" daha uygun bir terminolojidir.

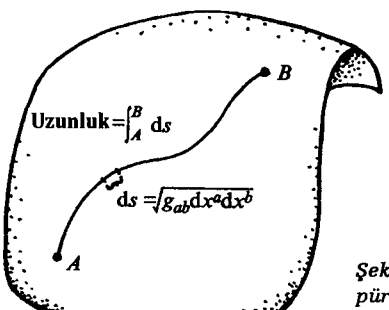
olmak üzere, mevcuttur. Bu, eğriyle ilgili, g pozitif belirli olduğunda kelimenin bilindik anlamıyla "uzunluk" olan bir *uzunluk* tanımlamak üzere, eğri boyunca integrali alınması uygun olan bir şeydir. ds her ne kadar bir 1–biçimli olmasa da bir eğri boyunca integrallenmek üzere meşru bir nicelik sayılmak için bir 1–biçimliyle yeteri kadar özellik paylaşır. Buradan hareketle bir A noktasını bir B noktasına bağlayan bir eğrinin l *uzunluğu*, $ds = (g_{ab}dx^a dx^b)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere,

$$l = \int_A^B ds$$

olarak ifade edilir.[11]

Öklitçi uzay durumunda bunun tam olarak, en kolay biçimde bir Kartezyen koordinat sisteminde, g_{ab} bileşenleri §13.3'ün standart "Kronecker deltası" (diğer bir deyişle $a = b$'yse 1 ve $a \neq b$'yse 0) biçimini almak üzere, görüldüğü, bir eğrinin uzunluğuna ilişkin olağan tanımlama olduğu belirtilebilir. ds'ye ilişkin ifade temel olarak §13.3'te belirtildiği üzere (*bkz.* alıştırma [13.11]) Pisagor teoreminin (§2.1) sonsuz küçük düzeyde işleyen bir yansımasıdır. Bununla birlikte Riemanncı manifolddaki bir eğrinin uzunluğunun ölçüsü yukarıdaki denklem uyarınca bize Öklit'inkinden farklılaşan bir geometri sağlar. Bu durum, Pisagor teoreminin (sonsuz küçüğün aksine) sonlu aralıklarla ilgili yetersizliğini yansıtır. Yine de bu antik teoremin kendi temel rolünü hâlâ bir şekilde oynaması, artık sonsuz küçük düzeyde, kayda değerdir. (§2.7'nin son paragrafını anımsayın.)

§17.7'de imzanın $+---$ durumunun görelilikte, (sözde) metrik artık ideal bir saat tarafından kayıt edilmiş zamanı dolaysız biçimde ölçmek



Şekil 14.20 $ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$ *olmak üzere* $\int ds$ *pürüzsüz bir eğrinin uzunluğudur.*

[11] Bu ifadeye anlam vermenin genel bir biçimi, eğri üzerinde bir parametre, u diyelim, ortaya koymak ve $ds = (ds/du)du$ yazmaktır. ds/du niceliği u'nun dx^a/du biçiminde ifade edilen olağan bir fonksiyonudur.

üzere, belirli bir öneme sahip olduğunu görüyor olacağız. Ayrıca, kendisiyle ilgili pozitif belirli bir $\boldsymbol{g}$'nin, $\boldsymbol{v}$ yok olmadığı sürece pozitif olduğu

$$|\boldsymbol{v}|^2 = g_{ab}v^a v^b$$

ifadesiyle tanımlanan herhangi bir $\boldsymbol{v}$ vektörü $|\boldsymbol{v}|$ *uzunluğu*na sahiptir. Bununla birlikte görelilik kuramında daha çok *Lorentzci* bir metriğe (§13.8) gerek duyarız ve $|\boldsymbol{v}|^2$ her iki işarete de sahip olabilir. Bunun önemini daha sonra göreceğiz (§17.9, §18.3).

Tekil olmayan bir $\boldsymbol{g}$ (sözde) metriği torsiyon serbest bir ∇ bağlantısını eşsiz biçimde nasıl belirler? ∇ hakkındaki gerekliliği ifade etmenin bir yolu, bir vektöre ilişkin paralel taşımanın kendi uzunluğunu her zaman korumak zorunda olduğunu söylemektir (§14.2'de S^2 küresi üzerindeki paralel taşımayla ilgili ileri sürdüğüm özellik). Bu gerekliliği eşdeğer biçimde

$$\nabla \boldsymbol{g} = 0$$

olarak ifade edebiliriz. Bu koşul (torsiyonun yok olmasıyla birlikte) ∇'yı tümüyle onarmaya yeterlidir.[14.26] Bu ∇ bağlantısı değişken olarak (hepsi de bu kavramla ilişkili olarak önemli fikirlerle katkıda bulunmuş olan Bernhardt Riemann, 1826–1866, Elwin Christoffel, 1829–1900 ve Tullio Levi-Civita, 1873–1941 ardından) *Riemanncı, Christoffel ya da Levi-Civita* bağlantısı olarak adlandırılır.[14.27]

Bir (pozitif belirli diyelim) $\boldsymbol{g}$ metriğinin bir bağlantıyı belirlemesi gerçeğini anlamanın başka bir yolu da mevcuttur. *Jeodezi* kavramı metrikten dolaysız biçimde elde edilebilir. Onun iki sabit nokta arasındaki $\int ds$ uzunluğunu (Şekil 14.20'de gösterilmiş nicelik) en aza indiren $\mathcal{M}$ üzerindeki bir eğri aslında $\boldsymbol{g}$ metriğiyle ilgili bir jeodezidir. Jeodezi yerlerini bilmek ∇ bağlantısını bilmekte gereken şeyin çoğunu bilmektir. ∇'yı tamamen onarmak için geri kalan bilgi jeodeziler üzerindeki *afin parametrelerine* ilişkin bilgidir. Bunlar, eğriler üzerindeki yay uzunluklarını ölçen parametreler ve bu tür parametrelerin sabit katları oldukları açığa çıkar ve bu yine $\boldsymbol{g}$ tarafından onarılır.[14.28] $\boldsymbol{g}$ pozitif belirli olmadığında argüman temel olarak aynıdır fakat artık jeodeziler, integral bir jeodezi için "dura-

---

[14.26] Bağlantı nicelikleri Γ^a_{bc}'yle, Christoffel sembolleri, ilgili, $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial g_{bd}/\partial x^c + \partial g_{cd}/\partial x^b - \partial g_{cb}/\partial x^d)$ açık bileşen ifadelerini türetin.

[14.27] Christoffel sembolleri biçimindeki eğrilik tensörüyle ilgili klasik $R^d_{abc} = \partial\Gamma^d_{cb}/\partial x^a - \partial\Gamma^d_{ca}/\partial x^b + \Gamma^u_{cb}\Gamma^d_{ua} - \Gamma^u_{ca}\Gamma^d_{ub}$ ifadesini türetin. *İpucu*: Eğrilik tensörünün §14.4'teki, $\xi^{d'}$nin dönüşümlü olarak $\delta^a_1, \ldots, \delta^a_n$ koordinat vektörlerinin her biri olduğu tanımı kullanın. Alıştırma [14.6]'daki gibi δ^a_1, δ^a_2, vb nicelikleri, üst indis a §12.8'le uyumlu olarak soyut bir indis gibi görülebilmek üzere gerçek tekil vektörler olarak düşünülmelidir.

[14.28] Bu argümanın tümü için ayrıntı sunun.

ğan" olarak adlandırılan şey olmak üzere, $\int ds$'yi en aza indirmez. (Bu konuya daha sonra yeniden yönelinecek; *bkz.* §17.9 ve §20.1.)

(Sözde) Riemanncı geometride g_{ab} metriği ya da ($g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$'yle tanımlı) tersi g^{ab}, bir tensörün indislerini alçaltıp yükseltmekte kullanılabilir. Özellikle, §13.9'daki gibi vektörler kovektörlere ve kovektörler (yeniden geriye) vektörlere dönüştürülebilir:

$$v_a = g_{ab}\, v^b \text{ ve } \alpha^a = g^{ab}\alpha_b.$$

Aynı çekirdek sembole bağlı kalmak ve bu niceliğin geometrik karakterini ayırt etmek üzere indis konumlandırmayı kullanmak olağandır. Bu işlemi eğrilik tensörünün üst indisini alçaltmak üzere kullanarak $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ değerliğine sahip olan *Riemann* ya da *Riemann–Christoffel* tensörünü,

$$R_{abcd} = R^e_{abc}\, g_{ed},$$

tanımlarız. Daha önceden sahip olduğumuz iki bağıntıya (ab'deki ters simetri ve Bianchi simetrisi, diğer bir deyişle abc'deki ters simetrik kısmın yok olmasına) ek olarak kayda değer bazı simetrileri de barındırır. Ayrıca cd'de ve ab'nin cd'yle yer değiştirmesinde de ters simetriye sahibiz:[14.29]

$$R_{abcd} = -R_{abdc} - R_{cdab}.$$

Bunların diyagram biçimli gösterimleri için Şekil 14.21'e bakın. Bir n–manifolddaki genel bir $\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$–değerlikli tensör n^4 bileşene sahiptir fakat bir Riemann tensörü için bu simetriler nedeniyle, bu bileşenlerin yalnızca $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ adedi bağımsızdır.[14.30]

Bu noktada bir (sözde) Riemann manifoldu $\mathcal{M}$ üzerindeki bir *Killing vektörü* kavramını okuyucunun dikkatine sunmak uygun olur. Bu, kendisine göre Lie türev alma işleminin metriği yok ettiği bir $\boldsymbol{\kappa}$ vektör alanıdır:

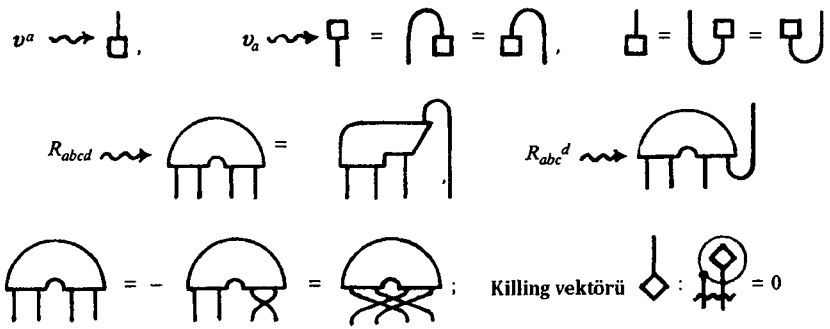
$$\underset{\kappa}{\pounds}\, \boldsymbol{g} = 0.$$

Bu denklem indis notasyonunda, ∇ Levi–Civita bağlantısı yerine kullanılmak üzere (parantezlerin §12.7'deki gibi simetrilemeyi göstermesiyle birlikte; ayrıca *bkz.* Şekil 14.21),

$$\nabla_b\kappa_b + \nabla_b\kappa_a = 0, \text{ diğer bir deyişle } \nabla_{(a}\kappa_{b)} = 0$$

[14.29] Bu bağıntıları ilk olarak $\nabla_{[a}\nabla_{b]}g_{cd} = 0$'dan cd'deki ters simetriyi türeterek ve sonra iki ters simetriyle Bianchi simetrisini değişken simetriyi elde etmek üzere kullanarak oluşturun.

[14.30] $n = 4$ olduğunda simetrilerin yalnızca 20 bağımsız bileşene izin verdiğini doğrulayın.



Şekil 14.21 İndislerin "nal" notasyonunda yükseltilip düşürülmesi: $v_a = g_{ab}v^b = v^b g_{ba}$, $v^a = g^{ab}v_b = v_b g^{ba}$, $R_{abcd} = R^e_{abc}g_{ed}$, $R^d_{abc} = R_{abce}g^{ed}$, $R_{abcd} = -R_{abdc} = R_{cdab}$; $\nabla_{(a}\kappa_{b)} = 0$'sa κ^a bir Killing vektörüdür.

olarak yeniden yazılabilir.[14.31] Bir (sözde) Riemannıcı $\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki bir Killing vektörü $\mathcal{M}$'nin sürekli *simetri* ($\mathcal{M}$ tıkız olmayan olduğunda yalnızca yerel[12] olabilecek bir simetri) üreticisidir. $\mathcal{M}$ bağımsız bir Killing vektöründen fazlasını barındırırsa böylece ikisinin çeviricisi de başka bir Killing vektörü olur.[14.32] Killing vektörleri, §19.5 ve §§30.4, 6, 7'de göreceğimiz üzere görelilik kuramında özel öneme sahiptir.

14.8 Simplektik manifoldlar

Benzersiz bir bağlantıyı tanımlayan pek fazla yerel tensör yapısı bulunmadığı belirtilmelidir, öyleyse metriklerin (ya da sözde metrikler) bize sıklıkla fiziki biçimde verilen şeyler olması konusunda talihliyiz. Bununla birlikte durumun eşsizlik ol*ma*dığı önemli bir örnekler ailesi, S_{ab} bileşenleriyle verilen (tekil olmayan) *ters* simetrik bir $\boldsymbol{S}$ tensör alanıyla verilen bir yapıya sahip olduğumuzda elde edilir. Bu tür bir yapı klasik mekaniğin *faz uzaylarında* mevcuttur (§20.1). Bu uzaylarla ilgili olarak daha sonra, §§20.2, 4 ve §27.3'te söyleyecek daha fazla şeyim olacak. Bunlar *simplektik manifoldlar* olarak bilinen şeylerin örnekleridir. Ters simetrik ve tekil olmayıştan ayrı olarak $\boldsymbol{S}$ *simplektik yapısı*

$$\boldsymbol{dS} = 0$$

[14.31] Bu denklemi türetin.

[12] Bu "yerelsellik" şu anlamda anlaşılabilir. $\mathcal{M}$'nin her bir p noktası için $\boldsymbol{\kappa}$'nın, p içeren açık bir kümeyi $\mathcal{M}$'de özdeş metrik yapıdaki başka bir açık kümeye götüren sıfır olmayan küçük bir sabit katının üslü bir ifadesi (§14.6) mevcuttur.

[14.32] "Geometrik olarak açık" olan bu gerçeği doğrulayın. Bu neden açıktır?

ifadesini sağlamalıdır.[14.33] (Bu, yerel simetrinin simplektik Sp(m,m) grubunun olağan "ayrık imza"sıyla verildiği $2m$–boyutlu gerçel bir manifold üzerindeki *gerçel* bir simplektik biçime ilişkin standart durum olur; *bkz.* §13.10. Geniş olarak çalışılmış diğer imzalara ilişkin "simplektik manifoldlar"ın farkında değilim.)

S_{ab}'nin ($S^{ab}S_{bc} = \delta^a_c$'yle tanımlı) tersi S^{ab} (1781'den 1840'a kadar yaşamış olan çok seçkin Fransız matematikçi Siméon Denis Poisson'un ardından adlandırılan) *"Poisson parantezi"* olarak bilinen şeyi tanımlar. Bu, bir faz uzayında iki Φ ve Ψ skaler alanını bir üçüncüsünü sunmak üzere ($-\frac{1}{2}$ çarpanı yalnızca geleneksel koordinat ifadeleriyle tutarlılık için eklenmiş olmak üzere) birleştirir:

$$\{\Phi,\Psi\} = -\tfrac{1}{2}S^{ab}\nabla_a\Phi\nabla_b\Psi.$$

Klasik mekanikte bu önemli bir niceliktir. Daha sonra (§20.4) bunun *Hamilton denklemleri*ni, bunlar klasik fiziğin dinamiğini kuşatan temel bir yöntem sunan ve kuantum mekaniğiyle bağlantıyı sağlayan denklemler olmak üzere, nasıl şifrelediğini göreceğiz. $\boldsymbol{S}$'nin ters simetrisi ve $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ koşulu bize zarif

$$\{\Phi,\Psi\} = -\{\Psi,\Phi\},\ \{\Theta,\{\Phi,\Psi\}\} + \{\Phi,\{\Psi,\Theta\}\} + \{\Psi,\{\Theta,\Phi\}\} = 0$$

bağıntılarını sunar.[14.34] Bu, §14.6'daki ilgili çeviricilerle (Lie parantezi) karşılaştırılabilir. (Jacobi denklemini anımsayın.) §20.4'teki klasik mekaniğin geometrik biçimli açıklamasını ele aldığımızda simplektik manifoldların kayda değer zenginlikteki geometrilerine yeniden döneceğiz.

Simplektik bir manifoldun yerel yapısı "esnek" bir yapı olarak adlandırılabilen şeyin bir örneğidir. Örneğin simplektik bir manifoldla ilgili, yerel olarak birini diğerinden ayırt etmeye hizmet edebilecek hiçbir eğrilik kavramı yoktur. Aynı boyutta (ve aynı "imza"ya sahip, *krş.* §13.10) gerçel iki simplektik manifolda sahipsek bu durumda bunlar yerel olarak (bir manifold üzerindeki herhangi bir p ve diğer bir manifold üzerindeki herhangi bir q noktasıyla ilgili olarak p ve q'nun özdeş olan açık kümelerinin var olması anlamında)[13] tümüyle özdeştir. Bu durum, (sözde) Riemanncı manifoldları ya da içlerinde yalnızca bir bağlantı belirtilmiş manifoldlar durumuyla büsbütün zıttır. Bu durumlarda eğrilik tensörü (ve örneğin, çe-

[14.33] Herhangi bir torsiyon serbest ∇ bağlantısını kullanarak şunun niçin yazılabildiğini açıklayın: $\nabla_a S_{bc} + \nabla_b S_{ca} + \nabla_c S_{ab} = 0$

[14.34] Bu bağıntıları önce $S^{a[b}\nabla_a S^{cd]} = 0$' kurarak gösterin.

[13] Burada "özdeş", her birinin bir diğerine simplektik yapıların uyuştuğu bir biçimde dönüştürülebilmesi gerçeğine atıfta bulunur.

şitli kovaryant türevleri) bu tür farklı manifoldlar için büyük olasılıkla farklı olan bazı ayırt edici yerel yapıları tanımlar.

Aralarında $2m$–boyutlu gerçel bir manifoldun m–boyutlu karmaşık bir manifold olarak yeniden yorumlanmasına olanak sağlayan §12.9'da tanımlanmış karmaşık yapının olduğu bu tür "esnek" yapıların başka örnekleri de mevcuttur. Bu durumda esneklik açıktır çünkü karmaşık m boyutundan ayrı olarak bir karmaşık manifoldu diğerinden (ya da $\mathbb{C}^m$'den) yerel olarak ayırt eden açıktır ki hiçbir özellik bulunmaz. Karmaşık (holomorfik) simplektik bir yapı ona atandığında hâlâ esnek kalır[14.35] (ve hatta artık karmaşık S_{ab}'yle ilgili bir "imza" kavramı hakkında kaygılanmamız gerekmez; *bkz.* §13.10).

Esnek yapılarla ilgili pek çok başka örnek belirtilebilir. Bu türden bir örnek, üzerinde hiçbir yerde ortadan kaybolmayan bir vektör alanına sahip gerçel bir manifolddur. Öte taraftan üzerinde genel *iki* vektör alanı bulunan gerçel bir manifold esnek olmaz.[14.36] §33.11'de göreceğimiz üzere esneklik konusu *burgaç kuramı*yla ilgili bir öneme sahiptir.

[14.35] Nedenini açıklayın.

[14.36] Her bir durumda nedenini açıklayın. *İpucu*: $\xi = \partial/\partial x^1$'le bir koordinat sistemi oluşturun; sonra bir çerçeve oluşturmak üzere ardışık olarak Lie türevi alın, vb.

15

LİF DEMETLERİ VE AYAR BAĞLANTILARI

15.1 Lif demetleriyle ilgili bazı fiziki güdüler

14 ve 15. bölümlerde sunulan mekanizma Einstein'ın genel göreliliğiyle uğraşmak ve klasik mekaniğe ilişkin faz uzayları için yeterlidir. Bununla birlikte parçacık etkileşimleriyle ilgili pek çok modern kuram §14.3'te sunulmuş olan özel "bağlantı" kavramının (ya da kovaryant türev) bir genellemesine, bu genelleme *ayar bağlantısı* olarak adlandırılmak üzere, dayanır. Temelde orijinal kovaryant türev kavramımız, bir vektörün $\mathcal{M}$ manifoldumuz üzerindeki bir eğri boyunca paralel taşınması yoluyla anlatmak istediğimiz şeyle temellenmekteydi (§14.2). Vektörlere ilişkin paralel taşımayı bilerek bunu herhangi bir tensör niceliğinin taşınmasına (§14.3) benzersiz biçimde genişletebiliriz. Artık vektörler ve tensörler $\mathcal{M}$'nin noktaları üzerindeki tanjant uzaylarına atfedilen niceliklerdir (*bkz.* §12.3, §14.1 ve Şekil 12.6). Bununla birlikte bir ayar bağlantısı en iyi, $\mathcal{M}$'deki bir p noktasındaki tanjant uzayından farklı türde fakat hâlâ bir anlamda "p'de konumlanmış" bir uzaya karşılık olarak düşünülen özel fiziki ilgiye sahip belirli niceliklerin "paralel taşıma"sına karşılık gelir.

Burada gerekeni biraz aydınlatmak üzere §§12.3, 8'den, bir vektör uzayına, burada bir noktadaki tanjant vektörlerinin uzayı, bir kez sahip olduğumuzda onun eşleniğini (kovektör uzayları) ve $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$–değerli tensörlere ilişkin çeşitli uzayların tümünü oluşturabileceğimizi anımsayalım. Bu nedenle açık bir anlamda (kovektörler $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$–tensörler olmak üzere kotanjant uzayları içeren) $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$–tensörleri, p noktalarında bir kez T_p tanjant uzaylarına sahip olduğumuzda "herhangi yeni bir şey" değildir. (Neredeyse benzer bir uyarı p'deki *spinör* uzayları için de, en azından benim şeyleri kendi görüş biçimim uyarınca, geçerlidir; *bkz.* §11.3. Bazı başkaları spinörlere ilişkin farklı bir yaklaşım benimsemeye çalışabilir fakat konu hakkındaki bu alternatif bakış açıları bizim burada ilgileneceğimiz şeyler olmayacak.) Parçacık etkileşimlerine (kütleçekimden başkaca) ilişkin ayar kuramlarıyla il-

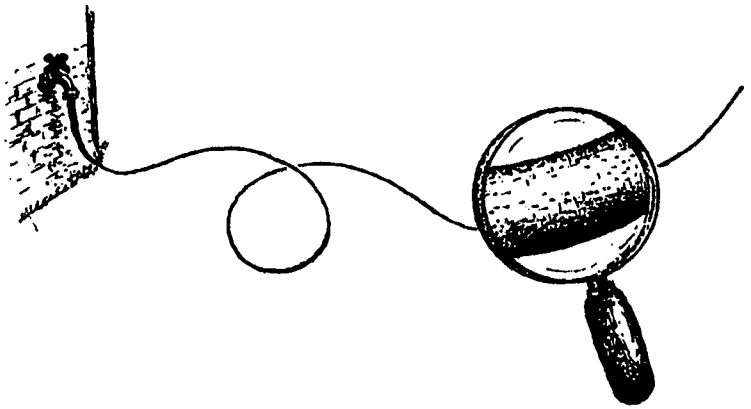
gili gerek duyduğumuz uzaylar bunlardan faklıdır (ve böylece bunlar *yeni* olan bir şeydir) ve bunları sıradan uzay ve zamanınkine ek bir tür "uzamsal" bir boyuta atfedilir olarak düşünmek en iyisidir. Bu ek "uzamsal" boyutlar sıklıkla *iç* boyutlar olarak adlandırılır, böylece bu tür bir "içsel yön" boyunca ilerlemek bizi aslında yerleşik bulunduğumuz uzayzaman noktasından uzağa taşımaz.

Bu fikirle ilgili geometrik anlam oluşturmak üzere bir *lif* kavramına gerek duyarız. Bu, mükemmel biçimde tam bir matematiksel kavramdır ve buna uygun şekilde §15.2'de geleceğiz. Saf matematikte[1] kullanışlı olduğu, fizikçilerin daha önceleri kullanmış oldukları önemli kavramların bazılarının aslında lif terimleri olarak anlaşıldığını fark etmelerinden çok daha önce bulunmuştu. İzleyen yıllarda kuramsal fizikçiler gerekli matematiksel kavramlarla oldukça tanışık hale geldiler ve bunları kendi kuramlarına eklemlediler. Bununla birlikte bazı modern kuramlarda bu kavramlar, uzayzamanın kendisinin ek boyutlar edinir biçimde düşünülmesiyle bağlantılı olarak değişmiş bir biçimde sunuldu.

Aslında temel fizikle ilgili var olan daha derin bir çerçeve bulma girişimlerinin (*örn.* süper kütleçekim ya da sicim kuramı) pek çoğunda (ya da çoğunda?) saf "uzayzaman" kavramı daha yüksek boyutluluğa genişletilir. Böylece "iç boyutlar" bu ek uzamsal boyutlar aracılığıyla, bu ek uzamsal boyutlar sıradan uzay ve zamanınkiyle esasen eşit bir dayanak üzerine yüklenmek üzere, ortaya çıkar. Bu nedenle sonuçtaki "uzayzaman" standart olan dörtten daha fazla boyut kazanır. Bu doğadaki fikirler yaklaşık olarak 1919'a, Theodor Kaluza ve Oskar Klein'ın Einstein'ın genel göreliliğinde, uzayzamanın boyut sayısını 4'ten 5'e yükselterek bir genişleme sundukları zamana dek uzanır. Ek boyut, Maxwell'in, belirli bir anlamda, "geometrik uzayzaman açıklaması"na dahil edilecek olan müthiş elektromanyetizma kuramına (*bkz.* §§19.2, 4) olanak sağladı. Bununla birlikte bu "5. boyut" "küçük bir halkaya dolanmış" olarak düşünülmek zorundadır; bu nedenle onu, sıradan uzamsal bir boyuttaki gibi dolaysızca fark edemeyiz.

Benzerlik çoğu kez, 1–boyutlu bir evrenin Kaluza–Klein tipinde bir değişimini göstermekte olan bir su hortumuyla sunulur (*bkz.* Şekil 15.1). Büyük ölçekte bakılınca hortum aslında 1–boyutlu görünür: uzunluğuna ait boyut. Daha yakından incelendiğindeyse hortum yüzeyinin aslında, hortumun uzunluğundan çok daha küçük bir ölçekte sıkıca ilmeklenen ek bo-

[1] *Bkz., örn.* Steenrod, 1951. Fizikçilerin "ayar kuramı" kavramının gerçekten bir demet üzerindeki bağlantıyla ilgili olduğunu, 1967 dolaylarında, kavrayan ilk fizikçilerden birinin Andrzej Trautman olduğu görülür; *bkz.* Trautman, 1970. Ayrıca Penrose vd., 1997, s. A4.



Şekil 15.1 Hortum benzetmesi. Büyük ölçekte bakıldığında 1–boyutlu görünür fakat daha yakından incelendiğinde 2–boyutlu bir yüzey olarak görünür. Benzer biçimde Kaluza–Klein fikri uyarınca olağan bir ölçekte, incelenmeyen ek "küçük" boyutlar bulunabilir.

yutla birlikte 2–boyutludur. Bu, 5–boyutlu Kaluza–Klein toplam "uzayzamanı" içinde yalnızca 4–boyutlu bir *fiziki* uzayzamanı nasıl algılayacağımıza ilişkin dolaysız bir benzetme olarak kabul edilmelidir. Kaluza–Klein 5–uzayı 2–yüzey hortumla ilgili, algıladığımız 4–uzay esasen hortumun temelde 1–boyutlu görünümünün dolaysız benzeri olmak üzere, dolaysız bir benzer olmaktadır.

Pek çok yönden bu, çekici ve kesinlikle zekice bir fikir. Modern kurgusal fiziki kuramları (örneğin 31. bölümde karşılaşacağımız süper kütleçekim ve sicim kuramı) ortaya koyan kişiler aslında kendilerini Kaluza–Klein fikrinin daha da yüksek boyutlu türlerini (aralarında en popülerleri toplamda 26, 11 ve 10 boyutluları olmak üzere) ele almaya yöneltilir bulmaktalar. Bu tür kuramlarda, elektromanyetizmadan farklı olan etkileşimlerin birazdan geleceğimiz ayar bağlantısı fikrinin kullanımıyla içerilebileceği fark edilir.

Bununla birlikte Kaluza–Klein fikrinin hâlâ kurgusal bir fikir olduğu vurgulanmalıdır. Parçacık etkileşimleriyle ilgili var olan geleneksel ayar kuramlarına dayanan "iç boyutlar" sıradan uzayzaman boyutlarıyla eşit düzeyde olarak düşünülmemelidir ve bu nedenle Kaluza–Klein tipli bir düzenden kaynaklanmaz. Bu onun, var olan ayar kuramlarına ilişkin iç boyutları, herhangi belirli bir anlamda son nokta olarak bu tür (Kaluza–Klein tipli) "genişlemiş uzayzaman"dan kaynaklanır biçimde değerlendirecek kadar hassas olup olmadığına ilişkin ilginç bir kuramsal düşünüş konusudur.[2] Bu konuya daha sonra döneceğim (§31.4).

[2] Aslında sicim kuramına ilişkin ek uzayzaman boyutları dolaysız biçimde bir lif demetinin

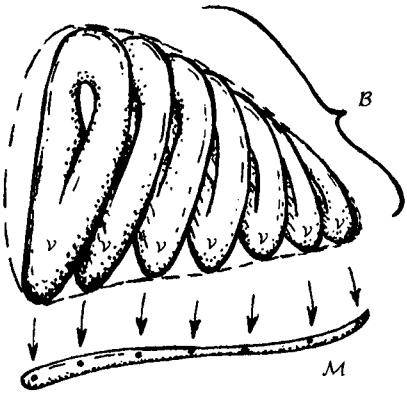
Bu iç boyutları daha yüksek boyutlu bir uzayzamanın parçası olarak değerlendirmek yerine onları bize uzayzaman üzerindeki *lif demeti* (ya da basitçe bir demet) şeklinde adlandırılan şeyi sunuyor olarak düşünmek daha uygun olacaktır. Bu, parçacık etkileşimleriyle ilgili modern ayar kuramlarının merkezinde duran önemli bir kavramdır. "Üstteki" uzayzamanın her bir noktasının *lif* olarak adlandırılan başka bir uzay olduğunu düşünürüz. Lif, üstte değinilen fiziki resim uyarınca tüm iç boyutlardan oluşur. Demet kavramıysa bundan çok daha geniş uygulamalara sahiptir, öyleyse kendimizi zorunlu olarak bu tür fiziki yorumlamalara, en azından şimdilik bağlamamamız en iyisi olacak.

15.2 Matematiksel demet fikri

Bir $\mathcal{B}$ *demeti* (ya da *lif* demeti) diğer iki $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{V}$ manifoldları biçiminde, $\mathcal{M}$ (fiziki uygulamaların çoğunda uzayzamanın kendisi olan) *taban uzayı* ve $\mathcal{V}$ *lif* (fiziki uygulamaların çoğunda iç uzay) olarak adlandırılmak üzere, tanımlanan bir yapıya sahip bir manifolddur. $\mathcal{B}$ demetinin kendisi bütünüyle $\mathcal{V}$ liflerinin tüm ailesinden oluşmuş olarak düşünülebilir; aslında "$\mathcal{V}$'ler değerinde bir $\mathcal{M}$" biçiminde oluşur; *bkz.* Şekil 15.2. En basit demet türü *çarpım uzayı* olarak adlandırılandır. Bu bir *önemsiz* ya da "çözülmüş" demet olabilir fakat daha ilginç olanlar *bükülü* demetlerdir. Bunların hepsine ilişkin örnekleri hemen birazdan vereceğim. $\mathcal{V}$ uzayının da bazı simetrilere sahip olması önemlidir. Demet kavramını ilginç yapan bükmeye serbestlik veren bu simetrilerdir. $\mathcal{V}$'nin simetrileriyle ilgili, ilgilendiğimiz $\mathcal{G}$ grubu $\mathcal{B}$ demetinin *grubu* olarak adlandırılır. Sıklıkla $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$ *üzerindeki bir* $\mathcal{G}$ *demeti*dir deriz. Pek çok durumda $\mathcal{V}$ bir vektör uzayı olarak kabul edilir ve bu durumda demete bir *vektör demeti* deriz. Böylece $\mathcal{G}$ grubu ilgili boyutun genel doğrusal grubudur ya da ona ait bir alt gruptur (*bkz.* §§13.3, 6–10).

$\mathcal{M}$'yi $\mathcal{B}$'nin bir parçası olarak düşünmemeliyiz; bunun yerine $\mathcal{B}$, bir anlamda $\mathcal{M}$ taban uzayı *üzerinde* durur olarak değerlendirmeye eğilimli olacağımız, $\mathcal{M}$'den ayrı bir uzay olarak görülmelidir. Liflerin tüm kopyaları birbirinden ayrıdır (diğer bir deyişle hiçbiri kesişmez) ve birlikte tüm $\mathcal{B}$ demetini oluşturur. $\mathcal{M}$'yi $\mathcal{B}$'yle bağlantılı olarak düşünmenin yolu, onu $\mathcal{V}$ lif ailesi yoluyla $\mathcal{B}$ demetinin bir *çarpan uzayı* olarak düşünmektir. Bu, $\mathcal{M}$'nin her bir noktası $\mathcal{V}$'nin ayrı bir bireysel kopyasına karşılık gelir demektir. $\mathcal{B}$'den $\mathcal{M}$'ye, her bir $\mathcal{V}$ lifini üzerinde durduğu belirli $\mathcal{M}$ noktasına

"lifleri" olarak düşünülmemelidir. O lifler Calabi–Yau uzaylarındaki belirli spinör alanlarına ait uzaylardır. Calabi–Yau uzayları; *bkz.* §31.14.



Şekil 15.2 $\mathcal{M}$ taban uzaylı ve $\mathcal{V}$ lifli bir $\mathcal{B}$ demeti "$\mathcal{V}$'ler değerinde bir $\mathcal{M}$"den oluşmuş olarak düşünülebilir. $\mathcal{B}$'den $\mathcal{M}$'ye doğru kanonik projeksiyon, her bir $\mathcal{V}$ lifi tekil bir noktaya düşer biçimde görülebilir.

düşüren, *kanonik izdüşüm* adı verilen sürekli bir gönderim mevcuttur. (*Bkz.* Şekil 15.2)

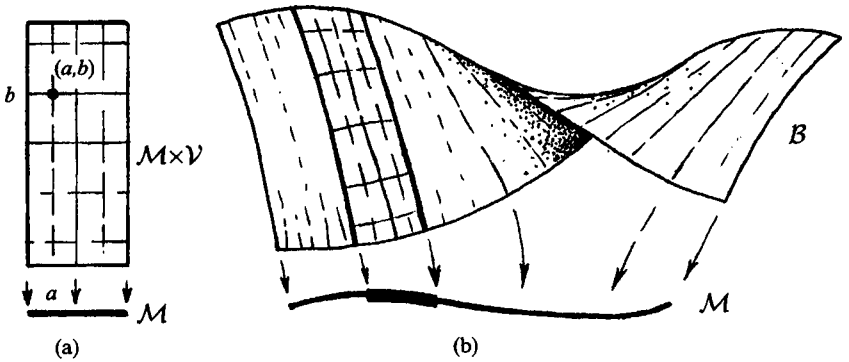
$\mathcal{M}$'nin $\mathcal{V}$'yle *çarpım uzayı* ($\mathcal{M}$ üzerindeki önemsiz $\mathcal{V}$ demeti) $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$ olarak yazılır. $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'nin noktaları (a,b), a $\mathcal{M}$'ye ve b $\mathcal{V}$'ye ait olmak üzere, eleman *çiftler*idir; *bkz.* Şekil 15.3a. (Aynı fikrin §13.2'deki gruplarda geçerli olduğunu zaten görmüştük.)[3] $\mathcal{M}$ üzerindeki daha genel bir "bükülü" $\mathcal{B}$ demeti, *yerel olarak*, $\mathcal{B}$'nin $\mathcal{M}$'ye ait yeteri derecede küçük herhangi bir açık bölgesi üzerinde bulunan kısmının yapısal olarak $\mathcal{M}$'ye ait aynı açık bölge üzerinde bulunan $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'nin o parçasıyla özdeş olması anlamında, $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'yi andırır. *Bkz.* Şekil 15.3b. $\mathcal{M}$ etrafında hareket ettiğimizdeyse üstteki lifler, bir bütün olarak, $\mathcal{B}$'nin $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'den farklı olacağı (sıklıkla topolojik olarak farklı) biçimde bükülebilir. $\mathcal{B}$'nin boyutu her zaman, bükmeden bağımsız olarak $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{V}$'nin boyutları toplamıdır.[15.1]

Tüm bunlar epey kafa karıştırıcı olabilir, o halde bir demetin ne olduğuna ilişkin daha iyi bir algı elde etmek üzere bir örnek vereyim. İlk önce $\mathcal{M}$ uzayımızı bir S^1 çemberi ve $\mathcal{V}$ lifini (topolojik olarak 0 işaretli orijinle birlikte gerçel $\mathbb{R}$ doğrusunun bir kopyası biçiminde) 1–boyutlu bir vektör uzayı olarak kabul edin. Bu tür bir demet S^1 üzerindeki (gerçel) bir *doğru demeti* olarak adlandırılır. $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$ artık 2–boyutlu bir silindirdir; *bkz.* Şe-

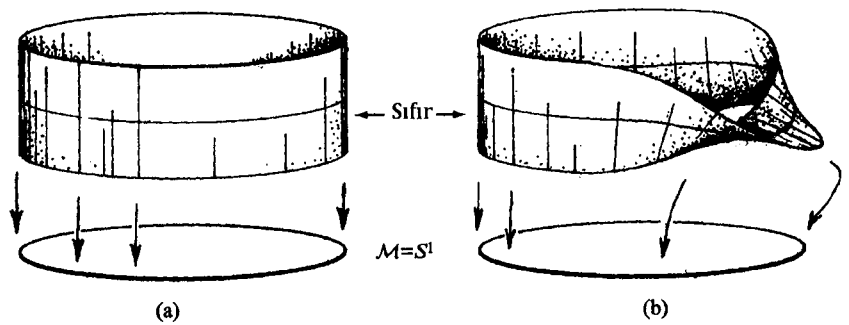
---

[3] Çarpım uzayına ilişkin tam bir tanım için daha fazla bilgi gereklidir, böylece $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'yle ilgili topoloji ve pürüzsüzlük kavramları doğru biçimde tanımlanır. Bir hacim ölçüsü $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{V}$'nin her birine atanabildiğinde $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'nin hacmi $\mathcal{M}$'ve $\mathcal{V}$'nin hacimleri çarpımı olur. Burada bu konulara uygun biçimde girmek, teknik olarak konuşursak gerekli olsa bile benim için dikkat dağıtıcıdır. Uygun bir kaynak için *bkz.* Kelley, 1965; Lefdhetz, 1949; ya da Munkres, 1954.

[15.1] $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'nin boyutunun neden $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{V}$'nin boyutları toplamı olduğunu açıklayın.



Şekil 15.3 (a) $\mathcal{M}$ ile $\mathcal{V}$'nin çarpım uzayı $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$ olan "önemsiz" bir demete ilişkin belirli durum. $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'nin noktaları, a $\mathcal{M}$'de ve b $\mathcal{V}$'de olan (a, b) eleman çiftleri biçiminde yorumlanabilir. (b) $\mathcal{M}$ üzerindeki $\mathcal{V}$ lifli "bükülü" genel $\mathcal{B}$ demeti yerel olarak $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'yi andırır; diğer bir deyişle $\mathcal{B}$'nin $\mathcal{M}$'ye ait yeteri derecede küçük herhangi bir açık bölgesi üzerindeki kısmının $\mathcal{M}$'ye ait aynı açık bölge üzerinde bulunan $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'nin o parçasıyla özdeştir. Bununla birlikte lifler bükülür ve böylece $\mathcal{B}$ bütünsel olarak $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'yle aynı değildir.



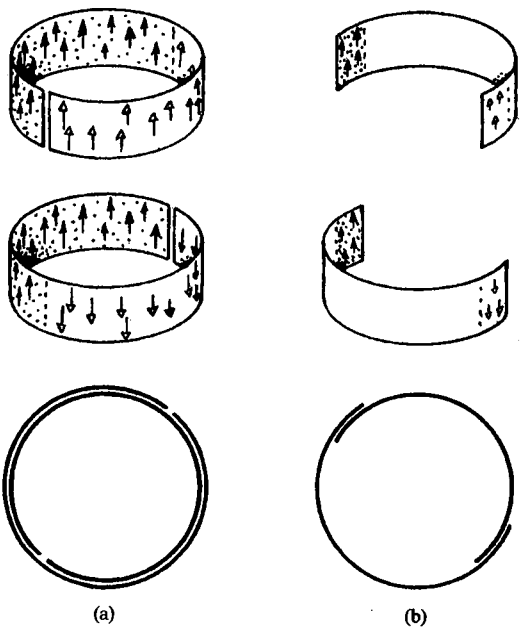
Şekil 15.4 Bu bükülmenin nasıl meydana geldiğini anlamak için $\mathcal{M}$'nin bir S^1 çemberi ve $\mathcal{V}$ lifinin 1–boyutlu bir vektör uzayı olduğu (diğer bir deyişle $\mathbb{R}$ üzerinde modellenmiş, 0 orijini dışında hiçbir değerin, örneğin birim eleman 1, işaretlenmediği, bir uzay durumunu ele alın. (a) Burada 2–boyutlu bir silindir olan önemsiz $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$ durumu. (b) Bükülü durumda (Şekil 12.15'teki gibi) bir Möbius şeridi elde ederiz.

kil 15.4a. $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{V}$ liflerine sahip *bükülü* bir $\mathcal{B}$ demetini nasıl oluşturabiliriz? Bir *Möbius şeridi* alabiliriz; *bkz.* Şekil 15.4b (ve Şekil 12.15). Bunun neden bir demet olduğunu; "yerel olarak" silindirle aynı olduğunu görelim. S^1'den bir p noktası çıkararak S^1 taban uzayına ait uygun bir "yerel" bölge oluşturabiliriz. Bu, taban çemberini basitçe bağlı[4] bir $S^1 - p$ parçasına[5] ayırır ve bu tür bir parçanın üzerinde bulunan $\mathcal{B}$'ye ait kısım $S^1 -$

[4] "Basitçe bağlı"nın genel bir anlamı için *bkz.* §12.1.

[5] Notasyondaki basitlik için, S^1'den oluşan fakat p noktası çıkarılmış uzayla ilgili olarak "$S^1 - p$" yazarak notasyonun (hafif) bir kötüye kullanımını benimsiyorum. Saflık yanlıları

p'nin üzerinde yer alan *silindire* ait kısımla tıpatıp aynıdır. $\mathcal{B}$ Möbius demetiyle silindir arasındaki fark yalnızca *tüm* S^1 üzerinde neyin yer aldığına baktığımızda ortaya çıkar. S^1'i bu tür iki yamanın birbirine bağlanmış hali, sözgelimi $S^1 - p$ ve $S^1 - q$ olarak, p ve q S^1'e ait iki ayrı nokta olmak üzere, düşünebiliriz; sonra $\mathcal{B}$'nin tümünü, her biri S^1'e ait bireysel yamalardan biri üzerinde önemsiz bir demet olan ilgili iki yamayı birbirine ekleyerek oluşturabiliriz. Möbius demetinde ortaya çıkan büküm, bu iki önemsiz demet yamasını birbirine "yapıştırma" işinden kaynaklanır (Şekil 15.5). Aslında S^1'e ait yamalarımızın boyutunu Şekil 15.5b'deki gibi azaltırsak, bu azaltma $\mathcal{B}$'nin yapısında hiçbir farka sebep olmaz, yalnızca basit bir bükmeyle ortaya çıkanın bir Möbius şeridi olduğu açık hale gelir.



Şekil 15.5 (a) Kendisinden bir p noktası çıkararak S^1 tabanına ait, $S^1 - p$ üzerindeki demet yalnızca bir çarpım olmak üzere, uygun bir "yerel" bölge oluşturabiliriz. Aynısı, q S^1'e ait farklı bir nokta olmak üzere, $S^1 - q$ üzerindeki $\mathcal{B}$'ye ait kısım için de geçerlidir. $\mathcal{B}$'nin iki kısmını dolaysızca eşleştirebilirsek bir silindir elde ederiz fakat eşleşmiş iki kısımdan birine gösterildiği gibi bir aşağı/yukarı yansıtma ($\mathcal{V}$'ye ait bir simetri) uygularsak Möbius demetini elde ederiz. (b) S^1'e ait iki kısmın boyutunu yalnızca küçük çakışmaların kalacağı biçimde küçültürsek sonuçtaki Möbius şeridi biraz daha belirgin olur.

" $S^1 - \{p\}$" ya da daha büyük olasılıkla " $S^1 \setminus \{p\}$" yazarlardı, *bkz.* not 9.13. Bu notasyonda ifade edilen "fark" iki *küme* arasındadır ve "{p}" tek elemanı p noktası olan kümeyi gösterir.

Bükmenin, $\mathcal{V}$ lifinin sahip olduğu belirli bir *simetri*, diğer bir deyişle 1–boyutlu $\mathcal{V}$ vektör uzayının elemanlarının işaretlerini ters çeviren bir simetri sonucu ortaya çıkması olasılığının farkında olmak önemlidir. (Bu, $\mathcal{V}'$deki her bir v için $v \longmapsto -v'$dir.) Bu işlem bir vektör uzayı olarak $\mathcal{V}'$nin yapısını korur. Bu işlemin aslında $\mathbb{R}$ gerçel sayı sistemine ilişkin bir simetri olmadığını belirtmeliyiz. Gerçekte, $\mathbb{R}$'nin kendisi herhangi bir simetriye sahip değildir. (Örneğin 1 sayısı kesinlikle -1'den farklıdır ve $x \longmapsto -x$ $\mathbb{R}$'ye ait, $\mathbb{R}$'nin çarpımsal yapısını koruyan bir simetri *değildir*.)[15.2] Bu nedenledir ki $\mathcal{V}$, gerçel $\mathbb{R}$ doğrusunun kendisi *gibi* olmak yerine 1–boyutlu bir gerçel vektör uzayı olarak kabul edilir. Bazen, $\mathcal{V}$ gerçel doğrusu üzerinde *modellenir* deriz. Birazdan başka lif simetrilerinin nasıl başka türde bükmelerle ilgili fırsatlar sağladığını göreceğiz.

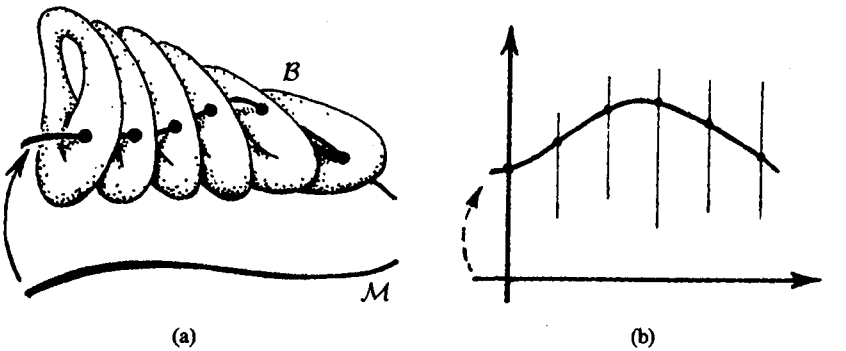
15.3 Demetlerin ara kesitleri

Silindir ve Möbius demeti arasındaki farkı niteleyebilmemizin bir yolu demetin *ara kesitleri* (ya da kısaca *kesitler*) olarak adlandırılan şeyler aracılığıyla olası olur. $\mathcal{M}$ üzerindeki $\mathcal{B}$ demetine ait bir yatay kesiti geometrik olarak bireysel her bir lifin tekil bir noktada buluştuğu, $\mathcal{B}'$de $\mathcal{M}'$ye ait sürekli bir görüntü biçiminde düşünürüz (*bkz.* Şekil 15.6a). Bunu $\mathcal{M}$ taban uzayının demet içine bir "kaldırma"sı olarak adlandırırız. $\mathcal{M}'$yi $\mathcal{B}'$nin bir ara kesitine kaldıran gönderimi uygular ve bunu kanonik izdüşürmeyle izlersek yalnızca $\mathcal{M}'$den kendisine birim göndermeyi elde ettiğimize ($\mathcal{M}'$nin her bir noktasının kendisine geri gönderildiği anlamına gelir) dikkat edin. Önemsiz bir $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$ demetiyle ilgili olarak ara kesitler basitçe, $\mathcal{M}$ taban uzayı üzerinde $\mathcal{V}$ uzayı içinde değerler alan sürekli fonksiyonlar olarak (diğer bir deyişle $\mathcal{M}'$den $\mathcal{V}'$ye sürekli gönderimlerdir) yorumlanabilir. Bu nedenle $\mathcal{M}\times\mathcal{V}'$nin bir ara kesiti $\mathcal{V}'$nin bir noktasını $\mathcal{M}'$nin her bir noktasına sürekli biçimde atar.[6] Bu 15.6b'de gösterilen bir fonksiyonla ilgili sıradan bir *grafik* fikrine benzer. Daha genel olarak, bükülü bir $\mathcal{B}$ demetine ilişkin, $\mathcal{B}'$nin herhangi bir ara kesiti sıradan bir fonksiyon fikrinden daha genel olan bir "bükülü fonksiyon" kavramını tanımlar.

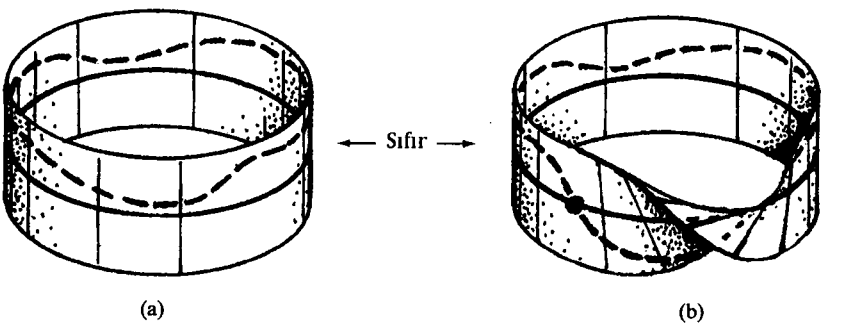
[15.2] Bunu açıklayın.

[6] Normalde sırf matematikçi olanlar dilbilgisine oldukça saygılıdır fakat pek çokları, "bağlı olarak" ifadesinin yeteri derecede özel bir tada sahip olmadığını hissettikleri görüldüğünde berbat "ona bağlı" deyimini kullanma alışkanlığı edindiler. Bunun yerine dilbilgisi kurallarına mükemmel derecede uygun "atanır" sözcüğünü kullanmamalarını anlamak üzere ne yapacağımı bilmiyorum. Bana göre "ona bağlı", matematikçilerin dili kötüye kullanmalarının bir başka ortak örneği olan (çeşitli durumlarda benim de kullandığımı itiraf etmem gereken) "bu nedenle"den de kötüdür çünkü yerine kullanıldığı "bu nedenle eğer" deyimi bir miktar ağız dolusudur.

Üstte §15.2'deki belirli örneğimize geri dönelim. Silindir durumunda ($\mathcal{M}\times\mathcal{V}$ çarpım demeti) ara kesitlerimiz basitçe, silindir etrafında her bir lifi yalnızca bir kez keserek dönen eğriler olarak gösterilebilir (Şekil 15.7a). Demet yalnızca bir çarpım uzayı olduğundan bununla uyumlu biçimde her bir lifi gerçel doğruya ait yalnızca bir kopya olarak ve bu nedenle yine uyumlu olarak liflere gerçel sayı koordinatları atayabiliriz. Her bir lif üzerindeki 0 koordinat değeri, "işaretli noktalar"a ait, $\mathcal{V}$ vektör uzayının *sıfırlarını* gösteren *sıfır bölümü*nün izini sürer. Genel bir ara kesit çember üzerinde (sıfır bölümü üzerindeki "yükseklik" çemberin her bir noktasında fonksiyona ait değer olmak üzere) gerçel değerli sürekli bir bbb



Şekil 15.6 (a) $\mathcal{B}$ demetine ait bir yatay kesit (ya da bölüm), bireysel her bir lifin tekil bir noktada buluştuğu, $\mathcal{B}$'de $\mathcal{M}$'ye ait sürekli bir görüntüdür. (b) Bu, bir fonksiyona ilişkin sıradan bir grafik fikrini geneller.



Şekil 15.7 S^1 üzerindeki bir doğru demetine ilişkin (ara) bir kesit her bir lifi yalnızca bir kez kesip bir kez dolanan bir döngüdür. (a) Silindir: sıfır bölümünü hiçbir yerde kesmeyen bölümler mevcuttur. (b) Möbius demeti: her bölüm sıfır bölümünü keser.

fonksiyon sunar. Açıktır ki sıfır bölümünü (S^1 üzerindeki yok olamayan fonksiyonlar) kesmeyen pek çok ara kesit mevcuttur. Örneğin silindire ait,

sıfır bölümüne paralel fakat onunla örtüşmeyen bir bölüm seçebiliriz. Bu, çember üzerinde sıfır olmayan *sabit* bir fonksiyonu gösterir.

Bununla birlikte $\mathcal{B}$ Möbius demetini ele aldığımızda işlerin oldukça farklı olduğunu görürüz. Okuyucu için artık $\mathcal{B}$'ye ait her ara kesitin sıfır bölümünü kesmek zorunda oluşunu (Şekil 15.7b) kabul etmek zor olmamalıdır. ($\mathcal{V}$ sıfırı "işaretli" bir vektör uzayı olduğundan sıfır bölümü kavramı hâlâ geçerlidir.) Önceki durumdan bu niteliksel farklılık, $\mathcal{B}$'nin topolojik olarak $\mathcal{M}\times\mathcal{V}$'den ayrı olma zorunluluğunu belirginleştirir. Biraz daha kesin olmak için çeşitli $\mathcal{V}$ liflerine tıpkı önceki gibi gerçel sayı koordinatları atamaya başlayabiliriz fakat çemberin bir noktasında işaretin "çevrilmek" zorunda oluşuna ilişkin bir uzlaşıyı benimsemeye gerek duyarız, öyleyse $\mathcal{B}$'nin bir ara kesiti çember üzerinde, çember etrafında dolaşıldığında işaret değiştirmesi dışında sürekli olan gerçel değerli bir fonksiyona karşılık gelir.[15.3]

Bu örnekte ara kesitler ailesinin doğası Möbius demetini silindirden ayırt etmeye yeterlidir. Ara kesitler ailesine ilişkin bir inceleme sıklıkla, aynı $\mathcal{M}$ taban uzayı üzerindeki pek çok farklı demeti ayırt etmeye ilişkin kullanışlı bir yönteme yol açar. Bununla birlikte Möbius demeti ve çarpım uzayı (silindir) arasındaki ayrım demetlere ilişkin belirli diğer örnekler durumundakinden biraz daha az aşırılıktadır. Bazen bir demet hiçbir ara kesite sahip olmaz! Özellikle önemli ve ünlü bir örneği göz önüne alarak devam edelim.

15.4 Clifford demeti

Bu örnekte biraz ciddileşeceğiz! $\mathcal{M}$ taban uzayı 2–boyutlu bir S^2 küresi olmakta ve $\mathcal{B}$ demet manifoldunun S^3 bir 3–küre olduğu ortaya çıkmaktadır. $\mathcal{V}$ lifleri S^1 çemberlerdir ("1–küreler"). Bu genel olarak, Heinz Hopf, 1931, tarafından işaret edilmiş topolojik bir oluşum olarak S^3 *Hopf liflemesi* biçiminde anılır. Bununla birlikte Hopf işlemi açık biçimde (tüm saygısıyla), (11. bölümden) dostumuz William Clifford'a (1873) atfedilen "Clifford paralelleri"ne ilişkin daha erken bir geometrik oluşuma dayanmaktadı. Geometrik olarak bu şekilde liflenmiş S^3'ü *Clifford demeti* olarak adlandıracağım.

Clifford demetini elde etmenin en açıklayıcı yolu ilk olarak karmaşık sayılara ilişkin (w, z) çiftlerinin $\mathbb{C}^2$ uzayını ele almaktır. (Burada $\mathbb{C}^2$'ye ilişkin ilgili yapı basit olarak onun 2–boyutlu bir karmaşık vektör uzayı oluşudur; *bkz.* §12.9.) $\mathcal{B}(= S^3)$ demet uzayımız

[15.3] Bu argümanı, üstte gösterildiği gibi $\mathcal{B}$'nin iki yamadan oluşturulmasını kullanarak ayrıntılı biçimde açıklayın.

$$|w|^2 + |z|^2 = 1$$

denklemiyle tanımlandığı üzere (§10.1'in sonuna bakın) $\mathbb{C}^2$'de yerleşmiş bulunan birim S^3 3–küre olarak düşünülür. Bu, bir 3–küre denklemi olan gerçel $u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1$ denklemiyle, $w = u + iv$ ve $z = x + iy$ ifadeleri w ve z'nin kendi gerçel ve sanal kısımları biçiminde ifadeler olmak üzere, tanımlanır. (Bu, gerçel Kartezyen koordinatlar x, y, z'ye sahip Öklitçi 3–uzaydaki olağan 2–küreye ilişkin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ denklemiyle dolaysız benzerliktedir.) Liflemeyi elde etmek üzere orijinden geçen *karmaşık düz çizgiler* ailesini (diğer bir deyişle $\mathbb{C}^2$'ye ait 1–boyutlu karmaşık vektör alt uzaylarını) ele alacağız. Bu tür her bir çizgi

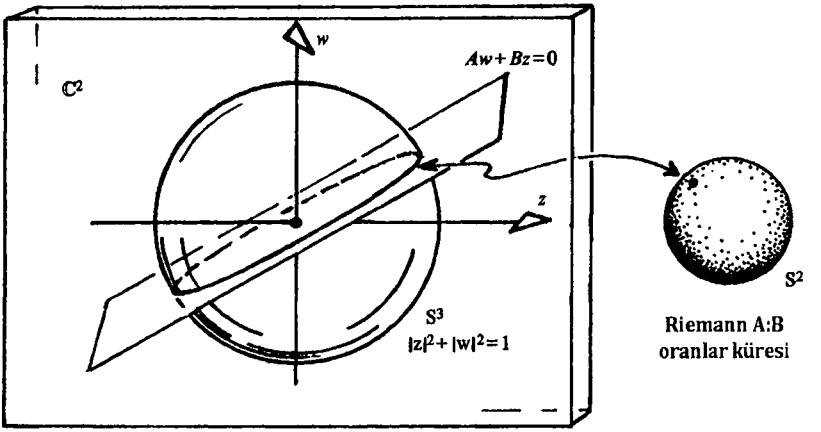
$$Aw + Bz = 0$$

biçimindeki bir denklem tarafından, A ve B (ikisi birlikte sıfır olmayan) karmaşık sayılar olmak üzere, verilir. Bu çizgi, 1–karmaşık boyutlu bir vektör uzayı olarak karmaşık düzlemin bir kopyasıdır ve S^3'le, o düzlemdeki birim çember olarak düşünebileceğimiz bir S^1 çemberi içinde buluşur (Şekil 15.8). Bu çemberler bizim $\mathcal{V} = S^1$ liflerimizdir. Farklı çizgiler yalnızca orijinde buluşur, o halde ayrı hiçbir iki S^1 ortak bir noktaya sahip olamaz. Bu nedenle bu S^1 ailesi aslında S^3'e demet yapısını veren lifleri oluşturur.

Taban uzayı $\mathcal{M}$ nedir? Açıktır ki A ve B'nin ikisini de aynı sıfır olmayan karmaşık sayıyla çarparsak aynı $Aw + Bz = 0$ doğrusunu elde ederiz, öyleyse doğruları birbirinden ayırt eden gerçekten $A : B$ oranıdır. A ya da B'den biri sıfır olabilir fakat aynı anda ikisi de olamaz. Bu tür oranların uzayı §8.3'te belli bir uzaklıkta olarak tanımlandığı üzere *Riemann küresi*dir. Bu nedenle demetimize ait $\mathcal{M}$ taban uzayını bu S^2 Riemann küresi olarak tanımlamak durumundayız. Böylece S^3'ün S^2 üzerindeki bir S^1 demeti olarak değerlendirilebildiğini görürüz. (Demet, taban uzayı ve lifin tümünün küre olmasına gerek duyarsak bu türdeki bir bağıntıyı diğer boyutlar için bekleyemeyiz. Bununla birlikte üstteki argümanda karmaşık sayılar w ve z'nin yerlerini dördeylerle değiştirmek yoluyla (özenle) elde edilebildiği gibi, S^7'nin gerçekten S^4 üzerindeki bir S^3 demeti olarak görülebildiği ortaya çıkar;[15.4] ayrıca, S^{15}, S^8 üzerindeki bir S^7 demeti olarak, w ve z'nin yerleri şimdi oktonyonlarla (*bkz.* §11.2 ve §16.2) değiştirilmek üzere, değerlendirilebilir; fakat bu herhangi daha yüksek boyutlu bir küre için işlemez.[7]

[15.4] Bu argümanı uygulayın. S^{15} durumunun nasıl yapıldığını görebiliyor musunuz?

[7] *Bkz.* Adams ve Atiyah, 1966.



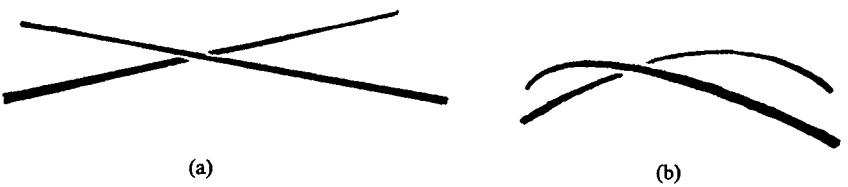
Şekil 15.8 Clifford demeti. $|w|^2 + |z|^2 = 1$'le verilen $\mathcal{B} = S^3$ 3–küresini içeren (w, z) koordinatlı $\mathbb{C}^2$'yi alın. Her bir $\mathcal{V} = S^1$ lifi orijinden geçen karmaşık bir düz $Aw + Bz = 0$ doğrusu ($\mathbb{C}^2$'ye ait 1–boyutlu karmaşık vektör alt uzayları) içindeki birim çemberdir ve $A : B$ oranıyla belirlenir. Bu tür oranların S^2 Riemann küresi $\mathcal{B}$ taban uzayıdır.

Clifford paralelleri olarak adlandırılan, S^3'teki bu çember ailesi özellikle ilginçtir. Büyük çemberler olan çemberler başlangıçtan itibaren ("paraleller" biçiminde adlandırılmalarının nedeni olarak) aynı uzaklıkta kalarak birbirleri etrafında bükülürler. Çemberlerin herhangi ikisi bağlanır, böylece (eş küresel olmayıp) *çarpık*tırlar. Öklitçi 3–uzayda (eş düzlemsel olmayıp) çarpık olan düz çizgiler, sonsuza doğru ilerlediklerinde birbirlerinden gittikçe daha da uzak hale gelme özelliğine sahiptir. Bununla birlikte 3–küre pozitif eğriliğe sahiptir, S^3'te jeodeziler olan Clifford çemberleri, §14.5'te ele alınan jeodezik sapma etkisi uyarınca birbirine karşı dengeleyici bir bükülme eğilimine sahiptir (*bkz.* Şekil 14.12). Bu iki etki Clifford paralelleri durumunda birbirlerini tam anlamıyla dengeler; *bkz.* Şekil 15.9. Clifford paralelleri ailesinin bir resmini elde etmek üzere S^3' kendi "güney kutbu"ndan stereografik olarak ekvatoral bir Öklitçi 3–uzaya, §8.3'teki Riemann küresi çalışmamızda benimsediğimiz S^2'nin Öklitçi düzleme ilgili stereografik yansıtmasıyla tam bir benzeşme içinde (*bkz.* Şekil 8.7) yansıtabiliriz. S^2'yle ilgili stereografik yansıtmada olduğu gibi S^3'teki çemberler bu yansıtma altında Öklitçi 3–uzaya dönüştürülür. Yansıtılmış Clifford çemberleri ailesi için Şekil 33.15'e bakın. Bu düzenleme burgaç kuramında yeni ufuklar açan bir öneme sahipti.[8] İlgili geometri §33.6'da açıklanacak.

[8] *Bkz.* Penrose, 1987; Penrose ve Rindler, 1986.

Üstte bu belirli (Clifford) demetin aslında hiçbir ara kesite sahip olmadığını ileri sürdüm. Bunu nasıl anlamalıyız? İlk olarak Clifford demetindeki bükümün varlığını, çember liflerinin çembere ilişkin döndürmelerle (O(2) grubu ya da eşdeğer olarak U(1), *bkz.* alıştırma [13.59]) verilen kesin bir simetriye sahip oluşu gerçeğine borçlu olduğu belirtilmelidir. Bu liflerin her birini belirli biçimde verilmiş bir çemberle, örneğin karmaşık $\mathbb{C}$ düzlemindeki birim çemberle, saptayamayız. Yapabilseydik, buna uygun olarak çember üzerinde belirli bir nokta seçerdik (*örn.* $\mathbb{C}$'deki birim çember üzerindeki 1 noktası) ve bu yolla Clifford demetinin bir ara kesitini elde ederdik. Ara kesitlerin var olmayışları meydana gelebilir çünkü Clifford çemberleri $\mathbb{C}$'deki birim çember üzerinde yalnızca modellenmiştir, onunla saptanmamıştır.

Elbette bu kendi içinde bize Clifford demetinin niçin hiçbir sürekli ara kesite sahip olmadığını söylemez. Bunu anlamak üzere Clifford demetine başka bir yolla bakmak yararlı olacaktır. Aslında S^3 küremizin her bir noktasının, S^2'ye, noktalarının birinde birim uzunlukta bir "spinör" tanjant olan vektör olarak yorumlanabileceği açığa çıkar.[15.5] §11.3'ten spinör bir nesnenin, 2π kadar tümüyle döndürüldüğünde orijinal halinin negatifine dönüşen bir nicelik olduğunu anımsayın. Yukarıdaki ifade uyarınca $\mathcal{B}(= S^3)$ demetimizin bir ara kesiti, $\mathcal{M}(= S^2)$ üzerindeki bu tür spinör birim vektörlere ilişkin bir sürekli alanı temsil eder. S^2 üzerinde sıradan birim tanjant vektörleriyle ilgili hiçbir evrensel sürekli alan bulunmadığı artık iyi bilinen topolojik bir gerçektir. (Bu bir "küresel köpeğin" saçını tarama sorunudur! Saçların tüm küre boyunca sürekli bir biçimde düz durması olanaksızdır.) Bu yönleri "spinör" hale getirmek açıktır ki yardımcı olmaz, böylece birim spinör tanjant vektörlerine ilişkin hiçbir evrensel

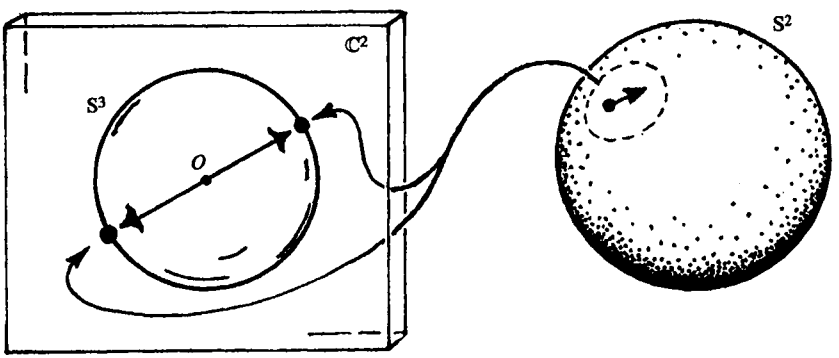


Şekil 15.9 (a) Öklitçi 3–uzayda çarpık düz çizgiler ilerledikçe, birbirlerinden git gide artan şekilde uzaklaşır. (b) S^3'te pozitif eğrilik, jeodezileri (büyük çemberler) birbirine doğru dengeleyici bir bükme eğilimi (jeodezik sapma yoluyla; *bkz.* Şekil 14.12) sunar. Clifford paralelleri için dengeleme mutlaktır.

[15.5] Bunu gösterin. *İpucu*: Tanjant vektörünü $u\partial/\partial v - v\partial/\partial u + x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$ olarak kabul edin.

sürekli alan da var olamaz. Bundan dolayı $\mathcal{B}(= S^3)$ demetimiz hiçbir ara kesite sahip değildir.

Bu örnekten kazanılacak oldukça fazla şey mevcut olduğundan, durum biraz daha tartışılmayı hak ediyor. İlk olarak, yukarıda açıklanan Clifford demetini hafifçe değiştirerek elde edilen S^2'ye tanjant birim vektörlerle ilgili gerçek $\mathcal{B}'$ demetini elde edebiliriz. Herhangi bir birim tanjant vektör spinör bir nesne olarak (biri diğerinin "negatif"i olan) yalnızca iki görünüme sahip olduğundan, spinör vektörden olağan vektöre geçmek istiyorsak bu ikisini tanımlamalıyız. Bunun $\mathcal{B}(= S^3)$ Clifford demeti biçimindeki anlamı, S^2'ye birim vektörlerin $\mathcal{B}'$ demetine ilişkin tekil bir nokta[9] elde etmek için S^3'e ait iki nokta tanımlanmalıdır. Tanımlanması gereken S^3'e ait nokta çiftleri bu 3-küre üzerindeki antipodal noktalardır. *Bkz.* Şekil 15.10. $\mathcal{B}''$nün lifleri hâlâ çemberdir. Bu yalnızca $\mathcal{B}(= S^3)$'e ait her bir çemberlifin $\mathcal{B}''$ne ait her bir çember lif "etrafında iki kez dolanması"dır. $\mathcal{B}''$nün her bir noktası artık S^2'ye ait bir noktayı, o noktadaki birim tanjant vektörüyle birlikte gösterir. Gerçekte $\mathcal{B}'$ uzayı topolojik olarak §12.1'de karşılaştığımız ve Öklitçi 3-uzaydaki bir nesnenin farklı uzamsal yönelimlerini (§ 11.3'te ele alınan kitap gibi) temsil eden $\mathcal{R}$ uzayıyla özdeştir. Bu durum, "nesne"mizi, kendi noktalarından birinde üzerinde bir okla (birim tanjant vektörü) işaretlenmiş S^2 küresi olarak düşündüğümüzde belirginleşir. Bu işaretli ok kürenin uzamsal yönelimini tümüyle sabitleyecektir.



Şekil 15.10 S^3'e ait antipodal noktalar tanımlanmak üzere, Clifford demetinin hafifçe değiştirilmesiyle elde edilen S^2'ye tanjant birim vektörlerin $\mathcal{B}'$ demeti. Bu tanımlama olmaksızın S^3'ü S^2'ye tanjant olan *spinör* vektörlerin $\mathcal{B}$ (Clifford) demeti olarak elde ederiz. $\mathcal{B}''$nün lifleri hâlâ çemberdir fakat $\mathcal{B}'$ye ait her bir çember lif $\mathcal{B}''$ne ait her bir çember lif etrafında iki kez dolanır.

[9] $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$nün *örten uzayı*dır deriz. Gerçekte $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$nün *evrensel* örten uzayı olarak adlandırılan şeydir. Basitçe bağlı olduğundan daha fazla örtülemez.

15.5 Karmaşık vektör demetleri, (ko)tanjant demetler

Clifford demeti (ve ayrıca $\mathcal{B}'$) ardındaki fikrin hafif genişletilmesi bize *karmaşık vektör demeti*ne ilişkin, bu durumda $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ olarak (ya da buna bağlı olarak $\mathcal{B}'^{\mathbb{C}}$) adlandıracağım güzel bir örnek verir. $Ax + By = 0$ doğrularının her biri 1–boyutlu bir karmaşık vektör uzayıdır. (Tüm doğru, tekil bir (w, z) vektörünün λ karmaşık sayısı katları ailesinden, çarpım sonucunda (w, z) $(\lambda w, \lambda z)$ olmak üzere, oluşur.) Bu karmaşık 1–uzay vektörünü artık $\mathcal{V}$ lifimiz olarak düşünürüz. S^2 Riemann küresi tıpkı önceki gibi $\mathcal{M}$ taban uzayımızdır.

Bununla birlikte doğru karmaşık vektör demeti $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$'yi elde etmek üzere yapmamız gereken bir şey daha var. $\mathbb{C}^2$'de tümü ortak şekilde (0,0) orijinine sahip farklı lifler ayrık değildir. Bu nedenle $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ elde etmek için, orijini Riemann küresinin bütününün ($\mathbb{CP}^1$; *bkz.* §15.6) bir kopyasıyla yer değiştirerek $\mathbb{C}^2$'yi değiştirmek zorundayız, böylece tek bir sıfıra sahip olmak yerine her biri bir life karşılık gelen ve demetin *sıfır kesiti*ni veren tüm Riemann küresi değerinde sıfırlara sahip oluruz (*bkz.* Şekil 15.11). Bu işleme (cebirsel geometri, karmaşık manifold kuramı, sicim kuramı, burgaç kuramı ve pek çok diğer alanda önemli bir fikir olan) $\mathbb{C}^2$'nin orijinini *patlatmak* denir. Lifler üzerindeki sıfırlara izin verildiğine göre artık $\mathcal{B}'$ye ait sürekli ara kesitler var olur. Bu ara kesitlerin S^2 üzerindeki *spinör alanlarını* gösterdikleri ortaya çıkar. S^2'ye ait bir noktada bulunan bir "spinör" yalnızca S^2'ye ait bir noktadaki "spinör birim tanjant vektörü" olarak resmedilmemelidir, ayrıca vektör artık pozitif bir gerçel sayı aracılığıyla "yukarıya ve aşağıya ölçeklendirilebilir" ya da sıfır olmasına izin verilir. S^2'ye ait bir noktadaki olası bu tür "spinörler"in bize 2–karmaşık boyutlu vektör uzayını sunduğu gösterilebilir.[10, [15.6]]

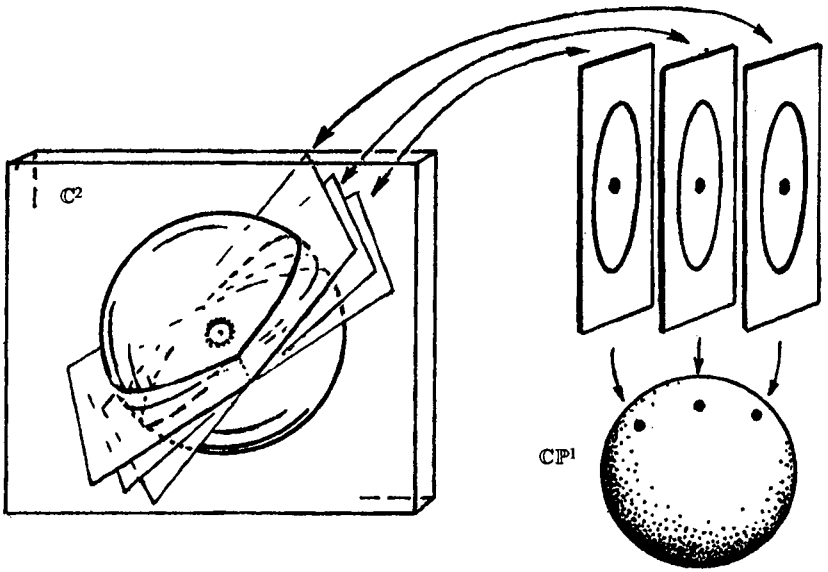
Tüm $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ demeti karmaşık (diğer bir deyişle holomorfik) bir yapıdır; aslında bu, karmaşık *doğru* demeti olarak adlandırılır çünkü lifler 1–karmaşık boyutlu doğrulardır. Bu holomorfik bir nesnedir çünkü oluşumu tümüyle holomorfik kavramlar biçiminde verilir.[[15.7]] Özelde, taban uzayı karmaşık bir eğridir, Riemann küresi (*bkz.* §8.3) ve lifler 1–boyutlu karmaşık vektör uzaylarıdır. Bu nedenle ayrıca burada ilgili başka bir ara kesit kavramı da mevcuttur; *holomorfik* ara kesit. Holomorfik ara kesit kendisi de demetin bir alt manifoldu olan karmaşık bir demete ait (kısaca yerel olarak holomorfik denklemlerle verilen anlamına gelen) bir ara kesittir.

---

[10] 2-spinörlere ilişkin bu geometrik açıklama biraz ayrıntılı olarak Penrose ve Rindler, 1984, bölüm 1'de tartışılır.

[15.6] Bu tür her spinör alan niçin S^2'nin en az bir noktasında sıfır değerini alır.

[15.7] Bunu ayrıntısıyla açıklayın.

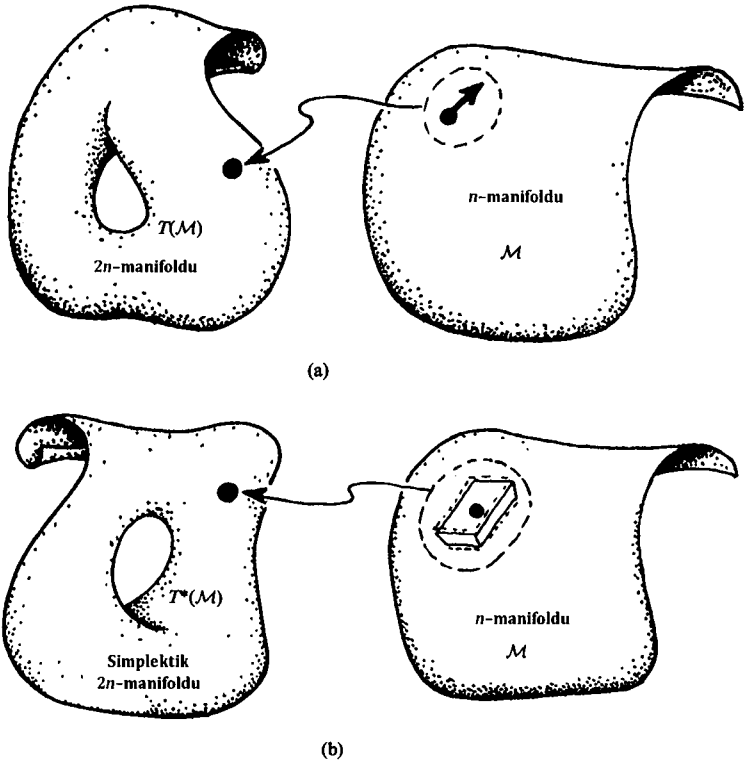


Şekil 15.11 Yalnızca birim çemberini almak yerine tüm $Ax + By = 0$ doğrusunu alarak, $\mathcal{V}$ lifi artık karmaşık bir 1–boyutlu vektör uzayı olmak üzere karmaşık $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ doğru demetinin bir örneğini elde ederiz. $S^2 = \mathbb{CP}^1$ (ayrıca bir karmaşık manifold olan; *bkz.* §8.3, §15.6) Riemann küresi hâlâ $\mathcal{M}$ taban uzayıdır. Farklı lifleri ayrık yapmak üzere $(0, 0)$ orijinini, Riemann küresinin tümüyle yer değiştirerek bize Riemann küresi değerinde sıfırlar verecek şekilde patlatmamız gerekir.

Bazen karmaşık bir doğru demeti durumunda bu tür bir ara kesit taban uzayı üzerindeki *bükülü* bir holomorfik fonksiyon olarak adlandırılır. Bu tür şeyler saf matematiğin ve matematiksel fiziğin pek çok alanında dikkate değer öneme sahiptir.[11] Ayrıca burgaç kuramında da belirli bir rol oynarlar (*bkz.* §33.8). Holomorfik kesitler sıkıca kontrol edilen önemli bir aileyi oluşturur. $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ durumunda *sıfır* kesitinden başkaca hiçbir (evrensel) holomorfik kesitin bulunmadığı (diğer bir deyişle her yerde sıfır olduğu) ortaya çıkar.

Bu oluşumun ($\mathcal{B}'$den $\mathcal{B}''$ne geçişin karşılığı olan) küçük bir değişimiyle S^2 üzerinde spinör alanlar yerine vektör alanlar elde ederiz. Uygun $\mathcal{B}'^{\mathbb{C}}$ demeti yine karmaşık bir vektör demeti olarak yorumlanabilir; gerçekte buna

[11] Örneğin §9.5'te (gerçel değişkenli) fonksiyonların (kuantum alan kuramı için yaşamsal olan) pozitif ve negatif frekans kısımlarına ayrılması holomorfik fonksiyonlara yapılan genişlemeler şeklinde incelenmişti fakat okuyucu sabit fonksiyonlara ilişkin belirli bir tuhaflığı anımsayabilir. Bu konu, bunların bükülü holomorfik fonksiyonlar olmalarına ve §§33.8, 10'daki burgaç kuramıyla ilintilendirilmelerine izin verdiğimizde büyük oranda aydınlanacaktır.



Şekil 15.12 (a) Genel bir $\mathcal{M}$ manifolduyla ilgili olarak, $\mathrm{T}(\mathcal{M})$ tanjant demetinin her bir noktası $\mathcal{M}$'nin bir noktasını $\mathcal{M}$'ye orada tanjant olan bir vektörle gösterir. $\mathrm{T}(\mathcal{M})$'nin bir ara kesiti $\mathcal{M}$ üzerindeki bir vektör alanını gösterir. (b) $\mathrm{T}^*(\mathcal{M})$ kotanjant vektörü de buna benzer fakat vektörler yerine kovektörlerle birlikte. Kotanjant demetleri her zaman simplektik manifoldlardır.

$\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ vektör demetinin *karesi* denir. $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$'yle aynı biçimde oluşturulur, yalnız artık her bir (w,z) noktasını kendi "antipodal" $(-w,-z)$ noktasıyla, (w,z)'nin karmaşık λ sayısıyla çarpımı artık ($(\lambda w,\lambda z)$ yerine) $(\lambda^{1/2}w,\lambda^{1/2}z)$'yle verilmek üzere, belirleriz.

Bu bölümü bitirmek üzere, $\mathcal{B}'^{\mathbb{C}}$ demetinin gerçel terimlerle S^2'ye ait $\mathrm{T}(\mathrm{S}^2)$ *tanjant demeti* denen şey olarak yeniden yorumlanabildiğini belirtmeliyim. Genel bir $\mathcal{M}$ manifolduna ilişkin $\mathrm{T}(\mathcal{M})$ tanjant demeti, noktalarından her biri $\mathcal{M}$'nin bir noktasını $\mathcal{M}$'ye o noktada tanjant olan bir vektörle gösteren uzaydır. *Bkz.* Şekil 15.12a.[15.8] $\mathrm{T}(\mathcal{M})$'nin bir ara kesiti $\mathcal{M}$ üzerindeki bir vektör alanını gösterir. Bir $\mathcal{M}$ manifoldunun, noktalarının

[15.8] S^2 üzerinde gerçel bir demet olarak yorumlanan $\mathcal{B}'^{\mathbb{C}}$'nin aslında $T(\mathrm{S}^2)$'yle aynı olduğunu gösterin. *İpucu*: Alıştırma [15.5]'i yeniden inceleyin.

her biri $\mathcal{M}$'nin bir noktasını o noktadaki bir *kovektör*le gösteren (Şekil 15.12b) $T^*(\mathcal{M})$ *kotanjant demeti* belki de daha büyük fiziki öneme sahip bir kavramdır. 20. bölümde bu fikirlerin önemiyle ilgiyi bir şeye kısacık bir bakış atacağız. $T^*(\mathcal{M})$'ye ait ara kesitler $\mathcal{M}$ üzerindeki kovektör alanlarını gösterir. Kotanjant demetlerinin her zaman, klasik mekanikle ilgili dikkate değer bir gerçek olan simplektik manifoldlar (*bkz.* §14.9, §§20.2, 4) olduğu açığa çıkar. Ayrıca buna bağlı olarak çeşitli türdeki tensör demetlerini de tanımlayabiliriz. Bir tensör alanı bu tür bir demete ait bir ara kesit olarak yorumlanabilir.

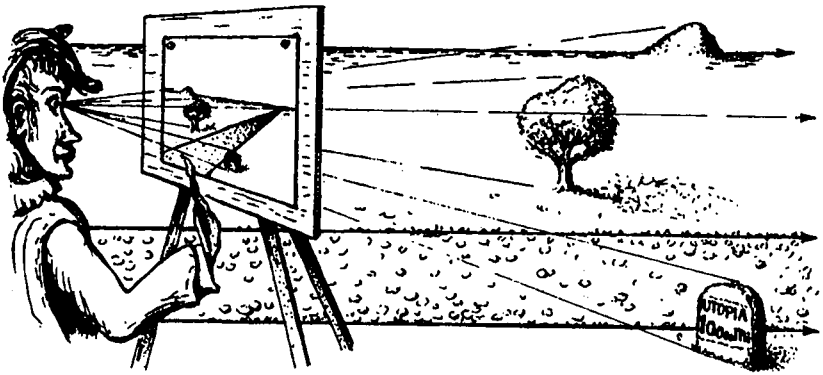
15.6 İzdüşümsel uzaylar

Genel bir vektör uzayıyla ilgili önemli başka bir kavram da *izdüşümsel uzay* kavramıdır. Vektör uzayının kendisi izdüşümsel uzay üzerinde "neredeyse" bir demettir. Vektör uzayının orijinini ayırırsak böylece izdüşümsel uzay üzerinde, lif orijini çıkarılmış bir doğru olmak üzere bir demet elde ederiz; alternatif olarak üstte §15.5'te verilen belirli $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ örneğindeki gibi vektör uzayının orijinini "patlatabiliriz". (Buna birazdan döneceğiz.) İzdüşümsel uzaylar matematikte dikkate değer bir öneme ve kuantum mekaniğinin geometrisinde (*bkz.* §21.9 ve §22.9) ve ayrıca burgaç kuramında (§33.5) da oynayacak belirli bir role sahiptir. O halde bu uzaylar üzerine burada kısaca yorum yapmam uygun olur.

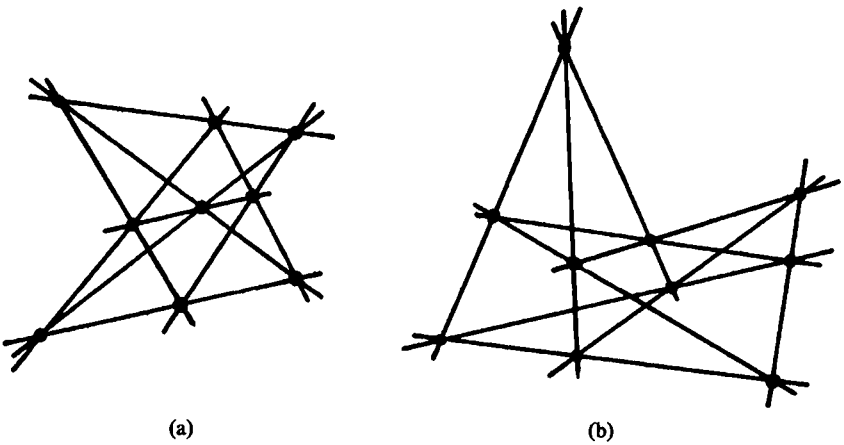
İzdüşümsel uzay fikri orijinal olarak, Öklitçi geometri bağlamında alınmak üzere, çizim ve resim yapmadaki perspektif çalışmasından gelir görünmektedir. Öklitçi düzlemde iki ayrık doğrunun paralel olmadıkça her zaman kesiştiğini anımsayın. Bununla birlikte düşey bir kağıt parçası üzerine yatay bir düzlemde (düz bir yola ait sınırlar diyelim) bizden uzaklaşan bir çift paralel doğru çizersek, çizimdeki doğrular ufuktaki bir "yok olma noktası"nda kesişir görünür (*bkz.* Şekil 15.13). İzdüşümsel geometri bu yok olan noktaları, "sonsuzdaki noktalar"ı paralel doğruların bu ek noktalarda kesişmelerine olanak sağlayan Öklitçi düzleme eklemek yoluyla ciddiye alır.

Olağan Öklitçi 3–uzaydaki doğrular hakkında, ifade edilmesi, paralel doğrularla ilgili istisnalar yapılması zorunluluğu nedeniyle tuhaf olan pek çok teorem mevcuttur. Şekil 15.14'te kayda değer iki örneği, diğer bir deyişle Pappos teoremi[12] (MÖ 3. yüzyıl sonlarında bulundu) ve Desargues teoremini (1636'da bulundu) gösterdim. Her iki durumda da ("zıt" biçimde

[12] Latince versiyon "Pappus" bir biçimde daha genel olmasına rağmen burada Yunanca yazımı kullanıyorum.



Şekil 15.13 İzdüşümsel geometri "sonsuzdaki noktaları", paralel doğruların orada kesişmesine olanak sağlayarak Öklitçi düzleme bağlar. Sanatçının dik bir tuvale çizilen resminde kendisinden uzaklaşan bir çift yatay paralel doğru, yatay düz bir yolun sınırları, ufuktaki bir "yok olma noktası"nda kesişir görünür.



Şekil 15.14 Düzlem izdüşümsel geometrisine ilişkin iki ünlü teoremin düzeni: (a) 9 çizgi ve işaretlenmiş 9 noktalı Pappos teoremi ve (b) 10 çizgi ve işaretlenmiş 10 noktalı Desargues teoremi. Sav her bir durumda, işaretli noktaların biri bir çizgi üçlüsünün kesişim noktası olduğunda geri kalan işaretli noktaların da bu şekilde olacağıdır.

ifade ettiğim) teorem, diyagramda belirtilen tüm düz çizgiler (Pappos için 9, Desargues için 10), siyah noktalarla (Pappos'unkinde tümü 9, Desargues'inkinde tümü 10 adet olan siyah nokta mevcut olmak üzere) işaretlenmiş noktalardan biri dışında tümünde üçlüler halinde kesişiyorsa bu durumda kalan siyah noktada kesişir biçimde belirtilen çizgi üçlülerinin ortak bir noktaya sahip olduğunu ileri sürer. Bununla birlikte, bu biçimde belirtilen teoremler yalnızca karşılıklı olarak *paralel* bir çizgi üçlüsü or-

tak bir noktaya, diğer bir deyişle bir "sonsuzda nokta"ya sahip kabul edilirse doğrudur. Bu yorumla çizgiler paralelse teoremler doğru olur. Ayrıca çizgilerden biri tümüyle sonsuzda kalsa da doğru olurlar. Bu nedenle Pappos ve Desargues teoremleri izdüşümsel geometride Öklitçi geometriden daha uygun teoremlerdir.

n–boyutlu bir izdüşümsel $\mathbb{P}^n$ uzayını nasıl oluşturuz? En kestirme yol $(n+1)$–boyutlu bir $\mathbf{V}^{n+1}$ vektör uzayı almak ve $\mathbb{P}^n$ uzayımızı $\mathbf{V}^{n+1}$'in 1–boyutlu vektör alt uzaylarının uzayı olarak değerlendirmektir. (Bu 1–boyutlu vektör alt uzayları $\mathbf{V}^{n+1}$'in orijininden geçen doğrulardır.) $\mathbb{P}^n$'deki (kendisi $\mathbb{P}^1$'e bir örnek olan) düz bir doğru $\mathbf{V}^{n+1}$'e ait 2–boyutlu (orijinden geçen bir düzlem) bir alt uzay tarafından, $\mathbb{P}^n$'ye ait eşdoğrusal noktalar bu tür bir düzlemde bulunan doğrular olarak ortaya çıkmak üzere, verilir (Şekil 15.15). Ayrıca $\mathbb{P}^n$'ye ait daha yüksek boyutlu düz alt uzaylar da, bunlar $\mathbb{P}^n$'de içerilmiş $\mathbb{P}^r$ izdüşümsel uzayları olmak üzere $(r < n)$, mevcuttur. Her bir $\mathbb{P}^r$, $\mathbf{V}^{n+1}$'in $(r+1)$–boyutlu bir vektör alt uzayıdır.

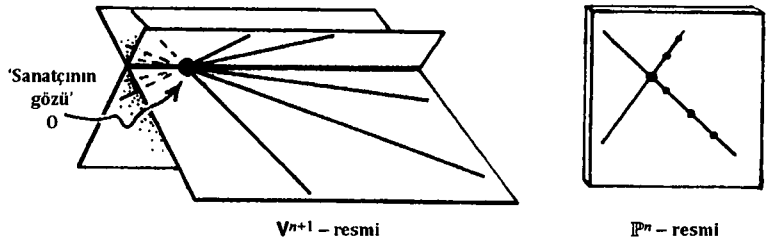
Bu oluşturma $(n = 2)$ resimli gösterimdeki perspektif işlemlerini biçimlendirir; sanatçının gözünü $\mathbf{V}^3$ vektör uzayının O orijininde konumlanmış olarak ele alabildiğimiz için bu uzay sanatçının Öklitçi 3–uzay ortamıdır. O'dan geçen bir ışık ışını (sanatçının gözü), sanatçı tarafından tekil bir nokta olarak gözlenir. Bu nedenle sanatçının, bu tür ışık ışınlarının bütünlüğü olarak kabul edilen "görüş alanı" izdüşümsel bir $\mathbb{P}^2$ düzlemi olarak düşünülebilir . (Şekil 15.15'e yeniden bakın.) Uzayda, sanatçının algıladığı (O'dan geçmeyen) herhangi bir düz çizgi, $\mathbb{P}^2$'de üstte verilen bir "düz çizgi" tanımı uyarınca, o çizgiyi O'ya birleştiren düzleme karşılık gelir.

Sanatçının algılanan sahnenin tam bir resmini (O'dan geçmeyen) belirli bir düz düzlemle örtüşen bir tuvale çizdiğini düşünün. Bu tür herhangi bir düzlem tüm $\mathbb{P}^2$'nin yalnızca bir kısmını yakalayacaktır. Kendisine paralel olan ışık ışınlarını kesinlikle kesmeyecektir. Yine de bu tür çeşitli düzlemler $\mathbb{P}^2$'nin tümünü örten uygun bir "yama işi" sağlayacaktır (üçü yeterli olur)[13, [15.9]]. Bu tür bir düzlemdeki paralel doğrular birbirlerindeki ortak bir *yok olma noktasına* sahip doğrular olarak gösterilecek.

---

[13] Sanatçının görüş alanının $\mathbb{P}^2$ yerine daha uygun olarak bir S^2 *küresi* olduğunu düşünme konumunu, O'dan geçen yönlendirilmiş ışık ışınlarını, metin içinde (üstü kapalı olarak) kullandığım yönlendirilmemiş olanlar yerine sanatçının görüş alanı olarak kabul edeceğimiz şekilde kabul etmek mantıksız olmaz. Küre izdüşümsel düzlemin yalnızca iki katlı bir örtüsüdür ve bunda bir "geometri" sağlarken tek tehlike, bu metinde, "doğru" çiftlerinin (diğer bir deyişle büyük çemberlerin) tekil noktalar yerine nokta çiftleri olarak kesişmesidir. Sanatçı S^2 küresini örtmek üzere üç yerine dört tuvale gerek duyar.

[15.9] Bunun nasıl yapıldığını açıklayın. *İpucu*: Kartezyen (x, y, z) koordinatlarını düşünün. Bir seferde ikisini, tuvali bu bütünlüğe üçüncü kümeyle verilmiş şekilde düşünerek ele alın.



Şekil 15.15 n–boyutlu bir izdüşümsel $\mathbb{P}^n$ uzayını oluşturmak üzere $(n+1)$–boyutlu bir V^{n+1} vektör uzayı alın ve $\mathbb{P}^n$'yi V^{n+1}'in 1–boyutlu vektör alt uzaylarının (V^{n+1}'in orijininden geçen doğrular) uzayı olarak değerlendirin. $\mathbb{P}^n$'deki düz bir doğru V^{n+1}'e ait 2–boyutlu (orijinden geçen bir düzlem) bir alt uzay tarafından, $\mathbb{P}^n$'ye ait eşdoğrusal noktalar bu tür bir düzlemde bulunan, O'dan geçen doğrular olarak ortaya çıkmak üzere, verilir. Bu hem gerçel ($\mathbb{RP}^n$) durumunda hem de karmaşık ($\mathbb{CP}^n$) durumunda geçerlidir. $\mathbb{RP}^2$'nin geometrisi resimli gösterimdeki perspektif işlemlerini biçimlendirir: sanatçının gözünü, V^3'ü sanatçının Öklitçi 3–uzay ortamı kabul ederek, V^3 vektör uzayının O orijininde konumlanmış olarak ele alın. O'dan geçen bir ışık ışını sanatçı tarafından tekil bir nokta olarak gözlenir. Sanatçının bir "düz doğru" olarak çizdiği şey ($\mathbb{RP}^2$'deki $\mathbb{RP}^1$) (sanatçının tuvalindeki herhangi belirli bir seçim üzerinde) aslında o doğruyu O'ya birleştiren düzleme (V^2) karşılık gelir. O'dan geçen düzlem çiftleri, V^3'teki paralel doğruları O'ya birleştirdiklerinde bile her zaman kesişir. (Örneğin, resmin sol tarafındaki alt iki doğru Şekil 15.13'teki yolun sınırları rolünü oynar.)

Ya gerçel izdüşümsel uzayları, $\mathbb{P}^n = \mathbb{RP}^n$, ya da karmaşık olanları, $\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n$, ele alabiliriz. Karmaşık izdüşümsel uzaylara ilişkin bir örneği, diğer bir deyişle $\mathbb{CP}^1$ olan *Riemann küresi*ni şimdiden ele aldık. Riemann küresinin, ikisi birlikte sıfır olmayan karmaşık (w, z) sayı çiftlerinin oranlarına ilişkin, $\mathbb{C}^2$'deki orijinden geçen karmaşık doğrulara ait uzay olarak ortaya çıktığını anımsayın. (*Bkz.* Şekil 15.8.) Daha genel olarak herhangi bir izdüşümsel uzay *homojen* koordinatlar olarak adlandırılan şeye atanabilir. Bunlar $\mathbb{P}^n$'den ortaya çıkan $(n+1)$–boyutlu $\mathbf{V}^{n+1}$ vektör uzayına ilişkin $z^0, z^1, z^2, \ldots, z^n$ koordinatlarıdır fakat $\mathbb{P}^n$'yle ilgili homojen koordinatlar bireysel z değerlerinin (z'lerin tümü sıfır olmamak üzere) kendileri yerine n adet bağımsız

$$z^0 : z^1 : z^2 : \ldots : z^n$$

*oranı*dır.[15.10] z^r'lerin tümü gerçelse, bu durumda bu koordinatlar $\mathbb{RP}^n$'yi açıklar ve $\mathbf{V}^{n+1}$ ($n+1$ adet karmaşık sayıya ait uzay olan; *bkz.* §12.9) $\mathbb{R}^{n+1}$'le saptanabilir.

İzin verilebilir homojen koordinatlardan O = (0, 0, ..., 0) noktasını dışladığımız için onu sırasıyla $\mathbb{RP}^n$ ya da $\mathbb{CP}^n$ üzerindeki bir demet olarak

[15.10] Neden n adet bağımsız oran olduğunu açıklayın. Birlikte $\mathbb{P}^n$'yi örten n adet sıradan koordinatın, $n+1$ farklı koordinat yaması için (z'lerden oluşturulan) $n+1$ adet kümesini bulun.

düşündüğümüzde $\mathbb{R}^{n+1}$ ya da $\mathbb{C}^{n+1}$'e ait orijin ($\mathbb{R}^{n+1} - O$ ya da $\mathbb{C}^{n+1} - O$ vermek üzere) dışta tutulur.[14] Böylece lifin de orijini çıkarılmış olmak zorundadır. Gerçel durumda bu, lifi iki parçaya ayırır (fakat bu, demetin iki parçaya ayrıldığı anlamına gelmez; gerçekte $n > 0$ olduğunda $\mathbb{R}^{n+1} - O$ bağlanır).[15.11] Karmaşık durumda lif, bağlı olan (sıklıkla $\mathbb{C}^*$ yazılan) $\mathbb{C} - O$'dur. Her durumda orijini, bir vektör demeti elde edebileceğimiz şekilde eski durumuna getirmeyi seçebiliriz. Bunu yaptığımız durumdaysa bu, orijini basit biçimde $\mathbb{R}^{n+1}$ ya da $\mathbb{C}^{n+1}$'e geri yerleştirmekten daha fazlası anlamına gelir. Üstte ele alınan belirli $\mathbb{C}^2$ durumundaki gibi orijini her bir life ayrı ayrı koymak zorundayız ki orijin "patlatılmış" olsun. Demet uzayı, O yerine bir $\mathbb{RP}^n$ yerleştirilmiş $\mathbb{R}^{n+1}$ ya da $\mathbb{CP}^n$ yerleştirilmiş bir $\mathbb{C}^{n+1}$ haline gelir.

Karmaşık durumda, tıpkı belirli $n = 1$ durumunda Clifford demetini oluştururken yaptığımız gibi, $\mathbb{C}^{n+1}$'deki birim $(2n + 1)$–küresini, S^{2n+1}, ele alabiliriz. Her lif bir S^1 çemberindeki S^{2n+1}'i keser, böylece artık S^{2n+1}'i $\mathbb{CP}^n$ üzerindeki bir S^1 demeti olarak elde ederiz. Bu yapı, bu güzel geometrik gerçek kuantum fizikçilerinin düşünüşleri üzerinde yalnızca seyrek olarak etkili olsa da, içinde $(n + 1)$–durumlu bir sistemle ilgili fiziki olarak ayrık kuantum durumlara ait uzayın bir $\mathbb{CP}^n$ olduğunu bulacağımız kuantum mekaniği geometrisinin temelinde yatar. Ek olarak, normalde birim modüllü bir karmaşık sayı olarak düşünülüp *faz* olarak adlandırılan bir nicelik mevcuttur, oysa ki bu gerçekten *bükülü* bir birim modüllü karmaşık sayıdır.[15] Bu konulara bu bölümün sonunda ve kuantum mekaniğini 21 ve 22. bölümlerde (*bkz.* §21.9, §22.9) ciddi olarak ele alırken dönülecek.

15.7 Demet bağlantısındaki önemsiz olmama durumu

Okuyucuyu bazı önemli lif demet ve demetle ilgili konularda çabucak bir gezintiye çıkardım! İlişkili bazı geometri ve topolojiler oldukça karışıktır, bu nedenle okuyucu bunların tümü biraz şaşırtıcı görünüyorsa kaygılanmamalıdır. Şimdi, fikri elde etmek üzere (en azından başlangıçta!) bu kadar çok boyut gerekmeyecek anlamda biraz daha basit bir şeye dönelim.

---

[14] *Bkz.* not 15.5.

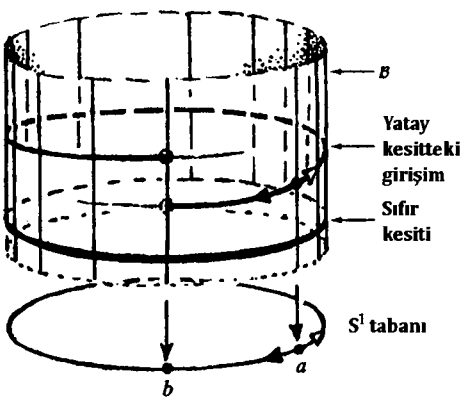
[15.11] Bu geometriyi, $\mathbb{RP}^n$ üzerindeki $\mathbb{R}^{n+1} - O$ demetinin S^n üzerindeki $\mathbb{R}^{n+1} - O$ demetiyle ($\mathbb{R}^+$ lifi pozitif gerçeller olmak üzere), $\mathbb{RP}^n$'nin iki katlı bir örtüsü olarak S^n demetinin birleşimi olarak anlaşılabileceğini göstererek açıklayın.

[15] Bu gerçek "Berry fazı" olarak bilinen, *bkz.* Berry, 1984, 1985; Simon, 1983; Aharonov ve Anandan 1987; ayrıca Woodhouse, 1991, s225–249, "1"in birim çember üzerinde nerede olduğunu bilmememiz gerçeğini hesaba katan ilgi çekici ve önemli bir kuantum mekaniksel kavramla ilgilidir, diğer bir deyişle bu tür bir "sayı" bir S^1 demetiyle ilgili bir S^1 lifinin bir elemanıdır, bu durumda $\mathbb{CP}^n$ üzerindeki S^{2n+1}'dir,

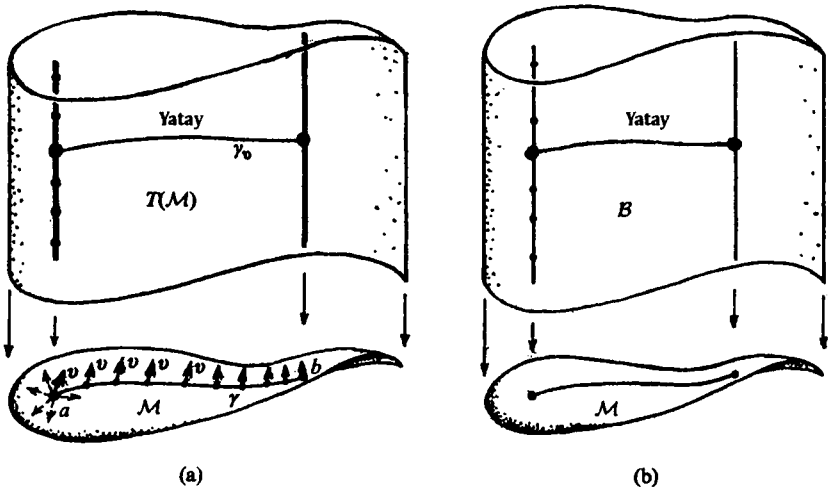
Aslında bir sonraki demet örneğim oldukça basit olmasına rağmen demet kavramında daha önce karşılaşmadığımız önemli bir inceliği ifade eder. Yukarıda ele alınan tüm demetlerde, demete ilişkin önemsiz olmayış durumu geometrinin topolojik bir görünümünde, topolojik bir karakter olan "büküm" biçiminde açığa çıktı. Bununla birlikte topolojik olarak önemsiz olmasına karşın bir demetin önemli bir anlamda önemsiz olmayışı mükemmel derecede olasıdır.

$\mathcal{M}$ taban uzayının sıradan bir S^1 çemberi ve $\mathcal{V}$ lifinin 1–boyutlu gerçel bir vektör uzayı olduğu orijinal örneğimize geri dönelim. $\mathcal{B}$ demetimizi artık, $\mathcal{M}$ etrafında dolandığımızda $\mathcal{V}$ lifini basitçe "çevirerek" bize Möbius demetini verenden bir biçimde farklı bir yolla oluşturacağız. Bunun yerine onu bir 2 katsayısıyla *esnet*elim. Bu Şekil 15.16'da gösteriliyor. Bu, 1–boyutlu gerçel vektör uzayına ilişkin Möbius demetinde kullanılan $v \mapsto -v$ "çevirme" simetrisinden farklı bir simetriden faydalanır. $v \mapsto 2v$ "esnetme" dönüşümü $\mathcal{V}$'nin vektör uzayı yapısını olduğu gibi korur. Artık konu demetin topolojisi değildir. Topolojik olarak tıpkı Şekil 15.4a'daki ilk örneğimizdeki gibi basitçe bir $S^1 \times \mathbb{R}$ silindirine sahibiz fakat artık demette, üzerindeki uygun türde bir *bağlantı* yoluyla tanıyabileceğimiz faklı türde bir "zorlama" mevcuttur.

Önceki bağlantı türümüz 14. bölümde tartışıldığı üzere, $\mathcal{M}$ manifoldundaki eğriler boyunca taşınan tanjant vektörlerine ilişkin bir "paralellik" kavramıyla ilgiliydi. Bunu şu anki bağlamda görmenin yolu $\mathcal{M}$'ye ait bir $T(\mathcal{M})$ tanjant demeti biçiminde düşünmektir. $T(\mathcal{M})$'nin bir noktası



Şekil 15.16 $\mathcal{V}$ lifine ilişkin ($\mathcal{V}$'nin hâlâ 1–boyutlu bir gerçel V' vektör uzayı olduğu) şekiller 15.4, 15.5 ve 15.7'dekinden farklı bir simetri kullanılmış, diğer bir deyişle pozitif bir katsayıyla esnetilmiş (burada 2), $\mathcal{M} = S^1$ üzerindeki "zorlanmış" bir $\mathcal{B}$ demeti. Topoloji tıpkı bir $S^1 \times \mathbb{R}$ silindirindeki gibidir fakat $\mathcal{B}$ üzerindeki bir bağlantı yoluyla tanınabilecek bir "zorlama" mevcuttur. Bu bağlantı $\mathcal{B}$'deki eğrilerle ilgili yerel bir "yatay" kavramı tanımlar. Yine de tabandaki a'dan b'ye, doğrudan (siyah ok) ve dolaylı (beyaz ok) olan iki yolu ele alın. b'ye ulaştığımızda, buradaki "yatay" kavramının yol bağımlılığını belirten bir çelişki buluruz.



Şekil 15.17 Genel bir $\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki bağlantı türleri karşılaştırılmaktadır. (a) $\mathcal{M}$'deki eğriler boyunca taşınan tanjant vektörleriyle ilgili "paralel" kavramını tanımlayan orijinal kavram (§14.3) $\mathcal{M}$'ye ait $T(\mathcal{M})$ tanjant demetleri biçiminde açıklanır (Şekil 15.12a). $\mathcal{M}$'ye ait bir a noktasındaki belirli bir v tanjant vektörü $T(\mathcal{M})$'de, a üzerindeki lifin belirli bir noktasıyla gösterilir. $T(\mathcal{M})$'de bu noktadaki "yatay" bir γ_v eğrisi, v'nin $\mathcal{M}$'deki bir γ eğrisi boyunca paralel taşınmasını gösterir. (b) Aynı fikir, $T(\mathcal{M})$'den farklı olarak, $\mathcal{M}$'deki "sabit taşıma" $\mathcal{B}$'deki "yatay" kavramıyla tanımlanmak üzere, $\mathcal{M}$ üzerindeki bir $\mathcal{B}$ demeti için de geçerlidir.

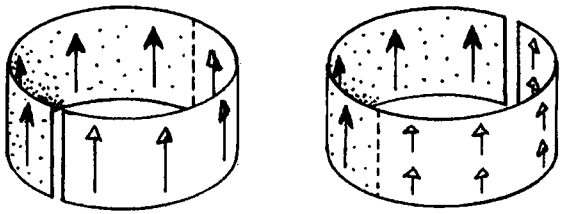
$\mathcal{M}$'ye ait bir a noktasında $\mathcal{M}$'ye tanjant olan bir v vektörünü gösterdiğinden v'nin $\mathcal{M}$'deki bir γ eğrisi boyunca taşınması yalnızca $T(\mathcal{M})$'deki bir γ_v eğrisiyle gösterilecektir. *Bkz.* Şekil 15.17a. v'nin taşınmasıyla ilgili "paralel"in ifade ettiği anlamdaki bir kavrama sahip olmak, demetteki γ_v eğrisiyle ilgili "yatay" kavramına sahip olmakla (demetteki γ_v'yi "yatay" tutmak, v'yi tabandaki γ boyunca "sabit" tutmak sayıldığından) eşdeğerdir. Buradaki fikir, bu kavramın tanjant demetinden farklı demetlerde de geçerli olması için genellenmesidir; *bkz.* Şekil 15.17b. Bu tür bir genellemenin başlangıcını 14. bölümde zaten görmüştük çünkü tanjant vektörlerinden farklı kavramlarda da, diğer bir deyişle kovektörler ve genel olarak $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$–tensörlerinde geçerli olması için bağlantı kavramını genişletmiştik. Bununla birlikte, §15.1'de belirtildiği üzere bu oldukça sınırlı türde bir genellemedir çünkü bağlantının vektörlerden bu farklı türdeki kavramlara genişletilmesi geriye hiçbir ek serbestlik kalmadan (esasen kotanjant demeti ve tanjant demetlerinin tümüyle tanjant demeti tarafından belirlenmesi nedeniyle) benzersiz biçimde reçetelendirilmiştir. $\mathcal{M}$ üzerindeki genel bir demetle ilgili, tanjant demetiyle herhangi bir birliğe gerek yoktur,

böylece bağlantının bu tür bir demet üzerine etki biçimi onun tanjant vektörleri üzerine etki biçiminden bağımsız olarak belirtilebilir. $\mathcal{M}$ üzerinde $T(\mathcal{M})$'yle ilgili olmayan bir demet için bir "paralellik" biçiminde konuşmak o kadar da uygun değildir çünkü (yerel) "paralellik" kavramı temelde tanjant vektörlerinin yönleri anlamına gelen *yönlere* atfedilen bir şeydir. Buna göre, $T(\mathcal{M})$'yle açıklanan tanjant vektörlerinin karşılığı olan "paralellik" yerine, demetle açıklanan nicelikle ilgili yerel bir "sabitliğe" değinmek daha olağandır. Bu tür yerel bir "sabitlik" kavramı, diğer bir deyişle demetteki "yataylık", *demet bağlantısı* olarak bilinen yapıyı sunar.

Şimdi, Şekil 15.16'da resmedildiği üzere, S^1 çemberi üzerindeki "zorlanmış" $\mathcal{B}$ demetimize geri dönelim. $\mathcal{B}$'nin S^1 üzerindeki "topolojik olarak önemsiz" bir bölgede durma anlamında "önemsiz" olan bir parçasını ele alın; bunu basitçe bağlı $S^1 - p$ bölümünün üzerinde duran, p, S^1'e ait bir nokta olmak üzere, $\mathcal{B}_p$ parçası olarak kabul edin (Şekil 15.5'teki gibi). $\mathcal{B}_p$'yi $(S^1 - p)\times\mathbb{R}$ çarpım uzayı olarak değerlendireceğiz. Demet bağlantımız bir ara kesite ilişkin, $S^1 - p$ üzerindeki olağan bir gerçel değerli fonksiyon anlamındaki sabitlik olarak kabul edilebilecek *sabitlik* kavramını sunmalıdır. Böylece Şekil 15.18'de sabit kesitlerin $\mathcal{B}_p$ üzerindeki gerçek yatay doğrular olarak gösterildiğini görürüz. Aynı şey $q \neq p$ olacak şekilde, tüm yama bu iki yamanın birbirine yapıştırılmasıyla oluşacak şekilde, ikinci bir $\mathcal{B}_q$ yaması için de geçerlidir. Bununla birlikte yapıştırma işinde sağ yama bölgesiyle sol bölge arasında katsayısı 2 olan göreli bir esnetme (sağ bölge katsayısı 2 olan bir esnetmeyi içerir biçimde gösterilmek üzere) mevcuttur. Bu nedenle, S^1 taban uzayı etrafında dolanıldığında (Şekil 15.5) yerel olarak yatay kalan (sıfır olmayan) bir kesit 2 kat kadar uyumsuz olacaktır. Buna göre $\mathcal{B}$ demeti, belirtilen demet bağlantımız uyarınca yerel olarak yatay olan hiçbir ara kesite (sıfır kesitinden ayrı olarak) sahip olmaz.

Bu duruma hafifçe farklı biçimde bakabiliriz. S^1 taban uzayında a noktasından başlayıp b'de biten bir eğri düşünürüz ve kafamızda S^1 üzerindeki lif değerli bir foksiyonun a'dan b'ye "sabit taşınması"nı canlandırırız. Bu, yerel olarak bu eğri üzerindeki bir yatay ara kesit olan $\mathcal{B}$ üzerindeki bir eğriyi arıyoruz demektir. *Bkz.* Şekil 15.16. Şu halde taban uzayı üzerinde a'dan b'ye giden birden fazla eğri mevcuttur; bir yönde gittiğimizde b'deki sonuç değeri olarak, diğer yönde gittiğimizde elde ettiğimiz yanıttan farklı bir yanıt elde ederiz. Tanımladığımız sabit taşıma kavramı *yol bağımlı*dır.

Bu, 13. bölümde çalıştığımız ∇ tanjant demeti bağlantımızla ilgili olarak karşılaştığımız yol bağımlılığıyla pek de aynı şey değildir. O durumla ilgili, sonsuz küçük döngüler için dahi ortaya çıkan yerel bir yol bağımlılı-



Şekil 15.18 S^1'e ait "önemsiz" bir $S^1 - p$ bölgesi üzerinde duran $\mathcal{B}$'ye ait bir $\mathcal{B}_p$ parçasını, aynısı $\mathcal{B}_q$ için de geçerli olacak şekilde, tıpkı Şekil 15.5a'daki gibi ele alın. Her bir yamadaki "yatay"ı olağan anlamdaki yatay anlamına gelecek şekilde kabul edin. Bununla birlikte yapıştırma işinde bir yapıştırma bölgesiyle diğeri arasında katsayısı 2 olan göreli bir esnetme mevcuttur (sağ taraftaki yamalamada gösterilmekte). Bu Şekil 15.16'da gösterilen bağlantıyı sağlar.

ğı mevcuttu ve bu, bağlantının eğriliğinde açık biçimde gösterilmişti. "Zorlanmış" demetimiz $\mathcal{B}$'ye ilişkin durumdaysa yol bağımlılığı bunun yerine evrensel niteliklidir. Elbette bu örnekte taban uzayı 1–boyutlu olduğundan *yerel* bir yol bağımlılığı olası değildir. Yine de bu örnek şans eseri, yerel olarak herhangi bir yol bağımlılığı olmasa da bunun evrensel olarak olası olduğunu gösterir.

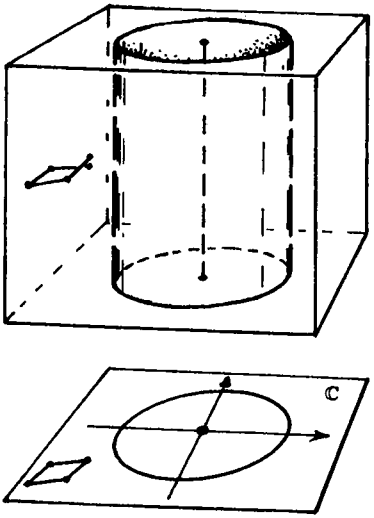
15.8 Demet eğriliği

Bununla birlikte örneğimizi, içinde orijinal S^1'imizi gösteren belirli bir çember seçtiğimiz 2–*boyutlu* bir uzay üzerindeki bir demeti elde edeceğimiz şekilde değiştirebiliriz. Tutarlılık adına S^1'imizi karmaşık düzlemdeki birim çember olarak kabul edelim, böylece yeni demetimiz $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ taban uzayını $\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$'yle verilir biçimde kabul edebiliriz. *Bkz.* Şekil 15.19. Lifler gerçel $\mathbb{R}$ doğrusunun kopyaları olarak kalmak durumundadır. Gelin demet bağlantımızı bu uzaya nasıl genişletebildiğimizi görelim.

Yeni demetimiz $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ üzerinde hiçbir "zorlama" olmasaydı bu bağlantıyı $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ karmaşık düzlemiyle ilgili standart $(z, \bar{z})$ koordinatlarına göre alınan kestirme bir türevle verilir şekilde kabul edebilirdik. Böylece bir Φ ara kesitinin "sabitliği" basit biçimde olağan anlamdaki sabitlik, diğer bir deyişle $\partial\Phi/\partial z = 0$, olarak düşünülebilirdi (buradan hareketle Φ gerçel olduğundan ayrıca $\partial\Phi/(\partial\bar{z}) = 0$'dır). Demet bağlantısına "zorlama"yı dahil ettiğimizde bunu, $\partial/\partial z$ işlemcisini, A, z'nin basitçe (skaler) çarpmayla işleyen (holomorfik olması zorunlu olmayan) karmaşık pürüzsüz bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial z} - A$$

olacak şekilde, yeni bir ∇ işlemcisi haline gelecek biçimde değiştirerek yapabiliriz. ∇ işlemcisi Φ benzeri nicelikler üzerine etkir. Topolojik olarak



Şekil 15.19 Demetimizde (artık $\mathcal{B}^{\mathbf{C}}$) yerel bir yol bağımlılığı (eğrilikle birlikte) elde etmek üzere artık ℂ karmaşık düzlemi olarak kabul edilen $\mathcal{M}^{\mathbf{C}}$ tabanında, Şekil 15.16'daki $\mathbf{S}^1$ ona ait birim çember olmak üzere, en az 2-boyuta gerek duyarız. Lifler V^1 (diğer bir deyişle gerçel ℝ doğrusu üzerinde modellenmiş) olarak kalmak durumundadır. z'yi $\mathbb{C} = \mathcal{M}^{\mathbf{C}}$'yle ilgili karmaşık bir koordinat biçiminde kullanarak, A, z'nin karmaşık pürüzsüz bir fonksiyonu olmak üzere açık $\nabla = \partial/\partial z - A$ bağlantısını kullanırız. A holomorfik olduğunda demet eğriliği yok olur fakat $A = \mathbf{i}\mathbf{k}z$ olursa (uygun bir k'yle) birim çember üzerindeki kısımla ilgili olarak Şekil 15.16'daki zorlanmış demeti elde ederiz. Demet eğriliği, $\mathcal{M}^{\mathbf{C}}$'deki küçük bir paralelkenar üzerindeki yatay bir çokgenin kapanması yanlışlığında açıkça göz önüne serilir.

$\mathcal{B}^{\mathbf{C}}$ demetimiz yalnızca önemsiz $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ demeti olmak durumundadır, böylece $\mathcal{B}^{\mathbf{C}}$'yle ilgili, z karmaşık ve Φ gerçel olmak üzere, evrensel (z, Φ) koordinatlarını kullanabiliriz.

$\mathcal{B}^{\mathbf{C}}$'ye ait bir ara kesit z'nin bir fonksiyonu olarak verilmiş Φ tarafından belirlenir ($\bar{z}$'nün görünmesi holomorfiklik yoksunluğunu belirtir; *bkz.* §10.5):

$$\Phi = \Phi(z, \bar{z}).$$

Ara kesitin *sabit* (diğer bir deyişle yatay) olması için $\nabla\Phi = 0$ (buradan hareketle Φ gerçel olduğundan ayrıca $\bar{\nabla}\Phi = 0$), diğer bir deyişle

$$\frac{\partial}{\partial z} = A\Phi$$

olmasına gerek duyarız. A holomorfikse bu durumda bu denklemi çözmekte herhangi bir sorun yoktur çünkü $\Phi = \mathrm{e}^{(B+\bar{B})}$ biçimindeki ifade, $B = \int A dz$ olmak üzere, amaca uygun olacaktır.[15.12] Bununla birlikte holomorfik olmayan bir A'mn bulunduğu genel bir durumda sıfır olmayan çözümler elde etmeye, Φ üzerine etkiyen

$$\nabla\bar{\nabla} - \bar{\nabla}\nabla = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial z}$$

çevirici bağıntısı nedeniyle eğilimli olmayız.[15.13] (Sol taraf $\partial\Phi/\partial z = A\Phi$ denkleminin herhangi bir gerçel çözümünü yok ederken sağ taraf Φ'yi çar-

[15.12] Bunu kontrol edin.

[15.13] Bu denklemi doğrulayın.

pan ve genellikle yok olmayan bir sayı verir.) Bu çevirici ∇'yla ilgili, $\partial A/\partial \bar{z}$'nin sanal kısmıyla ifade edilen bir *eğrilik* tanımlamaya, bu eğrilik demetteki yerel "zorlama"nın derecesini ölçmek üzere, hizmet eder.

A'yla ilgili, bu çeviricinin sıfır olmayan sabit bir değer aldığı, uygun bir gerçel k sabiti için örneğin $A = ik\bar{z}$ gibi belirli bir seçim yaparak, döngünün alanıyla orantılı olan $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$'deki kapalı bir döngü etrafında basitçe yolculuk ettiğimizde bir "esneme katsayısı" elde edebiliriz. Bu özellikle S^1 birim çemberi için geçerlidir, böylece S^1 üzerindeki orijinal "zorlanmış" $\mathcal{B}$ demetimizi yalnızca bu S^1 üzerinde bulunan demetin o parçasını alarak yeniden üretebiliriz. Birim çember üzerindeki gerekli "bir 2 katsayısıyla esnetme"yi k'ye ilişkin uygun bir değer alarak elde ederiz.[15.14]

Bu çevirici §14.4'te ele aldığımız ve torsiyon ile eğriliğe neden olan ∇_a işemcilerinin çeviricisiyle dolaysız bir benzerliktedir. Torsiyonun sıfır olduğunu da varsayabiliriz. (Torsiyon, bağlantının tanjant vektörleri üzerindeki eylemiyle ilgilidir ve bizi, burada değerlendirdiğimiz tanjant demetiyle bağlantılı olmayan demetlerle olan ilişkisi bağlamında ilgilendirmez.) n–boyutlu bir $\mathcal{M}$ taban uzayıyla ilgili olarak, artık demet nicelikleri üzerinde etki etmelerini saymazsak tıpkı 14. bölümdeki ∇_a ve $\overset{\nabla}{x}$ gibi niceliklere sahibiz.[16] Çeviricilerini uygun biçimde oluşturduğumuzda demet bağlantısının eğriliğini çıkarmış oluruz. Bu eğrilik yok olduğunda yerel olarak demete ait pek çok sabit kesite sahip oluruz; diğer türlü bu tür kesitler bulmak konusunda engellere takılırız, diğer bir deyişle bağlantıya ait yerel bir yol bağımlılığı buluruz. Eğrilik bu yol bağımlılığını sonsuz küçük düzeyde açıklar. Bu, Şekil 15.19'da gösteriliyor.

Bağlantı, indisler biçiminde genellikle bir koordinat sisteminde genel biçimli

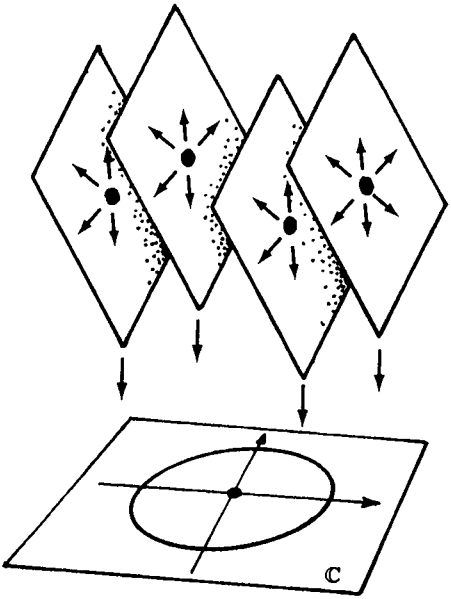
$$\nabla_a = \frac{\partial}{\partial x^a} - A_a$$

işlemcisi olarak, A_a niceliği baskılanmış bazı "demet indisleri"ne sahip olmak üzere, ifade edilir. Bunlar için (tensör fikirlerinin geçerli olacağı şekilde, bir vektör demetiyle ilgilendiğimizi varsayarak) Yunan harfleri kullanabiliriz[17] ve böylece A_a niceliği $A_{a^\mu{}_\lambda}$ gibi görünür. (Bütünlüklü indis ifadesi için diğer iki terimle çarpılan bir δ^μ_λ söz konusu olur.) Demet *eğrili-*

[15.14] Bu paragraftaki savları k'nin, bu gerekli 2 katsayısını veren açık değerini bularak doğrulayın.

[16] ∇_a durumunda ayrıca bunun (ko)tanjant vektörlerine de etkimesine gerek duyarız, böylece $\nabla_{[a}\nabla_{b]}$ çeviricisine anlam verilebilmesi için ∇_a uzayzaman indisli nicelikler üzerinde işleyebilir. $\overset{\nabla}{x}$ durumunda bunu gerektirmeyen $\overset{\nabla}{L}\overset{\nabla}{M} - \overset{\nabla}{M}\overset{\nabla}{L} - \overset{\nabla}{[L,M]}$ çevirici ifadesini kullanabiliriz.

[17] Demet indisleriyle ilgili bu tür indis gösterimi, Penrose ve Rindler, 1984, bölüm 5'te açık olarak geliştirilmektedir.



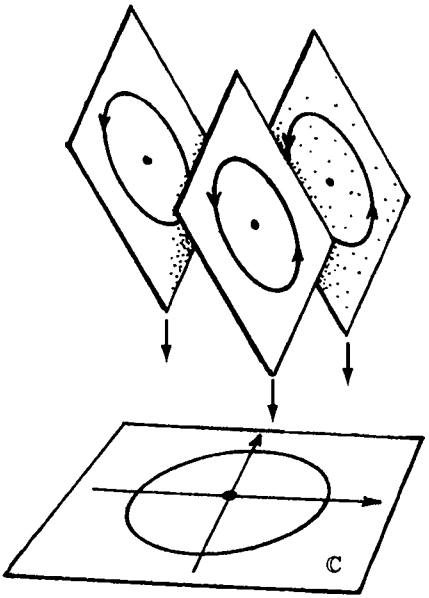
Şekil 15.20 Lifi ayrıca 1–boyutlu karmaşık bir vektör uzayı içine de, "esneme" gerçel bir sayıyla çarpmaya karşılık gelecek şekilde, yapabiliriz.

ği, ters simetrik indis çifti *ab*, $\mathcal{M}$'deki tanjant 2–düzlem yönlerine, daha önce sahip olduğumuz eğrilik tensörüyle tıpatıp aynı biçimde karşılık olmak üzere ve fakat λ ve μ artık lifteki yönlere karşılık olacak şekilde (ve çoğu uygulamada baskılanırlar) bir

$$F_{ab\mu\lambda}$$

niceliği olur. Ayrıca (ikinci) Bianchi özdeşliğinin dolaysız bir benzeri de mevcuttur (*bkz.* §14.4). (Belirli $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ örneğindeki karmaşık koordinatların kullanımı yalnızca tutarlılıktı ve tıpkı n–boyutlu durumdaki gibi bir indis notasyonu kullanılabilirdi.)

Lif demetlerine ilişkin pek çok durumda demetin oluşumunda içerilmiş ilgili simetrinin lifin simetrisiyle tümüyle örtüşmek zorunda olmadığı belirtilmelidir. Örneğin S^1 üzerindeki "zorlanmış" $\mathcal{B}$ demeti ya da $\mathbb{C}$ üzerindeki $\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ örneğinde 1–boyutlu lifi, life ait "esneme" 2–uzay vektörünün düzenli bir genişlemesi olarak gösterilmek üzere, 2–boyutlu gerçel bir vektör uzayına genişletilmiş olarak düşünebiliriz. Bu gerçel 2–uzay vektörüne ayrıca onu 1–boyutlu *karmaşık* bir vektör uzayı yapan ek yapıyı, "esneme" gerçel bir sayıyla çarpmaya karşılık gelmek üzere, sağlayabiliriz (Şekil 15.20). Bu, bizi bunun yerine bir "karmaşık esneme" yüklediğimizde ne olduğunu ele almaya yöneltir. Buna ilişkin belirli bir durum, gerçek bir esneme yerine bir döndürme sağlayan birim modüllü ($\times e^{i\theta}$, gerçel θ'yla) bir



Şekil 15.21 Alternatif olarak bir "karmaşık esneme"yi, örneğin karmaşık bir fazla ($\times e^{i\theta}$, gerçel θ'yla) çarpmayı uygulamaya koyabiliriz, böylece demet grubu artık bu karmaşık sayıların çarpımsal grubu olan U(1) olur.

karmaşık sayıyla (üstte ele alınan Clifford demetinde içerilmiş türde bir şey olan) çarpmadır (Şekil 15.21). Bu durumda, içerilen grup eş modüllü karmaşık sayılara ilişkin çarpımsal grup U(1)'dir (*bkz.* §13.9). Bu U(1) simetri grubuna sahip demet bağlantıları fizikte belirli önemdedir çünkü §19.4'te göreceğimiz üzere elektromanyetik etkileşimleri açıklar. Bu tür bir demetin esası, lif tüm karmaşık ℂ düzlemi yerine yalnızca S^1 birim çemberi üzerinde modellenmiş olarak kabul edilirse yakalanır. Bu, belirli bir anlamda, düzlemin geri kalanı basitçe çemberle birlikte "taşındığı" için daha "tutumlu"dur ve daha fazla bilgi sağlamaz. Yine de karmaşık düzlemi lif olarak kullanmakla bir miktar yarar elde edilebilir çünkü böylece demet (karmaşık) bir vektör demeti haline gelir.[18]

Daha sonraki bölümlerde bu fikirlerin gücünü fiziki kuvvetlere ilişkin modern kuramlarla ilişkili olarak göreceğiz. "Ayar bağlantıları" biçimindeki görünümlerinde demet bağlantıları aslında kilit bir bileşendir ve belirli fiziki alanlar bu bağlantılara ait eğriler olarak (Maxwell'in elektromanyetizması arketip biçimli örnek olmak üzere) ortaya çıkar. Bunun *tam*

[18] Diğer taraftan lif birim çember olduğunda demet diğer bağlamlarda avantaja sahip olan bir *başat demet* örneği haline gelir. Başat bir demet içinde $\mathcal{V}$ lifinin $\mathcal{G}$ grubu üzerinde kendi simetrileriyle modellendiği demettir. Açık konuşursak, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{V}$ başat bir demet için aynıdır fakat daha doğru olarak, hangisinin $\mathcal{G}$'ye ait birim eleman olduğu "unutulduğu" yerde $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$'dir; buna göre, §14.1 ve alıştırmalar [14.1] ve [14.2] uyarınca $\mathcal{V}$ (Abelci olması zorunlu olmayan) bir *afin uzaydır*.

bir simetri barındıran liflere sahip olmamıza ilişkin bu fikir için ne kadar temel olduğunu gördük. Bu, bu tür simetrilerin orijinine ya da bu simetrilerin gerçekten ne olduğuna ilişkin temel sorulara neden olur. Bu önemli sorulara ileride, özellikle 28, 31 ve 34. bölümlerde yeniden geleceğim.

16

SONSUZLUK MERDİVENİ

16.1 Sonlu alanlar

Normalde fiziki evrenimizin işlerinin temelinde yattığına inanılan matematikle ilgili evrensel bir özellik, *sonsuza* temel bir bağlılığa sahip görünür. Eski Yunanlar zamanında, onların kendilerini gerçel sayı sistemlerini ele alıp düşünmeye zorlanmış bulmalarından da önce aslında zaten rasyonel sayıların kullanımına alışkın hale gelmişlerdi (§3.1). Rasyoneller sistemi yalnızca içindeki niceliklerin belirsiz biçimde büyük oluşuna izin vermek (doğal sayıların kendileriyle paylaşılan bir özellik) anlamında değil, aynı zamanda belirsiz biçimdeki küçük bir ölçekte sonlanmaz bir derecede yenilenmeye de izin vermek anlamında sonsuzdur. Başları sonsuza ilişkin bu görünümlerin ikisiyle de dertte olanlar mevcuttur. Onlar bir taraftan boyut olarak sonlu, diğer taraftan temel bir ayrı olma durumunun en küçük düzeyde ortaya çıkmaya başlayabileceği şekilde sonlu biçimde bölünebilir bir evren tercih edebilirler.

Bu tür bir bakış açısı belirgin biçimde alışılmadık olsa da içsel olarak tutarsız değildir. Aslında $\mathbb{R}$ gerçel sayı sistemine ilişkin görünüşteki temel fiziki rolün, yalnızca sonlu sayıda elemana sahip "doğru" bir fiziki sayı sistemine yapılan bir tür yaklaşıklık tahmini olduğunu söyleyen bir düşünce ekolü mevcut olmuştur. (Bu tür bir yaklaşım özellikle Y. Ahmavaara, 1965 ve bazı meslektaşları tarafından izlenmiştir; *bkz.* §33.1.) Bu tür sonlu bir sayı sistemini nasıl anlamlı kılabiliriz? En basit örnekler tamsayılardan, onları "p *modülosu*yla indirgeyerek", p asal bir sayı olmak üzere, oluşturulanlardır. (Asal sayıların, kendileri ve 1 dışında çarpanı olmayan 2, 3, 5, 7, 11,13, 17, ... gibi doğal sayılar olduğunu ve 1'in kendisinin bir asal olarak değerlendiril*me*diğini anımsayın.) Tamsayıları modülo p'yle indirgemek üzere, iki tamsayının farkı p'nin bir katsayısıysa o iki tamsayıyı *denk* kabul ederiz; demek oluyor ki, ancak ve ancak

$$a - b = kp \text{ (bir } k \text{ tamsayısı için)}$$

ise

$$a \equiv b \pmod{p}$$

olur. Bu reçete uyarınca tamsayılar kesin olarak p "eşdeğerlik sınıfı"na (eşdeğerlik sınıfı kavramıyla ilgili Önsöz'e bakın) düşer (böylece $a \equiv b$ olan her durumda a ve b aynı sınıfa ait olur). Bu sınıflar *sonlu* $\mathbb{F}_p$ *alanı*nın elemanları olarak değerlendirilir ve tam olarak p adet bu tür eleman mevcuttur. (Burada "alan" teriminin cebircilerce kullanım biçimini benimsiyorum. Bu, bir manifold üzerindeki örneğin vektör ya da tensör alanları ya da örneğin fizik elektromanyetik alanlar gibi "alanlar"la karıştırılmamalıdır. Cebircinin alanı yalnızca bir *değişmeli bölme halkası*dır; *bkz.* §11.1.) Toplama, çıkarma, (değişmeli) çarpma ve bölmeye ilişkin olağan kurallar $\mathbb{F}_p$'ye ait elemanlar tarafından sağlanır.[16.1] Bununla birlikte, özdeş p sayıda elemanı birbiriyle topladığımızda her zaman sıfır elde etmeye ilişkin (ve elbette asal p sayısının kendisi "sıfır" olarak sayılmalıdır) ilginç bir ek özelliğe de sahibiz.

$\mathbb{F}_p$ henüz açıklandığı için, ona ait elemanların, "eşdeğerlik sınıfları"nın kendileri de, örneğin "3"le gösterdiğimiz $\mathbb{F}_5$'e ($p = 5$) ait elemanı tanımlayan belirli {..., −7, −2, 3, 8, 13, ...} eşdeğerlik sınıfındaki gibi sonsuz kümeler olduklarından, "tamsayıların sonsuz kümeleri" olarak tanımlandığına dikkat edin. Bu nedenle sonlu sayı sistemimizi oluşturan nicelikleri tanımlamak üzere sonsuza başvurduk! Bu, matematikçilerin bir matematiksel kavramla ilgili, onu sıkça sonsuz kümeler biçiminde tanımlamak yoluyla titiz bir reçete sundukları yola ilişkin bir örnektir. Bu, Önsöz'de değinilen kesirlerin, annemin arkadaşının oldukça kafa karıştırıcı bulduğu "sadeleştirme"yle ilişkili tanımlamasında içerilmiş aynı "eşdeğerlik sınıfı" işlemidir. $\mathbb{F}_p$ sayı sisteminin dolaysız olarak "gerçekten" doğada temellenmiş olduğuna inanan birisine göre "eşdeğerlik sınıfı" işlemi, (tarihi olarak) daha tanıdık sonsuz işlemler biçiminde bir tür hassas reçete sunmayı amaçlayan matematikçi için yalnızca bir tutarlılık meselesidir diye düşünüyorum. Aslında burada tamsayıların sonsuz kümesine başvurmamız gerekmez; bu yalnızca en sistemli yoldur. Verili herhangi bir durumda alternatif biçimde tüm işlemleri, bunlar sayıca sonlu olduğundan şekilde sıralayabiliriz.

Yalnızca bir örnek olarak $p = 5$ durumuna daha ayrıntılı biçimde bakalım. $\mathbb{F}_5$'e ait elemanlara standart 0, 1, 2, 3, 4 sembolleriyle işaretleyebiliriz ve

[16.1] p'nin niçin asal olması gerektiğini açıklayarak bu kuralların nasıl işlediğini gösterin.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$$1^{-1} = 1,\ 2^{-1} = 3,\ 3^{-1} = 2,\ 4^{-1} = 4.$$

toplama ile çarpma tablolarına sahibiz ve sıfır olmayan her bir elemanın $2\times3 \equiv 1 \pmod 5$, vb anlamında çarpımsal bir terse sahip olduğuna dikkat ederiz (buradan itibaren belirli bir sonlu sayı sisteminin elemanlarıyla çalışırken "$\equiv$" yerine "$=$" sembolü kullanacağım):

Ayrıca biraz daha özenli biçimde oluşturulmuş, elemanlarının toplam sayısı bir asalın bir *üssü*, $q = p^m$ olan başkaca sonlu $\mathbb{F}_q$ alanları da mevcuttur. En basit örneği, diğer bir deyişle $q = 4 = 2^2$ durumunu vereyim. Burada farklı elemanları $0, 1, \omega, \omega^2$ olarak, $\omega^3 = 1$ ve her x elemanı $x + x = 0$'a bağlı olmak üzere, işaretleyebiliriz. Bu hafif biçimde, (yeğin etkileşen parçacıklara ilişkin "kuarklığı" açıklar biçimde §5.4'te açıklanıp §5.5'te değinilen) birimin küp kökleri olan $1, \omega, \omega^2$ çarpımsal karmaşık sayı grubuna genişler. $\mathbb{F}_4$'ü elde etmek üzere yalnızca bir sıfır "0" ekler ve $x + x = 0$ olacak şekilde bir "toplama" işlemi sunarız.[16.2] Genel $\mathbb{F}_{p^m}$ durumunda toplamda p kadar x sayısının olduğu $x + x + \cdots + x = 0$ ifadesine sahip oluruz.

16.2 Fizikle ilgili sonlu ya da sonsuz geometri?

Fikir zaman zaman yeniden canlanmış olsa da bu tür şeylerin fizikte oynayacak gerçekten önemli bir role sahip olup olmadığı belirsizdir. $\mathbb{F}_q$ herhangi belirli bir anlamda gerçel sayı sisteminin yerini almış olsaydı aslında p çok büyük olmak zorunda olurdu (böylece "$x + x + \cdots + x = 0$" ifadesi incelenen davranıştaki ciddi bir uyumsuzluk biçiminde belirmezdi). Bana göre temel olarak saçma biçimde devasa miktarda asal sayıya dayanan fiziki bir kuram basit bir sonsuz kavramına bağlı olma yeteneğindekinden çok daha fazla karışık (ve olanak dışı) bir kuramdır. Yine de bu konuların peşinde koşmak ilgi çekicidir. Aslında koordinatlar bir $\mathbb{F}_q$'ya ait elemanlar biçiminde verildiğinde geometrinin çoğu hayatta kalır. Analize ait fikirler daha çok özen ister; yine de bunların da pek çoğu yaşamaya devam eder.

[16.2] $\mathbb{F}_4$'e ilişkin eksiksiz toplama ve çarpma tabloları oluşturun ve cebirin kurallarının işlediğini ($1 + \omega + \omega^2 = 0$ olduğunu varsayarak) kontrol edin.

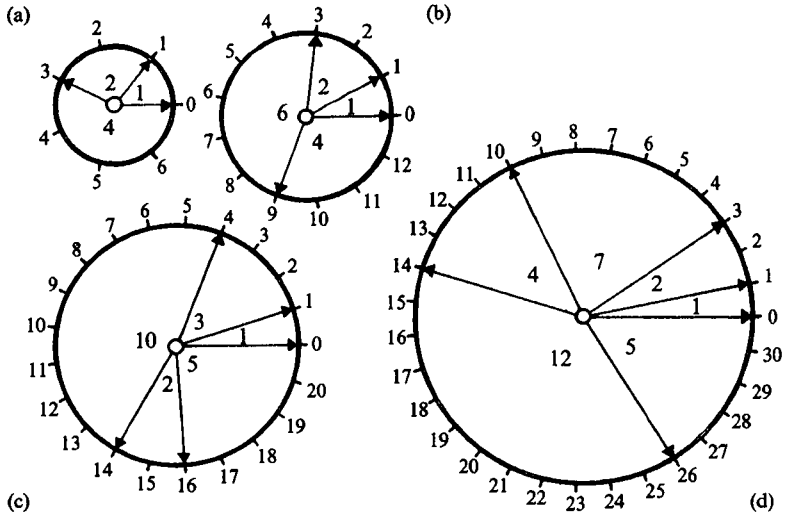
*İzdüşümsel geometri*nin noktaların sonlu toplam sayısıyla nasıl çalıştığını görmek öğreticidir ve buna göre $\mathbb{F}_q$ alanı üzerindeki izdüşümsel $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ n-uzaylarını araştırabiliriz. $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$'nun kesin biçimde $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = (q^{n+1} - 1)/(q - 1)$ farklı noktaya sahip olduğunu buluruz.[16.3] İzdüşümsel $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ *alanları* özellikle etkileyicidir çünkü onlara ilişkin oldukça zarif bir oluşum verilebilir. Bu, şöyle açıklanır. Uygun bir malzemeden, örneğin kartondan yapılmış bir dairesel bir disk alın ve merkezinden, zemindeki sabit bir kartona serbestçe dönebilmesi olanaklı olacak biçimde raptiyeleyin. Zemindeki karton üzerindeki daire etrafında eşit biçimde yerleşmiş $1 + q + q^2$ noktalarını, 0, 1, 2, ..., $q(1 + q)$ sayılarıyla saat yönünün tersine olacak şekilde işaretleyerek belirtin. Dönen disk üzerinde dikkatli biçimde seçilen belirli konumlardaki $1 + q$ özel noktalarını işaretleyin. Bu konumlar, zeminde işaretli herhangi iki nokta seçildiğinde disk üzerinde kesin olarak, seçili iki noktanın disk üzerindeki bu özel noktalardan ikisiyle çakışacağı bir konum olacak şekilde olmalıdır. Bunu söylemenin başka bir yolu şöyledir: $a_0, a_1, \ldots, a_q$ bu özel noktalar arasındaki, daire etrafında dairesel biçimde alınmış (daire etrafındaki, zemindeki daire üzerinde işaretli ardışık noktalar arasındaki uzaklık *birim* uzaklık olarak kabul edilmek üzere) ardışık uzaklıklarsa, her 1, 2, 3, ..., q uzaklığı, dairesel biçimde ardışık olarak toplanmış a'ların bir toplamı şeklinde benzersiz biçimde gösterilebilir. Böyle bir diske *sihirli disk* diyorum. Şekil 16.1'de, kendisiyle ilgili $a^0, \ldots, a^q$'nun sırasıyla 1, 2, 4; 1, 2, 6, 4; 1, 3, 10, 2, 5; 1, 2, 7, 4, 12, 5 olarak alınabildiği $q = 2, 3, 4$ ve 5'e ait sihirli diskleri gösterdim.[16.4] $q = 7, 8, 9, 11, 13$ ve 16 durumlarında sihirli diskleri sırasıyla 1, 2, 10, 19, 4, 7, 9, 5; 1, 2, 4, 8, 16, 5, 18, 9, 10; 1, 2, 6, 18, 22, 7, 5, 16, 4, 10; 1, 2, 13, 7, 5, 14, 34, 6, 4, 33, 18, 17, 21, 8; 1, 2, 4, 8, 16, 32, 27, 26, 11, 9, 45, 13, 10, 29, 5, 17, 18'le tanımlanır biçimde kabul edebiliriz. Sihirli disklerin (q bir asalın üssü olmak üzere) her $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ için var olmaları, matematiksel bir teoremdir.[1] Okuyucu Pappos ve Desargues'in teoremlerine ilişkin çeşitli örnekleri gözden geçirmeyi eğlenceli bulabilir (*bkz.* §15.6, Şe kil 15.14).[2] (Bozulmamış bir düzende yeterli sayıda noktaya sahip olmak üze-

[16.3] Bunu gösterin.

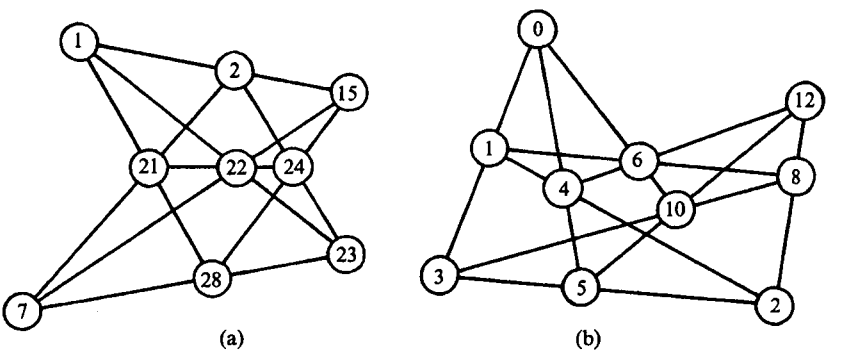
[16.4] $q = 3, 5$ durumlarında, verdiğim disklerden biri üzerindeki belirli bir işaretli noktadan başlayarak ve diğer işaretli noktalara olan açısal uzaklıkların her birini sabit bir katsayıyla çarparak *yeni* sihirli disklerin nasıl oluşturulacağını gösterin. Bu, niçin işler?

1 *Bkz.* Stephenson, 1972, §7; Howie, 1989, s. 269–271; Hirschfeld, 1998, s. 098; sihirli diskler *mükemmel fark kümeleri* olarak adlandırılan şeye denktir.

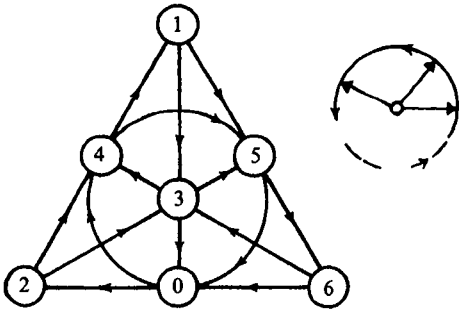
2 Kendileri için Desargues (ya da eşdeğer olarak Pappos) teoreminin *başarısız ol*duğu (zorunlu olarak $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$'dan kaynaklanması gerek*me*yen) sihirli disklerin var olup olmadığı ya da aslında Desargues–olmayan (eşdeğer olarak Pappian–olmayan) sonlu izdüşümsel düzlemlerin var olup olmadıkları açıkça bilinmemektedir.



Şekil 16.1 Sonlu izdüşümsel $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ (q bir asalın üssü olmak üzere) düzlemleriyle ilgili "sihirli diskler". $1 + q + q^2$ noktaları zemindeki bir çember etrafında eşit aralıklarla yerleştirilmiş ardışık 0, 1, 2, ..., $q(1 + q)$ sayılarıyla gösterilir. Okları $1 + q$ adet belirli yeri, $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$'daki bir çizginin noktalarını gösteren serbestçe dönen dairesel bir disk bu zemine bağlanır. Ayrık sayıların her bir çifti için okların kendilerini işaret ettiği tam olarak bir disk mevcuttur. (a) $q = 2$; (b) $q = 3$; (c) $q = 4 = 2^2$; ve (d) $q = 5$ için sihirli diskler gösteriliyor.



Şekil 16.2 Şekil 15.14'teki teoremlere ilişkin sonlu geometri çeşitleri. 16.1d ve 16.1b'de gösterilen disklerin sırayla kullanılarak gösterilmiş halleri; (a) Pappos ($q = 5$) ve (b) Desargues ($q = 3$).



Şekil 16.3 Şekil 16.1a uyarınca numaralandırılmış 7 nokta ve 7 çizgili $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ Fano düzlemi (çember bir "düz çizgi" kabul edilir). Bu, oktonyon bölme cebirine ilişkin temel $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_6$ elemanlarıyla ilgili çarpım tablosunu, oklar bir "+" işareti veren dairesel düzeni sunmak üzere, sağlar.

re $q > 2$ ifadesini kabul edin!) Şekil 16.2'de iki örnek gösterilmektedir (Şekil 16.1'deki diskler kullanılarak $q = 3$ için Desargues ve $q = 2$ için Pappos).

En basit durum $q = 2$, diğer yönlerden daha belirli bir ilgiye sahiptir.[16.5] 7 noktalı bu düzlem *Fano düzlemi* olarak adlandırılır ve çember bir "düz çizgi" sayılmak üzere Şekil 16.3'te gösterilir. Bir geometri olarak kapsamı oldukça sınırlı olsa da *oktonyonlar*la ilgili çarpma kuralları sağlayarak farklı türde önemli bir rol oynar (*bkz.* §11.2, §15.4). Fano düzlemi kendi içinde 7 noktaya sahiptir ve her nokta oktonyon cebirine ilişkin oluşturucu $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_6$ elemanlarından biriyle ilgili olmalıdır. Bunların her biri $\mathbf{i}_r^2 = -1$ ifadesini sağlamalıdır. İki *ayrık* oluşturucu elemanın çarpımını bulmak üzere yalnızca Fano düzleminde onları temsil eden noktaları birleştiren çizgiyi buluruz ve çizgi üzerinde kalan nokta bu diğer ikisinin (bir işarete bağlı) çarpımını gösteren nokta olur. Bunun için Fano düzleminin basit bir resmi hiç de yeterli değildir çünkü çarpımın *işaretin*in de bulunması gerekir. Bu işareti, Şekil 16.1a'da gösterilen diskle verilen tanımlamayı eski haline getirerek ya da Şekil 16.3'teki (dairesel olarak yorumlanmış) (eşdeğer) ok düzenlemesini kullanarak bulabiliriz. Gelin disk üzerindeki işaretli noktalara, diyelim ki saat yönü tersine, dairesel bir düzen atayalım. Böylece $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$'nin dairesel düzeni disk tarafından atananla uyumluysa $\mathbf{i}_x\mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z$ ifadesine, diğer türlüyse $\mathbf{i}_x\mathbf{i}_y = -\mathbf{i}_z$'ye sahip oluruz. Özelde, $\mathbf{i}_0\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_1\mathbf{i}_0$, $\mathbf{i}_0\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_6 = -\mathbf{i}_5$, $\mathbf{i}_4\mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1$ vb.[16.6]

[16.5] $\mathbb{F}_8$ sonlu alanı, $\varepsilon^7 = 1$ ve $1 + 1 = 0$ olmak üzere $0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6$ elemanlarına sahiptir. (1) a, b ve c, Şekil 16.1a'daki zemindeki çember üzerindeki diskte bulunan üç noktada dizilebilecek sayılar olduğunda $\varepsilon^a + \varepsilon^b + \varepsilon^c = 0$ biçimine ilişkin bir özdeşliğin mevcut olduğunu ya da (2) aynısının ε yerine ε^3 konulduğunda ($\varepsilon^{3a} + \varepsilon^{3b} + \varepsilon^{3c} = 0$) geçerli olduğunu gösterin.

[16.6] "Birleştirici" $a(bc) - (ab)c$ ifadesinin a, b, c'de, bunlar oluşturucu elemanlar olduğunda ters simetrik olduğunu gösterin ve bunun (ayrıca buradan $a(ab) = a^2b$ *tüm* elemanlar

Bu geometrik ve cebirsel yapılarda dikkate değer bir zariflik bulunsa da, fiziki dünyanın işleriyle az miktarda açık ilişki olduğu görülüyor. Şekil 1.3 ve §1.4'teki bakış açısını benimsersek bu durum belki de bizi şaşırtmamalı. Evrenimize hükmeden fiziki yasalarla herhangi dolaysız bir ilişkiye sahip matematik, bir bütün olarak Platonik matematiksel dünyanın küçük bir kısmıdır, ya da mevcut anlayışımız sürdükçe öyle görünür. Bilgi derinliğimiz gelecekte arttıkça, bu tür zarif yapılarla ya da oktonyon cebiriyle ilgili sonlu geometriler olarak önemli roller bulunacaktır. Şu anki durumdaysa bana göre olay ikna edici biçimde ortaya konmak zorundadır.[1] Öyle görünüyor ki tek başına matematiksel zarafet yeterli olmaktan oldukça uzaktır (ayrıca *bkz.* §34.9) Bu, evrenin yasalarının temelinde yatan kurallara ilişkin arayışımızda bize dikkatli olmayı öğretmelidir!

Kendimizi bu tür çekici sonlu yapılara kur yapmaktan geri çekelim ve sonsuzda içselleşmiş dehşet verici matematiksel zenginliğe geri dönelim. Başlangıç olarak sonsuz yapıların gerçeği açıklamayı amaç edinmiş bir tür matematiksel biçimciliğin bir kısmı olabileceği belirtilmelidir, oysa ki bu sonsuz yapıların sonsuz (ya da sonsuz küçük) fiziki varlıklar olarak dolaysız bir fiziki yoruma sahip oldukları kastedilmez. Örneğin, hâlâ belirsiz biçimde (ya da hatta sonsuz biçimde) büyük yapıları açıklama potansiyeli mevcutken ayrı olma durumunun (ve aslında sonluluk) en küçük düzeyde göründüğü bir tasarı geliştirmek üzere bazı girişimlerde bulunulmuştur. Bu durum özellikle, bana ait eski, kısaca §32.6'da açıklayacağım ve standart kuantum mekaniği uyarınca bir nesnenin spininin ölçüsünün belirli sabit bir ($\frac{1}{2}\hbar$) niceliğinin doğal sayı olan bir katıyla verildiği gerçekliğine dayanan spin ağları kuramını kullanarak sonlu bir biçimde uzay oluşturma fikri için geçerlidir. Aslında §3.3'te değindiğim üzere, kuantum

---

için geçerli oluşu sonucunu türetin. *İpucu*: Şekil 16.3'ü ve Fano düzleminin tam simetrisini kullanın.

[1] Oktonyonlara ilişkin fiziki rol yine de zaman zaman tartışıldı, *bkz. örn.* Gürsey ve Tze, 1996; Dixon 1994; Manogue ve Dray, 1999; Dray ve Manogue, 1999; fakat genel bir "oktonyonlarla ilgili kuantum mekaniği" oluşturmakla ilgili olarak, durum "dördeylerle ilgili kuantum mekaniği"ne göre biraz daha pozitif olmak üzere, temel zorluklar mevcuttur; Adler, 1995. Belirli bir fiziki role ilişkin aday olarak durum üzerine önerilen başka bir sayı sistemi "p-gen sayılar"a ilişkin olandır. Bunlar, *kalkülüsün* kurallarının geçerli olduğu sayı sistemlerini oluştururlar ve 0, 1, 2, 3, ..., basamaklarının $p - 1$'i (p seçili asal sayı olmak üzere) göstermesi dışında ondalık biçimde genişlemiş sıradan gerçel sayılar şeklinde ifade edilebilirler ve sıradan ondalıklar durumundakinin *tersi biçiminde* sonsuz olmaya izinlidirler (ve eksi işarete gerek duymayız). Örneğin

$$\ldots\ldots 240332004 11.3104$$

belirli bir 5-gen sayıyı temsil eder. Toplama ve çarpma kuralları ("10" sembolünün p asalı yerine, vb, kullanıldığı) "olağan" p-li aritmetiktekinin aynısıdır. *Bkz.* Mahler, 1981; Gouvea, 1993; Brekke ve Frend, 1993; Vladimirov ve Volovich, 1989; Pitkäenen, 1995 ve p-genlerin fizik malzemesine uygulamaları.

mekaniğinin ilk zamanlarında kuantum kuramının fiziği, dünyanın en küçük düzeyde gerçekten bir ayrı olma durumunun söz konusu olduğu bir resmine yönlendirdiğine ilişkin, daha sonraki gelişmelerce doğrulanmamış olan, büyük bir beklenti mevcuttu. Günümüzün başarılı kuramlarında, şeylerin ortaya çıkardığı gibi, kuantum kavramları dahil olduğunda bile uzayzamanı bir süreklilik olarak kabul ederiz ve küçük ölçekli uzayzaman ayrıklığı içeren fikirler "alışılmadık" olarak değerlendirilmelidir (§33.1). Süreklilik hâlâ önemli bir şekilde, kuantum mekaniğine ilişkin fikirleri uzay ve zaman yapılarına uygulama girişiminde bulunan o kuramlarda bile belirleyici niteliktedir. Bu, özelde, düğüm ve bağ kuramındaki gibi ayrık (tümleşik) fikirlerin gerçekten kilit roller oynadığı ve ayrıca spin ağlarının temel yapıya girdiği döngü değişkenlerine ilişkin Ashtekar–Rovelli–Smolin–Jacobson kuramında geçerlidir. (Bu kayda değer tasarıya ilişkin bazı şeyleri 32. bölümde göreceğiz ve §33.1'de "ayrık uzayzaman"la ilgili başka bazı fikirlerle kısaca karşılaşacağız.)

Böylece, en azından şimdilik sonsuzu, özellikle fiziki sürekliliğin matematiksel açıklanmasındaki rolünde ciddi şekilde kullanıma almaya gerek duyduğumuz görülüyor. Öyleyse burada gerek duyduğumuz ne tür bir sonsuzluktur? §3.2'de gerçel sayı sistemini rasyonel sayıların sonsuz kümesi biçiminde oluşturmaya ilişkin "Dedekind kesiği" yöntemini kısaca açıkladım. Aslında bu, rasyonel sayıların kendilerinde içerilmiş olanı büyük oranda aşan bir sonsuzluk kavramı içeren devasa bir adımdır. Bu konuya burada yönelmek bizim için önemli olacaktır. Gerçekte, büyük Danimarkalı/Rus/Alman matematikçi Georg Cantor'un 1874'te, 1895'e kadar geliştirmeye devam ettiği bir kuramın parçası olarak gösterdiği üzere, sonsuzluğa ilişkin *farklı boyutlar* mevcuttur! Doğal sayıların sınırsızlığı aslında bunların en basitidir ve farklı sonsuzlar bitimsiz şekilde git gide daha büyük ölçeklerde sürer. Gelin Cantor'un çığır açıcı ve temel fikirlerine kısacık bir göz atmayı deneyelim.

16.3 Sonsuzun farklı boyutları

Cantor devrimindeki ilk kilit bileşen bire bir, 1–1, uyumluluktur.[2] Bir kümenin elemanlarıyla diğerinin elemanları arasında, her iki kümenin uyumluluğa katkıda bulunmakta başarısız olacak hiçbir elemanı bulun-

[2] Buna modern matematiksel terminolojide eş yapılılığa (izomorfizm) ilişkin bir küme denir. Matematikçilerin bir küme ya da yapıyla bir diğeri arasındaki dönüşümleri genel bir bağlamda nitelendirmek üzere kullanma eğiliminde oldukları "endomorfizm", "epimorfizm" ve "monomorfizm" (ya da yalnızca "morfizm") türü başka sözcükler de mevcuttur. Gereksinimlerimizle ilgili değerliliğini göz önüne almak yerine alışmanın oldukça fazla çaba gerektirmesi nedeniyle bu tür terminoljiden bu kitapta kaçınmayı tercih ediyorum.

mayacak şekilde bire bir bir uyumluluğunu oluşturmak olanaklıysa iki kümenin (alışıldık dilde "aynı eleman sayısı"na sahip olmak anlamına gelen) aynı *kardinaliteye* sahip olduğunu söyleriz. Bu işlemin sonlu kümeler (diğer bir deyişle sonlu 1, 2, 3, 4, ... sayıda üyeye ya da hatta 0, bu durumda uyumluluğun anlamsız olduğunu bekleriz, elemana sahip kümeler) için doğru yanıtı ("aynı eleman sayısı") verdiği açıktır. Sonsuz kümeler durumundaysa, sonsuz bir kümenin, kendisine ait uygun bir ("uygun" kümenin tümünden farklı anlamına gelmek üzere) alt kümeyle aynı kardinaliteye sahip olması gibi yeni bir (büyük fizikçi ve astronom Galileo Galilei tarafından daha 1638'de belirtilmiş olan)[3] özellik mevcuttur.

Gelin bunu doğal sayıların $\mathbb{N}$ kümesi durumunda görelim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Bu kümeden 0'ı çıkarırsak[4] açıktır ki $\mathbb{N}$'yle aynı kardinaliteye sahip yeni bir $\mathbb{N} - 0$ kümesi buluruz. Bunun nedeni $\mathbb{N}$'deki r elemanının $\mathbb{N} - 0$'daki $r + 1$ elemanıyla uyumlu hale getirilebildiği 1–1 uyumluluğu oluşturabilmemizdir. Alternatif biçimde Galilei'nin örneğini alabiliriz ve iyi tanımlı bir anlamda, kareli sayıların bir bütün olarak doğal sayıların gözden kaybolacak derecedeki küçük bir kısmını oluşturması gerçeğine karşın, ayrıca $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ kareli sayılar kümesinin de $\mathbb{N}$'yle aynı kardinaliteye sahip olması gerektiğini görürüz. Ayrıca yine tüm tamsayıların $\mathbb{Z}$ kümesinin de aynı kardinalitede olduğunu görebiliriz. Bu, $\mathbb{N}$ kümesinin $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$ elemanlarıyla basitçe eşleştirebileceğimiz $\mathbb{Z}$'ye ilişkin,

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...\}$$

ile verilen düzeni ele aldığımızda görülebilir. Daha çarpıcı bir gerçek, *rasyonel* sayıların kardinalitesinin $\mathbb{N}$'nin kardinalitesiyle yine aynı oluşudur. Bunu dolaysız biçimde görmenin pek çok yolu mevcuttur,[16.7], [16.8] fakat bunu burada ayrıntılı olarak göstermek yerine bu belirli örneğin, Cantor'a ait harika sonsuz kardinal sayılar kuramının genel çerçevesi içine nasıl düştüğünü görelim.

---

[3] Bu doğaya ilişkin daha önceki bazı düşünüşlerle ilgili olarak *bkz.* Moore, 1990, bölüm 3.

[4] Not 15.5'ten, $\mathbb{N} - 0$'ın aslında sıfır olmayan doğal sayılar yerine kullanılması yoluyla notasyona ilişkin bir kötüye kullanıma hazırlandığımı anımsayın. İroni şurada ki, bir taraftan $\{0\} = 1$ yoluyla §3.4'teki işlemler benimsenirken, "daha doğru" görünen $\mathbb{N} - \{0\}$'da benimseniyorsa, ele alınan kümeyle ilgili daha da kafa karıştırıcı olan "$\mathbb{N} - 1$" ifadesine kalırız!

[16.7] Kesirlerin tümünün düzenlenmesine ilişkin sistemli bir yol bularak bu tür açık bir işlem sağlayabiliyor musunuz, bakın.

[16.8] $\frac{1}{2}((a + b)^2 + 3a + b)$ fonksiyonunun doğal sayılarla doğal sayıların (a, b) çiftleri arasında 1–1 bir uyumluluğu açık biçimde sunduğunu gösterin.

İlk olarak bir *kardinal sayı* nedir? Temel olarak o, iki kümeyi ancak ve ancak birbirleriyle 1–1 uyumluluk içine koyabildiğimiz durumda "aynı eleman sayısı"na sahip olarak değerlendirdiğimiz koşullarda, bir kümedeki eleman "sayısı"dır. "Eşdeğerlik sınıfı" fikrini kullanarak (bir p asalıyla ilgili $\mathbb{F}_p$'yi tanımlamak üzere üstte §16.1'de ileri sürülen fikir; ayrıca *bkz.* Önsöz) daha kesin olmayı deneyebiliriz ve bir A kümesine ait α kardinal sayısına A'yla aynı kardinaliteye sahip tüm kümelerin eşdeğerlik sınıfı*dır* diyebiliriz. Aslında mantıkçı Gottlob Frege bunu yapmayı 1884'te denedi fakat açık uçlu "tüm kümeler" benzeri kavramlarda, bunlardan (§16.5'te göreceğimiz üzere) ciddi aykırılıklar ortaya çıkabildiği için, temel zorluklar mevcut olduğu ortaya çıkar. Bu tür aykırılıkları önlemek üzere "olası kümeler evreni"nin boyutlarına bazı kısıtlamalar koymak gerekli görünmektedir. Bu rahatsız edici konuyla ilgili birazdan yapmam gereken bazı uyarılar olacak. Şu an için bundan kaçınmak üzere, daha önce yaptığım gibi (Önsöz'de rasyonel sayılara ait "eşdeğerlik sınıfı" tanımıyla ilişkili olarak değinildiği üzere) bir sığınma konumu alalım. Kardinalleri basitçe kümeler arasındaki 1–1 eşdeğerlik kavramından soyutlanabilen matematiksel kavramlar (Platon'un dünyasında yaşayanlar!) olarak kabul edebiliriz. Kendimize, A kümesinin "α kardinalitesine sahip" olduğunu ya da "α elemana sahip" olduğunu söylemeye, tutarlı olmamız ve B kümesinin de, A ve B kümeleri ancak ve ancak 1–1 uyumluluğa konulabildiğinde "α kardinalitesine sahip" olduğunu ya da "α elemana sahip" olduğunu söylememiz koşuluyla izin veririz. Doğal sayıların tümünün bu anlamda kardinal sayılar olarak düşünülebildiğine dikkat edin; bu, bir doğal sayının ne olduğuna ilişkin §3.4'te verilmiş "sıra" tanımından ($0 = \{\}$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, \{0\}\}$, $3 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$, ...) sezgisel olarak çok daha yakın bir tanımdır! Doğal sayılar aslında (*sonsuz* kardinallerin, kendileri gibi aynı kardinalitedeki uygun alt kümeler içeren o kümelere ait, üstteki $\mathbb{N}$ gibi, kardinaliteler olmaları anlamında) *sonlu* kardinallerdir.

Artık kardinal sayılar arasındaki ilişkileri kurabiliriz. α kardinalitesine sahip bir A kümesinin elemanları β kardinalitesine sahip bir B kümesinin elemanlarına ait bir alt kümenin (uygun bir alt küme olması zorunlu değildir) elemanlarıyla 1–1 uyumluluğa konulabilirse α kardinali β kardinaline *küçük eşit*tir der ve

$$\alpha \leq \beta$$

(ya da eşdeğer olarak $\beta \geq \alpha$) yazarız. $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \gamma$ ise $\alpha \leq \gamma$ olduğu açık olmalıdır.[16.9] Kardinal sayı kuramına ilişkin güzel sonuçlardan biri

[16.9] Bunu ayrıntılı olarak açıklayın.

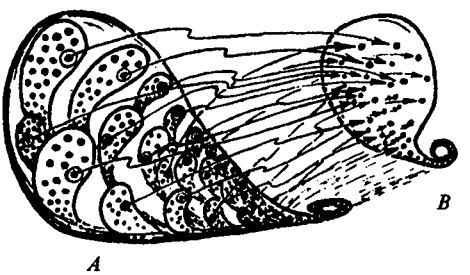
$$\alpha \leq \beta \text{ ve } \beta \leq \alpha \text{ ise}$$

A ve B arasında 1–1 uyumluluk oluşu anlamındaki

$$\alpha = \beta$$

ifadesidir.[16.10] Kendileri için $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ bağıntılarının geçerli olmadığı α ve β kardinal çiftlerinin bulunup bulunmadığını sorabiliriz. Bu tür kardinaller *karşılaştırılamaz* olur. Gerçekte bu, (§1.3'te kısaca değinilen) *seçme aksiyomu* olarak bilinen karşılaştırılamaz kardinallerin var olmadığı varsayımının sonucudur.

Seçme aksiyomu, elemanlarının tümü boş olmayan kümeler olan bir A kümesine sahip olduğumuzda A'ya ait her bir kümenin tam olarak bir elemanını içeren bir B kümesinin var olduğunu ileri sürer. İlk başta, seçme aksiyomu yalnızca mutlak biçimde belirgin olan bir şey ileri sürer görünür. (*Bkz.* Şekil 16.4.) Bununla birlikte, onun evrensel olarak geçerli olan bir şey olarak kabul edilmesi gerekliliği tamamen tartışmasız değildir. Kendi konumum bu konuda dikkatli olunması gerektiğine ilişkin konumdur. Bu aksiyomla ilgili tehlike onun, kendisi yoluyla B kümesinin belirlenebileceği bir kuralla ilgili herhangi bir ipucu olmaksızın, saf bir "varlık" savı olmasındadır. Gerçekte, panikletici birtakım sonuca sahiptir. Bunlardan biri, bir versiyonu Öklitçi 3–uzaydaki olağan birim kürenin beş parçaya, bu parçaların *iki* tam birim küreyi oluşturmak üzere basit biçimde Öklitçi hareketler (diğer bir deyişle öteleme ve döndürmeler) yoluyla yeniden kurulabilme özelliğiyle birlikte ayrılabileceğini söyleyen Banach–Tarski



Şekil 16.4 Seçme aksiyomu elemanlarının tümü boş olmayan kümeler olan herhangi bir A kümesi için A'ya ait her bir kümenin tam olarak bir elemanını içeren bir B kümesinin var olduğunu ileri sürer.

[16.10] Bunu kanıtlayın. Çerçeve: A'yı B'nin bir $bA(= b(A))$ alt kümesine götüren 1–1 bir b ve B'yi A'nın bir aB alt kümesine götüren 1–1 bir a gönderimi mevcuttur; A'dan B'ye, $A - aB$'yi $bA - baB$'ye ve $abA - abaB$'yi $babA - babaB$'ye, vb, göndermek üzere b'yi kullanan ve $aB - abA$'yı $B - bA$'ya ve $abaB - ababA$'yı $baB - babA$'ya, vb, göndermek üzere a^{-1}'i kullanan bir gönderimi ele alın ve A ve B'nin geri kalanıyla ne yapmak gerektiğini çözümleyin.

teoremidir.[5] Elbette parçalar katı cisimler değil fakat noktalardan oluşan karışık topluluktur ve hiç de yapıcı olmayan bir yolla, yalnızca seçme aksiyomunun kullanımı yoluyla "var olma"sı ileri sürülmüş olmak üzere, tanımlanır.

Kardinal sayılara ilişkin çok temel birkaç özelliği kanıtlamaksızın sıralayayım. İlk olarak $\leq$ sembolü doğal sayılara (*sonlu* kardinaller) uygulandığında verdiği aynı anlamı verir (*bkz.* not 3.1). Dahası herhangi bir doğal sayı herhangi bir sonlu kardinal sayıya küçük eşittir ($\leq$); elbette *kesin biçimde* küçüktür ($<$), eşit değildir. Şimdi α sonsuz olacak şekilde $\beta \leq \alpha$'yı düşünün, böylece (sonlu sayılarla ilgili bildiğimiz şeyle katı bir zıtlık içinde) $A \cup B$ *birleşim*inin kardinalitesi ikisinden büyük olanınkine, diğer bir deyişle α'nınkine eşittir ve ayrıca $A \times B$ *çarpımın*ın kardinalitesi de α'dır. (Daha önce çarpımın örneklerini görmüştük, *örn.* §13.2, §15.2. $A \times B$ kümesi, a, A'dan ve b, B'den alınmak üzere tüm (a, b) *çift*lerinden oluşur. Sonlu kümelerin çarpımlarının kardinalitesi, kümeler olarak, kardinalitelerinin, sonlu kümeler için her zaman bir elemandan daha fazlasına ait kardinalitenin, her birine ait bireysel kardinaliteden daha büyük olduğu, olağan sayısal çarpımıdır.) Bu durum bizi, zaten elimizde var olanlardan daha büyük sonsuzluklar bulmak istiyorsak pek de ileri götürür görünmez. α'ya "bağlı kalmış" görünmekteyiz.

Sonraki bölümde nasıl "bağsız" hale gelineceğini göreceğiz. Bununla birlikte an itibariyle, yukarıda yaptığımız şeyin bize en azından rasyonel sayıların sayısının doğal sayıların sayısıyla aynı olduğunu gösterdiğini görebiliriz. Cantor'u izleyerek, yukarıda gördüğümüz üzere tamsayıların, $\mathbb{Z}$, kardinalitesiyle aynı olan doğal sayı, $\mathbb{N}$, kardinalitesi için $\aleph_0$ ("hiç elif" ya da ABD'de "sıfır elif") sembolünü kullanalım. Şu halde rasyonellerin ρ kardinalitesi nedir? Herhangi bir rasyonel sayı, a ve b tamsayılar olmak üzere, a/b biçiminde (pek çok yolla) yazılabilir. Bu yolların birini seçerek rasyoneller kümesiyle $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir *alt küme*si arasında 1–1 bir uyumluluk bulduk. Böylece ρ, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin kardinalitesine küçük eşittir fakat yukarısı (ya da alıştırma [16.8]'in dolaysız uygulaması) uyarınca $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin kardinalitesi $\mathbb{N}$'nin kardinalitesine, diğer bir deyişle $\aleph_0$'e eşittir. Bu nedenle $\rho \leq \aleph_0$'tır fakat tamsayılar rasyonellerde içerildiğinden $\aleph_0 \leq \rho$ olur. Bunun sonucu olarak $\rho = \aleph_0$ olur.

16.4 Cantor'un çapraz kesiği

Şimdi Cantor'un ilk şaşırtıcı başarısına, diğer bir deyişle $\aleph_0$'ten kesin biçimde daha büyük sonsuzlukların aslında mevcut olduğuna ve $\mathbb{R}$ gerçel

[5] *Bkz.* Wagon, 1985; gözde bir açıklama için *bkz.* Runde, 2002.

sayılar kümesinin kardinalitesinin bu tür bir sonsuzluk olduğuna ilişkin gösterimine geliyoruz. Bu sonucu burada, $\alpha < \beta$ ifadesi $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha \neq \beta$ anlamına gelmek üzere (ve ayrıca elbette $\alpha < \beta$'yı $\beta > \alpha$ şeklinde yazabiliriz), Cantor'un daha genel

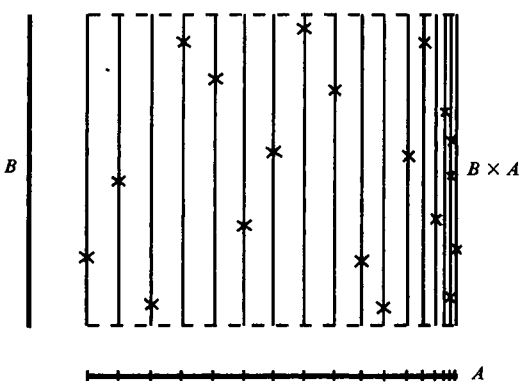
$$\alpha < 2^{\alpha}$$

ifadesinin belirli bir örneği olarak vereceğim. Cantor'un bu sonuca ilişkin dikkat çekici kanıtı matematiğin tümündeki en orijinal ve etkili kazanımlardan birini oluşturur. Yine de o kadar basit ki onu, burada kendi bütünlüğü içinde verebilirim.

Öncelikle notasyonu açıklamalıyım. İki A ve B kümesine sahipsek, B^A kümesi *A'dan B'ye olan tüm dönüşümlerin kümesi*dir. Notasyonun bu şekilde kullanımının gerekçesi nedir? A kümesini, her bir elemanı bir "nokta" biçiminde gösterilmek üzere önümüze serilmiş olarak düşünürüz. Sonra, B^A'ya ait bir elemanı resmetmek üzere B'nin elemanlarından birini bu noktalardan her birine yerleştiririz. Bu, A'dan B'ye bir dönüşümdür çünkü B'nin bir elemanının A'nın her bir elemanına atanmasını sağlar (*bkz.* Şekil 16.5). B^A'ya ilişkin "üslü notasyon"un nedeni bu prosedürü sonlu kümelere, a elemanlı bir A kümesiyle b elemanlı bir B kümesi diyelim, uyguladığımızda B'nin bir elemanını A'nın her bir elemanına atama yollarının toplam sayısı aslında b^a'dır. (A'ya ait a adet elemanın her biri için örneğin ilk elemanı için b yol mevcuttur; ikincisi için b yol mevcuttur; üçüncüsü için b yol mevcuttur; vb. Böylece toplam sayı, $b \times b \times b \times \ldots \times b$ çarpımındaki b'lerin sayısı a olmak üzere b^a'dır.) Cantor'un B^A'nın kardinalitesine ilişkin notasyonu, β ve α sırasıyla B ve A'nın kardinaliteleri olmak üzere,

$$\beta^{\alpha}$$

olur.



Şekil 16.5 ***A***, ***B*** genel kümeleri için ***A***'dan ***B***'ye tüm dönüşümlerin kümesi $\boldsymbol{B^A}$'yla gösterilir (ayrıca bkz. Şekil 6.1). ***A***'nın her bir elemanı ***B***'nin belirli bir elemanına atanır. Bu, içerilen herhangi bir süreklilik kavramı olmaması dışında, ***B***×***A***'ya ait ***A*** üzerindeki bir demet olarak değerlendirilen (Şekil 15.6a'daki gibi) bir ara kesit sunar.

Bu, $\beta = 2$ olduğunda belirli bir anlam edinir. Burada B'yi, "içeride" ve "dışarıda" etiketleriyle düşüneceğimiz iki elemanlı bir küme olarak kabul edebiliriz. Böylece B^A'ya ait her eleman A'ya ait bütün elemanlara ya "içeride" ya da "dışarıda" yapılmış bir atanmadır. Bu tür bir atama basit olarak A'nın bir alt kümesini (diğer bir deyişle "içeride"ki elemanların alt kümesini) seçmek anlamına gelir. Böylece bu durumda B^A, A'nın alt kümelerinin kümesidir (ve A'ya ait bu alt kümeler kümesini sıklıkla 2^A olarak gösteririz). Buna göre:

2^α, α elemanlı herhangi bir kümenin toplam alt küme sayısıdır.

Şimdi Cantor'un şaşırtıcı kanıtı. Bu, klasik eski Yunan geleneği olan "çelişki yoluyla kanıtlama" (§2.6, §3.1) uyarınca ilerler. İlk olarak, bir A kümesiyle ona ait alt kümeler kümesi 2^A arasında 1–1 bir uygunluk olacak biçimde $\alpha = 2^\alpha$ olduğunu varsaymayı deneyelim. Böylece bu uygunluk sayesinde, A'ya ait her bir a elemanı, A'ya ait belirli bir $S(a)$ alt kümesiyle bağlantılı olacaktır. $S(a)$ kümesinin a'nın kendisini bir eleman olarak bazen içerip bazen içermeyeceğini bekleyebiliriz. $S(a)$'nın a'yı içermediği durumla ilgili a elemanlarının tümünün toplamını ele alalım. Bu toplam A'nın (gerekirse ya boş küme ya da tüm A olmasına izin vereceğimiz) belirli bir Q alt kümesi olacaktır. Varsayılmış olan 1–1 uygunluk durumunda S'deki bir q'yla ilgili $Q = S(q)$'ya sahip olmak zorundayız. Şimdi şu soruyu sorarız: "q, Q'da mıdır yoksa değil midir?" İlk olarak olmadığını düşünelim. Böylece q, Q alt kümesi olarak henüz ayırmış olduğumuz A'nın elemanları toplamına ait olmalıdır, ve böylece sonuçta q, Q'ya ait olmalıdır: bir çelişki. Bu bizi, q'nun Q'da olduğuna ilişkin alternatif düşünüşle baş başa bırakır. Bu durumda q, Q olarak adlandırdığımız toplama ait olamaz ve sonuçta q, Q'ya ait değildir: yine bir çelişki. Böylece, A'yla 2^α arasında varsaymış olduğumuz 1–1 uygunluğun var olamayacağı sonucunu çıkarırız.

Son olarak $\alpha \leq 2^\alpha$ olduğunu, diğer bir deyişle A ve 2^A'nın bir alt kümesi arasında 1–1 bir uygunluk olduğunu göstermemiz gerekir. Bu basit olarak, A'ya ait her bir a elemanını A'ya ait yalnızca a elemanını içeren belirli bir alt kümeye atayan 1–1 uygunluğu kullanılarak gerçekleştirilir. Böylece gerektiği gibi, $\alpha \leq 2^\alpha$'yı $\alpha \neq 2^\alpha$'yla birlikte göstererek $\alpha < 2^\alpha$'yı oluşturduk.

Bu argüman bir miktar kafa karıştırıcı olsa da (ve kafası karışan her okuyucu her şeyi baştan almak isteyebilir), uzman bilgisi gerektiren matematiksel fikirlere başvurmaması anlamında son derece "temel"dir. Bu görünümde, ulaşılan sonuçların olağanüstü biçimde geniş kapsamlı olması oldukça dikkat çekicidir. Yalnızca, temel olarak doğal sayılardan daha

fazla gerçel sayı olduğunu görmemize olanak sağlamakla kalmaz fakat ayrıca olası sonsuz sayıların büyüklüğünün bir sonu olmadığını da gösterir. Dahası argüman, hafifçe değişmiş biçiminde, genel bir hesaplamanın bir biçimde bir sona ulaşıp ulaşamayacağına karar vermenin hesaba dayalı hiçbir yolu olmadığını (Turing) gösterir ve ilgili bir sonuç da, önceden atanmış hiçbir güvenilir matematiksel kurallar kümesinin, işlemlerin tümünü matematiksel gerçeklerin onaylanması yoluyla kapsayamayacağını gösteren Gödel'in ünlü *eksiklik teoremi*dir. Sonraki bölümde bu tür sonuçların nasıl elde edildiğine ilişkin genel atmosferi vermeyi deneyeceğim.

Bununla birlikte bu bölümü bitirmek üzere Cantor'un sonsuzla ilgili ilk dikkat çekici buluşunu, diğer bir deyişle, tam olarak doğal sayılar kadar kesirli sayı olması gerçeğine karşın aslında doğal sayılardan çok daha fazla gerçel sayı oluşunu gerçekten niçin üstteki sonucun belirlediğini görelim. (Bu buluş aslında sonsuza ilişkin önemsiz olmayan bir kuramın mevcut olduğunu saptar!) Bu durum, genellikle C'yle gösterilen gerçellerin kardinalitesinin aslında $2^{\aleph_0}$'e eşit olduğunu

$$C = 2^{\aleph_0}$$

görürsek ortaya çıkacaktır. Böylece üstteki argüman yoluyla, olması gerektiği üzere, $C > \aleph_0$ olur.

$C = 2^{\aleph_0}$ olduğunu görmenin pek çok yolu mevcuttur. $2^{\aleph_0} \leq C$ olduğunu (esasen $C > \aleph_0$ olması için şu an gerek duyduğumuzun tümü) göstermek üzere $2^{\mathbb{N}}$ ve $\mathbb{R}$'nin bir *alt kümesi* arasında 1–1 bir uygunluk olduğunu saptamak yeterlidir. $2^{\mathbb{N}}$'nin her bir elemanını, ya 0 ya da 1'in ("dışarıda" ya da "içeride") doğal sayıların her birine bir atanması olarak düşünebiliriz, diğer bir deyişle bu tür bir eleman örneğin

100110001011101...

gibi bir dizi olarak düşünülebilir. ($2^{\mathbb{N}}$'nin bu belirli elemanı 0 doğal sayısına 1, 1 doğal sayısına 0, 2 doğal sayısına 0, 3 doğal sayısına 1, 4 doğal sayısına 1, vb, atar, böylece alt kümemiz {0, 3, 4, 8, ...,} olur.) Şu halde tüm bu basamak dizisini, ondalık işaretini en solda konumlanmış olarak düşündüğümüz gerçel bir sayının ikili genişlemesi olarak okuruz. Ne yazık ki bu, bu tür belirli gösterimlerde, diğer bir deyişle bütünüyle 0'lardan ya da 1'lerden oluşan sonsuz bir diziyle sonuçlananlarda,[16.11] bir anlam bulanıklığı oluşu rahatsız edici gerçeği nedeniyle pek işlemez. Bu tuhaflıktan pek çok aptal numara kullanarak kaçınabiliriz. Bunlardan biri ikili basamaklara, diyelim ki 3 basamağını kullanarak,

[16.11] Bunu açıklayın.

.31303031313030303130313131303 1...

ifadesini elde etmek üzere boş basamak eklemek ve sonrasında bu sayıyı gerçel bir sayının sıradan ondalık ifadesi gibi okumaktır. Buradan hareketle, aslında $2^{\mathbb{N}}$ ve $\mathbb{R}$'nin belirli bir alt kümesi (diğer bir deyişle, ondalık uzantısı bu tuhaf görünümlü boş basamak bırakılmış biçime sahip alt küme) arasında 1–1 uygunluk oluşturduk. Bu nedenle olması gerektiği gibi $2^{\aleph_0} \leq C$ olur (ve artık Cantor'un $C > \aleph_0$ ifadesini elde ederiz).

$C = 2^{\aleph_0}$ sonucunu çıkarmak üzere $C \leq 2^{\aleph_0}$ olduğunu gösterebilmemiz gerekir. Şu halde 0 ile 1 arasındaki her gerçel sayı, bazen gereğinden fazla olsa da ikili bir genişlemeye (üstte ele alındığı gibi) sahiptir; bu nedenle gerçellere ait bu belirli küme $\leq 2^{\aleph_0}$ olan kardinaliteye sahiptir. Bu aralığı $\mathbb{R}$'nin tümüne,[16.12] gerektiği üzere $C \leq 2^{\aleph_0}$'i ve buradan $C = 2^{\aleph_0}$'i saptayarak genişleten pek çok basit fonksiyon mevcuttur.

Temelleri aynı olsa da Cantor'un argümana ilişkin orijinal versiyonu üstte sunulandan bir biçimde farklı verildi. Onun orijinal versiyonu da yine çelişki yoluyla fakat daha dolaysız bir kanıttı. Kafada $\mathbb{N}$'yle, kesin biçimde 0 ve 1 arasında bulunan gerçel sayılar arasındaki varsayımsal bir 1–1 uygunluk canlandırıldı ve her biri ondalık uzantılı biçimde yazılan gerçel sayıların tümünün düşey bir listesi olarak gösterildi. Listenin tamamlanmış olduğuna ilişkin varsayımdaki bir çelişki, listede bulunmayan bir gerçel sayının, dizilimde üst sol köşeden başlayıp listedeki n'inci gerçel sayının yerini n'inci konumla değiştirerek ana köşegen boyunca aşağı inerek oluşturulduğu bir "köşegen argümanı" yoluyla elde edildi. (Buna ilişkin pek çok popüler açıklama mevcuttur; örneğin bununla ilgili olarak *The Emperor's New Mind* [*Kralın Yeni Usu*] adlı kitabımdaki versiyona bakın.)[16.13] Bu (bu bölümün başında $\alpha < 2^{\alpha}$ ifadesini göstermek üzere kullandığımızı da içeren) genel türdeki argüman bazen Cantor'un "çapraz kesiği" olarak adlandırılır.

16.5 Matematiğin temellerindeki bilmeceler

Üstte belirtildiği üzere sürekliliğe (diğer bir deyişle $\mathbb{R}$) ilişkin kardinalite, $2^{\aleph_0}$, genellikle C harfiyle gösterilir. Cantor bunu, $\aleph_0$ kardinalitesinin ardından "sonraki en küçük" anlamına gelecek şekilde "$\aleph_1$" biçiminde gösterebilmeyi tercih ederdi. Denedi fakat $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ olduğunu kanıtlayamadı;

[16.12] Birini gösterin. *İpucu*: Örneğin Şekil 9.8'e bakın.

[16.13] Bunun, $\alpha < 2^{\alpha}$ olduğunu göstermek üzere burada verdiğim $\alpha = \aleph_0$ durumundakiyle esasen niçin aynı argüman olduğunu açıklayın.

aslında *süreklilik hipotezi* olarak bilinen "$2^{\aleph_0} = \aleph_1$"e ilişkin tartışma konusu Cantor onu ileri sürdükten uzun yıllar sonra çözülmemiş ünlü bir konu haline geldi. "Mutlak" bir anlamda hala çözümsüzdür. Kurt Gödel ve Paul Cohen süreklilik hipotezinin (ve ayrıca seçme hipotezinin) standart küme kuramına ait araçlar yoluyla sonuçlandırılabilir olmadığını gösterebildiler. Bununla birlikte Gödel'in birazdan geleceğim eksiklik teoremi ve çeşitli ilgili konular nedeniyle bu, süreklilik hipotezinin *doğruluğu* konusunu kendi içinde çözmez. Standart küme kuramına ait doğruluğa karar verebilecek kanıtlardan, ya da bunun dışında süreklilik hipotezininkilerden daha güçlü kanıtlama yöntemleri hâlâ mevcuttur; diğer taraftan durum ona ilişkin doğruluk ya da yanlışlığın bağlı olunan matematiksel bakış açısına dayanan öznel bir konu oluşu olabilir.[6] Bu konuya, süreklilik hipotezi yerine seçme aksiyomuyla ilişkisi içinde §1.3'te değinildi.

$\alpha < 2^{\alpha}$ bağıntısının bize herhangi bir en büyük sonsuzluk olamayacağını söylediğini görürüz; bir Ω kardinal sayısı en büyük olarak ileri sürülseydi, bu durumda 2^{α} kardinal sayısının ondan bile büyük olduğu görülürdü. Bu gerçek (ve Cantor'un bu gerçeği saptayan argümanı) matematiğin temelleriyle ilgili önemli çıkarımlara sahipti. Özellikle, daha önceleri bir en büyük kardinal sayı (diğer bir deyişle tüm sınıfların sınıfı) olması gerektiği görüşünde olan filozof Bertrand Russell Cantor'un sonucundan şüphe etti fakat konuyu ayrıntılı olarak çalıştıktan sonra, 1902 dolaylarında fikrini değiştirdi. Aslında, Cantor'un argümanını "tüm kümelerin kümesine" uyguladı ve bu onu şu andaki ünlü "Russell paradoksu"na yöneltti!

Bu paradoks şu biçimde oluşur. "Kendi kendilerinin elemanı olmayan tüm kümeler"den oluşan $\mathcal{R}$ kümesini ele alın. (An itibariyle bir kümenin kendi kendisinin bir elemanı olabilmesine inanmaya hazır olup olmamanız önemli değildir. Hiçbir küme kendisine ait değilse bu durumda $\mathcal{R}$ *tüm* kümelerin kümesidir.) $\mathcal{R}$'nin kendisinden ne haber sorusunu sorarız. $\mathcal{R}$ kendi kendine ait bir üye midir? Öyle olduğunu düşünün. Öyleyse o, kendi kendilerine ait olmayan kümelere ilişkin $\mathcal{R}$ kümesine ait olduğundan sonuçta kendisine de ait olmaz; bir çelişki! Alternatif düşünüş biçimi, onun kendisine ait olmayışıdır fakat bu durumda kendi kendilerinin üyesi olmayan küme ailesinin tümüne, diğer bir deyişle $\mathcal{R}$ kümesine ait bir eleman olmalıdır. Böylece, kendisine ait olmadığı varsayımıyla çelişir biçimde $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$'ye aittir. Bu durum açık bir çelişkidir!

---

[6] Benzer uyarılar Cantor'un *genellenmiş* süreklilik hipotezi (α artık, tanımını burada tartışmadığım bir "sıra sayısı" olmak üzere), $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, için ve ayrıca seçme aksiyomu için de geçerlidir.

Bunun basitçe, α "tüm kümelerin kümesi" olarak kabul edildiği durumda uygulandığında Cantor'un kanıtına, $\alpha < 2^{\alpha}$, olan şey olduğu belirtilebilir.[16.14] Aslında bu Russell'ın, paradoksla karşılaşma biçimidir.[7] Bu argüman, aslında "tüm kümelerin kümesi" gibi bir şeyin mevcut olmadığını göstermektedir. (Aslında Cantor bunun zaten farkındaydı ve "Russell paradoksu"nu Russell'dan birkaç yıl önce biliyordu.)[8] "Tüm kümelerin kümesi" kadar kestirme bir şeyin yasaklı bir konu oluşu tuhaf görünebilir. Bize, bir şeyin ne zaman kendine ait olduğunu ve ne zaman olmadığını söyleyen iyi tanımlı bir kural mevcut olduğunda, bir kümeye ilişkin herhangi bir önermenin mükemmel derecede makul olmak zorunda olduğu düşünülebilir. Öyle görünüyor ki burada kesinlikle bu tür bir kural, diğer bir deyişle *her* kümenin kendi içinde olması durumu mevcuttur! Hile, bu hayret verici toplama, her bir üyesine olduğu gibi, aynı konumu atfediyor, diğer bir deyişle iki tür toplamı da basitçe bir "küme" olarak adlandırıyor oluşumuzdadır. Tüm argüman, bir *küme*nin gerçekten ne olduğuna ilişkin açık bir fikir sahibi olmamıza bağlıdır. Bir kez böyle bir fikre sahip olduğumuzda şu soru ortaya çıkar: bu şeylerin tümünün toplamı gerçekten bir küme olarak kabul edilebilir mi? Cantor ve Russell'ın bize söylediği şey bu yanıtın hayır olması gerektiğidir!

Aslında matematikçilerin bu açık biçimde paradoksal olan durumu kabullenmelerinin yolu, "kümeler" ve "sınıflar" arasında bir tür ayrıştırmanın yapılmış olduğunu düşünmektir. (Kümeler, derneklere girmek üzere her zaman yeterli derecede saygınlığa sahip olarak kabul edilirken sınıfları buralara alınmaması gereken, kimi zaman başa çıkılması oldukça güç şeyler olarak düşünün.) Açık konuşursak, bir bütün olarak ele alınmasına bir şekilde izin verilen herhangi bir kümeler toplamı bir *sınıf* olarak adlandırılır. Bazı sınıfların kendileri küme olarak ele alınmak için yeteri derecede saygındır fakat diğer sınıflar küme olarak kabul edilmek için ya "çok büyük" ya da "çok düzensiz" olarak ele alınır. Diğer taraftan *sınıfları*, daha büyük oluşturmak üzere bir araya toplamaya izinli olmak zorunlu değildir. Bu nedenle "tüm kümeler kümesi" (ya da "tüm sınıflar sınıfı") izinli değildir fakat "tüm kümeler sınıfı" yasal olarak değerlendirilir. Cantor bu "üstün" sınıfı Ω'yla gösterdi ve ona neredeyse kutsal bir anlam atfetti. "2^{Ω}"yla ilgili sorun onun, kendilerinin de çoğu küme olmayan Ω'ya ait farklı tüm "alt sınıflar"ın "bir araya toplanması"nı içermesidir, bu nedenle bu da izinli değildir.

[16.14] Olan şeyin bu olduğunu gösterin.

7 *Bkz.*, Russell, 1903, s. 362; 1937 baskısında ikinci dipnot.

8 *Bkz.*, Van Heijenoort, 1967, s. 114.

Tüm bununla ilgili oldukça yetersiz görünen bir şey söz konusudur. Bu durumla ilgili olarak, ben de kesinlikle hoşnutsuz olduğumu itiraf etmeliyim. Bu işlem, bize bir sınıfın aslında ne zaman bir küme olarak nitelendiğini söyleyen kestirme bir kıstas mevcut olsaydı makul olabilirdi. Bir sınıf, ancak ve ancak kendisi de başka bir sınıfın üyesi olabilirse bir küme olarak kabul edilir; bana sorgulamayı hak eder görünüyor! Sorun, çizgi çekeceğimiz belirgin bir yerin olmamasıdır. Bir kez bir çizgi çizildiğinde, bir süre sonra, bu çizginin aslında oldukça dar biçimde çizildiği görülmeye başlıyor. Kümeler kulübümüze daha büyük (ya da başa çıkılması daha güç) sınıfları katmamak için hiçbir neden yokmuş gibi görünür. Elbette açık seçik bir çelişkiden kaçınılmalıdır fakat kümeler kulübüne üyelik koşulları ne kadar özgürlükçü olursa küme kavramının matematiksel kanıtlara ilişkin artık sunduğu yöntemlerin o kadar güçlü olduğu ortaya çıkar. Buna karşın kulübün kapısını küçük bir çatlak kadar aralayın ve felaket ortay çıksın; ÇELİŞKİ!; tüm bina yerle bir olsun! Bu tür bir çizgi çekmek matematikteki en hassas ve zor işlemlerden biridir.[9]

Pek çok matematikçi, kendisi uyarınca, bir kümeye yalnızca, bize bir elemanın ne zaman kümeye ait olduğunu ne zaman olmadığını söylemeye olanak sunan dolaysız bir yapı mevcutsa izin verilen katı bir tutucu "inşacı" yaklaşımı dahi benimseyerek, bu tür aşırı özgürlükçülükten geri dönüşü tercih edebilir. Sırf seçim aksiyomunun kullanımı yoluyla tanımlanan "kümeler" bu tür katı kurallar altında kesinlikle izin verilmeyen bir üyelik kıstasına sahiptir! Yine de bu aşırı tutucuların, Cantor'un çapraz kesiğine karşı aşırı özgürlükçülerden daha bağışık olmadıkları ortaya çıkar. Sonraki bölümde, tehlikenin ne olduğunu görmeyi deneyelim.

16.6 Turing makineleri ve Gödel teoremi

İlk olarak matematikte bir şeyi "oluşturma"nın ne anlama geldiğiyle ilgili bir kavrama gerek duyarız. Dikkati doğal sayılar kümesinin, $\mathbb{N}$, alt kümeleriyle, en azından buradaki basit ele alışlarımız için, sınırlandırmak en iyisi olacaktır. Bu tür alt kümelerin hangilerinin "yapısal olarak" tanımlandığını sorabiliriz. Şanlıyız ki elimizin altında, 20. yüzyılın ilk üçte birlik diliminde çeşitli mantıkçılar[10] tarafından ileri sürülüp 1936'da Alan Turing tarafından sağlam bir temele oturtulan harika bir kavrama sahi-

[9] Bu konularla ilgili yeni bir yaklaşım için *bkz.*, Woodin, 2001. Matematiğin temelleriyle ilgili genel kaynak için *bkz.*, Abian, 1965 ve Wilder, 1965.

[10] Turing'e ilişkin bu öncüler temelde Alonzo Church, Haskell B. Curry, Stephen Kleene, Kurt Gödel, ve Emil Post'tu; *bkz.* Gandy, 1988.

biz. Bu, *hesaplanabilirlik* kavramıdır; artık elektronik bilgisayarlar bize epey tanıdık olduğundan, ilgili fikirleri bazı kesin matematiksel denklemler biçiminde vermek yerine bu fiziki aletlerin eylemlerine başvurmak benim için olasılıkla yeterli olacaktır. Açıkça söylersek, bir *hesaplama* (ya da *algoritma*) ideal bir bilgisayarın, "ideal", belirsiz bir zaman süresince "yıpranma" olmaksızın devam edebilme, asla hata yapmama ve sınırsız bir depolama alanına sahip olma anlamına gelmek üzere, gerçekleştirdiği şeylerdir. Matematiksel olarak bu tür bir işlem etkin bir şekilde *Turing makinesi* olarak adlandırılan şeydir.[11]

Herhangi belirli bir T Turing makinesi, doğal sayılarla gerçekleştirilebilen belirli bir hesaplamaya karşılık gelir. T'nin belirli n doğal sayısı üzerindeki eylemi $T(n)$ biçiminde yazılır ve normalde bu eylemin (başka) bir m doğal sayısı sonucunu verdiğini kabul ederiz:

$$T(n) = m.$$

Bir Turing makinesi, gerçekleştirdiği hesaplamanın asla sonlanmaması nedeniyle "çıkmaz"a saplanma (ya da "bir döngüye girme") özelliğine sahip olabilir. Bir Turing makinesi doğal bir n sayısına uygulandığında işlemi sona erdirmekte başarısız olursa bu durumda makine *hatalı*dır diyeceğim. Öte taraftan hangi sayıyla karşılaşırsa karşılaşsın işlemi her zaman sona erdirirse onu *etkin* olarak adlandıracağım.

Sonlandırmayan (hatalı) bir T Turing makinesine bir örnek, bir n'yle karşılaştığında n adet kareli sayının ($0^2 = 0$ dahil) toplamı olmayan en küçük doğal sayıyı bulmayı deneyen makinedir. $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(2) = 3$, $T(3) = 7$ olduğunu (bu denklemlerin anlamı, sonuncusu kullanılarak "7, 3 adet kareli sayının toplamı olmayan en küçük sayıdır" biçiminde örneklendirilmek üzere),[16.15] buluruz fakat T 4'e uygulandığında, dört kareli sayının toplamı olmayan bir sayı bulmaya çalışarak sonsuza dek hesaplamaya devam eder. Bu belirli makinenin teklemesinin sebebi her doğal sayının aslında kareli dört sayının toplamı olduğunu kanıtlayabilen büyük 18. yüzyıl Fransız–İtalyan matematikçi Joseph C. Lagrange'a atfedilen ünlü bir teoremde yatar. (Lagrange daha sonra bizim için farklı bir bağlamda, göreceğimiz üzere özellikle 20 ve 26. bölümlerde oldukça dikkate değer bir öneme sahip olacak!)

Ayrı her bir (hatalı ya da etkin) Turing makinesi, bu belirli Turing makinesinin gerçekleştirdiği belirli algoritmayı niteleyen kesin bir "kullanım

---

[11] Turing makinesiyle ilgili ayrıntılı bir açıklama için *bkz.* Penrose, 1989, bölüm 2; *örn.* Davis, 1978 ya da orijinal kaynak, Turing, 1937.

[16.15] Algoritmamızın ne şekilde gerçekleştirilebileceğine ilişkin kabaca bir açıklama yapın ve bu belirli değerleri açıklayın.

kılavuzu"na sahiptir. Bu tür bir kullanım kılavuzu, basamaklar dizisi biçiminde yazabileceğimiz bir "kod" yoluyla bütünüyle belirtilebilir. Daha sonra bu diziyi bir t doğal sayısı olarak yeniden yorumlayabiliriz; böylece t makinenin, kendine ait belirli algoritmayı gerçekleştirmesine olanak sunan "program"ı kodlar. t doğal sayısıyla kodlanan Turing makinesi T_t'yle gösterilir. Kodlama tüm t doğal sayıları için çalışmayabilir fakat bir sebeple çalışmadığı durumda, makinenin bir n'ye uygulandığında başarısızlığa uğradığı henüz ele alınmış o durumlara ek olarak, T_t'yi "hatalı" olarak değinebiliriz. Etkin biricik T_t Turing makinesi herhangi bir tekil n'ye uygulandığında sonlu bir süre sonunda bir yanıt sağlayan makinedir.

Turing'in temel başarılarından biri, *evrensel* U Turing makinesi olarak adlandırılıp ne şekilde olursa olsun herhangi bir Turing makinesinin eylemini taklit edebilen tekil bir Turing makinesi belirtmenin olası olduğunu fark etmesiydi. U için gerekli olan şey, ilk olarak taklit edilecek belirli T_t Turing makinesini belirterek t doğal sayısı üzerine etki etmek ve sonrasında $T_t(n)$'yi hesaplamaya devam edebileceği şekilde n sayısına etki etmektir. (Genel amaçlı modern bilgisayarlar aslında evrensel Turing makineleridir.) Bu birleşik $U(t,n)$ eylemini

$$U(t,n) = T_t(n)$$

olacak şekilde yazacağım. Bununla birlikte Turing makinelerinin burada tanımlandığı üzere örneğin (t,n) gibi doğal sayı çiftleri yerine tekil doğal sayılara etki etmeleri gerektiğini aklımızda tutmalıyız. Yine de bir doğal sayı çiftini daha önce gördüğümüz üzere (alıştırma [16.8]) tekil bir doğal sayı olarak kodlamak pek de zor değildir. U makinesinin kendisi bir doğal sayı, u diyelim, yoluyla tanımlanır ve böylece

$$U = T_u$$

ifadesine sahip oluruz.

Bir Turing makinesinin hatalı ya da etkin olduğunu nasıl söyleyebiliriz? Bu kararı vermek üzere bir algoritma bulabilir miyiz? Bu sorunun yanıtının aslında "hayır" olduğunu göstermek Turing'in önemli başarılarından biridir. Kanıt, Cantor'un çapraz kesiğinin bir uygulamasıdır. Önceki gibi $\mathbb{N}$ kümesini ele alacağız fakat şimdi $\mathbb{N}$'nin *tüm* alt kümeleri yerine yalnızca konunun kendileri için bir elemanın kümede olup olmadığına karar vermek üzere bir *hesaplama* konusu olduğu alt kümeleri ele alacağız. (Bunlar $\mathbb{N}$'nin tüm alt kümeleri olamaz çünkü $\mathbb{N}$'ye ait tüm alt kümelerin sayısı C'yken farklı hesaplama sayısı yalnızca $\aleph_0$'tır.) Bu tür hesaba dayalı olarak tanımlanan kümeler *yinelenen* biçiminde adlandırılır. Aslında $\mathbb{N}$'ye ait yinelenen herhangi bir alt küme yalnızca 0 ya da 1 çıktısı veren belirli

türde etkin bir Turing makinesinin çıktısı yoluyla tanımlanır. $T(n) = 1$ durumunda n, T yoluyla tanımlanan yinelenen kümenin bir üyesiyken ("içeride"), $T(n) = 0$ durumunda n bir üye değildir ("dışarıda"). Şu halde Cantor argümanını aynen önceki gibi fakat yalnızca $\mathbb{N}$'ye ait *yinelenen* alt kümelere olmak üzere, uygularız. Argüman bize hemen, kendileri için T_t'nin etkin olduğu doğal sayılar kümesinin yinelenen olamayacağını söyler. T'nin hatalı olup olmadığını söylemek üzere herhangi bir T turing makinesine uygulanabilir hiçbir algoritma yoktur!

Bu gerekçelendirmeye biraz daha yakından bakma çabasına değer. Turing/Cantor argümanının gerçekten gösterdiği şey, kendisi için T_t'nin etkin olduğu t kümesinin *yinelenen biçimde sayılabilir* bile olmadığıdır. $\mathbb{N}$'ye ait yinelenen biçimde sayılabilir bir alt küme nedir? Kendileri için, ardışık olarak 0, 1, 2, 3, 4, ...'e uygulandığında sonuç olarak bu kümenin her bir üyesini üreten etkin bir T Turing makinesinin mevcut olduğu bir doğal sayılar kümesidir. (Şöyle ki, m, bir n doğal sayısı için ancak ve ancak $m = T(n)$ olursa kümenin bir üyesi olur.) $\mathbb{N}$'ye ait bir S alt kümesi ancak ve ancak kendisi ve ayrıca ona ait $\mathbb{N} - S$ *tümleyeni* de yinelenen biçimde sayılabilir olursa yinelenen olur.[16.16] Turing/Cantor argümanının bir çelişki türettiği varsayılmış 1–1 uygunluk etkin Turing makinelerinin yinelenen bir numaralandırmasıdır. Ne öğrendiğimiz üzerine küçük bir gözden geçirme bize, bir Turing makinesinin $T_t(n)$ eyleminin durmakta ne zaman *başarısız* olacağını söyleyen hiçbir genel algoritma olmadığını söyler.

Bunun bize sonuç olarak söylediği şey, içerisinde kabul edilebilir biricik kümenin, üyeliği hesaba dayalı belirgin kurallar yoluyla tanımlanan küme, yinelenen kümeler olduğu "aşırı tutuculuğa" ilişkin konumla ilgili beslenmiş umutlara karşın, bu bakış açısının bizi hemen yinelenen olmayan kümeleri göz önüne alma zorunluluğuna yöneltmesidir. Bu bakış açısı hatta, iki farklı etkin T_t ve T_s Turing makinesince tanımlandıklarında, yinelenen iki kümenin aynı ya da farklı olup olmadıklarına ilişkin hesaba dayalı hiçbir *genel biçimli* karar verme yöntemi olmaması temel zorluğuyla da karşılaşır![16.17] Dahası bu tür bir sorunla, "küme" kavramımızı oldukça tutucu bir bakış açısıyla sınırlamaya çalıştığımızda, farklı seviyelerde tekrar tekrar karşılaşılır. Her zaman, daha önceki izin verilmiş küme ailemize ait olmayan sınıfları göz önüne almaya itiliriz.

[16.16] Bunu gösterin.

[16.17] Niçin böyle olduğunu görebiliyor musunuz? *İpucu*: n'ye uygulanan rasgele bir T Turing makinesi eylemiyle ilgili olarak, n'ye uygulanan T, hesaba dayalı r adımın ardından durmamışsa $Q(r) = 0$ ve durmuşsa $Q(r) = 1$ olacak biçimdeki özelliğe sahip etkin bir Q Turing makinesini göz önüne alabiliriz. $Q(n)$'nin $T_t(n)$'le, $T_s(n)$ elde etmek üzere, modülo 2 toplamını alın.

Bu konular Kurt Gödel'in ünlü teoremiyle yakından ilişkilidir. O, matematikçiler için erişilebilir olan kanıtlama yöntemlerine ilişkin sorunla ilgilendi. 20. yüzyıla girilirken ve uzun yıllar sonrasında da matematikçiler küme kuramının aşırı özgürlükçü biçimde kullanımından kaynaklanan (Russell Paradoksu gibi) paradokslardan, kendisi uyarınca, hangi gerekçelendirme sınırının matematiksel bir kanıt olarak kabul edileceği konusunda kesin biçimde belirgin bir kurallar bütününün saptanmak zorunda olduğu matematiksel bir *biçimsel sistem* fikrini ileri sürmek yoluyla kaçınmaya çalıştılar. Gödel'in gösterdiği şey bu yapımın çalışmayacağıydı. Aslında o, bu tür biçimsel bir ***F*** sisteminin kurallarının bize matematiksel olarak yalnızca doğru sonuçlar verdiğine güvenmek zorunluluğunu kabul etmeye hazırlanırsak bu durumda ayrıca belirli bir açık matematiksel G(***F***) ifadesini de, G(***F***)'nin yalnız başına ***F***'ye ilişkin yöntemlerle kanıtlanabilir olmadığı sonucunu çıkarırken, doğru olarak kabul etmek zorunda olduğumuzu gösterdi. Böylece Gödel, güvenmeye hazırlandığımız herhangi bir ***F***'nin nasıl aşıldığını gösterdi.

Gödel'in sonucu dolaysız biçimde (tarihi olaylar diğer türlü olsa da) Turing'inkini izler. Bu, nasıl işler? Biçimsel bir sistemle ilgili nokta, ***F***'ye ilişkin kuralların doğru biçimde uygulanmış olup olmadıklarını kontrol etmek üzere daha fazla matematiksel değerlendirme gerekmemesidir. Matematiksel bir kanıtın ***F***'ye göre doğruluğuna karar vermek tümüyle hesaba dayalı bir konu olmak zorundadır. Herhangi bir ***F***'yle ilgili olarak, onun kuralları kullanılarak kanıtlanabilen matematiksel teoremler kümesinin zorunlu olarak yinelenen biçimde sayılabilir olduğunu buluruz.

Artık iyi bilinen bazı matematiksel ifadeler "filanca Turing makinesi eylemi sonlanmaz" biçiminde ifade edilebilir. Buna ilişkin bir örneği, her doğal sayının dört kareli sayının toplamı olduğunu söyleyen Lagrange teoremini zaten görmüştük. Daha ünlü başka bir teorem 20. yüzyıl sonunda Andrew Wiles tarafından kanıtlanan "Fermat'nın son teoremi"dir (§1.3).[12] Bununla birlikte iyi bilinen başka (fakat çözülmemiş) biri, 2'den büyük her çift sayının iki asal sayının toplamı olduğuna ilişkin "Goldbach varsayımı"dır. Bu doğadaki ifadeler matematik mantıkçılarınca $\prod_1$*–cümleleri* olarak bilinir. Şu halde Turing'in üstteki argümanını hemen, gerçek $\prod_1$–cümleler ailesinin yinelenen biçimde olmayan sayılabilir (diğer bir deyişle yinelenen biçimde sayılabilir olmayan) bir kümeden oluştuğu sonucu izler. Bu nedenle ***F***'ye ait kurallardan (***F***'yi güvenilir varsaymak üzere) elde edilemeyecek gerçek $\prod_1$–cümleleri mevcuttur. Bu, Gödel teoreminin temel biçimidir. Aslında, bunu ayrıntılı olarak biraz daha yakından inceleyerek

[12] *Bkz.* Singh, 1997; Wiles, 1995.

argümanı üstte belirtilen versiyonunu elde edecek şekilde düzeltebiliriz ve F'nin yalnızca gerçek $\prod_1$–cümleleri verdiğine inanırsak, F yoluyla ağdan kurtulmak zorundaki belirli bir G(F) $\prod_1$–cümlesini, G(F)'nin de ayrıca gerçek bir $\prod_1$–cümlesi olduğu sonucunu çıkarmak zorunda olmamız gerçeğine karşın elde ederiz![16.18]

16.7 Fizikte sonsuzun boyutları

Son olarak bu sonsuz ve oluşturulabilirlik konularının önceki bölümlerimizdeki matematik ve şu anki fizik kavrayışımızla ilişkisi içinde nasıl yer aldığını görelim. Matematik ve fizik arasındaki yakın ilişki açısından, matematikte bu tür sonlu ötesi küme kuramı ve hesaplanabilirlik gibi önemli konuların fiziki dünyayı tanımlayışımız üzerinde şimdiye kadar oldukça sınırlı bir etkiye sahip olmuş olmaları dikkat çekicidir. Kendi kişisel görüşüme göre hesaplanabilirlik konularının sonuçta geleceğin fiziki kuramıyla derin bir ilişkiye sahip olacağını bulacağız,[13] fakat şimdiye kadar matematiksel fizikte bu fikirlerin yalnızca çok kısıtlı bir kullanımı söz konusu oldu.[14]

Değer bulan sonsuzlukların *boyutu* bakımından, fiziki hiçbir kuramın $\mathbb{R}$ gerçel sayı sistemine ilişkin C ($= 2^{\aleph_0}$) kardinalitesinin ötesine gidişimize gerek duymaz görünmesi oldukça çarpıcıdır. Karmaşık $\mathbb{C}$ alanının kardinalitesi $\mathbb{R}$'ninkiyle (diğer bir deyişle C), $\mathbb{C}$ yalnızca kendisi üzerinde belirli toplama ve çarpma kurallarıyla tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (gerçel sayı çiftleri) olduğundan, aynıdır. Benzer şekilde, değerlendiregeldiğimiz vektör alanları ve manifoldlar, bir $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$'den (ya da $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}$) ya da bu tür sonlu (ya da sayılabilir çokluktaki, diğer bir deyişle $\aleph_0$ değerinde) koordinat yamalarından atanmış koordinatlar olabilen nokta ailelerinden inşa edilir ve kardinalite yine C'dir.

Bu tür uzaylar üzerindeki fonksiyon ailelerinden ne haber? Diyelim ki, C noktaya sahip bir uzay üzerindeki tüm gerçel sayı değerli fonksiyonların ailesini göz önüne alırsak, böylece üstteki değerlendirmelerden ailenin C^C üyeye (C–elemanlı bir uzaydan C–elemanlı bir uzaya yapılan gönderimler olmak üzere) sahip olduğunu buluruz. Bu, kesinlikle C'den büyüktür. Aslında $C^C = 2^C$ olur. (Bu, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$'ye ait her bir elemanın $2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$'nin belirli bir elemanı, diğer bir deyişle $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ demetinin (genellikle sürekliden uzak) bir ara kesiti olarak yeniden yorumlanabilmesinin sonucudur ve $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$'nin

[16.18] Bunu oluşturabilir misiniz görün.

[13] *Bkz.* Penrose, 1989, 1994d, 1997c.

[14] *Bkz.* Komar, 1964; Geroch ve Hartle, 1986, §34.7.

kardinalitesi C'dir.) Bununla birlikte bir manifold üzerindeki *sürekli* gerçel fonksiyonlar sayıca yalnızca C adettir çünkü sürekli bir fonksiyon, ona ait rasyonel koordinatlı nokta kümesi üzerindeki değerler bilindiğinde belirlenir. Bunların sayısı, rasyonel koordinatlı noktaların sayısı yalnızca $\aleph_0$ olduğundan $C^{\aleph_0}$ olur. Yine de $C^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = C$ olur.[16.9] §§6.4, 6'da *hiperfonksiyonlar* (§9.7) olarak bilinen çok büyük genellemeye yol açan sürekli fonksiyonlara ilişkin belirli genellemeyi ele aldık. Bununla birlikte bunların sayısı, (her biri sayıca C olan) holomorfik fonksiyon çiftleri yoluyla tanımlandıkları için yine C'den büyük değildir.

§22.3'te kuantum kuramının, son derece çok boyuta sahip *Hilbert uzayı* olarak bilinen belirli uzayların kullanımına gerek duyduğunu görüyor olacağız. Bununla birlikte Bu belirli sonsuz boyutlu uzaylar sonlu boyutlu uzaylardan belirgin biçimde faklı olsa da, onlar üzerinde sonlu boyutlu durumdakinden daha fazla sürekli fonksiyon mevcut değildir ve toplam sayı olarak yine C elde ederiz. Kuantum alan kuramındaki yol integral formülasyonuyla (§26.6'da tartışılacağı üzere) ilişkisi içinde bundan daha yükseğe gitmenin en iyi yolu, uzayzamandaki hırçın görünümlü eğrilerin (ya da hırçın görünümlü fiziki alan düzenlerinin) bir uzayı ele alındığında söz konusu olur. Bununla birlikte toplam sayı olarak hâlâ yalnızca C elde eder görünüyoruz çünkü hırçınlıklarına karşın bu yapılarda sürekliliğe ilişkin yeterli bakiye mevcuttur.

Kardinalite kavramı, fizikte karşılaşılan uzaylara ilişkin uygun *boyut* kavramını yakalayacak yeterlilikte sadeleştirilmemiş görünüyor. Anlamlı uzayların neredeyse tümü kendilerinde basitçe C noktaya sahiptir. Bununla birlikte bu uzayların "boyutlar"ında, ilk bakışta bu "boyutu" basitçe ele alman vektör uzayı ya da $\mathcal{M}$ manifoldunun boyutu olarak düşündüğümüz çok büyük bir farklılık mevcuttur. $\mathcal{M}$'ye ilişkin bu boyut doğal bir sayı (*örn.* olağan uzayzaman durumunda 4, ya da §12.1'de ele alınmış faz uzayları durumunda 6×10^{19}) olabilir ya da kuantum mekaniğinde ortaya çıkan Hilbert durum uzaylarındaki (ya da çoğundaki) gibi sonsuz olabilir. Matematiksel olarak en basit sonsuz boyutlu Hilbert uzayı, kendisiyle ilgili $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots$ sonsuz toplamının yakınsadığı, karmaşık sayılara ait $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ dizisine ilişkin uzaydır. Sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı durumunda en uygun olanı bu boyutluluğu $\aleph_0$ olarak düşünmektir. (Bununla ilgili olarak çeşitli incelikler mevcuttur fakat burada bunlara bulaşmamak en iyisi.) n–gerçel–boyutlu bir uzayla ilgili olarak, onun (noktaların bu sürekliliğinin n–boyutlu bir dizilimde düzenlendiğini ifade eden) "∞^n" noktaya sahip olduğunu söyleyeceğim. Sonsuz boyutlu durumda buna "∞^∞" nokta olarak değineceğim.

[16.19] A, B, C kümeleriyle ilgili olarak $(A^B)^C$'nin niçin $A^{B \times C}$'yle tanımlandığını açıklayın.

Ayrıca $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlı farklı türdeki uzaylarla da ilgilenmekteyiz. Bunlar normalde pürüzsüz kabul edilir fakat bazen, hiperfonksiyon kuramı (*bkz.* §9.7) kapsamında ortaya çıkarak daha geneldir (*örn.* dağılımlar). Serbestliklerini kısıtlayan (kısmi) türevsel denklemlere bağlı olabilirler. Bu kadar kısıtlı değillerse bu durumda, (standart uzayzaman için n=4 olmak üzere) n–boyutlu bir $\mathcal{M}$ için "n değişkenli fonksiyonlar" olarak kabul edilirler. Alan her noktada k adet bağımsız bileşene sahip olabilir. Bu durumda alandaki serbestlik $\infty^{k\infty^n}$'dir diyeceğim. Bu notasyonla ilgili açıklama,[15] alanların ∞^n noktalı bir uzaydan ∞^k noktalı bir uzaya (kabaca ve yerel olarak) gerçekleştirilen gönderimler olarak düşünülebilmesidir ve notasyon biçimindeki (biçimsel)

$$(\infty^k)^{\infty^n} = \infty^{k\infty^n}$$

bağıntısından yararlanırız.

Alanlar uygun kısmi türevsel denklemlerce kısıtlandığında, tümüyle alanlara ilişkin *başlangıç verisi* (özellikle §27.1'e bakın), diğer bir deyişle daha az–boyutlu, diyelim ki q–boyutlu $\mathcal{S}$ uzayı üzerinde belirtilen ikincil bir alan verisi yoluyla belirlenmeleri söz konusu olabilir. Veri $\mathcal{S}$ üzerinde (temelde, verinin $\mathcal{S}$ üzerinde sağlamak zorunda olduğu türevsel ya da cebirsel denklemler olan *kısıtlayıcılara* bağlı olmayan anlamına gelmek üzere) *özgürce* ifade edilebilirse ve bu veri $\mathcal{S}$'nin her bir noktasında bağımsız r adet bileşenden oluşursa bu durumda alandaki serbestlik $\infty^{r\infty^q}$'dur diyeceğim. Pek çok durumda r ve q'yu bulmak bütünüyle kolay bir iş değildir fakat önemli olan bunların, alanların eşdeğer diğer nicelikler biçiminde nasıl ifade edilebileceğinden bağımsız olarak *değişmez* nicelikler olmasıdır.[16] Bu konular bizim için ileride dikkate değer bir öneme sahip olacak (*bkz.* §23.2, §§31.10–12, 15–17).

---

[15] Bu kullanışlı notasyonu John A. Wheeler'a borçluyum, *bkz.* Wheeler, 1960, s. 67.

[16] *Bkz.* Cartan, 1945, özellikle orijinal baskı s. 75, 76'daki §§68,69. $\infty^{r\infty^q}$'deki r niceliğinin doğru biçimde kabul edildiğinden emin olmak için bir miktar özen gereklidir. İki sistem eşdeğer olabilir fakat yine de ilk bakışta farklı olduğu görülen r'lere sahip olarak. Bununla birlikte q değerinin belirlenmesinde hiçbir bulanıklık olamaz. Bu konuların hassas modern uygulamaları işleri şef faflaştırır; bu, *jet demetleri* kuramı biçiminde verilir, *bkz.* Bryant vd., 1991. Wheeler'ın notasyonunda, örneğin $\infty^{2\infty^2+3\infty^1+5}$ ifadesi "2 değişkenli 2 fonksiyona, 1 değişkenli 3 fonksiyona ve 5 sabite bağlı olan alanlar" yerine kullanılmak üzere, bir sadeleştirme olduğu belirtilebilir, *bkz.* Penrose, 2003. Bu nedenle $\infty^{p^{(\infty)}}$ benzeri ifadeleri, p negatif olmayan tamsayı katsayılı bir polinomu göstermek üzere, ele almaya yöneltiliriz.

17

UZAYZAMAN

17.1 Aristotelesçi fiziğin uzayzamanı

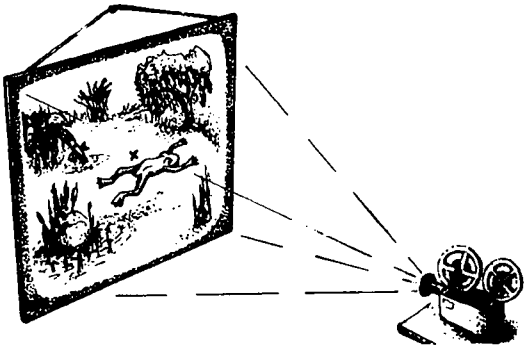
Şu andan itibaren ilgimiz, önceki bölümlerde uğraştığımız büyük oranda matematiksel değerlendirmelerden kuram ve gözlemin bizi yönelttiği fiziki dünyanın gerçek resmine dönecek. İçinde fiziki evrene ilişkin tüm olguların gerçekleşir göründüğü o alanı anlamaya çalışmakla başlayalım: *uzayzaman*. Bu kavramın, kitabın kalan kısmının çoğunda yaşamsal bir rol oynayacağını göreceğiz!

Öncelikle niçin "uzayzaman" diye sormalıyız?[1] Görünüşte oldukça farklı bu iki kavramı bir araya getirme girişimi yerine uzay ve zamanı ayrı ayrı düşünmenin neresi yanlış? Bu konudaki ortak algıya ve Einstein bu fikri, genel görelilik kuramında oldukça mükemmel kullanmış olmasına karşın uzayzaman ne Einstein'ın orijinal fikriydi ne de, öyle görünüyor ki, onu ilk duyduğunda özel olarak heyecanlanmıştı. Dahası, Galilei ve Newton'ın görelilikle ilgili daha eski muhteşem kavrayışlarına hak ettikleri biçimde bakarsak onların da temelde uzayzaman bakış açısından büyük yarar sağlayabildiklerini görürüz.

Bunu anlamak üzere, tarihte daha geriye gidelim ve Aristoteles ve çağdaşlarının dinamik yapılı çerçevesine hangi tür uzayzaman yapısının uygun olduğunu görmeye çalışalım. Aristoteles fiziğinde fiziki uzayı göstermek üzere Öklitçi bir $\mathbb{E}^3$ 3–uzay kavramı mevcuttur ve bu uzayın noktaları özdeşliklerini bir andan diğerine saklayıp korurlar. Bunun sebebi Aristotelesçi düzende sabit durumun dinamik olarak harekete ilişkin tüm diğer durumlara tercih edilmesidir. Zamanın bir anındaki belirli bir uzamsal noktanın daha sonraki bir anda, o noktada bulunan bir parçacık bir andan diğerine sabit kalırsa, *aynı* uzamsal nokta olduğuna ilişkin tutumu kabul ederiz. Gerçekliğe ilişkin resmimiz, üzerine ne tür şiddetli bir hareket yöneltilirse yöneltilsin perde üzerindeki belirli bir nokta özdeşliğini korumak üzere, sinema salonundaki perdeye benzer. *Bkz.* Şekil 17.1.

---

[1] Geçmişte tireli "uzay–zaman"ı önerenlerden biri olmama rağmen bunun, bu kitapta deyiş bilimde karmaşıklığa neden olduğu yerlerin var olduğunu buldum. Buna uygun biçimde burada "uzayzaman"ı benimsiyorum.



Şekil 17.1 Bu tür bir fiziki hareket sinema perdesi üzerinde algılanabilir mi? Üzerine ne tür bir hareket yöneltilirse yöneltilsin perde üzerindeki belirli bir nokta (burada "×" ile işaretli) özdeşliğini korur.

Zaman ayrıca bir Öklitçi uzay fakat görece önemsiz biri olarak da, diğer bir deyişle 1–boyutlu bir $\mathbb{E}^1$ uzayı olarak da gösterilir. Böylece zamanı fiziki uzay kadar, gerçel $\mathbb{R}$ doğrusunun yalnızca bir kopyası olmak yerine bir "Öklitçi geometri" olarak düşünürüz. Bu durum, "Aristotelesçi" dinamik bakışımızda tercih edilmiş herhangi bir başlangıç notası söz konusu değilken $\mathbb{R}$'nin zamanın "sıfır"ını temsil eden 0 elemanını tercih etmesinden kaynaklanır. (Bunda, "Aristotelesçi dinamik" ya da "Aristotelesçi fizik" olarak adlandırılabilen şeyin idealize edilmiş bir görünümünü kabul ediyorum, *gerçek* Aristoteles'in ne düşünmüş olabileceğiyle ilgili hiçbir bakış açısına sahip değilim!)[2] Tercih edilmiş bir "zaman başlangıç noktası" olmuş olsaydı, zaman tercih edilen bu başlangıç noktasından uzaklaştığında dinamik biçimli yasalar kafalarda değişir biçimde canlanabilirdi. Tercih edilen başlangıç noktasının olmadığı durumda yasalar tüm zaman boyunca aynı kalmak zorundadır çünkü bu yasaların dayanacağı tercih edilmiş hiçbir *zaman parametresi* mevcut değildir.

Benzer şekilde ben de tercih edilmiş uzamsal bir başlangıç noktası olması gerekmediği ve uzayın (yine, gerçek Aristoteles'in neye inanmış olabileceğiyle ilgisiz biçimde!) dinamik yasalardaki tam tekdüzelikle birlikte tüm yönlerde belirsiz biçimde devam ettiğine ilişkin görüşü benimsiyorum. Öklitçi geometride ister 1–boyutlu ister 3–boyutlu olsun, bir *uzaklık* kavramı mevcuttur. 3–boyutlu uzamsal durumda bu, (metre ya da diyelim ki ayakla* ölçülen) olağan Öklitçi uzaklık olmak durumundadır; 1–boyutlu durumda bu uzaklık (diyelim ki saniyeyle ölçülen) sıradan zaman aralığıdır.

---

[2] Öyle görünüyor ki Aristoteles de, Öklitçi $\mathbb{E}^3$ geometrinin uzamsal geometriyle ilgili tam bir açıklama sunması gerekliliğinin gerektirdiği gibi sonsuz bir uzay kavramıyla ilgili zorluklarla karşılaşmış olabilir fakat zamanla ilgili görüşleri $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ resmine ilişkin "$\mathbb{E}^1$"le daha fazla uyum içinde olmuştur.

* feet –çn.

Aristotelesçi fizikte ve aslında Galilei ve Newton'ın daha sonraki dinamik biçimli düzen(ler)inde, zamana ait *eşzamanlılık*la ilgili mutlak bir kavram mevcuttur. Böylece bu, bu tür dinamik biçimli düzen(ler) uyarınca buradaki, *tam da bu andaki* zamanın, bu satırları Oxford'daki evimde, ofisimde yazarken, Andromeda galaksisinde bir olayın meydana geldiği (diyelim ki bir süpernova yıldızının patlaması) "aynı zaman" olduğu mutlak anlamına sahiptir. Sinema perdesi benzetmemize dönersek, perde üzerinde yansıtılmış oldukça ayrı iki yerde meydana gelen iki görüntünün eşzamanlı biçimde gerçekleşip gerçekleşmediğini sorabiliriz. Buradaki yanıt açıktır. Olaylar, ancak ve ancak aynı yansıtılmış çerçevede gerçekleşirse eşzamanlı olarak kabul edilir. Bu durumda (zamanla ilgili olarak ayrılmış) iki olayın perde üzerindeki aynı uzamsal konumda gerçekleşip gerçekleşmediğine ilişkin açık bir kavrama sahip olmak yanında ayrıca (uzamsal olarak ayrılmış) bu iki olayın aynı zamanda gerçekleşip gerçekleşmediğine ilişkin de açık bir kavrama sahibiz. Dahası iki olayla ilgili uzamsal konumlar farklıysa, aynı zamanda gerçekleşseler de gerçekleşmeseler de, aralarındaki *uzaklık*la ilgili (diğer bir deyişle perde boyunca ölçülen uzaklık) açık bir kavrama sahip oluruz; ayrıca, iki olayla ilgili zamanlar farklıysa, aynı yerde gerçekleşseler de gerçekleşmeseler de aralarındaki *zaman aralığı*yla ilgili de açık bir kavrama sahip oluruz.

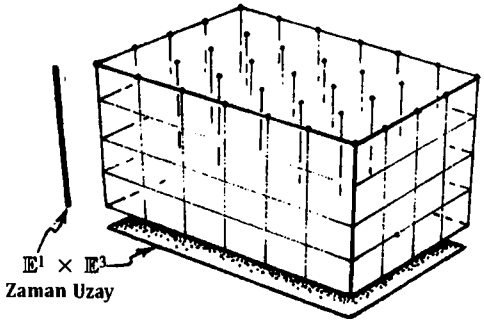
Bunun bize söylediği, Aristotelesçi düzenimizde *uzayzaman*ı basit biçimde, *Aristotelesçi uzayzaman* olarak adlandıracağım

$$\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$$

çarpım olarak düşünmenin uygun olduğudur. Bu, basit biçimde, t bir "zaman" olarak $\mathbb{E}^1$'e ait bir eleman ve $\mathbf{x}$ "uzayda bir nokta" olarak $\mathbb{E}^3$'e ait bir eleman olmak üzere, $(t, \mathbf{x})$ çiftlerinin uzayıdır. (*Bkz.* Şekil 17.2.) $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$'e ait iki farklı noktayla, diğer bir deyişle iki farklı olayla ilgili olarak, diyelim ki $(t, \mathbf{x})$ ve $(t', \mathbf{x}')$, $\mathbb{E}^3$'e ait $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}'$ noktaları arasındaki uzaklık anlamına gelen uzamsal ayrılıklarına ve de ayrıca aralarındaki, $\mathbb{E}^1$'de ölçülmüş biçimdeki t ve t' arasındaki ayrım anlamına gelen zaman farkına ilişkin iyi tanımlı birer kavrama sahibiz. Özellikle, iki olayın aynı yerde meydana gelip gelmediğini (uzamsal yer değiştirmenin yok oluşu) ve aynı zamanda gerçekleşip gerçekleşmediğini (zaman farkının yok oluşu) biliyoruz.

17.2 Galileici görelilikle ilgili uzayzaman

Şimdi gelin 1638'de Galileo Galilei tarafından sunulan dinamik biçimli düzenle ilgili hangi uzayzaman kavramının uygum olduğunu görelim. *Galileici görelilik ilkesi*ni kendi uzayzaman tablomuzla birleştirmek istiyo-



Şekil 17.2 Aristotelesçi $\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ uzayzaman, t ("zaman") Öklitçi $\mathbb{E}^1$ 1–uzayı, ve **x** *("uzaydaki nokta) Öklitçi $\mathbb{E}^3$ 3–uzayı üzerinde değişmek üzere, (t,* **x***) çiftlerinin uzayıdır.*

ruz. Bu ilkenin ileri sürdüğü şeyin ne olduğunu anımsayalım. Galilei'nin kendi aktarımından (burada yalnızca kısaltılmış haliyle verdiğim Stillman Drake'ye[3] ait bir çeviri; ve ulaşabilenlere alıntının tümünü incelemeyi şiddetle öneririm) daha iyisine ulaşmak zordur:

Kendinizi büyük bir geminin güvertesi altındaki ana kabine bir arkadaşınızla birlikte kilitleyin ve yanınıza sinek, kelebek ve başkaca kanatlı küçük hayvanlardan alın ... hemen altındaki genişçe bir kovaya damla damla akan bir şişe asın ... geminin hareketi o ya da bu şekilde dalgalanmayacak biçimde düzenli olduğu sürece istediğiniz hızla gitmesini sağlayın. ... Damlalar alttaki kovanın içine, damlalar havadayken gemi epeyce mesafe kat etmesine rağmen, kıç tarafına doğru damlamaksızın düşecek ... kelebekler ve sinekler her tarafa doğru farksız biçimdeki uçuşlarına devam edecek ya da geminin seyrine ayak uydurmaktan bitkin düşmüşçesine kıç tarafına doğru yoğunlaşmaları hiç gerçekleşmeyecektir...

Galilei'nin bize öğrettiği şey, düzenli biçimde hareket eden herhangi bir çerçeveyle ilgili olduklarında dinamik biçimli yasaların kesinlikle aynı olduğudur. (Bu onun, dünyanın zorunlu biçimdeki durağan konumunu belirten daha önceki Aristotelesçi yapının aksine, kendisi yoluyla dünyanın hareket halinde olmasına, bu hareketi dolaysız biçimde fark etmemiz olmaksızın izin verilen Kopernik düzenini içten kabul edişiyle ilgili temel bir bileşendi.) Sabit durum fiziğini düzenli harekete ilişkin olandan ayırt etmek üzere hiçbir şey mevcut değildir. Bunun bize üstte ifade edilmiş olan şey biçiminde söylediği, uzaydaki belirli bir noktanın uzayda sonraki bir zamanda seçilmiş noktayla aynı nokta olduğunu ya da olmadığını söylemenin dinamik olarak hiçbir anlamı olmadığıdır. Diğer bir deyişle sinema perdesi benzetmemiz uygunsuzdur! Zaman ilerledikçe sabit kalan herhangi bir ardalan uzayı, bir "perde", mevcut değildir. Uzaydaki bir *p* nok-

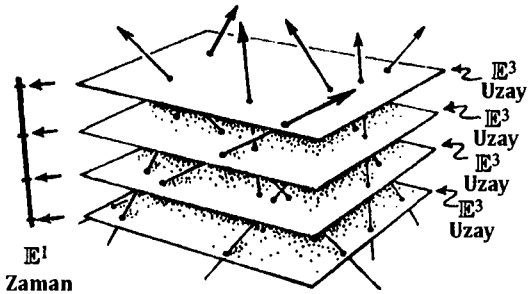
[3] *Bkz.* Drake, 1953, s. 186–187.

tasının (diyelim ki diz üstü bilgisayarımın klavyesindeki ünlem işaretinin noktası) bir dakika önce uzaydaki *aynı* nokta olduğunu ya da olmadığını anlamlı biçimde söyleyemeyiz. Bu konuya daha şiddetli biçimde yönelmek üzere dünyanın dönmesini gözünüzün önüne getirin. Bu hareket uyarınca, dünya yüzeyindeki (diyelim ki Oxford enlemindeki) sabit bir nokta söz konusu dakika içinde bir 10 mil kadar hareket etmiş olacaktır. Buna göre az önce seçtiğim p noktası artık Witney kentinin yakınlarında bir yerde ya da daha ötesinde konumlanmış olacaktır. Fakat bekleyin! Dünyanın güneş çevresindeki hareketini göz önüne almıyorum. Bunu yaparsam, p'nin artık yaklaşık yüz mil kadar fakat ters yönde daha uzakta olduğunu görürüm (çünkü artık öğleden sonradır ve burada dünya güneş çevresindeki hareketinin tersi yönde hareket eder), ve dünya p'den öylesine uzak bir alana hareket etmiş olacaktır ki artık p dünya atmosferinin eriminin ötesindedir! Peki, güneşin Samanyolu galaksimizin merkezi çevresindeki hareketini hesaba katmamalı mıyım? Ya da galaksinin kendisinin yerel grup içindeki "uygun hareket"inden ne haber? Ya da yerel grubun, küçük bir parçası olduğu Başak kümesi çevresindeki, ya da Başak kümesinin devasa Saç kümesiyle ilişkili ya da belki Saç kümesinin "Büyük Çekici"ye doğru hareketi?

Açıktır ki Galilei'yi ciddiye almalıyız. Uzaydaki herhangi belirli bir noktanın, şu andan bir dakika sonrasında uzayda benim seçmiş olduğum noktayla *aynı* nokta olarak değerlendirilmesi gerektiği fikrine iliştirilecek hiçbir anlam mevcut değildir. Galileici dinamikte, fiziki dünyanın zamanla birlikte gelişen eylemleriyle ilgili bir alan biçiminde yalnızca tek bir Öklitçi $\mathbb{E}^3$ 3–uzayına sahip değiliz; zamandaki her bir an için *farklı* bir $\mathbb{E}^3$'e, bu çeşitli $\mathbb{E}^3$'ler arasında doğal hiçbir belirleme olmaksızın sahibiz.

Fiziki uzaya ilişkin kavramımızın bir an geçerken tümüyle buharlaşıp diğer bir an geldiğinde bütünüyle farklı bir uzay olarak yeniden ortaya çıkan bir şey olarak görülmesi korkutucu görünebilir! Tam da orada çalıştığımız türde bir şey olarak buradaki durumla ilgili, 15. bölüm matematiği bizi kurtarmaya gelir. *Galileici $\mathcal{G}$ uzayzaman*ı bir $\mathbb{E}^1\times\mathbb{E}^3$ çarpım uzayı değildir; o, $\mathbb{E}^1$ taban uzayı ve $\mathbb{E}^3$ lifiyle birlikte bir *lif demeti*dir![4] Bir lif demetinde, bir lifle bir sonraki arasında noktasal olarak herhangi bir belirleme mevcut değildir; yine de lifler birbirlerine birleşik bir bütün oluşturmak üzere uyum sağlar. Her uzayzaman olayı, belirli bir $\mathbb{E}^1$ "saat uzayı"na ilişkin belirli bir eleman olarak doğal bir biçimde bir *zaman*a atanır fakat belirli bir $\mathbb{E}^3$ "konum uzayı"ndaki uzamsal bir konuma ilişkin herhangi doğal bir atama söz konusu değildir. §15.2'deki demet dilinde bir

[4] *Bkz.* Arnol'd, 1978; Penrose, 1968.



Şekil 17.3 Galileci $\mathcal{G}$ uzayzamanı $\mathbb{E}^1$ taban uzayı ve $\mathbb{E}^3$ lifiyle birlikte bir lif demetidir, böylece, her uzayzaman olayı bir zamana kanonik yansıtma yoluyla atanırken (mutlak zaman) farklı $\mathbb{E}^3$ demetleri arasında noktasal olarak herhangi bir belirleme mevcut değildir (mutlak uzay yok). (Burada yatay biçimde gösterilmiş olan tabana kanonik yansıtmayı Şekil 15.2'yle karşılaştırın.) Parçacık geçmişleri, içsel parçacık hareketleri burada $\mathcal{G}$'nin yapısının belirlediği şey, yani "düz" dünya çizgileri olarak gösterilmek üzere, demetin ara kesitleridir (Şekil 15.6a'yla karşılaştırın).

zamanla ilgili bu doğal atama $\mathcal{G}$'den $\mathbb{E}^1$'e gerçekleşen *kanonik biçimli yansıtma* yoluyla gerçekleştirilir. (*Bkz.* Şekil 17.3; ayrıca Şekil 15.2'yle karşılaştırın.)

17.3 Uzayzaman terimleriyle Newtoncı dinamik

Uzayzamana ilişkin bu "demet" tablosu oldukça iyidir fakat Galilei–Newton dinamiğini bu biçimde nasıl ifade etmeliyiz? Newton'ın, dinamiğe ilişkin yasaları formüle etmeye çalışırken kendini "mutlak uzay" kavramını kayırır göründüğü bir açıklamaya itilmiş bulması şaşırtıcı değildir. Gerçekte Newton, en azından başlangıçta, Galilei'nin kendisi kadar Galileici görelilikçiydi. Bu durum, hareket yasalarına ilişkin orijinal denklemlerinde Galileici görelilik kuralının (bu kural, fiziki eylemin düzenli biçimde hareket eden bir referans sisteminden diğerine olan değişime kör oluşunun gerekliliği olmak üzere ve *zaman* kavramı Galileici $\mathcal{G}$ uzayzamana ilişkin üstteki resimde belirtildiği gibi mutlak olmak üzere) temel bir yasa olduğunu belirgin olarak belirtmesi gerçeği nedeniyle açıktır.

Orijinal olarak içlerindeki 4. yasa aralarındaki Galileici kural olan beş (ya da altı) yasa ileri sürdü[5] fakat daha sonra *Principia* adıyla yayımlanan eserinde bunları, şu an bizim de "Newton yasaları" olarak bildiğimiz üç kurala sadeleştirdi. Bunun nedeni bu üçünün diğerlerini türetmek üzere

[5] Bu, onun *Principia*'sının 1684'te yazılmış bir öncülü olan *De motu corporum in mediis regulariter cedentibus* elyazması parçasında yer almaktaydı. Ayrıca *bkz.* Penrose, 1987d, s.49.

yeterli oluşunu fark etmiş olmasıydı. Yasalarıyla ilgili yapısını kesin hale getirmek üzere hareketlerin kendisine göre açıklanacağı bir "mutlak uzay" kavramını benimsemeye gerek duydu. Zamanında "lif demeti" kavramı kullanılıyor olsaydı (kuşkusuz abartılı bir olasılık), Newton'ın, yasalarını tümüyle "Galileici değişmezler" biçiminde formüle etmesi düşünülebilir olurdu. Bu tür bir kavram olmaksızın, Newton'ın "mutlak uzay"a ilişkin bir fikir ortaya koymadan, aslında yapmıştı, nasıl ilerleyebilmiş olduğunu görmek zordur.

$\mathcal{G}$ "Galileici uzayzaman"ımıza ne tür bir yapı atamak zorundayız? $\mathcal{G}$ lif demetimize bir demet bağlantısı (§15.7) bahşetmek olması gerekenden kesinlikle çok daha sert olur.[17.1] Bunun yerine yapmamız gereken onu, *Newton'ın birinci yasası*yla uyumlu bir şey biçiminde sunmaktır. Bu yasa, üzerine herhangi bir kuvvetin etkimediği bir parçacığın hareketinin düzenli ve düz bir çizgi üzerinde olması gerektiğini belirtir. Bu bir *eylemsizlik hareketi* olarak adlandırılır. Uzayzaman terimleriyle, herhangi bir parçacığın hareketi (diğer bir deyişle "geçmiş"i), eylemsiz bir hareket olsun ya da olmasın, parçacığın *dünya çizgisi* olarak adlandırılan bir eğriyle gösterilir. Gerçekte Galileici uzayzamanımızda dünya çizgileri her zaman Galileici demete ait *ara kesitler* olmak zorundadır; *bkz.* §15.3[17.2] ve Şekil 17.3. Sıradan uzamsal terimlerle "düzenli ve düz bir çizgide" (eylemsizlik hareketi) biçimindeki kavram, uzayzaman terimlerinde basit biçimde "düz" olarak yorumlanır. Bu nedenle, $\mathcal{G}$ Galileici demeti dünya çizgilerine ilişkin "düzlük" kavramını kodlayan bir yapıya sahip olmalıdır. Bunu söylemenin bir yolu $\mathcal{G}$'nin, bireysel $\mathbb{E}^3$ lifleriyle sınırlandırıldığında afin yapının her bir $\mathbb{E}^3$'e ilişkin Öklitçi afin yapıyla uyum içinde olduğu *afin* bir uzay (§14.1) olduğunu ileri sürmektir. Başka bir yol, doğal halde $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$'te ("Aristotelesçi" düzenli hareketler) bulunan ∞^6 düz çizgiler ailesini belirlemek ve bunları, Aristotelesçi $\mathcal{A}$ uzayzamanına ilişkin gerçek çarpım yapısını "unutur"ken Galileici demete ilişkin "düz çizgi" yapısını sunmak üzere devralmaktır. (∞^6'nın 6–boyutlu bir aile anlamına geldiğini anımsayın; *bkz.* §16.7.) Bununla birlikte daha başka bir yol, bir manifold olarak ele alınan Galileici uzayzamanın yok olan eğrilik ve yok olan torsiyonun ($\mathbb{E}^1$ üzerinde bir demet olarak ele alındığında bir demet bağlantısına sahip olmasından epey farklı olarak) ikisine birden sahip olduğunu ileri sürmektir.[17.3]

[17.1] Niçin?

[17.2] Bunun nedenini açıklayın.

[17.3] Bu üç yolu, tümünün niçin aynı yapıyı verdiğini göstererek ayrıntılı biçimde açıklayın.

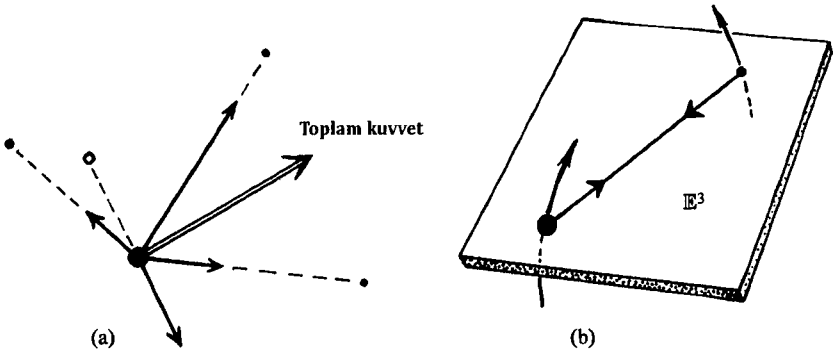
Aslında bu üçüncü bakış açısı, Einstein'ın fikirleriyle uyumlu olarak kütleçekimi açıklamak üzere §§17.5, 9'da gerek duyacağımız genellemelere izin verdiğinden en tatmin edici olanıdır. $\mathcal{G}$ üzerinde tanımlanan bir bağlantıya sahip olmakla bize bir *jeodezi* kavramı sunulur ve (tekil $\mathbb{E}^3$'lerdeki basit biçimde düz çizgi olanlardan ayrı olarak) bu jeodeziler Newton'ın *eylemsizlik hareketleri*ni tanımlar. Ayrıca jeodezi olmayan dünya çizgilerini de ele alabiliriz. Olağan uzamsal terimlerle bunlar ivmelenen parçacık hareketlerini gösterir. Bu ivmenin gerçek büyüklüğü uzayzaman terimleriyle, dünya çizgisine ilişkin bir eğrilik olarak ölçülür.[17.4] *Newton'ın ikinci yasası* uyarınca bu ivme parçacık üzerindeki toplam kuvvetin ona ait kütleye bölümüne eşittir. (Bu Newton'ın, a parçacığın ivmesi, m kütlesi ve f üzerine etkiyen toplam kuvvet olmak üzere, $a = f \div m$ biçimindeki $f = ma$'sıdır.) Böylece verili bir kütledeki parçacığa ilişkin dünya çizgisinin eğriliği bu parçacığa etkiyen toplam kuvvetin dolaysız bir ölçüsünü sunar.

Standart Newtoncı mekanikte bir parçacık üzerindeki toplam kuvvet diğer tüm parçacıklardan gelen katkıların (vektör) *toplam*dır (Şekil 17.4a). Herhangi belirli bir $\mathbb{E}^3$'te bir parçacık üzerindeki kuvvete başka bir parçacıktan gelen katkı, bu belirli $\mathbb{E}^3$'te yer alan ikisini birleştiren çizgide etkir. Demek oluyor ki o, iki parçacık arasında *eşzamanlı biçimde* etkir. (*Bkz.* Şekil 17.4b.) *Newton'ın üçüncü yasası* bu parçacıklardan biri üzerine diğeri tarafından uygulanan kuvvetin büyüklük olarak her zaman eşit ve söz konusu parçacık tarafından diğeri üzerine uygulanan kuvvetle ters yönde olduğunu ileri sürer. Ek olarak, farklı her türde kuvvete ilişkin bizi, parçacıklar arasındaki uzamsal uzaklığa ilişkin hangi fonksiyonunun o kuvvetin büyüklüğü olması gerektiği ve her bir parçacıkla ilgili, o kuvvete ilişkin toplam ölçeği açıklayan hangi kıstasların kullanılması gerektiği konusunda bilgilendiren bir *kuvvet yasası* mevcuttur. Kütleçekime ilişkin belirli durumda bu fonksiyon uzaklığın karesinin tersi olarak kabul edilir ve toplam ölçek Newton'ın, verili iki kütlenin çarpımıyla çarpılan kütleçekimle ilgili G sabiti biçiminde adlandırılan belirli bir sabittir. Sembolleri kullandığımızda Newton'ın, m kütleli bir parçacığa kendisinden r kadar uzakta bulunan M kütleli başka bir parçacık tarafından uygulanan çekim kuvvetiyle ilgili iyi bilinen denklemini elde ederiz:

$$\frac{GmM}{r^2}.$$

Yalnızca bu basit bileşenlerden, hızları ışık hızından önemli biçimde az olduğu sürece büyük ölçekli cisimlerin (ve ayrıca çoğu temel düşünüşte

[17.4] Bu eğrilikle ilgili, ∇ bağlantısı biçiminde bir ifade yazmaya çalışın. Tanjant vektörleri üzerinde (varsa) hangi normalleştirme koşulları gereklidir?

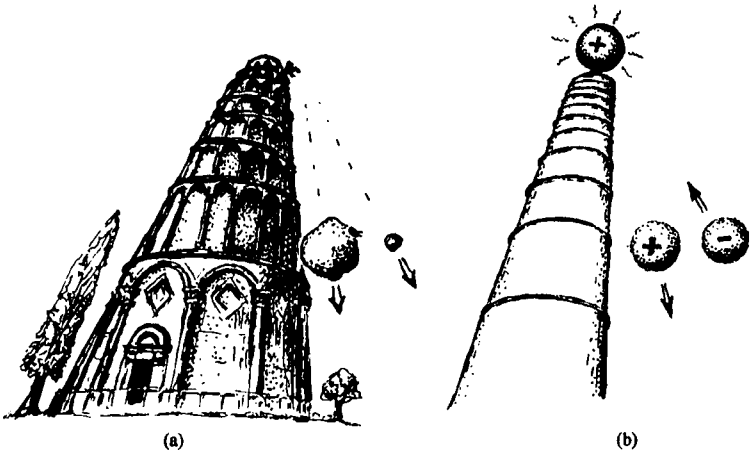


Şekil 17.4 (a) Newtoncı kuvvet: herhangi bir zamanda bir parçacık üzerindeki (çift saplı ok) toplam kuvvet diğer tüm parçacıklardan gelen katkının (çekici ya da itici) vektör toplamıdır. (b) İki parçacığa ait dünya çizgisi ve aralarında, ikisini birleştiren çizgi üzerinde herhangi bir anda, bu anın tanımladığı belirli $\mathbb{E}^3$'te "anlık olarak" etkiyen kuvvet. Newton'ın Üçüncü Yasası biri üzerine diğeri tarafından uygulanan kuvvetin büyüklük olarak eşit ve söz konusu parçacık tarafından diğeri üzerine uygulanan kuvvetle ters yönde olduğunu ileri sürer.

mikroskopla bile görülemeyecek denli küçük parçacıkların) davranışlarını açıklamak üzere müthiş bir isabetle kullanılabilen olağanüstü güç ve çok yönlülüğe sahip bir kuramın ortaya çıkması kayda değerdir. Kütleçekime ilişkin durumda, güneş sistemimizdeki gezegenlerle ilgili hareketlerin oldukça ayrıntılı gözlemleri nedeniyle kuram ve gözlem arasındaki uyum özellikle berraktır. Newton'ın kuramının son derece etkileyici bir başarı olan 10^7'de bir gibi bir isabete sahip olduğu, özellikle Newton'm birlikte yol almak zorunda kaldığı bilginin isabeti bunun yaklaşık yalnızca binde biri (10^3'te bir) olduğundan, artık bilinmektedir.

17.4 Eşdeğerlik ilkesi

Bu olağanüstü kesinliğe ve Newton'ın büyük kuramının gerçekten neredeyse iki yüz elli yıl boyunca tartışmasız kalması gerçeğine karşın bu kuramın mutlak biçimde kesin olmadığını artık biliyoruz; dahası Newton'ın düzeni üzerinden gelişme kaydetmek üzere Einstein'ın kütleçekimin doğasıyla ilgili daha derinlikli ve oldukça devrimci bakış açısına gerek duyuldu. Yine de bu belirli bakış açısı kendi içinde Newton'ın kuramını gözleme dayalı herhangi bir çıkarımla ilgili olarak değiştirmez. Değişim yalnızca, Einstein'ın bakış açısı ışık hızının sınırlılığıyla ilgili diğer düşünüşler ve § §17.6–8'de açıklanacak özel görelilikle ilgili fikirlerle birleştirildiğinde ortaya çıkar. Einstein'ın *genel* göreliliği sonucunu veren tam birleşim nitel biçimde §17.9'da ve tüm ayrıntısıyla §§19.6–8'de verilecek.



Şekil 17.5 (a) Galilei'nin (sözü edilen) deneyi. Biri büyük biri küçük iki kaya eğik Pisa Kulesi'nin tepesinden bırakılır. Galilei'nin öngörüsü, hava direncinin etkisi göz ardı edilebilirse ikisinin de aynı oranda düşeceğiydi. (b) Bir elektrik alanda yere karşı konumlanmış ters biçimde yüklü (eşit küçük kütledeki) sünger toplar. Bir yük aşağıya "düşer" fakat diğeri yukarıya yükselir.

Öyleyse Einstein'ın daha derin bakış açısı nedir? O, *eşdeğerlik ilkesi*nin temel öneminin kavranmasıdır. Esas fikirler (16. yüzyılda, onun da öncülleri, 1586'da Simon Stevin, hatta 5 ya da 6. yüzyıldaki Ioannes Philiponos gibi daha öncekiler olmasına rağmen) büyük Galilei'nin (yeniden!) kendisine kadar gider. Galilei'nin, biri büyük ve biri küçük iki kayanın eğik Pisa Kulesi'nin tepesinden düşmesiyle ilgili (sözü edilen) deneyini anımsayın (Şekil 17.5a). Galilei'nin müthiş öngörüsü ikisinin, hava direnci etkisinin görmezden gelinebilmesi varsayılarak aynı oranda düşeceğiydi. Kayaları eğik kuleden gerçekten atıp atmamasından bağımsız olarak, onu kesinlikle bu sonuca ulaşmaya ikna eden başka deneyler gerçekleştirdi.

Şimdi burada belirtilmesi gereken ilk nokta bunun *kütleçekimle ilgili* alanın belirli bir özelliği olduğu ve cisimler üzerine etki eden başkaca kuvvetler için beklenmediğidir. Galilei'nin öngörüsünün dayandığı kütleçekim özelliği bir cisim üzerine verili başka bir kütleçekimle ilgili alan tarafından uygulanan kütleçekim kuvvetinin şiddetinin o cismin *kütle*siyle orantılı olduğu gerçeğiyken, ayrıca harekete karşı olan direnç de (Newton'ın ikinci yasasında görülen m niceliği) kütledir. Bu iki kütle kavramını birbirinden ayırıp ilkine *kütleçekimle ilgili kütle* ve ikincisine *eylemsizlik kütlesi* demek yararlı olacaktır. (Ayrıca kütleçekimle ilgili *edilgen* kütleyi *etken* olandan ayırt etmek de seçilebilir. Edilgen kütle, m parçacığı üzerindeki M parçacığından kaynaklanan kütleçekimle ilgili kuvveti

ele aldığımızda Newton'ın ters kare denklemindeki, GmM/r^2, m katkısıdır. M parçacığı üzerinde m parçacığından kaynaklanan kuvveti ele aldığımızda m kütlesi kendi *etken* rolünde görünür. Bununla birlikte Newton'ın üçüncü yasası edilgen ve etken kütlelerin eşit oldukları hükmünü verir, şu halde bu ikisini burada birbirinden ayırmayacağım.)[6] Bu nedenle Galilei'nin öngörüsü kütleçekim ve eylemsizlikle ilgili kütlelerin denkliğine (ya da daha doğru olarak orantılılığına) dayanır.

Newton'ın dinamik biçimli bütünsel bakış açısından eylemsizlik ve kütleçekimle ilgili kütlelerin aynı oluşu Doğanın beklenmedik bir davranışı olarak görünür. Alan kütleçekimle ilgili değil de diyelim ki bir elektrik alan olsaydı, bu durumda sonuç bütünüyle farklı olurdu. Kütleçekimle ilgili edilgen kütlenin elektrik benzeri *elektrik yükü*yken eylemsizlikle (diğer bir deyişle ivlenmeye karşı direnç) ilgili kütlenin rolü kütleçekim durumundakiyle tam anlamıyla aynıdır (diğer bir deyişle hâlâ Newton'ın ikinci yasası, $f = ma$'daki m'dir). Fark, eşit ve küçük kütleli fakat ters yüklü bir sünger topu çiftinin Galilei'nin kaya çiftinin benzeri olarak kabul edilmesiyle özellikle belirgin hale getirilir. Ardalanda yere doğru yönlenmiş bir elektrik alanda bir yük aşağıya "düşer" fakat diğeri yukarıya yükselir; bütünüyle ters yöndeki bir ivme! (*Bkz.* Şekil 17.5b.) Bu, bir kütle üzerindeki elektrik yükün, işaretinin farklı olduğu kapsamda bile, onun eylemsizlik momentiyle ilgili kütlesiyle hiçbir ilişkisi olmayışından kaynaklanır. Galilei'nin öngörüsü elektrik kuvvetlerinde geçerli değildir; o yalnızca kütleçekimin belirli bir özelliğidir.

Kütleçekime ilişkin bu özelliğe niçin "eşdeğerlik ilkesi" denir? "Eşdeğerlik," düzenli bir kütleçekim alanının bir ivmeye eşdeğer olduğu gerçeğiyle ilgilidir. Etki, ivmelenen (yalnızca bir yön değiştirme olabilecek olan) bir hareket gerçekleştiren bir uçağın içinde neresinin "aşağı"sı olduğuna ilişkin tümüyle yanlış bir fikre kapılmanın olası olduğu uçak yolculuğuyla ilgili oldukça tanıdık bir örnektir. İvmenin etkisiyle dünyanın kütleçekim alanını uçağın içinde basit olarak nasıl "hissedildiği"yle ayırt edilemez ve iki etki, size "olması gerektiğini" hissettiğiniz aşağının, aşağı doğru olan gerçek yönden belirgin (belki de camdan dışarı baktığınızda şaşıracağınız) biçimde farklı olmasına yol açacak şekilde iki farklı yönde birbirine eklenebilir.

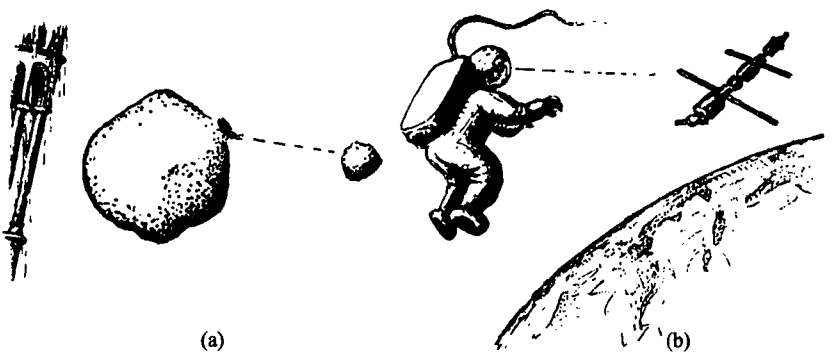
İvme ve kütleçekimin etkileri arasındaki bu denkliğin niçin tam da gerçekten Galilei'nin üstte açıklanan öngörüsü gibi olduğunu görmek üzere yine onun, eğik kulenin tepesinden düşerek alçalan kayalarını göz önüne alın. Kayalardan birine yapışıp diğerine bakan bir böcek düşünün. Böceğe

[6] Bununla birlikte *bkz.* Bondi, 1957.

göre diğer kaya hareket etmeksizin, sanki hiç de bir kütleçekim alanı yokmuşçasına basitçe havada duruyor görünür. (*Bkz.* Şekil 17.6a.) Kayalarla birlikte düşerken böceğin de dahil olduğu ivme kütleçekim alanını iptal eder ve sanki kütleçekim tümüyle yok gibidir; ta ki kayalar ve böcek yere çarpana ve "kütleçekim bağımsız" deneyim[7] ansızın sona erene kadar.

"Kütleçekim bağımsız" ortamı deneyimleyen astronotları biliriz fakat onlar bu deneyimlerinde dünya çevresindeki bir yörüngede (ya da bir anlık olarak (!), dalış yapan bir uçağın içinde) bulunarak (Şekil 17.6b) böceğimizin ani ve tuhaf sonundan kaçınırlar. Yine onlar da tıpkı böcek gibi serbest biçimde fakat çok daha tedbirli şekilde seçilmiş bir yolda düşerler. Kütleçekimin ivme tarafından bu biçimde (eşdeğerlik ilkesinin kullanımı yoluyla) ortadan kaldırılabilmesi gerçeği, kütleçekimle ilgili (edilgen) kütlenin eylemsizlikle ilgili kütleyle aynı (ya da orantılı) oluşunun, Galilei'nin müthiş öngörüsünü temelleyen o gerçeğin dolaysız bir sonucudur.

Bu eşdeğerlik ilkesini ciddiye alacaksak bu durumda §17.3'te neyin "eylemsizlikle ilgili hareket" olarak sayılması gerektiğiyle ilgili benimsediğimiz görüşten farklı bir bakış açısını kabul etmek zorundayız. Daha önce eylemsizlik momentiyle ilgili bir hareket, bir cisim toplamda sıfır dış kuvvete bağlı olduğunda ortaya çıkan türde bir hareket olarak ayırt edilirdi fakat kütleçekimde bir soruna sahibiz. Eşdeğerlik ilkesi nedeniyle, etkiyenin kütleçekimle ilgili bir kuvvet olup olmadığını ya da hangi durumda



Şekil 17.6 (a) Şekil 17.5a'da bir kayaya yapışmış olan böceğe göre diğer kaya basit biçimde, sanki kütleçekim alanı yokmuş gibi, havada hareketsiz olarak duruyor görünür. (b) Benzer biçimde, yörüngesinde serbestçe dolanan astronot kütleçekim–bağımsız bir deneyime sahiptir ve uzay üssü dünyanın belirgin varlığına karşın havada hareketsiz duruyor görünür.

[7] Şimdilerde Rusya'da insanlar için uçakta ve parabolik uçuşlarda bu tür deneyimlerle ilgili "turist fırsatları" mevcut!

kütleçekimle ilgili bir kuvvetin yalnızca ivmenin sonucu olabileceğinin "anlaşılıp anlaşılmadığını" söylemenin yerel bir yolu mevcut değildir. Dahası Galilei'nin kayası üzerindeki böceğimiz ya da yörüngedeki astronot durumlarında kütleçekimle ilgili kuvvet basit biçimde onunla birlikte serbestçe düşerek ortadan kaldırılabilir. Ve kütleçekim kuvvetini bu şekilde ortadan kaldırabildiğimiz için onunla ilgili farklı bir tutum içinde olmamız gerekir. Bu, Einstein'ın derinlikli yeni bakış açısıydı: *eylemsizlikle ilgili hareketi*, parçacıkların, kendi üzerlerine etkiyen kütleçekimle ilgili *olmayan* toplam kuvvet kütleçekim alanında serbestçe düşmelerini gerektirecek şekilde sıfır olduğunda (böylece *etken biçimli* kütleçekim kuvveti de sıfıra düşer) edindikleri hareket biçimi olarak değerlendirin. Bu nedenle hem böceğimizin düşüş yörüngesi hem de astronotumuzun dünya etrafındaki yörüngede hareketi eylemsizlikle ilgili hareketler olarak kabul edilmek durumundadır. Diğer taraftan yalnızca yerde duran biri Einstein'ın düzeninde eylemsizlikle ilgili bir hareket gerçekleştirmez çünkü bir kütleçekim alanındaki sabit duruş bir serbest düşme hareketi değildir. Newton'a göre bunun "eylemsizlik momenti" sayılması gerekir çünkü Newtoncı düzende "sabit durum" her zaman "eylemsizlik momenti" olarak kabul edilmek zorundadır. Kişi üzerine etkiyen kütleçekim kuvveti yer tarafından yukarı doğru uygulanan kuvvet yoluyla dengelenir fakat bunlar Einstein'ın gerek duyduğu gibi ayrı ayrı sıfır değildir. Öte taraftan böcek ya da astronotun Einstein düzenindeki eylemsizlikle ilgili hareketler Newton'a göre eylemsizlik momentiyle ilgili değildir.

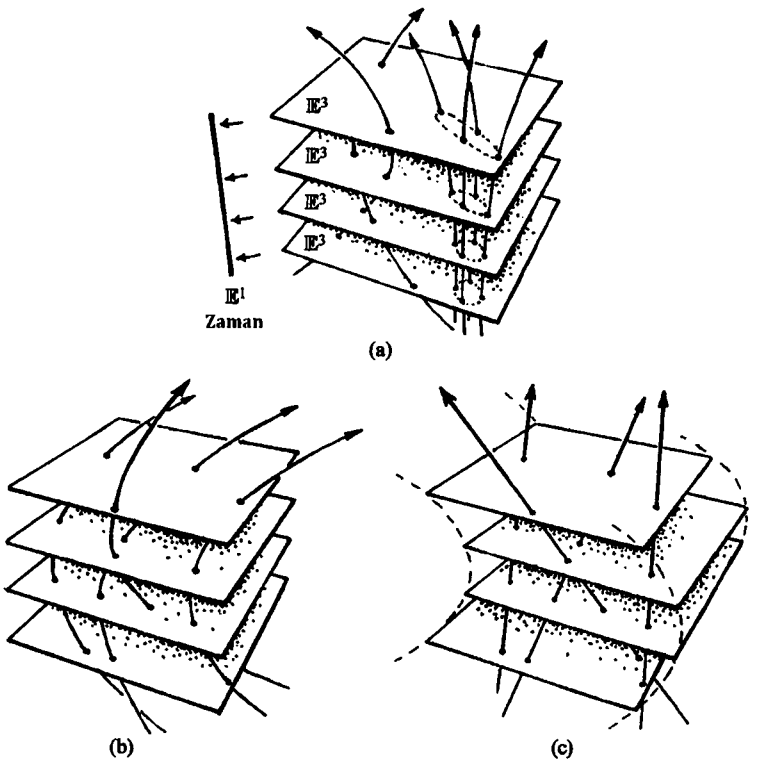
17.5 Cartan'ın "Newtoncı uzayzamanı"

Einstein'ın "eylemsizlikle ilgili" hareket kavramını uzayzaman yapısına nasıl eklemleriz? Einstein kuramının bütünü yönünde bir adım olarak Newton'ın kütleçekim kuramının Einstein'ın bakış açısı uyarınca yeniden formüle edilmesini göz önüne almak faydalı olacaktır. §17.4'ün başında değinildiği üzere bu, Newton kuramında esaslı bir değişimi göstermez fakat onunla ilgili farklı bir açıklama sağlar. Einstein devrimci bakış açısını oluşturduktan bir altı yıl kadar sonra bu yeniden formülasyon, sürekli - gruplarla ilgili kuram üzerine önemli etkisi 13. bölümde not edilen (ve ayrıca §12.5'i de anımsayın), seçkin geometri ve cebirci Élie Cartan tarafından ortaya konduğuna göre tarihten başka bir serbestiyi kabul ediyorum.

Açık konuşacak olursak Cartan'ın düzeninde uzayzamana ilişkin "düz" dünya çizgilerini sağlayan, Newtoncı anlamdan daha çok bu Einsteincı anlamdaki eylemsizlikle ilgili hareketlerdir. Aksi taktirde geometri

§17.2'deki Galileici olana benzer. Bunu, Newtoncı kütleçekim alanı bütünüyle bu yapı içerisinde kodlanmış olmak üzere, *Newtoncı* $\mathcal{N}$ uzayzamanı olarak adlandıracağım. (Belki de bunu "Cartancı" olarak adlandırmalıydım fakat bu kullanışsız bir sözcüktür. Her durumda ne Aristoteles çarpım uzaylarını biliyordu ne de Galilei lif demetlerini!)

$\mathcal{N}$ uzayzamanı, tıpkı daha önceki Galileici $\mathcal{G}$ uzayzamanı durumunda olduğu gibi $\mathbb{E}^1$ taban uzaylı ve $\mathbb{E}^3$ lifli bir demet olmak durumundadır. Yine de şimdi $\mathcal{N}$ üzerinde $\mathcal{G}$'den farklı olarak bir tür yapı olmalıdır çünkü eylemsizlikle ilgili hareketleri gösteren "düz" dünya çizgileri ailesi farklıdır; *bkz.* Şekil 17.7a. En azından, kütleçekim alanının serbest düşüş yapan evrensel bir referans sistemi yoluyla tümüyle ortadan kaldırılabilen du-



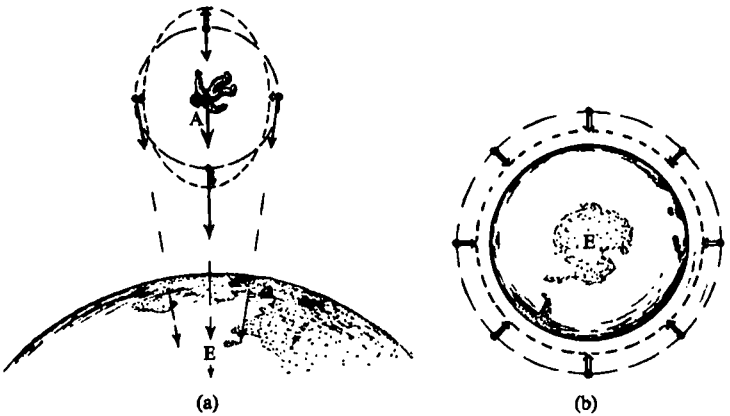
Şekil 17.7 (a) Newton–Cartan $\mathcal{N}$ uzayzamanı Galileci belirli $\mathcal{G}$ durumundaki gibi $\mathbb{E}^1$ taban uzaylı ve $\mathbb{E}^3$ lifli bir demettir. Yapısı, kütleçekim etkisindeki serbest düşüşün Einsteincı anlamdaki "eylemsizlikle ilgili" hareket ailesi yoluyla sağlanır. (b) Tüm uzay boyunca *sabit* Newtoncı bir kütleçekim alanına ilişkin özel örnek. (c) $\mathbb{E}^3$ liflerini yatay olarak serbest düşüşe ait dünya çizgilerinin tümü düz olana dek "kaydırmak" yoluyla görülebileceği üzere yapısı tümüyle $\mathcal{G}$'ninkine denktir.

rumlar dışındaki tüm durumlarda temel olarak farklıdır. Bu tür bir istisna, tüm uzay boyunca bütünüyle (hem büyüklük hem yön olarak) sabit olan fakat zamana karşı değişen Newtoncı bir kütleçekim alanı olur. Bu tür bir alanda serbest düşüş yapan bir gözlemciye göre aslında pek de bir alan yokmuş gibi görünür![17.5]Bu tür bir durumda $\mathcal{N}$'nin yapısı $\mathcal{G}$'ninkiyle aynı olur (Şekil 17.7b, c). Bununla birlikte kütleçekim alanlarının çoğu, bir kütleçekim alanının yokluğundan "temel biçimde farklı" olarak kabul edilir. Niçin böyle olduğunu görebiliyor muyuz? $\mathcal{N}$'ye ait yapının $\mathcal{G}$'ninkinden ne zaman farklı olduğunu fark edebiliyor muyuz? Buna birazdan geleceğiz.

Fikir, tıpkı $\mathcal{G}$ belirli durumunda olduğu gibi $\mathcal{N}$ manifoldunun bir bağlantıya sahip olma gerekliliğidir. Bu bağlantıya, ∇ (*bkz.* §14.5) , ilişkin jeodeziler Einsteincı anlamdaki eylemsizlikle ilgili hareketleri gösteren "düz" dünya çizgileri olmak durumundadır. Bu bağlantı torsiyon serbest (§14.4) olacak fakat genelde bir eğriliğe (§14.4) de sahip olacaktır. Bazı kütleçekim alanlarını kütleçekim alanı yokluğu durumundan "temel biçimde farklı" yapan, az önce ele alınan uzamsal olarak sabit alan durumundakinin aksine, bu eğriliğin varlığıdır. Bu eğriliğe ilişkin fiziki anlamı kavramaya çalışalım.

Dünya atmosferinin bir miktar üzerinde serbest düşüş gerçekleştiren, kendisine "A" olarak değineceğimiz Albert isimli bir astronot düşünün. A'yı tam olarak dünya yüzeyine doğru düşme anında düşünmek yararlı olur fakat Albert'in hızının ne olduğunun önemi yoktur; ilgilendiğimiz şey onun ve çevresindeki parçacıkların ivmesidir. A'yı çevreleyen bir parçacık küresinin var olduğunu ve başlangıçta A'ya göre sabit olduğunu düşünün. Şu halde, olağan Newtoncı terimlerle, bu küredeki çeşitli parçacıklar dünyanın E merkezine doğru hafif biçimde pek çok farklı yönde ivmelenecek (çünkü farklı parçacıklar için E'ye olan yön hafif biçimde değişecektir) ve ayrıca bu ivmenin büyüklüğü de değişecektir. Eylemsiz bir gözlemcinin (Einsteincı bir anlamda), bu durumda A, yakın çevredeki eylemsiz parçacıklara ne olacağını gözlemlemesiyle ilgili olduğumuzdan, astronot A'nın ivmesiyle karşılaştırdığımız *göreli* ivmelerle ilgileneceğiz. Durum Şekil 17.8a'da örnekleniyor. A'ya yatay biçimde konumlanmış parçacıklar, dünyanın merkezine olan sonlu uzaklık nedeniyle, A'nın ivmesine nazaran hafifçe içe doğru olan yönlerde E'ye doğru ivmelenirken A'ya düşey biçimde konumlanmış parçacıklar A'ya göre hafifçe dışa doğru ivmelenecektir,

[17.5] x'e ait t'nin bir fonksiyonu biçiminde, bunu herhangi bir zamanda uzamsal olarak sabit fakat zamansal olarak hem büyüklük hem de yön bakımından değişen verili bir Newtoncı $F(t)$ kütleçekim alanıyla ilgili olarak gerçekleştiren açık bir dönüşüm bulun.

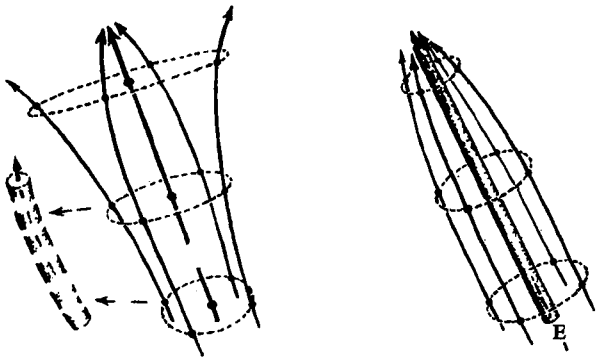


Şekil 17.8 (a) Gelgit etkisi. Başlangıçta kendisine göre sabit haldeki yakın parçacıkların bir küresince çevrelenmiş astronot A (Albert). Newtoncı terimlerle, dünyanın merkezi E'ye doğru, yön ve büyüklük (tek saplı oklar) olarak hafif biçimde değişen bir ivmeleri vardır. Her birinden A'nın ivmesini çıkarmak yoluyla A'ya göre ivmeleri (çift saplı oklar) elde ederiz; bu göreli ivme A'ya yatay olarak konumlanmış parçacıklar için hafifçe içe fakat A'ya düşey olarak konumlanmış parçacıklar içinse hafifçe dışa doğrudur. Bu nedenle kürenin biçimi , simetri ekseni AE doğrultusunda olan (yayvan) bir dönme elipsoidi haline gelir. Başlangıç bozulumu hacmi korur. (b) Şimdi A'yı dünyanın merkezi E'ye taşıyın ve parçacık küresinin E'yi atmosferin hemen üzerinde sarmasını sağlayın. İvme kürenin her tarafında, M sarılan toplam kütle olmak üzere, bir ilk $4\pi GM$ hacim azalma ivmesiyle (A = E'ye göre) birlikte içe doğrudur.

çünkü kütleçekim kuvveti E'ye olan uzaklık arttıkça azalır. Bu nedenle parçacık küresi biçimi bozulmuş hale gelecektir. Aslında yakın çevredeki parçacıkların bu bozulması küreyi, ana ekseni (simetri ekseni) AE çizgisi doğrultusunda olan bir *dönme elipsoidi*, (yayvan) bir elipsoit haline getirecektir. Dahası, kürenin ilk bozulumu hacmi kürenin hacmine eşit bir elipsoit haline gelecek şekilde olur.[17.6] Bu son özellik Newtoncı kütleçekime ilişkin ters kare yasasının, bizim için Einstein'ın genel göreliliğine adamakıllı girdiğimizde önemli olacak kayda değer bir gerçek olan, nitel bir özelliğidir. Bu hacim koruyucu etkinin yalnızca başlangıçta, parçacıklar A'ya göre sabit haldeyken geçerli olduğu belirtilmeli; yine de bu koşulla birlikte, bu durum A bir vakum alanındayken Newtoncı kütleçekim alanlarına ait genel bir özelliktir. (Öte taraftan elipsoidin dönel simetrisi burada ele alınan belirli geometriye ait simetriye ilişkin bir kazadır.)

Şu halde, tüm bunları $\mathcal{N}$ uzayzaman resmimiz biçiminde nasıl düşünmeliyiz? Şekil 17.9a'da bu durumun, A'ya ve onu çevreleyen parçacıklara ait dünya çizgileri için nasıl göründüğünü belirtmeye çalıştım. (Elbette

[17.6] Bu çeşitli özellikleri, bu ifadelerin hangi düzende geçerli olma eğiliminde olduklarını $O(\,)$ notasyonunun kullanımıyla açık hale getirerek türetin.



(a) (b)

Şekil 17.9 Şekil 17.8'in komşu jeodezilerle ilgili göreli bozulmalar biçimindeki uzayzaman versiyonları (Şekil 17.7'nin $\mathcal{N}$ Newton–Cartan resminde). (a) A'nın ve onu çevreleyen parçacıkların dünya çizgilerinde görüldüğü üzere (bir uzamsal boyut baskılanmış olarak), yakın bir E cisminin kütleçekim alanından etkilenmiş olabilecek, boş uzaydaki jeodezi sapması (temelde §19.7'deki Weyl eğriliği). (b) Jeodezi demeti içindeki kütle yoğunluğundan kaynaklı ilgili içe doğru olan ivme (temelde Ricci eğriliği).

uzamsal bir boyuttan kurtulmak zorundaydım çünkü gerçek bir 4–boyutlu geometriyi göstermek zordur! Şans eseri temel fikri aktarmak üzere iki uzay boyutu yeterlidir.) Parçacık (burada parçacık çemberi olarak gösterilen) küresine ilişkin bozulmanın A'ya ait jeodezi dünya çizgisine komşu olan jeodezilerin jeodezik sapması nedeniyle ortaya çıktığına dikkat edin. §14.5'te bu jeodezi sapmasının aslında neden ∇ bağlantısına ilişkin $\boldsymbol{R}$ *eğriliği*nin bir ölçüsü olduğunu belirtmiştim.

Newtoncı fiziki terimlerle, henüz açıkladığım bozulma etkisi kütleçekime ilişkin *gelgit* etkisi denen şeydir. E'nin rolünü A'nınkiyle değiştirirsek, böylece A'yı dünyanın merkezi ve ayı (ya da belki güneşi) E'de konumlanmış olarak düşünürüz, bu terminolojinin sebebi açık hale gelmiş olur. Parçacık küresini dünya okyanuslarının yüzeyi olarak düşünün, böylece ayın (ya da güneşin) düzenli olmayan kütleçekim alanından kaynaklı bir bozulma etkisi var olduğunu görürüz.[17.7] Bu bozulma okyanus gelgitlerinin nedenidir, böylece uzayzaman eğriliğine ilişkin bu dolaysız fiziki göstergeyle ilgili "gelgit etkisi" terminolojisi yerindedir.

Aslında ele alınan durumda ayın (ya da güneş) dünya yüzeyi üzerindeki parçacıkların göreli ivmeleri üzerine etkisi o parçacıklar üzerindeki te-

[17.7] Bu gelgit bozulmasının, m (bir nokta olarak değerlendirilen) kütleçekim etkisindeki kütle ve r ona ait uzaklık olmak üzere, mr^{-3}'le orantılı olduğunu gösterin. Güneş ve ay, dünya üzerinde, neredeyse eşit açısal boyutlarda diskler sergilerler, yine de ayın dünya okyanusları üzerinde oluşturduğu gelgit bozulması güneşten kaynaklı olanın neredeyse beş katıdır. Bu bize onların göreli yoğunlukları hakkında ne söylüyor?

mel kütleçekim etkisine, diğer bir deyişle dünyanın kendisinin kütleçekimle ilgili çekme etkisine yapılan yalnızca küçük bir düzeltmedir. Elbette bu her bir parçacığın bireysel konumundan ölçüldüğü üzere içe doğru, diğer bir deyişle dünyanın merkezi (uzamsal açıklamamızda şimdi, A noktası; *bkz.* Şekil 17.8b) yönündedir. Parçacık küresi şimdi hemen dünya üzerinde (böylece hava sürtünmesini göz ardı edebiliriz) dünyayı çevreler biçimde kabul edilirse kürenin her tarafında içe doğru serbest düşüşler (Einsteincı eylemsizlik momentiyle ilgili hareket) söz konusu olacaktır. Küresel biçimin başlangıç hacmine eşit hacimde bir elipse bozulması yerine artık bir *hacim azalmasına* sahip oluruz. Genelde her iki etki de var olabilir. Boş uzayda ilk hacimde azalma olmaksızın yalnızca biçim bozulması mevcuttur; küre maddeyi çevrelediğinde çevrelenen toplam kütleyle orantılı bir başlangıç hacmi azalışı söz konusu olur. Bu kütle M'yse, bu durumda hacim azalmasına ilişkin başlangıç oranı aslında, G Newton kütleçekim sabiti olmak üzere,

$$4\pi GM$$

olur.[17.8], [17.9]

Aslında Cartan'ın gösterdiği üzere, Newton'ın kütleçekim kuramını tümüyle ∇ bağlantısı üzerindeki matematiksel koşullar biçiminde, bunlar temelde $\boldsymbol{R}$ eğriliği üzerinde yukarıda özetlenen gereksinimlere ilişkin kesin matematiksel ifadeler sağlayan ve ρ (kütle bölü uzamsal hacim) madde yoğunluğunu $\boldsymbol{R}$'nin "hacim azaltıcı" kısmıyla ilişkilendiren denklemler olmak üzere, yeniden formüle etmek olasıdır. Bununla ilgili Cartan'ın ayrıntılı açıklamasını burada vermeyeceğim çünkü bu, bütünsel Einstein kuramı bir anlamda daha basit olmak üzere, sonraki değerlendirmelerimiz için gerekli değil. Bununla birlikte fikrin kendisi burada bizim için önemlidir. Yalnızca bizi Einstein kuramına usulca yönelttiği için değil ayrıca daha sonra 30. bölümdeki, kuantum kuramının bize sunduğu derin bilmeceler ve onların olası çözümleriyle ilgili değerlendirmelerimizde oynayacak bir role sahip olduğu için de önemlidir.

17.6 Işığın sabit sınırlı hızı

Üstteki tartışmalarımızda Einstein'ın genel göreliliğine ilişkin iki temel görünümü, diğer bir deyişle bize fiziğin kurallarının durağanlık ve

[17.8] Bunu, tüm kütlenin kürenin merkezinde yoğunlaştığını varsayarak oluşturun.

[17.9] Bu sonucun, durağan parçacıklara ait çevreleyen kabuk ne genişlikte ya da ne biçimde olursa olsun ve kütle dağılımı ne olursa olsun, hâlâ oldukça genel biçimde doğru olduğunu gösterin.

düzenli hareket arasındaki ayrıma kör olduğunu söyleyen *görelilik* ilkesiyle bu fikirlerin kütleçekim alanını kuşatmak üzere nasıl incelikli biçimde değiştirilmek zorunda olduğunu söyleyen *eşdeğerlik* ilkesini göz önüne aldık. Şimdi Einstein kuramındaki, ışık hızının sınırlılığıyla ilgili olan üçüncü temel bileşene dönmeliyiz. Bu üç temel bileşenin tümünün izinin Galilei'ye kadar sürülebilmesi dikkate değer bir gerçektir; ayrıca Galilei ışığın sonlu bir hızda hareket etmesi gerektiğine ilişkin, gerçekten bu hızı ölçmeye girişmesi sebebiyle, bu tür berrak bir beklentideki ilk insan olarak görünür. Kullandığı yöntem, uzak tepeler arasındaki fener ışıklarının eşzamanlanması da dahil, artık bildiğimiz üzere oldukça kabaydı. Bununla birlikte 1667'de ışığın gerçekten yolculuk ettiği olağanüstü çabukluğa ilişkin bir öngörüye sahip olmasının hiçbir yolu yoktu.

Hem Galilei hem de Newton'ın,[8] ışığın doğası ve maddeyi bir arada tutan kuvvetleri bağlayan olası derin bir rolle ilgili güçlü kuşkulara sahip oldukları görülür. Bununla birlikte bu öngörülerin uygun biçimde gerçekleştirilmeleri, kimyasal kuvvetlerin ve tekil atomları bir arada tutan kuvvetlerin gerçek doğasının açığa çıktığı 20. yüzyıla kadar beklemek zorundaydı. Artık bu kuvvetlerin kökeninde temel olarak (yüklü parçacıklara elektromanyetik alanın dahil edilmesiyle ilgili olarak) *elektromanyetik* olduklarını ve ayrıca elektromanyetizma kuramının da ışık kuramı olduğunu biliyoruz. Atomlar ve kimyayı anlamak üzere kuantum kuramından alınacak daha fazla bileşen gerekir fakat hem elektromanyetizma ve hem de ışığı açıklayan temel denklemler, Michael Faraday'ın, kendisinden 30 yıldan daha önceki müthiş deneysel bulgularından etkilenen büyük İskoç fizikçi James Clark Maxwell tarafından 1865'te ortaya konanlardır. Maxwell'in kuramına sonra geleceğiz (§19.2) fakat bizim için onun buradaki önemi, ışık hızının belirli, genellikle c olarak anılan ve olağan birimlerle yaklaşık 3×10^8 metre bölü saniye olan bir sabit değere sahip oluşuna gerek duymasıdır.

Bununla birlikte bu durum, görelilik ilkesini korumak istersek bize çözümü oldukça güç bir sorun çıkarır. Genel algı bize, sabit bir sistemdeki gözlemciye göre ışığın hızı belirli c değerini almış olarak ölçülürse bu durumda ilkine oranla oldukça yüksek bir hızda hareket eden ikinci gözlemcinin ışığın yolculuk ettiği hızı, kendi hareketine bağlı olarak azalmış ya da artmış biçimde farklı olarak ölçeceğini söyler. Buna rağmen görelilik ilkesi, ikinci gözlemciye ait fiziki yasaların, bunlar özelde ikinci gözlemcinin algıladığı ışık hızını tanımlamak üzere, ilk gözlemcininkiyle özdeş ol-

[8] Galile'nin *Assayer*'de yaptığı bir uyarıyla ilgili olarak *bkz.* Drake, 1957, s. 278; ayrıca *bkz.* Newton, 1730, soru 30; Penrose, 1987d, s. 23.

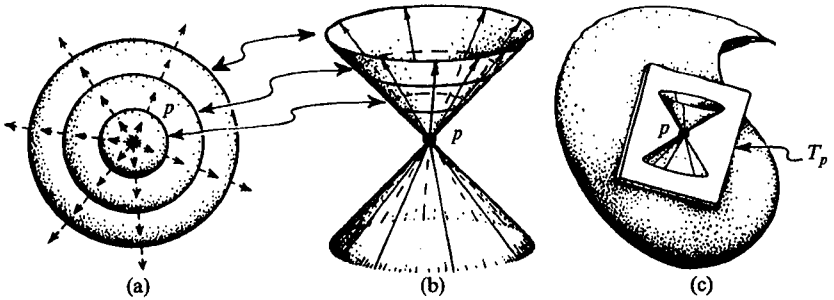
ması gerektiğini iddia eder. Işığın hızına ilişkin sabitlikle görelilik kuralı arasındaki bu belirgin çelişki Einstein'ı, aslında daha önce Hollandalı fizikçi Hendrick Antoon Lorentz ve daha tam olarak Fransız matematikçi Henri Poincaré'de olduğu gibi, kendisi yoluyla çelişkinin tümüyle giderildiği dikkat çekici bir bakış açısına yöneltti.

Bu nasıl işler? Bizim için, örneğin ışık hızının mutlak olduğu Maxwell'inki gibi (i) bir kuramla, kendisi uyarınca fiziki yasaların, tanımlanmaları için hangi hızdaki referans sistemi kullanılırsa kullanılsın aynı göründüğü (ii) görelilik ilkesinin gerekleri arasında çözümsüz bir çelişkinin bulunmasına inanmak doğaldır. Referans sistemi, ışığınkine yaklaşan hatta onu aşan bir hızla hareket eder hale getirilemez mi? Ve bu tür bir sisteme göre, elbette bilinen ışık hızı, olasılıkla daha önce olduğu gibi kalamaz mı? Kuşkusuz çözümü güç olan bu sorun bir kuram yoluyla, örneğin orijinal olarak Newton tarafından (ayrıca sanıyorum ki Galilei tarafından da) desteklenen, ışığın hızının *parçacık* benzeri davranması nedeniyle kaynağın hızına bağlı olduğu gibi bir kuramla ortaya çıkmadı. Bu nedenle Galilei ve Newton görelilik ilkesiyle birlikte hâlâ huzur içinde yaşayabilirler. Buna rağmen ışığın doğasına ilişkin bu tür bir tablo, yıllar içindeki gözlemle, örneğin ışık hızının, kaynağından *bağımsız* olduğunu gösteren ayrık çift yıldızlarla ilgili gözlemler arasında artan bir çelişkiyle karşı karşıya kaldı.[9] Öte taraftan Maxwell kuramı yalnızca gözlemden (özellikle Heinrich Hertz'in 1888 deneyleri) elde ettiği güçlü destek nedeniyle değil, aynı zamanda elektrik alanlara, manyetik alanlara ve ışığa hükmeden yasaların kendisi aracılığıyla dikkate değer bir şıklık ve temel basitlikteki matematiksel bir düzen içinde sınıflandırıldığı kuramın zorlayıcı ve birleştirici doğası nedeniyle de kuvvetlendi. Maxwell kuramında ışık dalga biçimini alır, parçacık değil ve bu kuramda aslında ışık dalgalarının, kendisi uyarınca yolculuk etmek zorunda olduğu sabit bir hız olduğu gerçeğiyle yüzleşmek durumundayız.

17.7 Işık konileri

Uzayzaman geometrik bakış açısı bize, Maxwell'in kuramıyla görelilik ilkesi arasındaki çelişkiyle sunulan çözümü güç soruna ilişkin çözüme giden özellikle belirgin bir rota sağlar. Daha önce de belirttiğim gibi bu uzayzaman bakış açısı Einstein'ın başlangıçta (ne Lorentz'in ne de hatta görünen o ki Poincairé'in) benimsediği bakış açısı değildi. Bununla birlikte sonradan kavrandığı üzere bu yaklaşımın gücünü görebiliriz. Şimdilik

[9] *Bkz.* de Sitter, 1913.

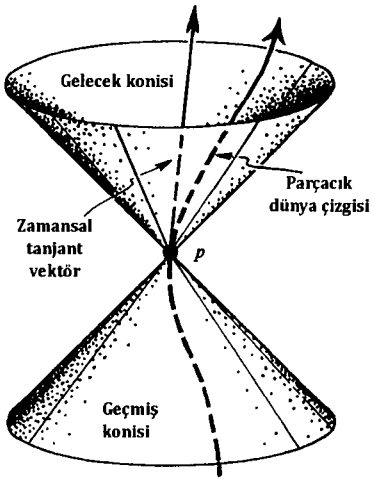


Şekil 17.10 Işık konisi temel ışık hızını belirtir. Bir p uzayzaman noktasından (olay) geçen foton geçmişleri. (a) Saf uzamsal terimlerde (gelecek) ışık konisi p'den dışarı doğru genişleyen bir küredir (dalga paravanları). (b) Uzayzamanda p'yle karşılaşan foton geçmişleri p'deki ışık konisini süpürür. (c) Eğik uzayzamanları daha sonra değerlendireceğimiz için sıklıkla p'deki *boş* koni olarak adlandırılan koniyi, uzayzamandaki, diğer bir deyişle p'deki T_p tanjant uzayındaki yerel bir yapı olarak düşünmek daha iyidir.

kütleçekimi ve eşdeğerlik ilkesinin neden olduğu mevcut incelik ve karışıklıkları göz ardı edelim. Boş bir taş tahta ya da onun yerine niteliksiz bir gerçek 4–manifoldla başlayacağız. Işık hızı olacak temel bir hızın mevcut olduğunu söylemenin ne anlama gelebileceğini görmek istiyoruz. Uzayzamanda herhangi bir p noktasında (diğer bir deyişle "olay"), p'den uzamsal tüm farklı yönlerde geçen farklı tüm ışık ışını ailelerini kafamızda canlandırabiliriz. Uzayzaman açıklaması p'den geçen dünya çizgilerine ilişkin bir ailedir. *Bkz.* Şekil 17.10a, b.

Maxwell kuramı ışığı bir dalga etkisi olarak kabul etse de, bu dünya çizgilerini "foton geçmişleri" biçiminde anmak uygun olacaktır. Çeşitli sebepler nedeniyle bu, gerçekten de önemli bir çelişki değildir. Maxwell kuramında bir "foton", çok yüksek frekanslı küçük bir demet elektromanyetik karışıklık olarak değerlendirilebilir ve bu, amaçlarımız için oldukça uygun biçimde ışık hızında yolculuk eden minik bir parçacık olarak davranacaktır. (Alternatif olarak, "dalga paravanları" biçiminde ya da matematikçilerin "iki özellikli" dedikleri şey biçiminde düşünebilir ya da kendisi uyarınca ışığın ayrıca, aslında "fotonlar" olarak adlandırılan "parçacıklar"dan oluşur biçimde de değerlendirilebildiği kuantum kuramına baş vurmayı seçebiliriz.)

p'nin komşuluğunda p'den geçen foton geçmişleri ailesi, Şekil 17.10b'de gösterildiği üzere p'deki *ışık konisi* olarak adlandırılan uzayzamandaki bir koniyi açıklar. Işık hızını, uzayzaman terimleri biçiminde temel olarak almak ışık konilerini temel olarak almaktır. Aslında manifoldlara ilişkin geometri için uygun olan bakış açısından (*bkz.* 12 ve 14. bölümler), "ışık konisi"ni p'deki T_p tanjant uzayı içinde bir yapı olarak düşünmek (*bkz.* Şe-

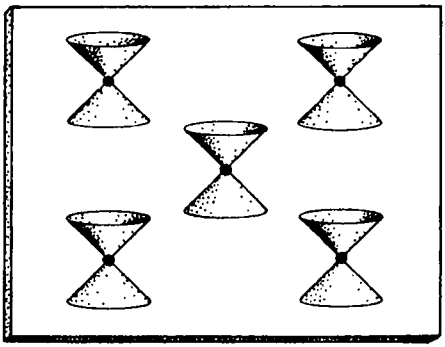


Şekil 17.11 Geçmiş konisi ve gelecek konisi. Geçmiş (geçmiş sıfır vektörlerine ilişkin) boş koni, (gelecek sıfır vektörlerine ilişkin) gelecek konisinin p'den kaynaklanan ışıkla ilgili olmasıyla aynı şekilde p üzerinden içe doğru patlayan ışıkla ilgilidir. p'de bulunan herhangi iri yapılı bir parçacığın dünya çizgileri (gelecek–) zamansal bir tanjant vektörüne sahiptir ve böylece p'deki (gelecek) boş koni içinde yer alır.

kil 17.10c) çoğu kez daha iyidir. (Sonuçta p'deki hızlarla ilgiliyiz ve hız tanjant uzayı içinde tanımlanan bir şeydir.) Bu tanjant uzay yapısıyla ilgili olarak sıklıkla *boş koni* terimi, "ışık konisi" terimi bir p noktasından geçen ışık ışınlarınca süpürülen, uzayzamandaki gerçek yer için saklanmak üzere, kullanılır ve bu gerçekte benim de tercihimdir. Işık konisinin (ya da boş koni) iki kısma sahip olduğuna dikkat edin; *geçmiş* konisi ve *gelecek* konisi. Geçmiş konisini p'den içeriye doğru patlayan bir ışık çakmasının geçmişini gösterir biçimde düşünebiliriz, böylece tüm ışık eşzamanlı olarak tek bir p olayı üzerine yakınsar; buna uygun olarak gelecek konisi p olayında gerçekleşen bir patlamaya ait bir ışık çakmasının geçmişini temsil eder; *bkz.* Şekil 17.11.

p'deki boş koniye ilişkin matematiksel bir açıklamayı nasıl sunmalıyız? 13 ve 14. bölümler bize gerekli altyapıyı vermişti. Işık hızının p'deki her yönde, noktayı çevreleyen uzamsal düzenin bir ışık çakmasından bir an sonra bir küreden daha çok başka tür oval bir şekil olarak görüneceği biçimde aynı olmasına gerek duyarız.[10] "Bir an"a atıfta bulunarak, bu değerlendirmelerin p'ye ait sonsuz küçük zamansal (aynı zamanda uzamsal) komşulukta geçerli olması gerektiğini kastediyorum, öyleyse aslında bunu

[10] Bir "elipsoit"ten gerçekte, herhangi bir elipsoidin "küre biçiminde" görünmesini sağlayacak şekilde nasıl bir "küre" yapılacağını söylemekle ilgili, uzaklıkların farklı yönlerde yeniden ayarlanabilmesi nedeniyle çetrefil bir konu mevcuttur. Bununla birlikte yeniden ayarlamaların yapamadığı şey, elipsoit biçimli olmayan bir ovalin, en azından "pürüzsüz" yeniden ayarlamalarla küre biçimli görünmesini sağlamaktır. Bu tür ovaller, görelilik kuramının (sözde) Riemanncı yapılarına ilişkin memnuniyet verici yerel simetriye sahip olamayan *Finsler uzayına* sebep olur.



Şekil 17.12 M *Minkowski uzayı düzdür ve ona ait boş konileri, tümü burada paralel olarak gösterilmiş olmak üzere, düzenlli biçimde dizilir.*

p'de bulunan tanjant uzaylarındaki yapılara atıfta bulunmak olarak düşünmek yerindedir. Boş koninin "küresel" göründüğünü söylemek gerçekte koninin yalnızca tanjant uzayındaki *ikinci derece* bir denklemle verildiğini söylemektir. Bunun anlamı bu denklemin, g_{ab} Lorentzci imzanın (§13.8) tekil olmayan simetrik bir $\boldsymbol{g}$ $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$–tensörüne ilişkin indis biçimi olmak üzere,

$$g_{ab}v^a v^b = 0$$

biçimini almasıdır.[17.10] "Boş koni"deki "boş" terimi, $\boldsymbol{v}$ vektörünün $\boldsymbol{g}$ (sözde) metriğine göre bir *sıfır uzunluğa* ($|\boldsymbol{v}|^2 = 0$) sahip olması gerçeğiyle ilgilidir.

Bu aşamada $\boldsymbol{g}$'yle yalnızca, boş konini yukarıdaki denklem uyarınca tanımlamaktaki rolüyle bağlantılı olarak ilgileniriz. $\boldsymbol{g}$'yi sıfır olmayan herhangi bir gerçel sayıyla çarparsak, daha öncekinin tıpatıp aynısı olan bir boş koni elde ederiz (ayrıca *bkz.* §27.12 ve §33.3). Kısa süre içinde $\boldsymbol{g}$'ye uzayzaman metriğini sunmaya ilişkin sonraki fiziki rolünü oynaması için gerek duyacağız ve bunun içinse uygun ölçekleme çarpanına gerek duyacağız fakat şimdilik bizi ilgilendirecek olan şey yalnızca, her bir uzayzaman noktasında bir adet olmak üzere boş konileri ailesidir. Işık hızının sabit olduğunu ileri sürebilmek üzere, uzamsal terimlerle "hız" uzayzaman terimleriyle "eğim"e karşılık geldiğinden farklı olaylardaki boş konilerin tümünü birbirlerine *paralel* olarak değerlendirmenin anlamlı olacağı konumu alırız. Bu bizi Şekil 17.12'de gösterilen uzayzaman tablosuna yöneltir.

17.8 Mutlak zamanın terki

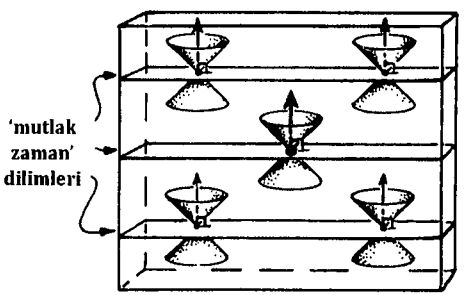
Şimdi Galileici $\mathcal{G}$ uzayzamanına ilişkin demet yapısının toplamada içerilmeye zorlanmasının uygun olup olmadığını sorabiliriz. Diğer bir deyiş-

[17.10] Nedenini açıklayın.

le tablomuza *mutlak zamana* ilişkin bşr kavram katabilir miyiz? Bu bizi Şekil 17.13'tekine benzer bir tabloya sevk eder. Uzayzaman boyunca $\mathbb{E}^3$dilimleri bize boş koniye ek olarak Şekil 17.13'te gösterildiği üzere her bir T_p tanjant uzayında bir 3–düzlem elemanı verir. Bununla birlikte sonraki bölümde daha tam biçimde açıklayacağım üzere g, her bir p olayında (bu 3–düzlem elemanının g'ye göre ortogonal tümleyeni) artık tercih edilen bir yön olması anlamına gelen *ortogonallik* kavramını belirler ve bu tercih edilen yön bize her bir olayda tercih edilen bir *sabitlik durumu* verir. Görelilik ilkesini kaybettik!

Daha sıradan terimlerle bu argüman basit biçimde, ışığın mutlak bir hızı olduğu durumda bu hızın kendisine göre her yönde aynı göründüğü, tercih edilen bir "sabitlik durumu"nun mevcut olacağına ilişkin "sağduyu" kavramını ifade eder. Daha az belirgin olan şey bu çelişkinin *yalnızca* mutlak zaman kavramını (ya da en azından her bir T_p'de tercih edilen bir 3–düzlem) korumaya çalıştığımız durumda ortaya çıkmasıdır. Nasıl ilerlememiz gerektiği artık açık olmalı? Mutlak zaman kavramı (ve böylece $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{N}$'ye ilişkin demet yapısı) terk edilmek zorundadır. Şu ana dek ulaşmış olduğumuz kapsamlılık düzeyinde bu durum bizi özel olarak şaşırtmamalıdır. Galileici bir görelilik ilkesi ciddi olarak benimsenir benimsenmez bile (bu algı olması gerektiği kadar geniş biçimde yakın olarak fark edilmese de) mutlak zamanın terk edilmek zorunda olduğunu zaten görmüştük. Öyleyse şu anda, zamanın yanı sıra uzayın da mutlak bir kavram olmadığı gerçeğinin kabulü daha önce düşünebildiğimiz türde bir devrim olarak görülmemelidir.

Öyleyse aslında uzayzaman içerisindeki $\mathbb{E}^3$ dilimlerine veda etmek ve düşünüşümüze sıkıca yerleşmiş bir mutlak zamana sahip olmaya ilişkin tek sebebin ışık hızının bize tanıdık gelen standart hızlara göre olağanüstü biçimde büyük oluşu olduğunu kabul etmek zorundayız. Şekil 17.14'te, Şekil 17.13'ün bir parçasını, günlük yaşantımızda kullanma eğiliminde



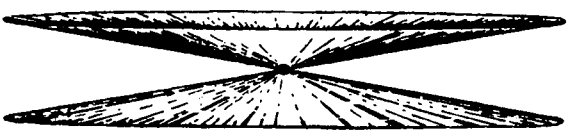
Şekil 17.13 $\mathbb{M}$*'ye dahil edilen mutlak zaman kavramı* $\mathbb{M}$ *boyunca kesilmiş* $\mathbb{E}^3$*–dilimleri ailesini ve buradan da her bir olaydaki 3–düzlem elemanını belirtir. Bununla birlikte her bir boş koni, orantılılığa bağlı olarak, kendisine ait ortogonallik kavramı böylelikle bir sabitlik durumunu belirleyen bir* g *(sözde) metriğini tanımlar.*

olduğumuz normal birimler için uygun olan ölçek oranına bir miktar yakın yatay/düşey bir ölçek oranıyla birlikte yeniden çizdim. Olağan birimlerde, zaman için saniye ve uzaklık için metre diyelim, c ışık hızının

$$c = 299792458 \text{ metre/saniye}$$

ifadesiyle, bu değer gerçekten kesin olmak üzere!, verildiğini gördüğümüzden yalnızca küçük bir miktar yakın oranla.[11] Uzayzaman diyagramlarımız (ve formüllerimiz) geleneksel birimlerle oldukça tuhaf göründüğünden görelilik kuramı çalışmasında $c = 1$ olan birimler kullanmak genel bir uygulamadır. Tüm bunların anlamı, bir *saniye*yi zaman birimimiz olarak seçersek bu durumda bir *ışık saniyesi*ni (diğer bir deyişle 299792458 metre) uzaklık birimimiz olarak kullanmak zorunda olmamız; *yılı* zaman birimimiz olarak kullanırsak bu durumda *ışık yılı*nı (yaklaşık $9{,}46\times10^{15}$ metre) uzaklık birimi olarak kullanmamız; bir metreyi uzaklık ölçümüz olarak kullanmak istersek bu durumda zaman ölçümüz olarak $3\frac{1}{3}$ nanosaniye benzeri bir şeyi kullanmak zorunda olmamız, vb anlamına gelir.

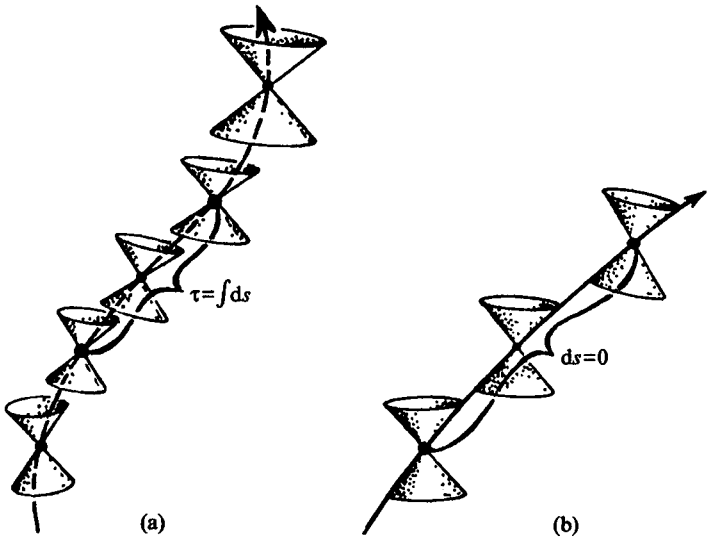
Şekil 17.12'deki uzayzaman tablosu ilk olarak son derece iyi ve orijinal bir matematikçi olan Hermann Minkowski (1864–1909) tarafından ileri sürüldü. Tesadüfi biçimde ayrıca 1880'lerin sonlarında Zürih'teki Federal Teknoloji Enstitüsü'nde, ETH, Einstein'ın hocalarından biriydi. Aslında uzayzaman fikrinin kendisi 1908'de, "bundan böyle tek başına uzay ve tek başına zaman gölgeler içinde unutulup gitmeye mahkumdur ve yalnızca bu ikisinin bir tür birliği bağımsız bir gerçekliği koruyacaktır" diyen Minkowski'den geldi.[12] Bana göre özel görelilik kuramı, Einstein'ın muhteşem



Şekil 17.14 Boş konileri uzay ve zaman ölçekleri normal deneyimdekine çok hafif biçimde yakın olacak şekilde yeniden çizilir.

[11] Okuyucu, metre bölü saniye biçiminde ölçüldüğünde ışık hızının kesin bir tamsayı olarak ortaya çıkmasına elbette şaşırabilir. Bu bir hata değil fakat son derece tam uzaklık ölçümlerinin aslını öğrenmenin artık son derece tam zaman ölçümlerinin aslını öğrenmekten daha zor olması gerçeğinin yalnızca bir yansımasıdır. Buradan hareketle metreyle ilgili en isabetli standart, uygun biçimde, ışığın standart bir saniyede kat ettiği uzaklıkta bunlardan tam olarak 299792458 adet olacak şekilde, metreyle ilgili olarak Paris'te bulunan şimdiki uygunsuz kesinliğe sahip metre cetveliyle oldukça isabetli biçimde uyuşan bir değer ortaya koyarak, *tanımlanır*.

[12] *Bkz.* Minkowski, 1952. *80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians* (*80. Alman Doğa Bilimcileri ve Fizikçileri Kongresi*), Köln, 21 Eylül 1908'de dağıtılan Address Minkowski'nin (Minkowski'ye Yönelmek) bir çevirisidir.



Şekil 17.15 (a) İri kütleli bir parçacığın dünya çizgisi zamansal bir eğridir, böylece ona ait tanjantlar her zaman, $\mathbf{d}s^2 = g_{ab}\mathbf{d}x^a\mathbf{d}x^b$ ifadesini pozitif verecek şekilde yerel boş koniler içinde yer alır. $\mathbf{d}s = (g_{ab}\mathbf{d}x^a\mathbf{d}x^b)^{1/2}$ niceliği eğri üzerindeki sonsuz küçük zaman aralığını ölçer, böylece $\tau = \int \mathbf{d}s$ "uzunluğu", eğri üzerindeki iki olay arasında bulunan bir parçacık tarafından taşınan ideal bir saat aracılığıyla ölçülen zamandır. (b) Kütlesiz bir parçacık durumunda (*örn.* bir foton) dünya çizgileri boş koniler üzerinde tanjantlara sahiptir, böylece $\tau = \int \mathbf{d}s$ zaman aralığı her zaman yok olur.

fiziki öngörüsüne ve Lorentz ve Poincaré'in derin katkılarına rağmen Minkowski kendi temel ve devrimci bakış açısını sunana dek tamamlanmadı: *uzayzaman*.

Özel göreliliği temelleyen geometriyle ilgili olarak Minkowski'nin bakış açısını tamamlamak ve bu yolla *Minkowskici uzayzaman* $\mathbb{M}$'yi tanımlamak üzere $\boldsymbol{g}$'ye ilişkin *ölçeklendirme*yi, onun, dünya çizgileri üzerinde bir "uzunluk" ölçüsü sunacağı şekilde onarmak zorundayız. Bu durum, tanjantlarının her zaman boş koniler içinde yer alması anlamına gelen *zamansal* olarak başvurduğumuz (Şekil 17.15a ve ayrıca *bkz.* Şekil 17.11) ve kuram uyarınca olağan iri kütleli parçacıklarla ilgili olası dünya çizgileri olan $\mathbb{M}$'deki eğrilerde geçerlidir. Bu "uzunluk" aslında bir *zaman*dır ve

$$\mathrm{d}s = (g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b)^{1/2} \text{ olmak üzere } \tau = \int_A^B \mathrm{d}s$$

denklemi uyarınca (*bkz.* §14.7, §13.8) eğri üzerindeki iki nokta, A ve B arasındaki (ideal) bir saatin kaydettiği gerçek τ zamanının ölçer. Bunun için $\boldsymbol{g}$ uzayzaman metriğinin (başka bazılarının farklı sebeplerle tercih ettiği + + + – yerine benim de tercih ettiğim seçim olan) + – – – imzasına sahip ol-

ması seçimine gerek duyarız. Fotonlar, boş koniler *üzerinde* tanjantlara sahip olan ve *boş* (ya da *ışık benzeri*) olarak adlandırılan dünya çizgilerine sahiptir (Şekil 17.15b). Buna göre bir fotonun deneyimlediği "zaman" (bir foton gerçekten deneyime sahipse) sıfır olmak zorundadır!

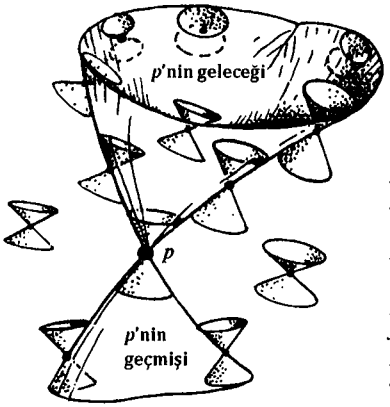
Yukarıdaki tartışmamda, uzayzamana ilişkin boş koni yapısını onun metriğinden bile daha fazla vurguladım. Aslında belirli bakımlardan boş konileri metrikten daha temeldir. Özellikle uzayzamana ilişkin nedensellik özelliklerini belirler. Henüz gördüğümüz üzere maddesel parçacıklar dünya çizgilerine koniler içinde bulunmaya zorlanmış biçimde sahip olmak durumundadır ve ışık ışınları koniler boyunca dünya çizgilerine sahiptir. Hiçbir fiziki parçacığın *uzaysal* dünya çizgisine, diğer bir deyişle birleşik ışık konisinin dışında birine, sahip olmasına izin verilmez.[13] Gerçek sinyalleri maddesel parçacıklar ya da fotonlar tarafından iletilir biçimde düşünürsek bu tür hiçbir sinyalin boş konilerce dayatılan sınırlar dışına geçemediğini buluruz. $\mathbb{M}$'de bir p noktasını göz önüne alırsak, ona ait gelecek ışık konisi üzerinde ya da içinde yer alan bölgenin, kural olarak, p'den sinyal alabilen olayların tümünden oluştuğunu görürüz. Benzer şekilde p'ye ait geçmiş ışık konisi üzerinde ya da içinde yer alan $\mathbb{M}$'ye ait noktalar, kural olarak, kesin biçimde p noktas*ına* bir sinyal gönderebilen olaylardır; *bkz.* Şekil 17.16. Durum, yayılan alanları ve hatta kuantum mekaniksel etkileri bile göz önüne aldığımızda (*kuantum dolanıklığı*, ya da "*kudolanıklık*"* denen şeyle birlikte, § 23.10'da göreceğimiz üzere kafa karıştırıcı bazı tuhaf durumlar ortaya çıkabilmesine karşın) benzerdir. Boş koniler aslında $\mathbb{M}$'ye ilişkin *nedensellik* yapısını tanımlar: hiçbir maddi cisim ya da sinyal ışıktan hızlı yolculuk etmeye izinli değildir; bu, zorunlu olarak ışık konileri içinde (ya da üzerinde) sınırlanır.

Görelilik ilkesinden ne haber? §18.2'de Minkowski'nin kayda değer geometrisinin tıpkı Galileici fizikteki $\mathcal{G}$ uzayzamanının sahip olduğu büyüklükte bir simetri grubuna sahip olduğunu görüyor olacağız. $\mathbb{M}$'nin yalnızca her noktası değil fakat olası tüm hızlar (zamansal gelecek işaret eden yönler) birbirlerine eşit bir konumdadır. Bunların tümü §18.2'de ayrıntılı olarak açıklanacak. Görelilik ilkesi tıpkı $\mathcal{G}$'de olduğu gibi $\mathbb{M}$ için de geçerlidir!

---

[13] Bazı fizikçiler *takyonlar* olarak bilinen, uzaysal zaman çizgilerine sahip olan varsayım niteliğindeki "parçacıklar" fikriyle oynadılar (böylece ışıktan hızlı yolculuk ederler). *Bkz.* Bilanuik, 1968 ve Sudarshan, 1969; daha teknik bir kaynak için *bkz.* Sudarshan ve Dhar, 1968. Takyonların var olduğu tutarlı bir kuram benzeri herhangi bir şey geliştirmek zordur ve normalde bu tür kavramların var olmadıkları kabul edilir.

* Orijinal: *quanglement;* quantum ve entanglement terimlerinden elde edilmiştir –yn.



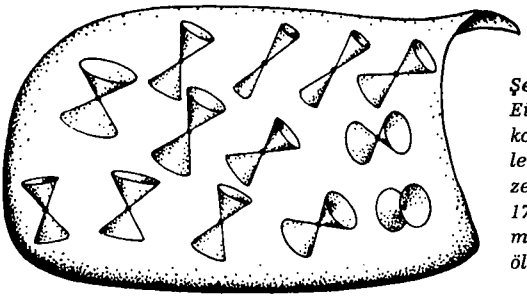
Şekil 17.16 p'nin geleceği p'den gelen gelecek zamansal eğrilerince ulaşılabilen bölgedir. Bir eğik uzayzaman durumu belirtilmektedir (bkz. Şekil 17.17). Bu bölgenin sınırı (her nerede pürüzsüzse) ışık konilerine tanjant haldedir. Sinyaller ister iri kütleli parçacıklar ister kütlesiz fotonlar tarafından taşınsın, bu bölgenin içine ya da sınırı üzerine ulaşır. p'nin geçmişi de benzer biçimde tanımlanır.

17.9 Einstein genel göreliliğinde uzayzaman

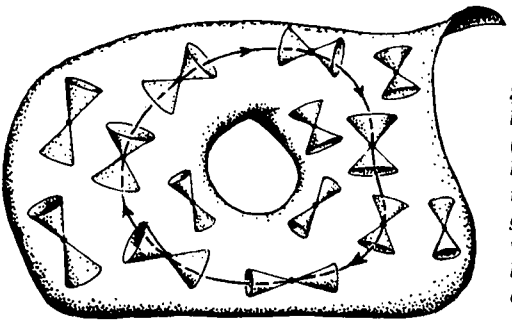
Son olarak genel göreliliğe ilişkin *Einsteincı* $\mathcal{E}$ uzayzamanına geliyoruz. Temel olarak, Newton (–Cartan) $\mathcal{N}$ uzayzamanını elde ettiğimizde Galilei'nin $\mathcal{G}$'sine daha önce yaptığımız gibi Minkowski'nin $\mathbb{M}$'sine de aynı genellemeyi uygularız. Şekil 17.12'de gösterilmiş boş konilere ilişkin düzenli bir dizilime sahip olmak yerine şimdi Şekil 17.17'dekine benzer çok daha düzensiz görünümlü bir dizilime sahibiz. Yine, fiziki yorumu ideal bir saat tarafından ölçülen zamanı $\mathbb{M}$'yle ilgili denklemin tam olarak aynısı uyarınca tanımlamak olan bir $(+---)$ Lorentzci g metriğine, g artık $\mathcal{M}$'ye ilişkin metriğin karakteristiği olan tekdüzelik olmaksızın daha genel bir metrik olmasına rağmen, sahibiz.

Bu g tarafından tanımlanan boş koni yapısı tıpkı $\mathbb{M}$ Minkowski uzayı durumundaki gibi $\mathcal{E}$'ye ilişkin nedensellik yapısını belirler. Farklar yerel olarak hafiftir fakat karışık bir Einsteincı $\mathcal{E}$ uzayzamanına ilişkin evrensel nedensellik yapısını incelediğimizde işler kesinlikle daha ayrıntılı bir biçime bürünür. Kendisi içinde "zamansal kapalı eğrilerin" oluşabildiği *nedenselliğin çiğnenmesi* olarak adlandırılan şeye sahip olduğumuzda uç bir durum ortaya çıkar ve bir olay tarafından aynı olayın geçmişine gönderilen bir sinyal olası hale gelir! *Bkz.* Şekil 17.18. Bu tür durumlar normalde "fiziki olmama" gerekçesiyle dışlanır ve benim konumum da klasik biçimde kabul edilebilecek bir uzayzamanla ilgili olarak bunları kesinlikle dışlamaktır. Yine de bazı fizikçiler maddenin,[14] bu tür zamansal kapalı eğrilerin izin verdiği *zaman yolculuğu yapma* olasılığına olanak tanımaya

[14] Örneğin *bkz.* Novikov, 2001; Davies, 2003.



Şekil 17.17 Genel göreliliğe ilişkin Einsteincı $\mathcal{E}$ uzayzamanı. Minkowski'nin $\mathbb{M}$'sine ilişkin bu genelleme $\mathcal{G}$'den $\mathcal{N}$'ye geçiştekine benzerdir (sırasıyla şekiller 17.12, 17.3, 17.7a). Lorentzci (+ − − −) g sözde metriği, $\mathbb{M}$'deki gibi zamanın fiziki ölçüsünü tanımlar.



Şekil 17.18 $\mathcal{E}$'a ilişkin nedensellik yapısı g tarafından belirlenir ($\mathbb{M}$'deki gibi, bkz. Şekil 17.16), böylece fiziki olmayan aşırı durumlar, gelecek yönlü sinyallerin geçmişten geri dönmelerine izin vererek, "zamansal kapalı eğriler"le birlikte varsayımsal olarak ortaya çıkabilir.

hazır oluşuna ilişkin epey rahat bir bakış açısını benimsiyorlar. (Bu konularla ilgili bir tartışma için §30.6'ya bakın.) Öte taraftan daha az aşırı, gerçi bir şekilde kesinlikle ilginç olan nedensellik yapıları modern astrofizikle epey ilişkili bazı ilginç uzayzamanlar, diğer bir deyişle kara delikleri temsil edenler içerisinde ortaya çıkabilir. Bunlar §27.8'de ele alınacak.

§14.7'de bir $\boldsymbol{g}$ (sözde) metriğinin, $\nabla \boldsymbol{g} = 0$ olacak şekilde eşsiz bir torsiyon serbest ∇ bağlantısı tanımladığı gerçeğiyle karşılaşmıştık, öyleyse burada bu durum geçerli olacak. Bu kayda değer bir gerçektir. Bize Einstein'ın eylemsizlik hareketi kavramının tümüyle aynı uzayzaman metriğince belirlendiğini söyler. Bu, metrik kavramına ek olarak "∇"nın da belirtilmek zorunda olduğu Cartan'ın Newtoncı uzayzamanla ilgili olan durumundan oldukça farklıdır. Buradaki avantaj, şimdi $\boldsymbol{g}$ metriğinin bozulmamış olmasıdır, böylece ∇ bütünüyle onun tarafından belirlenir. Aslında ∇'ya ait zamansal *jeodeziler* (eylemsizlik hareketleri), *uygun zaman* olarak adlandırılan şeyleri (yerel olarak) *maksimize* eden eğriler olma özelliği tarafından saptanırlar. Bu uygun zaman basitçe, dünya çizgisi üzerinde ölçülmüş olan uzunluktur ve bu da o dünya çizgisine sahip ideal bir saat tarafından ölçülen şeydir. (Bu, pozitif belirli bir metriğe sahip sıradan bir Riemanncı

yüzey üzerindeki bir jeodeziye ilişkin "gerili sicim" kavramının tuhaf bir "karşıt"ıdır; *bkz.* §14.7. §18.3'te ivmelenmemiş dünya çizgisine ilişkin uygun zamanın bu maksimize edilişinin temel olarak görelilik kuramına ait "saat paradoksu"nun bir ifadesi olduğunu göreceğiz.)

∇ bağlantısı, fiziki yorumlanışı temel olarak üstte verilmiş olan $\mathcal{N}$ durumundakiyle tıpatıp aynı olan bir $\mathcal{R}$ eğrilik tensörüne sahiptir. Özel göreliliğe ilişkin Minkowski'nin $\mathbb{M}$'sini, genel göreliliğe ilişkin Einstein'ın $\mathcal{E}$'sinden yerel olarak ayırt eden şey $\mathbb{M}$'yle ilgili olarak $\mathcal{R} = 0$ olmasıdır. Sonraki bölümde bu *Lorentzci* geometriyi daha ayrıntılı biçimde keşfedecek ve bir sonrakindeyse, Einstein'ın alan denklemlerinin nasıl, §17.5'in sonlarına doğru değinilen $4\pi GM$ "hacim azaltıcı oran"ının $\mathcal{E}$'un yapısına dahil edilen doğal kodlamalar olduğunu göreceğiz. Ayrıca Einstein'ın devrimci kuramının olağanüstü gücüne, güzelliğine ve kesinliğine tanıklık edeceğiz.

18

MINKOWSKICİ GEOMETRİ

18.1 Öklitçi ve Minkowskici 4–uzay

Öklitçi 2–uzay ve 3–uzay geometrileri bize oldukça tanıdıktır. Dahası 4–boyutlu bir Öklitçi $\mathbb{E}^4$ geometrisine genelleme yapmak, kendisiyle ilgili olarak "görsel sezgi"ye halihazırda başvurulabilen bir şey olmamasına rağmen kural olarak zor değildir. Bununla birlikte 4–boyutlu pek çok güzel biçimin mevcut olduğu açıktır; ya da onları bir de görebilseydik şüphesiz güzel olduklarını görürdük! Bu tür daha basit biçimlerin biri, 3–küre üzerindeki, bu küreyi $\mathbb{E}^4$ içinde yer alır biçimde düşünmek üzere, Clifford paralellerine ilişkin örnektir. (Elbette burada gözümüzde canlandırmakla ilgili olarak biraz daha iyisini yapabiliriz çünkü S^3 yalnızca 3–boyutludur ve ona ait Şekil 33.15'te sunulan stereografik izdüşüm bize gerçek Cliford biçimiyle ilgili bir fikir verir. Bu biçimi $\mathbb{E}^4$'ün bir parçası olarak gerçekten "görebilseydik" $\mathbb{C}^2$'ye ait 2–uzay yapılı karmaşık vektörün gerçekten neye "benzediği"ne ilişkin bir algı kazanabilmek durumunda olurduk;[1] *bkz.* §15.4, Şekil 15.8.) $\mathbb{M}$ Minkowski uzayı pek çok bakımdan $\mathbb{E}^4$'e oldukça benzerdir fakat göreceğimiz birtakım önemli farklar mevcuttur.

Cebirsel olarak, $\mathbb{E}^4$'e davranış biçimi sıradan 3–uzay $\mathbb{E}^3$'e ilişkin koordinat davranış biçimine oldukça yakındır. Tüm gereken, x, y ve z koordinatlarına ek olarak w Kartezyen koordinatıdır. (w,x,y,z) ve (w',x',y',z') noktaları arasındaki $\mathbb{E}^4$ uzaklığı s, Pisagorcu

$$s^2 = (w-w')^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

bağıntısıyla verilir. (w,x,y,z) ve (w',x',y',z')'nü birbirlerinden yalnızca "sonsuz küçük biçimde" ayrılmış olarak düşünür ve $(w',x',y',z') - (w,x,y,z)$ farkı için biçimsel olarak $(\mathrm{d}w, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, diğer bir deyişle[2]

---

[1] Brown Üniversitesi'nden Tom Banchoff yıllardan beri 4–boyutlu algılayışı geliştirme ve özellikle $\mathbb{C}^2$'deki Riemann yüzeyleri biçiminde belirli karmaşık fonksiyon görüntüleme amacıyla etkileşimli bilgisayar sistemleri geliştirmektedir. *Bkz.* Banchoff, 1990, 1996.

[2] Bu ifadedeki "$\mathrm{d}s$" nicelikleri basit biçimde "sonsuz küçük nicelikler" olarak (§13.6'daki ε gibi) okunmalıdır. Not 12.8'le karşılaştırın.

$$w' = w + \mathrm{d}w,\ x' = x + \mathrm{d}x,\ y' = y + \mathrm{d}y,\ z' = z + \mathrm{d}z$$

yazarsak bu durumda

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}w^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

olduğunu buluruz. $\mathbb{E}^4$'teki bir eğrinin uzunluğu $\mathbb{E}^3$'teki aynı denklemle, diğer bir deyişle $\int \mathrm{d}s$'yle (ds için pozitif işaret alarak) verilir.

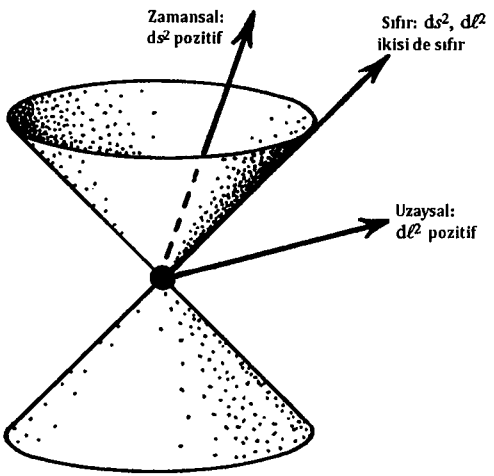
$\mathbb{M}$ *Minkowski* uzayzamanına ilişkin geometri artık buna, tek fark işaretlerde olmak üzere oldukça yakındır. Alandaki pek çok çalışan $(+++-)$ imzalı

$$\mathrm{d}\ell^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

sözde metriğine yoğunlaşmayı, uzamsal geometri ele alındığında bunun daha uygun olması nedeniyle, üstte "$\mathrm{d}\ell^2$"yle gösterilen nicelik *uzaysal* yer değiştirmelerle (diğer bir deyişle gelecek ya da geçmiş boş konilerinin ne üzerinde ne de içindeki yer değiştirmelerle; *bkz.* Şekil 18.1) ilgili pozitif olmak üzere, tercih etmektedir. Bununla birlikte $(+---)$ imza niceliğince,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2,$$

tanımlanan "$\mathrm{d}s^2$" niceliği daha dolaysız biçimde fizikidir çünkü o, iri kütleli parçacıkların izin verilmiş dünya çizgileri olan *zamansal* eğriler boyunca, $\int \mathrm{d}s$ integrali ona ait dünya çizgisi olması yanında ideal bir saat tarafından ölçülen gerçek *fiziki zaman* olarak dolaysız biçimde yorumlanabilmek üzere, pozitiftir. (Sözde) metrik $\boldsymbol{g}$ tensörüyle ilgili *bu* $(+---)$ imzası seçimimi, g_{ab} indis biçimli olarak, üstteki ifadenin



Şekil 18.1 $\mathbb{M}$ *Minkowski uzayında* $\mathbf{d}\boldsymbol{\ell}^2$ *metriği (gelecek ya da geçmiş boş konilerinin ne üzerinde ne de içindeki) uzaysal yer değiştirmelerle ilgili olarak uzamsal (uzaklık²) bir ölçü sağlar. Zamansal yer değiştirmelerle ilgili olarak* $\mathbf{d}s^2$, $\int \mathbf{d}s$ *ideal bir saat tarafından ölçülen fiziki zaman olmak üzere, zamansal (aralık²'si) bir ölçü sağlar. Bir (boş koni boyunca) sıfır yer değiştirmeyle ilgili olarak hem* $\mathbf{d}\boldsymbol{\ell}^2$ *hem de* $\mathbf{d}s^2$ *sıfır verir.*

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$$

indis biçiminde yazılabileceği şekilde kullanacağım (*bkz.* §13.8).

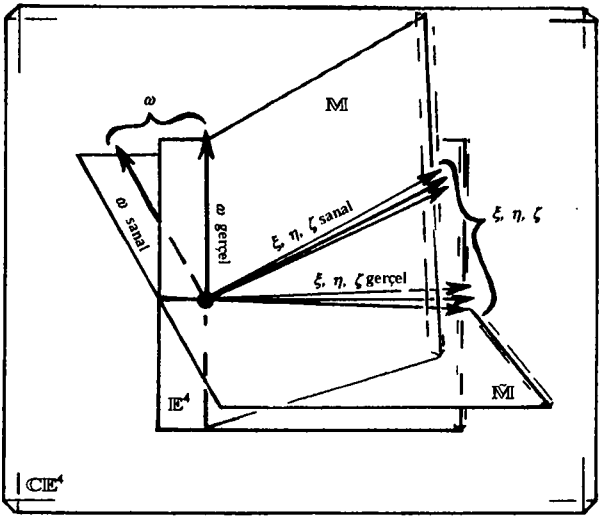
Bununla birlikte §17.8'den, iri kütleli bir parçacıkla ilgili durumdakinin aksine, $\int ds$'nin, bir fotona ait dünya çizgisiyle ilgili olarak *sıfır* olduğunu anımsamalıyız (böylece dünya çizgisi üzerindeki örtüşmeyen noktalar birbirlerinden "sıfır uzaklıkla" ayrı olabilir). Bu ayrıca ışık hızıyla yolculuk eden herhangi başka biri için de doğrudur. Ne kadar uzağa giderse gitsin bu tür bir parçacık tarafından "deneyimlenen" zaman her zaman sıfır olur! Buna, g_{ab}'nin pozitif belirli olmayan (Lorentzci) doğası nedeniyle izin verilir.

Görelilik kuramının ilk zamanlarında, $\mathbb{M}$'ye ilişkin geometrinin $\mathbb{E}^4$'ünküne yakınlığını vurgulamak üzere, zaman koordinatı t'yi, Minkowskici metriğe ilişkin "$d\ell^2$" biçimini $\mathbb{E}^4$'ün ds^2'siyle tıpatıp aynı görünür hale getirecek şekilde,

$$t = iw$$

biçiminde tamamen sanal olarak kabul etme eğilimi mevcuttu. Elbette görünümler, zaman sırf sanal birimlerle ölçülürken uzay koordinatlarının sıradan gerçel birimleri kullanmasına ilişkin yapay görünümlü gizli "gerçeklik" koşulu nedeniyle, bir şekilde yanıltıcıdır. Dahası hareketli bir sistemde gerçeklik koşulları daha karışıktır çünkü gerçel ve sanal koordinatlar büsbütün birbirine karışır. Aslında, buna benzer bir şeyi, "Öklitçi kuantum alan kuramı" denen şey adı altında pek çok farklı kılıkla yapmaya ilişkin modern bir eğilim mevcuttur. Bu tür bir işlemle ilgili olarak önemli ölçüde huzursuz olmamın sebeplerine daha sonra, §28.9'da geleceğim (en azından o, yeni bir temel fiziki kurama ilişkin bir yaklaşımda, bazen yapıldığı gibi, kilit bir bileşen olarak kabul edildiğinde; alet ayrıca kuantum alan kuramındaki sorulara ilişkin yanıtlar elde etmek üzere bir "hile" biçiminde de kullanılır ve aslında bunun için dürüst ve değerli bir rol oynayabilir).

Bunun kadar (en azından bana) yapay görünen bir işlemi benimsemek yerine "sonuna kadar gitmeyi" deneyelim ve *tüm* koordinatlarımızın karmaşık olmasına izin verelim (*bkz.* Şekil 18.2). Öyleyse farklı imzalar, artık $\mathbb{E}^4$'e ilişkin $\mathbb{CE}^4$ *karmaşıklaştırması* olarak değerlendirilebilecek karmaşık $\mathbb{C}^4$ uzayına ait *karmaşık* ω, ξ, η, ζ koordinatlarımız arasında hiçbir ayrım yoktur. Karmaşık bir afin uzay olarak bu, *bkz.* §14.1, $\mathbb{M}$'ye ilişkin $\mathbb{CM}$ karmaşıklaştırmasıyla aynıdır. Dahası karmaşık her bir $\mathbb{CE}^4$ 4–uzayı ve $\mathbb{CM}$ bütünüyle eşdeğer düz bir (eğrilik yok eden) karmaşık $\mathbb{C}g$ metriğine sahiptir. Bu metrik, $\mathbb{E}^4$, $\mathbb{CM}$'ye ait ω, ξ, η, ζ'nın tümü gerçel olacak şekilde gerçel



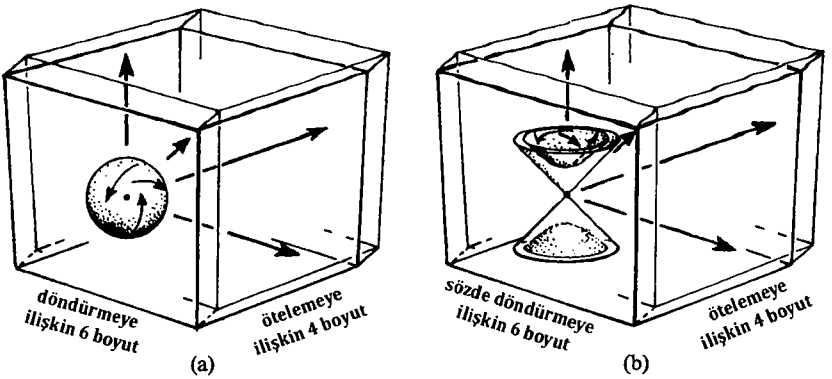
Şekil 18.2 Öklitçi karmaşık $\mathbb{CE}^4$ uzayı karmaşık Kartezyen koordinatlarda $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$ karmaşık bir (holomorfik) $\mathbf{d}s^2 = \mathbf{d}\omega^2 + \mathbf{d}\xi^2 + \mathbf{d}\eta^2 + \mathbf{d}\zeta^2$ metriğine sahiptir. Öklitçi $\mathbb{E}^4$ 4–uzayı, ω, ξ, η, ζ'nın tümü gerçel olacak şekilde "gerçel kesit"tir. $+ - - -$ $\mathbf{d}s^2$ metriğine sahip $\mathbb{M}$ Minkowski uzayzamanı, ω gerçel fakat ξ, η, ζ'nın sanal olmak üzere farklı bir gerçel kesittir. ω sanal fakat ξ, η, ζ gerçel olacak biçimde alarak, uyarılmış $\mathbf{d}s^2$ artık Minkowski metriğinin $+ + + -$ "$\mathbf{d}\ell^2$" versiyonunu vermek üzere başka bir Lorentzci $\tilde{\mathbb{M}}$ gerçel kesiti elde ederiz.

bir alt uzay olmak ve $\mathbb{M}$'yse ω gerçel fakat ξ, η, ζ'nın sanal olacağı şekilde bir alt uzay olmak üzere $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\omega^2 + \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2$ olarak kabul edilebilir. ω sanal fakat ξ, η, ζ gerçel olacak biçimde verilen alternatif Minkowskici gerçel alt uzay $\tilde{\mathbb{M}}$, Minkowski metriğinin üstteki "$\mathrm{d}\ell^2$"sini veren kendi "$\mathrm{d}s^2$"sine sahiptir. Üç alt uzay $\mathbb{E}^4$, $\mathbb{M}$ ve $\tilde{\mathbb{M}}$, $\mathbb{CE}^4$'e ait (alternatif) *gerçel dilimler* olarak adlandırılır. Bunlardan birini, $\mathbb{CE}^4$'e dönüşlü olan (diğer bir deyişle $C^2 = 1$) ve yalnızca seçilmiş gerçel dilimi noktasal olarak değişmez bırakan bir C *karmaşık eşleme* işlemini uygun görürsek ayırabiliriz.[18.1]

18.2 Minkowski uzayının simetri grupları

$\mathbb{E}^4$'e ait simetri grupları 10–boyutludur çünkü (i) orijinin sabit olduğu simetri grubu 6–boyutlu O(4) döndürme grubudur (çünkü $n = 4$ olduğunda $n(n-1)/2 = 6$'dır, *bkz* §13.8) ve (ii) orijine ait ötelemelere ilişkin 4–boyut-

[18.1] C'yi $\mathbb{E}^4$, $\mathbb{M}$ ve $\tilde{\mathbb{M}}$ durumlarının her biriyle ilgili olarak açık biçimde bulun. *İpucu*: C'nin ω, ξ, η ve ζ üzerine nasıl etkimesi gerektiğini düşünün. Bu pek de $\mathbb{M}$ ve $\tilde{\mathbb{M}}$ durumlarındaki standart karmaşık eşleme işlemi değildir.



Şekil 18.3 (a) $\mathbb{E}^4$'e ait Öklitçi hareketler grubu 10–boyutludur; orijinin sabit olduğu simetri grubu 6–boyutlu O(4) döndürme grubu ve orijine ait ötelemelere ilişkin grup 4–boyutludur. $\mathbb{M}$'ye ilişkin simetrilerle ilgili olarak, sabit orijinl için 6–boyutlu O(1, 3) (ya da (O(3, 1)) Lorentz grubunu ve ötelemelere ilişkin 4–boyutu, 10–boyutlu Poincaré simetri grubunu verecek şekilde elde ederiz.

lu bir simetri grubu mevcuttur, *bkz.* Şekil 18.3a. $\mathbb{E}^4$'ü $\mathbb{CE}^4$'e karmaşıklaştırdığımızda karmaşık 10–boyutlu bir grup elde ederiz (bu açıktır çünkü $\mathbb{E}^4$'e ilişkin Öklitçi gerçel hareketlerden herhangi birini koordinatlar biçiminde cebirsel bir denklem olarak yazarsak tüm yapmamız gereken denklemde bulunan tüm niceliklerin (koordinatlar ve katsayıların) karmaşık yerine gerçel hale gelmelerine izin vermektir ve böylece $\mathbb{CE}^4$'e ilişkin ilgili karmaşık bir hareket elde ederiz). İlki metriği koruduğundan ikincisi de koruyacaktır. Dahası $\mathbb{CE}^4$'e ilişkin kendine yönelik, karmaşıklaşmış $\mathbb{C}\boldsymbol{g}$ metriğini koruyan hareketlerin tümü de bu doğadadır.[18.2]

Şu halde grubun aynı boyuta, diğer bir deyişle 10 boyutuna sahip olması, $\mathbb{CE}^4$'e ilişkin örneğin kendisiyle ilgili koordinatların $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$ ω'nin saf biçimde sanal ve ξ, η, ζ'nın gerçel olması $(+++-$ imzası) ya da ω'nın gerçel ve ξ, η, ζ'nın saf biçimde sanal olması $(+---$ imzası) gerçellik koşuluna sahip olandaki gibi farklı bir "gerçel kesit"e özelleşirsek oldukça mantıklı fakat şu aşamada tümüyle belirgin değildir; bkz Şekil 18.2. Ötelemeye ilişkin kısım açık açıkça hâlâ 4–boyutludur. Aslında grubun $\mathbb{M}$ üzerinde, $\mathbb{M}$'ye ait herhangi belirli bir noktanın grubun bir elemanınca, tıpkı $\mathbb{E}^4$'e ilişkin durumdaki gibi, $\mathbb{M}$'ye ait herhangi başka bir belirli noktaya gönderilebilmesi anlamına gelmek üzere *geçişken* olduğunu söyler. Şu halde Lorentz grubundan (O(3, 1) ya da O(1, 3)) ne haber? Bunun "tıpkı" O(4)'teki "gibi 6–boyutlu" olduğunu nasıl görebiliriz? Aslında Lorentz gru-

[18.2] Nedenini görebiliyor musunuz?

bu 6–boyutludur (*bkz.* Şekil 18.3b). Bu tür bir şeyi görmenin en genel yolu Lie cebirini incelemek, *bkz.* §14.6, ve bunun gerekli asgari işaret değişimleriyle birlikte hâlâ çalıştığını doğrulamaktır.[18.3] O(1, 3)'e bakmanın ve ona ait 6–boyutluluğu onu Riemann küresine ilişkin simetri grubuyla ilişkilendirerek kontrol etmenin oldukça dikkat çekici alternatif bir yolunu kısaca (§18.5) göreceğiz.

$\mathbb{M}$ Minkowski uzayına ilişkin bütünlüklü 10–boyutlu simetri grubu, seçkin Fransız matematikçi Henri Poincaré'in, 1854–1912, Einstein'ın 1905'teki ana katkısından bağımsız olarak özel göreliliğe ilişkin temel matematiksel yapıyı 1898 ve 1905 yılları arasında inşa etmekteki başarısına duyulan saygı nedeniyle *Poincaré grubu* olarak adlandırılır.[3] Poincaré - grubu görelilik fiziğinde, özellikle parçacık fiziği ve kuantum alan kuramlarında önemlidir (25 ve 26. bölümler). Kuantum mekaniğinin kurallarına göre Poincaré grubuna ilişkin *gösterimler*in (§§13.6, 7) tekil parçacıklara, bunların kütle ve spin değerleri belirli gösterimleri saptamak üzere (§22.12), karşılık geldiği ortaya çıkar.

Aslında, görelilik ilkesinin $\mathbb{M}$ için hâlâ işlediğini ileri sürmemize olanak sağlayan şey, sabit bir ışık hızına sahip olsak bile (§§17.6, 8) bu grubun genişliğidir. İlk olarak, $\mathbb{M}$ uzayzamanına ilişkin her noktanın, öteleme alt grubunun geçişken doğası nedeniyle, diğerlerinin tümüyle eşit bir konumda olduğunu görürüz. Ek olarak bütünüyle uzamsal (3 boyutlu) dönel simetriye sahibiz. Bu, bir hızdan ($< c$) herhangi bir diğerine geçmekte bütünsel bir serbesti olduğu gerçeğini ifade etmek üzere geriye 3 boyut daha bırakır ve tüm yapı aynı kalır; bu da temelde $\mathbb{M}$'ye ilişkin görelilik ilkesidir! Biraz daha resmi biçimde, görelilik ilkesinin ileri sürdüğü, Poincaré - grubunun $\mathbb{M}$'ye ilişkin *zamansal gelecek yönlerinin demeti* üzerinde geçişken biçimde etki ettiğidir.[4] Bunlar, gelecek boş konilerinin iç kısımlarını işaret eden yönlerdir ve bu yönler gözlemcinin dünya çizgilerine ilişkin olası tanjant yönlerdir.[18.4] Bununla birlikte bu durumun yalnızca, Galileici ya da Newtoncı uzayzaman boyunca olan "eşzamanlılık dilimleri" ailesinden vazgeçmiş olmamız nedeniyle geçerli olduğu belirtilebilir. Onları korumak simetriyi, bir hızdan diğerine geçmek üzere herhangi bir serbesti bırakmayarak, bir uzayzaman noktası dolayında 3–boyutlu O(3)'e indirger.

[18.3] Bu durumda bunu 4×4 Lie cebiri matrislerini açık biçimde inceleyerek doğrulayın.

[3] Lorentz, Poincaré ve Einstein'ın özel göreliliğin gelişmesinde rollerine ilişkin özel olarak ayrıntılandırılmış bir tartışma için *bkz.* Stachel, 1995, s. 249–356. Kendi bakışıma göre, Einstein bile 1905'te özel göreliliğe tümüyle sahip değildi ve tabloyu tamamlamak Minkowski'nin 1908'deki 4–boyutlu perspektifine kadar sürdü; *bkz.* §17.8.

[4] Ayrıca Poincaré grubuna ait, gelecek zamansal yönleri geçmiş zamansal yönlere gönderen *zaman geri çevirici* elemanlar da mevcuttur.

[18.4] Poincaré grubunun bu hareketini biraz daha ayrıntılı biçimde açıklayın.

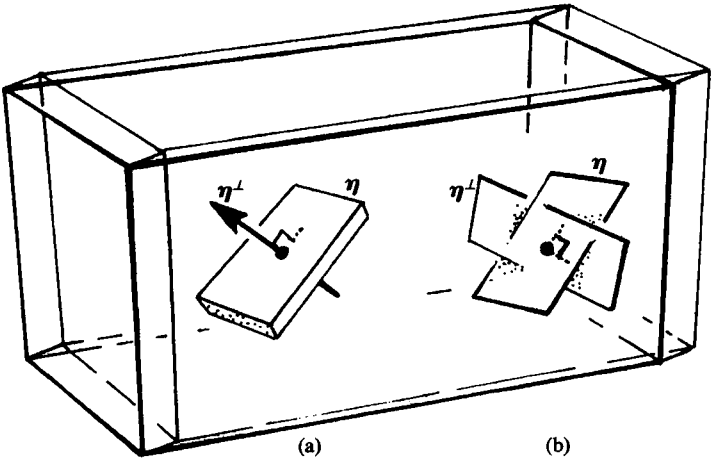
18.3 Lorentzci ortogonallik; "saat paradoksu"

Bu bakış açısı $\mathbb{M}$'yi yalnızca karmaşık $\mathbb{CE}^4$ (ya da $\mathbb{C}^4$) uzayına ilişkin bir "gerçel kesit" ya da "dilim" olarak değerlendirir fakat $\mathbb{E}^4$'ün kendisinden farklı karakterde bir kesit olarak. Doğru zihinsel tutumu benimsediğimiz sürece bu, oldukça uygun bir bakış açısıdır. Örneğin, Öklitçi $\mathbb{E}^4$'te ("dik açılı" anlamına gelen) "ortogonal" kavramına sahibiz. Bu bizi, "karmaşıklaştırma" işlemi yoluyla dolaysız olarak $\mathbb{CE}^4$' nakleder.[5] Bununla birlikte bu işlemi uyguladıktan sonra bir miktar farklı olmasını beklemek durumunda olduğumuz belirli türde özellikler mevcuttur. Örneğin, $\mathbb{CE}^4$'te bir yönün artık kendisine, $\mathbb{E}^4$'te kesinlikle ortaya çıkamayacak bir şey olarak, ortogonal olduğunu buluruz. Bununla birlikte bu özellik, yeni gerçel dilimimiz, Lorentzci $\mathbb{M}$'ye geri pas attığımızda var olmaya devam eder. Böylece $\mathbb{M}$'deki ortogonallik kavramını koruruz fakat artık kendi kendilerine ortogonal olan gerçel yönler olduğunu, bunlar foton dünya çizgileri boyunca uç veren *boş* yönler olmak üzere (alta bakın), görürüz.

Bu ortogonallik kavramını daha ileriye taşıyabilir ve bir p noktasındaki r–düzlem elemanı $\boldsymbol{\eta}$'ya ilişkin $\boldsymbol{\eta}^\perp$ *ortogonal tümleyeni* ele alabiliriz. Bu, p'de bulunan $\boldsymbol{\eta}$'daki tüm yönlere ortogonal olan p'deki tüm yönlere ilişkin $\boldsymbol{\eta}^\perp$ $(4-r)$–düzlem elemanıdır. Böylece bir çizgi elemanının ortogonal tümleyeni bir 3–düzlem elemanı, bir 2–düzlem elemanının ortogonal tümleyeni başka bir 2–düzlem elemanı ve bir 3–düzlem elemanının ortogonal tümleyeni bir çizgi elemanıdır. Her durumda, ortogonal tümleyeni almak bizi başladığımız elemana geri döndürür; diğer bir deyişle $(\boldsymbol{\eta}^\perp)^\perp = \boldsymbol{\eta}$. §13.9 ve §14.7'de g_{ab} ya da g^{ab}'li bir vektör ya da tensör niceliği üzerindeki indis düşürme ya da yükseltme işlemlerini ele aldığımızı anımsayın. Bir r–yüzey elemanını temsil eden basit r–vektörü ya da basit $(4-r)$–biçimine uygulandığında, §§12.4,7 uyarınca (*örn.* $\eta_{ab} \mapsto \eta^{ab} = \eta_{cd}g^{ac}g^{bd}$; $\eta^{ab} \mapsto \eta_{ab} = \eta^{cd}g_{ac}g_{bd}$), bu yükseltme/düşürme işlemi ortogonal tümleyene geçmeye karşılık gelir; ayrıca *bkz.* §19.2.

$\mathbb{E}^4$'te, bir $\boldsymbol{\eta}$ 3–düzlem elemanının ortogonal tümleyeni örneğin, hiçbir zaman $\boldsymbol{\eta}$'da içerilmemiş bir $\boldsymbol{\eta}^\perp$ çizgi elemanıdır; *bkz.* Şekil 18.4. Bununla birlikte Şekil 18.4'teki gibi, $\mathbb{CE}^4$'ün karmaşıklaştırılmasına ve oradan da farklı gerçel $\mathbb{M}$ kesitine geçebiliriz. Aslında bu işleme önceki bölümde (§17.8) bizden, sınırsız bir ışık hızı ve mutlak bir zamanın ikisini de istedi-

[5] Özellikle kuantum mekaniği kendileri için zaten tanıdık olan okuyuculara, burada kullandığım karmaşık "ortogonallik" kavramının zorunlu şekilde holomorfik (bu tümüyle "karmaşıklaştırma"nın ilgili olduğu ş ey olmak üzere) olup karmaşık eşlemeyi gündeme getiren §13.9'daki Hermitsel kavram olmadığını ve matematik ve fiziğin diğer pek çok alanında kullanıldığını vurgulamak isterim.



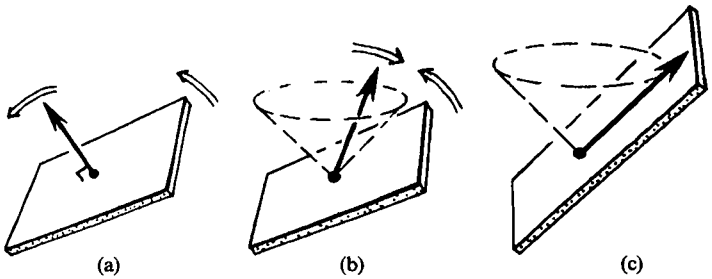
Şekil 18.4 $\mathbb{E}^4$'te bulunan, p noktasındaki bir η r–düzlem elemanı $(4-r)$–düzlem elemanı olan bir $\eta^\perp$ ortogonal tümleyene, η ve $\eta^\perp$ hiçbir zaman hiçbir zaman ortak bir yöne sahip olmamak üzere, sahiptir. (a) Özel olarak, η bir 3–düzlem elemanıysa, $\eta^\perp$ ona normal olan yöndür. (b) η bir 2–düzlem elemanıysa $\eta^\perp$ başka bir 2–düzlem elemanıdır.

ğimizde görelilik ilkesinin korunamadığını gösteren (Şekil 17.15), bir p noktasında zamansal bir yön ("sabit durum") bulmak üzere bir zaman dilimine (uzaysal 3–düzlem elemanı) ilişkin ortogonal tümleyen istendiğinde başvuruyorduk.[18.5] Yine de şimdi gelin bunu tersten okuyalım. $\mathbb{M}$'deki belirli bir p olayında eylemsiz bir gözlemciyi göz önüne alın. Gözlemciye ait dünya çizgisinin p'de bir τ (zamansal) yönüne sahip olduğunu varsayın. Bu durumda $\tau^\perp$ 3–uzayı, diğer bir deyişle gözlemci tarafından p'yle eşzamanlı olduğuna inanılan komşu olaylar o gözlemci için p'deki "bütünüyle uzamsal" yönlerin ailesini gösterir.

Buradaki amacım özel görelilik kuramının ayrıntılarını, özellikle bunun niçin makul bir "eşzamanlı" kavramı olduğunu görmemek üzere geliştirmek değildir. Bu tür bir şey için okuyucu pek çok harika metne başvurabilir.[6] Bununla birlikte bu eşzamanlılık kavramının gerçekte gözlemcinin hızına bağlı olduğu noktası belirtilmelidir. Öklitçi geometride uzaydaki bir yöne ilişkin ortogonal tümleyen o yön değiştiğinde değişecektir (Şekil 18.5a). Buradan hareketle, Lorentzci geometride ortogonal tümleyen de

[18.5] (i) $\mathbb{M}$'de bulunan bir 3–düzlem elemanı η'nın kendi $\eta^\perp$ ortogonalini içermesi hangi koşullarda olasıdır? (ii) $\mathbb{CE}^4$'te, kendilerinin ortogonal tümleyeni olan iki ayrı 2–düzlem ailesi olduğunu ve bunların hiçbirinin $\mathbb{M}$'de bulunamayacağını gösterin. (Bu karmaşık "öz ikili" ve "karşı–öz ikili" denen 2–düzlem daha sonra hatırı sayılır bir öneme sahip olacak; *bkz.* §32.2 ve §33.11.)

[6] *Bkz.* örneğin, Rindler, 1982, 2001; Synge, 1956; Taylor ve Wheeler, 1963; Hartle, 2002.



Şekil 18.5 (a) Öklitçi 4–geometride bir yön dönerse ona ait ortogonal tümleyen 3–düzlem elemanı da döner. (b) Bu ayrıca, Lorentzci 4–geometri için de doğrudur fakat zamansal bir yön için ortogonal tümleyen 3–düzlemin açısı ("eşzamanlılığın" uzamsal yönleri) ters anlamda hareket eder. (c) Buradan hareketle, yön boş haline gelirse ortogonal tümleyen aslında o yönü içerir.

yön (diğer bir deyişle gözlemci hızı) değiştiğinde değişecektir. Tek fark, değişimin ortogonal tümleyeni Öklitçi durumda olanın aksi yönde eğmesidir (*bkz.* Şekil 18.5b) ve bu nedenle bir yöne ilişkin ortogonal tümleyen için o yönü *içermek*, üstte belirtildiği üzere, olasıdır; bu bir *boş* yön için (diğer bir deyişle ışık konisi boyunca) ortaya çıkan durumdur.

$\mathbb{E}^4$'ten $\mathbb{M}$'ye geçişte ayrıca eşitsizliklerle ilgili değişimler de mevcuttur. Bunların en çarpıcı olanı özel göreliliğin "saat paradoksu" (ya da "ikiz paradoksu") olarak adlandırılan şeyin özünü içerir. Bu paradoks bazı okuyucular için tanıdık olabilir; bir uzay gemisine binip uzak bir gezegene ışık hızına yakın bir hızda yolculuk eden ve döndüğünde dünyadaki zamanın, kendisi yalnızca birkaç yıl yaşlanmışken, birkaç yüzyıl ilerlemiş olduğunu gören bir uzay gezginine değinir. Bondi'nin vurguladığı gibi (1964, 1967), hareketli bir saat tarafından kaydedilen zamanın akışını gerçekten bir dünya çizgisi boyunca ölçülmüş bir tür "yay uzunluğu" olarak kabul edersek bu durumda olgu, Öklitçi uzayda bulunan iki nokta arasındaki uzaklığın, bu uzaklığın üzerinde ölçüldüğü yola bağlı olması gerçeğinden daha fazla kafa karıştırıcı değildir. Her ikisi de aynı denklemle, $\int ds$, hesaplanır fakat Öklitçi durumda düz yol iki sabit uç nokta arasında ölçülen uzaklığı minimuma indirmeyi gösterirken Minkowski durumunda düz yolun, diğer bir deyişle *eylemsiz*, iki sabit uç olay arasında ölçülen zamanı *maksimuma çıkarma*yı gösterdiği ortaya çıkar (ayrıca *bkz.* §17.9).

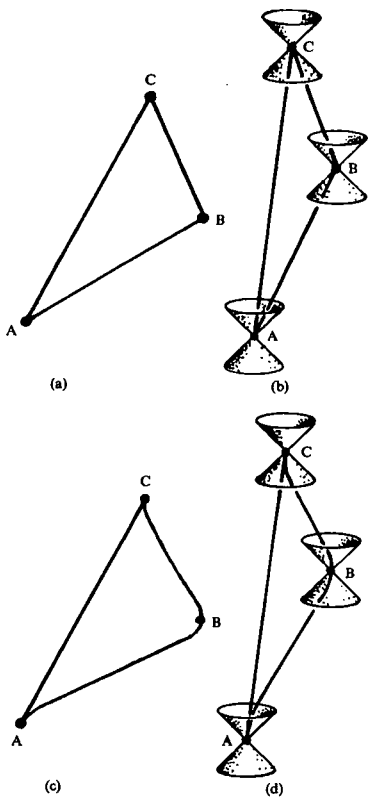
Tüm bunların açığa çıkaran temel eşitsizlik sıradan Öklitçi geometrideki *üçgen eşitsizliği* olarak adlandırılan şeydir. ABC Öklitçi herhangi bir üçgense kenar uzunlukları, eşitliğin olduğu

$$AB + BC \geq AC$$

ifadesini sağlar (*bkz.* Şekil 18.6a). Elbette, bunlar simetriktir ve AC kenarı için hangisini seçtiğimizin önemi yoktur. Lorentzci geometride, kenarların tümü zamansal olduğunda yalnızca tutarlı bir üçgen eşitsizliği elde ederiz ve bu durumda artık şeyleri uygun biçimde, AB, BC ve AC'nin tümü geleceğe yönlenmiş olacak şekilde düzenlemeye dikkat etmek zorunda oluruz (*bkz.* Şekil 18.6b). Eşitsizliğimiz artık, eşitliğin yine A, B ve C'nin tümü eş-doğrusal, diğer bir deyişle eylemsiz bir parçacığın dünya çizgisi üzerinde olduğunda geçerli olmak üzere ters dönmüştür:

$$AB + BC \leq AC.$$

Bunun yorumu kesin biçimde "saat paradoksu" olarak adlandırılan şeydir. Uzay gezgininin dünya çizgisi kırık ABC yoluyken, dünya yerleşimcileri AC dünya çizgisine sahiptir. Eşitsizlik uyarınca uzay gezgininin saatinin gerçekten dünyadakine göre daha kısa bir toplam zaman kaydettiğini görürüz.



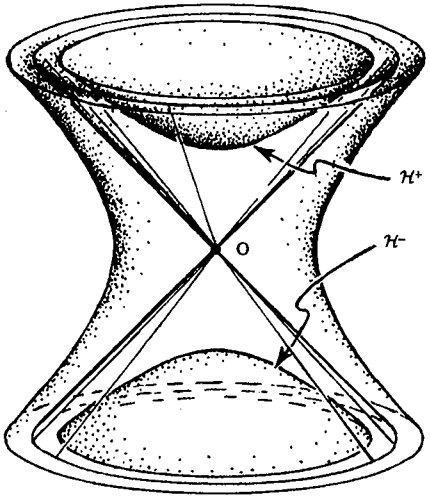
Şekil 18.6 (a) Eşitliğin yalnızca A, B ve C'nin eşdoğrusal olduğu bozulmuş durumda geçerli olduğu Öklitçi **AB + BC ≥ AC** *üçgen eşitsizliği. (b) tümü gelecek zamansal AB, BC, AC'yle birlikte Lorentz,yen geometride eşitsizlik ters döner: eşitlik yalnızca A, B ve C'nin tümü eylemsiz bir parçacığın dünya çizgisi üzerinde olduğunda geçerli olmak üzere* **AB + BC ≤ AC.** *Bu, özel göreliliğin "saat paradoksu"nu örnekler; ABC dünya çizgisine sahip bir uzay yolcusu Dünyadaki yerleşimcinin AC'sinden daha kısa bir zaman aralığı deneyimler. (c) Öklitçi bir üçgenin köşelerini "pürüzsüzleştirmek" kenar uzunluklarında küçük bir fark yaratır ve düz yol hâlâ kısadır. (d) Benzer şekilde ivmeleri (köşeleri "pürüzsüzleştirerek") sonlu yapmak zamanlarda küçük bir fark yaratır ve düz (eylemsiz) yol hâlâ daha uzundur.*

Bazıları bu açıklamadaki uzay gemisinin ivmesinin uygun biçimde hesaba katılmadığından kuşkulanır ve aslında ben, şeyleri astronotun B olayında itici bir (diğer bir deyişle sonsuz) ivmeye maruz kalır görüneceği (ölümcül olması gereken!) şekilde idealize ettim. Bununla birlikte bu konu, Şekil 18.6d'de belirtildiği üzere, üçgenin köşelerini basit biçimde pürüzsüzleştirmek yoluyla halledilir. Zaman farkı, Şekil 18.6c'de gösterilen ilgili Öklitçi "pürüzsüzleştirilmiş" üçgen durumunda açık olduğu üzere, pek de fazla etkilenmez. İvmeyle başa çıkabilme üzere Einstein'ın *genel göreliliğ*ine geçmenin gerekli olduğu sıklıkla tartışılagelmiştir fakat bu tümüyle yanlıştır. Saat zamanlarıyla ilgili yanıt her iki kuramda da $\int ds$ ($ds > 0$'la birlikte) denklemi kullanılarak elde edilir. Astronotun ivmelenmesine, tıpkı genel görelilikteki gibi, özel görelilikte de izin verilir. Ayrım basit olarak, ds niceliğini hesaplamak üzere hangi gerçek metriğin kullanılmakta olduğunda yatar; diğer bir deyişle gerçek g_{ij}'ye bağlıdır. Özel görelilikte, bu metriğin $\mathbb{M}$ Minkowski geometrisinin düz metriği olması koşuluyla çalışmaktayız. Kütleçekimsel alanları hesaba katmamız gerektiğinde Einstein'ın genel göreliliğine ilişkin eğik metriği ortaya koymak zorunda oluruz. Bu, daha ayrıntılı olarak sonraki bölümde tartışılacak.

18.4 Minkowski uzayındaki hiperbolik geometri

Minkowski geometrisinin bazı görünümlerine daha ve bu geometrinin Öklit'inkiyle ilişkisine göz atalım. Öklitçi geometride sabit bir O noktasından sabit bir a uzaklığında olan noktaların yeri bir küre belirtir. Elbettte bu $\mathbb{E}^4$'te bir S^3 3–küresidir. $\mathbb{M}$'de ne olur? Şimdi, a'yı (diyelim ki pozitif) gerçel ya da (aslında) sırf sanal bir sayı olarak kabul etmemize göre (tercih ettiğim $+---$ imzasını benimsemek üzere; aksi durumda roller tersine döner) ele almamız gereken iki farklı durum söz konusudur; *bkz.* iki durumu da örnekleyen Şekil 18.7.

Burada, a'nın sanal olduğu durum bizi özellikle ilgilendirmiyor. Şu halde $a > 0$ olarak ($a < 0$ durumu eşdeğer olmak üzere) varsayalım. "Küre"miz artık biri gelecek ışık konisinde yer alıp "tas biçimli" olan $\mathcal{H}^+$ ve diğeri geçmiş ışık konisinde bulunup "tepe biçimli" olan $\mathcal{H}^-$ olmak üzere iki parçadan oluşur. $\mathcal{H}^+$ üzerine ($\mathcal{H}^-$ uzayı benzer olmak üzere) yoğunlaşacağız. $\mathcal{H}^+$ üzerindeki asıl metrik nedir? O kesinlikle, kendisine $\mathbb{M}$'ye yerleştirilmiş olması nedeniyle yüklenen bir metriğe sahiptir. ($\mathcal{H}^+$'daki bir eğrinin uzunlukları örneğin, onu basit biçimde $\mathbb{M}$'de bir eğri olarak ele almak yoluyla tanımlanır.) Aslında bu durumla ilgili olarak, $\mathcal{H}^+$ boyunca var olan yönler uzaysal olduğundan ($+++-$ imzalı) dl^2 en iyi ölçüdür.



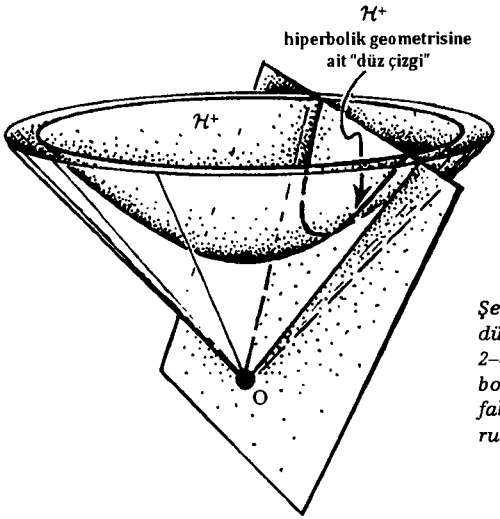
Şekil 18.7 Sabit bir O noktasından sabit bir a Minkowski uzaklığındaki noktaların yeri olarak $\mathbb{M}$*'deki "küreler". a > 0'sa (+ − − − ds² imzasıyla birlikte), iki "hiperbolik" parça elde ederiz; (gelecek ışık konisi içinde) "tas biçimli"* $\mathcal{H}^+$ *ve (geçmiş ışık konisi içinde) "tepe biçimli* $\mathcal{H}^-$*. Sanal a için (ya da gerçel a ve + + + − dl² imzasıyla birlikte) O'dan uzaysal ayrılmış tek yapraklı bir hiperbol biçimlisi elde ederiz.*

$\mathcal{H}^+$'ya ait metriğe ilişkin iyi bir tahminde bulunabiliriz çünkü esasen o, bir tür "küre"dir fakat "çevrik imzalı" bir küre. Bu ne olabilir? Johann Lambert'in, Öklit'in 5. önermesinin çiğnendiği bir geometri oluşturma olasılığı üzerine 1786'daki düşünüşünü anımsayın. O sanal yarıçaplı bir "küre"nin, bu tür bir şeyin gerçekten bir anlam ifade etmesi koşuluyla böylesi bir geometri sağlayacağını düşündü. Aslında henüz verilmiş olan $\mathcal{H}^+$ oluşumumuz bu tür bir hiperbolik geometri modeli olan fakat bu kez 3–boyutlu bir uzay sağlar. Lambert'in Öklitçi–olmayan düzlemini (hiperbolik düzlem) elde etmek üzere tüm yapmamız gereken üstte açıklanmış olan şeydeki uzamsal boyutların birinden vazgeçmektir. Her durumda "hiperbolik düz çizgiler" (jeodeziler) basit olarak $\mathcal{H}^+$'nın 2–düzlemle O'dan geçen kesişimidir (Şekil 18.8).

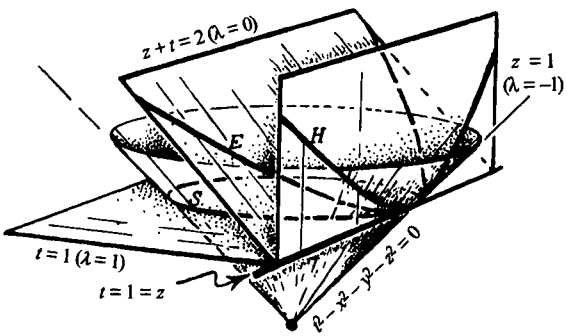
Elbette, Lambert'in kafasının içinde buna benzer bir gizli yapının olmuş olabildiğini düşünmek bir şekilde tuhaftır. Yine de bu durum, imzaların "çevrilebildiği" ve gerçel niteliklerin sanal, sanal niteliklerin gerçel yapılabildiği bu genel türdeki fikirlerin içsel tutarlılığına ilişkin bir şeyleri örnekler. Bu, Lambert'in kolaylıkla oldukça güvenilir sezgiler edinebilmesiyle ilgili bir şeydir. Şekil 18.9'u incelemek belki de öğretici olabilir. Burada Minkowski 4–uzayına ilişkin (t, x, y, z) koordinatlı $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ışık konisini çizdim ve çeşitli λ değerleri için hepsi de

$$z + t + \lambda(t - z) = 2$$

düzlemleri aracılığıyla belirli bir $t = 1 = z$ düzlemi içinden alınmış kesitler ailesini gösterdim. Bu kesişim 2–boyutludur ve her bir pozitif λ değeri



Şekil 18.8 $\mathcal{H}^+$'daki "hiperbolik bir düz çizgi" (jeodezi) O'dan geçen bir 2–düzlemin $\mathcal{H}^+$'yla kesişimidir. (2–boyutlu durum gösterilmektedir fakat 3–boyutlu bir $\mathcal{H}^+$ içinde durum benzerdir.)



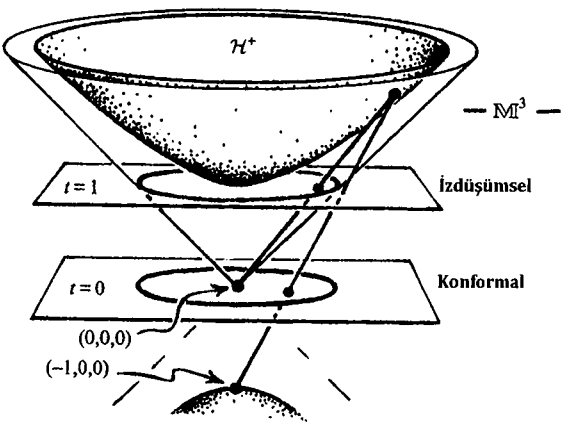
Şekil 18.9 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ışık konisinin $z + t + \lambda(t - z) = 2$ 3–düzlemi aracılığıyla 2–düzlem $t = 1 = z$ boyunca kesitleri. y koordinatı baskılanmış, bu nedenle boyutlar 1 indirgenmiş görünüyor. $\lambda > 0$ olduğunda S kesiti $\lambda = 1$ yatay durumunca örneklenen bir 2–küre dl^2 metriğine sahip olur. $\lambda = 0$ olduğunda parabol biçimli E kesitine ilişkin Öklitçi düz dl^2 metirğini elde ederiz. $\lambda < 0$ olduğunda, $\lambda = -1$ durumundaki düşey hiperbolik H kesitiyle gösterilen hiperbolik bir dl^2 metriği elde ederiz.

için bu 2–yüzeye ilişkin metriğin tam olarak bir küreninki, $\lambda^{-1/2} = 1/\sqrt{\lambda}$ yarıçapınınki olduğu (dl^2 metriğiyle ilgili olarak) ortaya çıkar. $\lambda = 0$ olduğunda sıradan bir Öklitçi düzlemin metriğini elde ederiz. (Bu kesim "düz" değil fakat daha çok "parabol biçimli" görünüyor, yine de asıl metriği aslında düzdür.)[18.6] λ negatif hale geldiğinde kesişim sanal yarıçaplı (= 1/

[18.6] Tüm bunları gösterin. *İpucu*: $w = (t - z - 1/\lambda)\sqrt{\lambda} = (1 - t - z)/\sqrt{\lambda}$ olmak üzere x, y ve z koordinatlarını kullanmak faydalıdır.

$\sqrt{\lambda}$) Lambert küresidir. Aslında o hiperbolik geometriye ilişkin ($dl^{2\prime}$den) bir esas metriğe sahiptir. Bu yolla, Lambert'in sanal yarıçaplı kürelerin anlam ifade ettiğine ilişkin varsayımsal öngörüsünün, her ne kadar kendi zamanından yüzyıllarca ileride olsa da, mükemmel olarak doğrulandığını görürüz.

Hiperbolik geometriyle ilgili "sözde küre" $\mathcal{H}^+$ biçimindeki oluşum Beltrami'nin §§2.4, 5'te (2–boyutlu durumda) açıklanmış olan konformal ve izdüşümsel gösterimleriyle dolaysız biçimde ilişkilendirilebilir. Şekil 18.10'da tüm bunların $\mathcal{H}^+$'dan dolaysız olarak elde edilebileceği yolu, $\mathbb{M}^3$ Minkowski 3–uzayındaki $(t, x, y$ koordinatlı) 2–boyutlu sözde küre durumunu açık biçimde göstererek örneklendirdim. $\mathcal{H}^+$'yı $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ denklemine sahip olarak kabul ettiğimizde onu (0, 0, 0) orijininden $t = 1$ düzlemine yansıtarak Beltrami'nin "Klein" (izdüşümsel) gösterimini ve (–1, 0, 0) "güney kutbu"ndan $t = 0$ "ekvatoral düzlem"e yansıtarak Beltrami'nin "Poincaré" gösterimini ("stereografik yansıtma"; *bkz.* §8.3, Şekil 8.7) elde ederiz.[18.7]



Şekil 18.10 $\mathbb{M}^3$ Minkowski 3–uzayında $\mathcal{H}^+$'ya ait ($t^2 - x^2 - y^2 = 1$'le verilen) hiperbolik 2–geometri Beltrami'nin (sırasıyla Şekil 2.11 ve 2.16'da gösterilen, M. C. Escher baskısı ve değiştirilmiş versiyonunda) konformal ve izdüşümsel gösterimleriyle dolaysız olarak ilişkilenir. Beltrami'nin izdüşümsel ("Klein") modeli $\mathcal{H}^+$'yı (0, 0, 0) orijininden $t = 1$ düzlemindeki birim çemberin içine yansıtmak yoluyla elde edilir. Beltrami'nin konformal (Poincaré) modeli $\mathcal{H}^+$'yı (–1, 0, 0)'dan $t = 0$'daki birim çember içine yansıtmakla elde edilir. (Ayrıca Şekil 2.17'deki Beltrami geometrisine de bakın.) Benzer oluşum $\mathbb{M}$'deki hiperbolik 3–geometri için de geçerlidir.

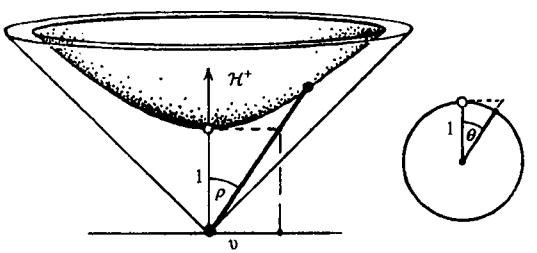
[18.7] Hiperbolik düz çizgilerin niçin "Klein" durumunda düz olarak ve Poincaré durumunda sınırla ortogonal biçimde buluşan çemberler tarafından gösterildiğini, bu ikinci durumun aslında neden konformal olduğunu bir "imza çevrimi"nin kullanımı yoluyla belirterek gösterin.

Gelecek zamansal *yönler*in $\mathcal{H}^+$'ya ait noktalarca gösterildiğine (kesinlik için $a = 1$ olarak kabul ediyorum) dikkat edin. Bunlar basit olarak kütleli bir parçacığa ait olası hızlardır. Böylece $\mathcal{H}^+$ görelilik kuramındaki *hız uzayı* olarak düşünülebilir. (Bu konunun §2.7'nin sonunda ortaya çıktığını anımsayın.) Hızların basit olarak normal biçimde toplanamaması, göreliliğe ilişkin, insanların çoğu kez en rahatsız edici buldukları görünümlerden biridir. Bu nedenle, özelde, bir uzay gemisi bir yönde dünyaya göre $\frac{3}{4}c$ hızında hareket etseydi ve aynı uzamsal yönde kendisine göre $\frac{3}{4}c$ hızına sahip bir füze fırlatsaydı, bu durumda füze dünyaya göre ışık ötesi $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)c = \frac{3}{2}c$ hızıyla değil yalnızca $\frac{24}{25}c$'yle hareket eder. (Buradaki c, yalnızca açıklık için yeniden sunulmak üzere, ışık hızıdır; birimler $c = 1$ olacak şekilde seçilir.) Bu durum burada hiperbolik geometrideki *uzunlukları* toplamaya ilişkin bie etki olarak anlaşılır (*bkz.* Şekil 18.11).[18.8]

Bunu kavramak için, Bu hiperbolik "uzunluk" kavramının fiziki yorumunu anlama gereksinimindeyiz. Aslında o (kendisi için ρ Yunan harfini kullanacağım) *sürat* olarak bilinen nicelik, v hızı biçiminde (sağ taraftaki ifade ρ'ya ilişkin "hiperbolik tanjant" olarak adlandırılıp "$\tanh p$"olarak yazılan şey olmak üzere)

$$\rho = \frac{1}{2}\log\frac{1+v}{1-v} \text{ diğer bir deyişle } v = \frac{e^{\rho}-e^{-\rho}}{e^{\rho}+e^{-\rho}}$$

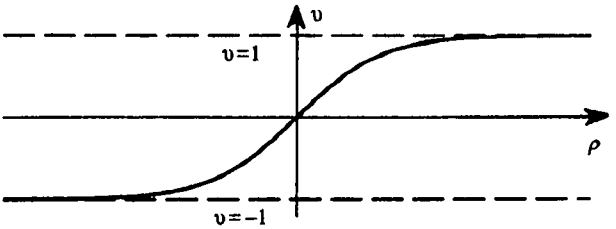
denklemince (Şekil 18.12'de çizilmiş) tanımlanan bir niceliktir. Sürat basit olarak hiperbolik $\mathcal{H}^+$ uzayındaki "uzaklığın" ($a = 1$ olduğundan birim sözde yarıçapa sahip olarak, *bkz.* §§2.4, 6, seçilmiş) ölçüsüdür. Işığınkiyle karşılaştırıldığında düşük olan v hızları için sürat v'yle aynıdır.[18.9] Şekil



Şekil 18.11 *Görelilik kuramındaki hız uzayı, ρ (= $\tanh^{-1}v$) çabukluğu $\mathcal{H}^+$ üzerindeki hiperbolik uzaklığı (c = 1 ışık hızı sonsuz ρ'ya karşılık gelir) ölçmek üzere, $\mathcal{H}^+$ (birim) hiperbolik uzayıdır. Bu durum, θ açısının merkezinde yer aldığı birim çember üzerindeki uzaklıkla ("imza çevrilmesi" yoluyla) benzerdir.*

[18.8] Hiperbolik geometrideki uzunlukların toplanmasının neden, aynı uzamsal doğrultudaki uc ve vc hızlarını "toplamak" üzere burada kullanılan toplama denklemi sonucunu, diğer bir deyişle $(u + v)c/(1 + uv)$ ifadesini doğurduğunu görmek için bir "imza çevrimi" argümanını kullanın.

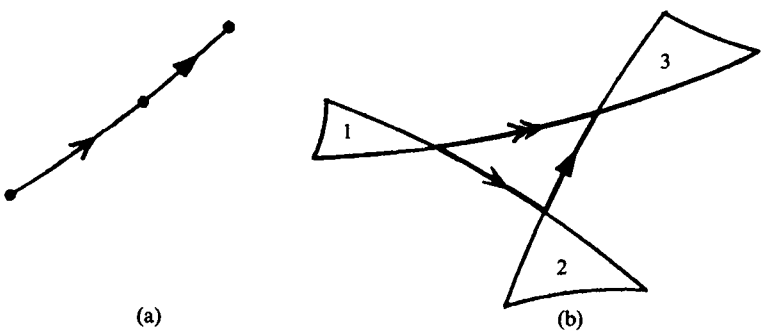
[18.9] Bu savı gerekçelendirin; üstte gösterilen iki denklemin doğruluğunu kanıtlayın.



Şekil 18.12 $\rho = \frac{1}{2}\log\left\{\frac{(1+v)}{1-v}\right\}$, diğer bir deyişle $v = (e^{\rho} - e^{-\rho})/(e^{\rho} + e^{-\rho}) = \tanh\rho$ ile tanımlanan ρ çabukluğu biçimindeki v hızının grafiği.

2.11'de hiperbolik geometriyle ilgili sonsuzluğu ($\rho = \infty$) açıklayan Escher tablosundaki sınırın ulaşılamaz c (= 1) sınır hızını gösterir.

Aynı yönde hızlar oluşturmak onlara ait süratleri basit biçimde toplamak (diğer bir deyişle hiperbolik uzunlukları toplamak) yoluyla açıklanır; *bkz.* Şekil 18.13a. Farklı yönlerdeki hızları basit şekilde, §11.4'te (uygun biçimde "imzası çevrilen") sıradan döndürmeler için verilen yöntemi Şekil 11.4'te gösterildiği üzere kullanarak oluşturabiliriz. Burada, her biri, hiperbolik uzunluğu gösterdiği çabukluğun (Şekil 11.4'teki yay uzunluklarının kendisi etrafında döndürülecekleri açının tam olarak yarısı olmaları gerçeği uyarınca) tam olarak yarısı olan bir hiperbolik parça tarafından gösterilen, oluşturulacak iki hıza uygulanan hiperbolik bir *üçgen yasası* kullanırız; *bkz.* Şekil 18.13b.



Şekil 18.13 Hiperbolik $\mathcal{H}^+$ hız uzayında görelilik biçimindeki hızların oluşturulması. (a) Aynı yöndeki hızlar için basit olarak süratleri toplarız. (b) Farklı yönlerdeki hızlarla ilgili olarak, onları oluşturmak için, hiperbolik kenar uzunlukları kendilerine ait ilgili süratlerin yarısı olmak üzere, bir üçgen kuralı kullanırız. (Kanıtı aynı olmak üzere, sıradan 2–uzay döndürmelerini açıklayan Şekil 11.4b'yle karşılaştırın.)

18.5 Bir Riemann küresi olarak gökküresi

Şimdi hiperbolik $\mathcal{H}^+$ geometrisine ilişkin "sonsuzdaki sınır"la ilgili içsel geometriye, artık ilgili olduğumuz uzayzamanın, bu sınır Şekil 2.11'deki Escher tablosundaki sınır olarak bulduğumuz bir çember (S^1) yerine artık bir S^2 küresi olacak şekilde bütünsel 4–boyutlu Minkowski uzayzamanı oluşu açık hale gelme zorunluluğunda olmak üzere, göz atalım. Bu kürenin her bir noktası boş koninin kendisi üzerinde, kütleli parçacıklarca ulaşılamayan sınırlayıcı ışık hızını temsil eden bir yöndür. Bununla birlikte bu sınırlayıcı hız *kütlesiz* parçacıklar için ulaşılabilirdir; gerçekte bu hız serbest uçuş halindeki kütlesiz parçacıklar için söz konusu olan tek hızdır. Şans eseri fotonlar bu türde kütlesiz parçacıklardır ve onları görebilirsiniz. Aslında fiili olarak, gökküresi sahnesini algıladığınız anda, gözünüz tarafından kavranan O olayında merkezlenmiş ışık konisini oluşturan ışık ışınları ailesini görüntülersiniz. Esasen ışık konisindeki ışınların yalnızca yarısı kadarını algılarsınız fakat sizi çevreleyen bütünsel bir gökküresi görüşüne sahip olarak dış uzayda bulunduğunuzu hayal ederseniz O'ya ait tüm ışık konisini oluşturan ışın küresine ilişkin daha iyi bir tabloya sahip olursunuz. Belki de bu küreyi O'ya ait *geçmiş* küresini gösterir biçimde görüntülemek daha kolaydır çünkü ilgilendiğimiz şey gözünüzden çıkan değil onun içine giren ışıktır. Bununla birlikte ışık ışınları, boş düz çizgiler anlamında, geçmişten geleceğe her iki yönde genişler ve böylece gökküresi basit olarak, O'dan geçen *tüm* ışık ışınlarına ilişkin bu $\mathcal{S}$ ailesini temsil eder biçimde de düşünülebilir. (Ayrıca *bkz.* §33.2.)

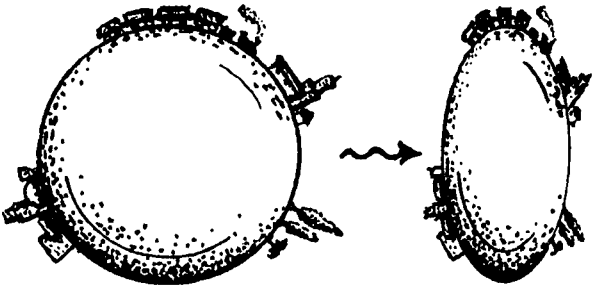
Bu $\mathcal{S}$ uzayı topolojik olarak kesinlikle bir 2–küredir fakat not edilmesi gereken belirli bir yapıya sahip midir? Onu metrik sağlayan 2–boyutlu bir Riemannıcı uzay olarak düşünebiliriz. En belirgin yol ışık konisinden, $\mathcal{S}$'yi temsil etmek üzere birim yarıçaplı $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ metrik küresini ($t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ koni denkleminden) elde etmek için, diyelim ki $t - 1$ uzamsal 3–düzlemi aracılığıyla bir dilim almaktır. Alternatif olarak $t = 1$ olan koniyi dilimleyebilir ve yine, biriyle diğeri arasındaki ilişki (bu metriği koruyan) antipodal harita yoluyla olmak üzere, birim yarıçaplı bir küre elde ederiz. Yine de, belirli bir gözlemcinin O'dan geçen dünya çizgisini ayırıp o gözlemciye ait "t koordinatını" kullanmadığımız sürece koniyi dilimlemeye ilişkin bu belirli yollarla ilgili özel hiçbir şey söz konusu olmaz. Aynı O olayıyla karşılaşan fakat ilkine oranla oldukça yüksek bir hızla yolculuk eden başka bir gözlemci için kendi yaptığı gökküresi haritasıyla diğer gözlemcinin yaptığı arasında bir uyuşmazlık söz konusu olabilir.

Esasen, 1725'te James Bradley tarafından gözlemlenen, *yıldızlarla ilgili sapma* olarak bilinen etki nedeniyle bir tür uyuşmazlık mevcut*tur*. Bu

etki uyarınca gökküresindeki bir yıldızın belirgin konumu, güneş çevresindeki yörüngesinin farklı yerlerinde bulunduğu zamanlarda dünyanın hızının değişmesi gerçeği nedeniyle mevsimsel olarak hafif biçimde yer değiştirir. Bu etki, genellikle motor kullananlar tarafından yağmurlu havalarda hız yaptıklarında gözlenen etkiyle benzerdir. Yerde duran bir gözlemcinin bakış açısına göre yağmur damlaları esasen düşey olarak aşağı doğru düşüyorken arabada bulunanlara göre yağmur neredeyse doğruca önden geliyor görünür. Bu etki, yağmurun sınırlı hızının arabanın hızıyla gözlenen ilgili etkinin doğrulanabileceği biçimde uygun olarak birleşmek zorunda oluşu gerçeğinden kaynaklanır. Aslında bu durumda arabanın hızı yağmurunkinden, esas belirgin etki arabanın hareketinden gelecek şekilde, çok daha büyük olarak alınmaktadır. Öte taraftan yıldız durumunda, dünyanın yörünge hızındaki değişim yıldızın bize doğru hareket eden ışığının hızından oldukça küçüktür. Bu nedenle, yıldızın gökküresindeki belirgin konumunun mevsimsel değişimi oldukça küçüktür (aslında bir saniyenin yarı yayı kadar (yakın yıldızlar için)). Yine de etki mevcuttur ve gökküresine ilişkin hıza bağımlı bir bozulmayı, bize bu küreyi gözlemcinin hızından bağımsız biçimde doğal bir metrik yapıya sahip olarak değerlendiremeyeceğimizi söyleyerek temsil eder.

Burada ortaya koyduğum soru S üzerindeki metrik bir yapıdan daha zayıf, her ikisi O olayında birbirlerinin yanından oldukça yüksek hızlarda geçerken bir gözlemcinin yaptığı göksel haritadan diğerinin yaptığına geçtiğimizde korunan hoş bir matematiksel yapı olup olmadığıdır. Aslında bu tür bir yapı mevcut*tur* ve bu, dikkat çekici biçimde tam da, daha önce §§8.2,3'te Riemann küresini ele alırken çalıştığımız yapıdır. Riemann küresinin konformal bir yapıya sahip olduğunu anımsayın; böylece, kendisine atfedilmiş herhangi belirli bir metriğe sahip olmasa da, eğrilere atanmış yakın noktalar ya da uzunluklar arasında tanımlı hiçbir uzaklık kavramı bulunmayacak şekilde, küre üzerindeki eğriler arasında tanımlanmış bir mutlak *açı* kavramı mevcuttur. Riemann küresinin kendisine yapılan herhangi izinli bir dönüşümü, diğer bir deyişle *konformal* dönüşüm, bu açı kavramını korumak durumundadır. Bu nedenle (sonsuz küçük biçimdeki) küçük şekiller bu tür dönüşümlerde, boyutları değişse de korunur. Dahası küre üzerinde herhangi boyuttaki çemberler yine çemberlere dönüştürülür. Aslında bu tam da, S gökküresinin sahip olduğu yapıdır. Buradan hareketle, bir gözlemci tarafından algılandığı haliyle, yıldızlara ilişkin herhangi çembersel bir dizilim ayrıca başka bir gözlemci tarafından da çember biçimli olarak algılanmak durumundadır.[18.10] Bu durum,

[18.10] Bununla ilgili olarak, oldukça kendine özgü ve etkileyici İrlandalı görelilik kuramcısı John L. Synge'e atfedilen ve hiçbir hesaplama gerektirmeyen bu zekice argümanın ayrıntıla-



Şekil 18.14 FitzGerald–Lorentz "düzleştirme etkisi". Küresel bir gezegen sabit bir referans sitemine göre sağa doğru v hızıyla (ışığınkine yakın) hareket etmektedir. Bu sistemde bu durum, bir $\sqrt{(1-v^2/c^2)}^{1/2}$ çarpanıyla kendi hareketi doğrultusunda düzleştirilmek olarak açıklanır.

gökyüzündeki yıldızlara ilişkin uygun bir işaretlemenin, her birine karmaşık bir sayı atamak durumunda olabileceğini (ayrıca ∞'a da izi vererek) ileri sürer! Bu tür bir önerme astronomide kabul görüyor mu bilmiyorum fakat "stereografik koordinat" olarak adlandırılan, küreyle ilgili standart kutupsal açılarla $\zeta = e^{i\varphi}\cot\frac{1}{2}\theta$ denklemi[18.11] yoluyla ilişkilenen bu tür karmaşık bir parametrenin kullanımı genel görelilik kuramında olağandır.[7]

Bu özellik, özellikle, v hızıyla seri biçimde hareket eden bir kürenin, kendi hareketi doğrultusunda bir $\gamma = \sqrt{(1-v^2/c^2}$ çarpanıyla, kendisi aracılığıyla düzleştirilmiş olarak değerlendirildiği FitzGerald–Lorentz çelişkisiyle tanışık olanlara şaşırtıcı gelebilir, *bkz.* Şekil 18.14. (Bu düzleştirme etkisini burada açıkça tartışmadım. Bu durum, hareket eden bir nesnenin uzamsal açıklamasını ele aldığımızda ortaya çıkar ve görelilik kuramının en standart açıklamasında bulunabilir.)[8, [18.12]] Kürenin tepeden yatay biçimde ışığınkine yaklaşan bir hızda geçtiğini hayal edin. Bu düzleştirmenin, yerde sabit halde duran bir gözlemciye göre kesinlikle algılanabilir

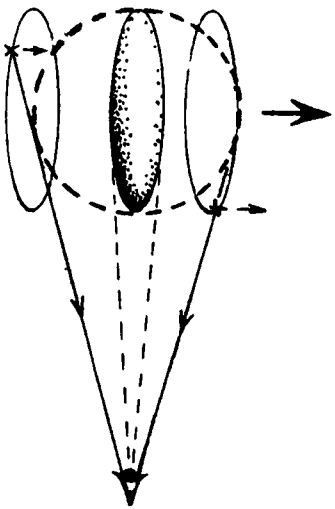
rım tamamlamaya çalışın. Argüman kabaca şöyle ilerler. Bir O olayına ilişkin $\mathcal{C}$ geçmiş ışık konisi ve O'dan geçen (zamansal) bir P 3-düzlemini göz önüne alın. Σ, $\mathcal{C}$ ve P'nin kesişimi olsun. Zaman ilerledikçe, sırasıyla $\mathcal{C}$, P ve Σ'ya ilişkin uzamsal açıklamaların "tarih"ini, belirli bir Minkowskici referans sistemine göre açıklayın. O'daki bir gözlemcinin Σ'yı niçin bir çember olarak gördüğünü ve dahası bu geometrik biçimli oluşumun, bir gözlemciye çember olarak görünen o ışın demetlerini, sistem bağımsız bir biçimde nitelediğini açıklayın.

[18.11] Bu denklemi türetin.

[7] Özellikle *bkz.* Newman ve Penrose, 1966; Penrose ve Rindler, 1984, §§1.2–4, §4.15; 1986, §9.8.

[8] Örneğin *bkz.* Rindler, 1982; 2001.

[18.12] Bu formlü üstteki uzayzaman geometrisi fikirlerini kullanarak türetmeyi deneyin.



Şekil 18.15 FitzGerald–Lorentz düzleştirmesi doğrudan görülebilir değildir çünkü bir gözlemciye kürenin arkasında olarak görünen şey önünde olarak görünenden daha büyük bir yol uzunluğu içerir (arka taraf ışığın yolundan çekilirken ön taraf onun yoluna girer). Buna göre belirgin arka taraf küreye ait ön taraftakinden, kendisi aracılığıyla görüntünün hareket doğrultusunda karşılıklı olarak gerildiği daha erken bir konuma karşılık gelir.

olması gerektiğini hayal etmek kolaydır. Görelilik ilkesince etki, gözlemcinin, kendisi ters yönde v hızıyla hareket ederken kürenin sabit kaldığı durumdakinde algıladığıyla özdeş olmalıdır. Bununla birlikte sabit haldeki bir küreye bakan sabit bir gözlemciye göre küre kesinlikle çembersel görünüme sahip bir şey olarak algılanır. Bu durum, önceki paragrafın "algılanan çemberler algılanan çemberlere gider" savıyla çelişir görünür. Aslında hiçbir çelişki söz konusu değildir çünkü bu FitzGerald–Lorentz "düzleştirme etkisi" gerçekte dolaysız biçimde gözlemlenebilir değildir. Bu durum, kürenin kendisine göre hareketli olduğu gözlemciye doğru gelir görünen ışığa ait yol uzunluklarının ayrıntılı değerlendirilmesinin sonucudur. *Bkz.* Şekil 18.15. Kürenin arka tarafından gelir görünen ışık gözlemciye, kürenin ön tarafından gelir görünen ışıktan çok daha uzak bir noktadan ulaşır.[9, [18.13]]

18.6 Newtoncı enerji ve (açısal) momentum

Minkowskici geometriye ilişkin bu bölümde tartışmak istediğim son bir görünüm kaldı. Bu görünüm, görelilik kuramındaki önemli *enerji, momentum* ve *açısal momentum* konularıyla ilgilidir. Buna kısa süre sonra

[9] Örneğin *bkz.* Terrell, 1959; Penrose, 1959.

[18.13] Bu argümanı, FitzGerald–Lorentz düzleştirmesinin, neden tam olarak yol uzunluk farkından kaynaklanan etkiye karşılık geldiğini göstermek üzere ayrıntılı olarak geliştirin. Küçük açısal çap için belirgin etkinin kürenin düzleştirilmesinden ziyade bir döndürmesi olduğunu gösterin.

§18.7'de geleceğiz fakat ilk olarak bu kitapta daha önce değinmediğim için Newtoncı kuramdaki bu temel konularla ilgili bazı saptamalar yapmalıyım. Bu niceliklerin yaşamsal önemi onların, Newtoncı kuramda iyi tanımlı bir anlama sahip, toplam enerji, momentum ve açısal momentumun zamanda sabit olması anlamında, *korunan* şeyler olmasıdır.

Bir sisteme ilişkin enerji iki kısımdan, *kinetik* enerji (diğer bir deyişle hareket enerjisi) ve *potansiyel* enerji (parçacıklar arası kuvvetlerde depolanmış enerji), oluşmuş biçimde değerlendirilebilir. Newtoncı kuramda (yapısız) bir parçacığa ilişkin kinetik enerji, m parçacığın kütlesi ve v hızı olmak üzere,

$$\frac{1}{2}mv^2$$

ifadesiyle verilir. Toplam kinetik enerjiyi elde etmek üzere basit biçimde her bir tekil parçacığın kinetik enerjisini (etrafta hareket eden çok fazla sayıda oluşturucu parçacık bileşeni olduğunda bunların enerjisini *ısı* enerjisi olarak adlandırsak da; *bkz.* §27.3) toplarız. Toplam potansiyel enerjiyi elde etmek üzere tüm kuvvetlerin içerildiği daha ayrıntılı doğaya sahip bir şeyi bilmemiz gerekir. Ne toplam kinetik enerji ne de toplam potansiyel enerji tekil biçimde korunma gereksinimindedir fakat bunların toplamı öyledir. (Buna ilişkin ilk anlatım Galilei'nin kütleçekim etkisi altındaki cisimlerin hareketi çalışmasına dek izlenebilir. Bir sarkacın topu yüksek bir konumdan başlayarak sallandıkça yerin üzerindeki yüksekliğiyle ölçülen kütleçekimle ilgili potansiyel enerjisi daha sonra yeniden potansiyel enerjiye dönüşmek üzere kinetik enerjiye dönüşür, vb, vb.)

Parçacığımızın **p** kütle *momentum*u, **v** kendisine ait hızı tanımlayan vektör olmak üzere,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

ifadesiyle verilen bir vektör niceliğidir. Tüm momentumu elde etmek üzere tüm tekil momentumların tekil vektör toplamını alırız. Ayrıca bu toplam da zamanda korunur.[18.14]

Şimdi §17.3'ten görelilik ilkesinin Newtoncı kuram (Galileici görelilik) için de geçerli olduğunu anımsıyoruz. Korunum yasalarımız, bir eylemsizlik sisteminden bir diğerine geçerken, hem enerji hem de momentum değişmemiş olarak kalmadığında geçerli olmayı nasıl başarır? İkinci sistem ilkine göre **u** vektörüyle verilen bir hızla düzenli biçimde hareket ediyorsa bu durumda ilk sistemde hızı **v** olan bir parçacık ikinci sistemde v – **u** bi-

[18.14] Enerji ve momentum korunumunu, durağan bir bilardo topuna aynı kütleye sahip bir başkası çarptığında birbirlerinden dik açılarla ayrıldıklarını (kinetik enerjinin ısı enerjisine dönüşümü olmayak şekilde bir elastik çarpışma varsayımıyla) göstermek üzere kullanın.

çiminde tanımlanan bir hıza sahip olur. Öyle görünüyor ki ilk sistemdeki enerji ve momentumun korunumu, ayrıca kütlenin de korunduğunu hesaba katmamız koşuluyla (ve ayrıca Newton'm üçüncü yasasını da kullanmak durumundayız; *bkz.* Şekil 17.4b, §17.3) ikinci sistemdeki enerji ve momentum korunumunda da yinelenir.[18.15]

Newtoncı mekanikte ayrıca, en önemlisi bir O başlangıç noktasında alınan *açısal momentum* (ya da momentumun *momenti*) olmak üzere başkaca korunan nicelikler olduğu da belirtilmelidir. Bir parçacığın O'ya göre *konum vektörü*nün, x^1, x^2, x^3 kendisine ait Kartezyen koordinatlar ve **p** momentum olmak üzere,

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$$

olduğunu düşünün; böylece açısal momentum

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$$

niceliğiyle verilir ($\wedge$ ile ilgili olarak *bkz.* §11.6).[10] Tüm sisteme ait açısal momentumu elde etmek üzere tekil tüm parçacıklara ait **M** niceliklerini basitçe toplarız.[18.16]

Kuantum kuramında ayrıca, dış kuvvetlerin yokluğunda zamanda korunan ve açısal momentumdan daha az sıklıkta tartışılan başka bir nicelik daha mevcuttur. Tekil bir parçacık için bu, t zaman olmak üzere,

$$\mathbf{N} = t\mathbf{p} - m\mathbf{x}$$

ifadesidir ve toplam **N** değerini her bir parçacığa ilişkin tekil değerleri toplayarak elde ederiz. Bu toplam yukarıda verilmiş **N**'yle aynı biçime sahiptir fakat artık **x** kütle merkezine ilişkin konum vektörü ve **p** toplam momentumdur. Bu toplam **N**'nin sabitliği kütle merkezinin düzenli biçimde düz bir çizgide hareket etmesi gerçeğini ifade eder; *bkz.* Şekil 18.16.[18.17]

Şu soruyu sormamız gerekir: tüm bunlar özel göreliliğe ilişkin çalkalanmalardan nasıl etkilenir? Hâlâ korunan enerji, momentum, açısal momentum ve kütle merkezi hareketi kavramlarına sahip miyiz? Kütlenin korunumundan ne haber? İlk dört sorunun yanıtı "evet"tir fakat yine de bu nicelikleri doğru biçimde tanımlamaya dikkat etmek zorundayız. *Kütle* korunumuyla ilgili olarak oldukça tuhaf bir şey ortaya çıkar. Enerji ve küt-

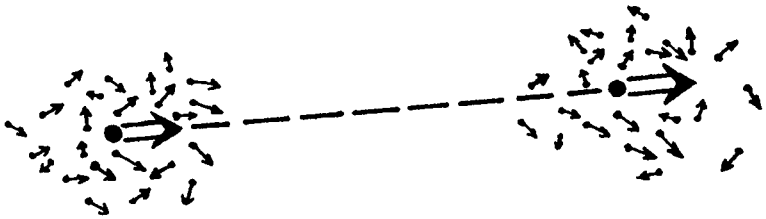
---

[18.15] Tüm bunları gösterin.

[10] Bazı okuyucuların kafası bu ifadedeki "2"den kaynaklı karışabilir fakat $\wedge$ ile ilgili olarak §11.6'da verdiğim tanımı yeniden incelemelidirler. $\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$'ye ilişkin bileşenler $x^{[i}p^{j]} = 1/2(x^ip^j - x^jp^i)$'dir. Bu nedenle **M**, $x^ip^j - x^jp^i$ bileşenlerine sahiptir.

[18.16] Dönen buz patencileri dönme oranlarını arttırmak için neden kollarını içe çekerler?

[18.17] Bunu gösterin. (Not. Kütle merkezine ilişkin konum vektörü $m\mathbf{x}$ niceliklerinin toplamının m kütlelerinin toplamına bölümüdür.)



Şekil 18.16 Kütle merkezinin düzenli hareketi. t zaman ve $\mathbf{x}$ kütle merkezine ilişkin konum vektörü olmak üzere $\mathbf{N} = t\mathbf{p} - m\mathbf{x}$ niceliği korunur. Bu durum, kütle merkezinin düz bir çizgide $\mathbf{p}/m$ hızıyla düzenli biçimde hareket ettiği gerçeğini ifade eder.

leyle ilgili iki ayrı Newtoncı korunum yasası birinde kapsanır hale gelir. Açık bir anlamda, kütle ve enerji, daha önceki gibi E sistemin toplam enerjisi, M toplam kütlesi ve c ışık hızı olmak üzere, Einstein'ın en ünlü

$$E = mc^2$$

denklemi uyarınca bütünüyle birbirlerine denk hale gelir. Bu bölümün son kısmında tüm bunların nasıl işlediğini göreceğiz.

18.7 Görelilikle ilgili enerji ve (açısal) momentum

Uzay ve zamanın görelilik kuramında tekil "uzayzaman" kavramı haline gelmek üzere birleştiğini, t zaman koordinatı $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 3–uzay konum vektörüne

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x})$$

4–vektörünü verecek şekilde eklemlenmiş olmak üzere, anımsayın. Momentum ve enerjinin de benzer şekilde birleşik hale geldiğini göreceğiz. Özel görelilikteki herhangi sonlu bir sistem E toplam enerjisine ve $\mathbf{p}$ 3–vektör toplam momentumuna sahip olacaktır. Bunlar, uzamsal bileşenleri

$$(p^1, p^2, p^3) = c^2\mathbf{p}$$

olan ve p^0 zaman bileşeni yalnızca toplam enerjiyi değil fakat ayrıca eşdeğer biçimde Einstein'ın ünlü kütle enerji bağıntısı devreye sokan

$$p^0 = E = mc^2$$

ifadesi uyarınca sistemin toplam *kütle*sini de hesaplayan *enerji momentum* 4–vektörü denen şey haline gelmek üzere birleşir.

Enerji ve kütle $c = 1$'li daha doğal birimlerle basit biçimde eşittir. Bununla birlikte c ışık hızını, görelilikle ilgili olmayan tanımlamalara çevirmeyi kolaylaştırmak üzere açık biçimde (diğer bir deyişle uzay/zaman bi-

rimlerini $c = 1$ olmayacak şekilde seçerek) gösterdim. Burada kullanmakta olduğum uzlaşı, g_{ab} metrik bileşenlerini, ana köşegen boyunca sıfır olmayan bileşenleri $(1, -c^{-2}, -c^{-2}, -c^{-2})$ olan matris olarak kabul etmektir; g^{ab} bileşenlerine sahip tersi ana köşegen boyunca $(1, -c^2, -c^2, -c^2)$'ye sahiptir.

Başlangıçta enerji momentum her ne kadar bu biçimdeki bir uzayzaman olarak düşünülebilse de, onu

$$(p_o, p_1, p_2, p_3) = (E, -\mathbf{p})$$

bileşenlerine sahip düşük indisli p_a niceliğince tanımlanan bir *kovektör* olarak değerlendirmenin daha uygun olduğu ortaya çıkar. Bu (c artık gitmiş olsa da), rahatsız edici bir eksi işaretine sahiptir. Hangi versiyonu kullanılırsa kullanılsın (p_a ya da p^a), 4–momentum bir *korunum yasasını* sağlar. Bu nedenle iki ya da daha fazla parçacık (ya da sistem) arasındaki bir karşılaşmada ya da tekil bir parçacığın (ya da sistem) iki ya da daha fazlasına parçalanmasında ya da bir parçacığın diğeri tarafından yakalanmasında, karşılaşmadan önceki 4–momentumun tümünün toplamı sonraki 4–momentumun tümünün toplamına eşittir. Böylece enerjinin korunumu yasası, momentum korunumu ve ayrıca kütle korunumunun tümü bu tek yasayla içerilir. Hepsini bu şekilde bir araya toplamanın nedeni, bu niceliklerin referans sistemi değişikliği yoluyla kendi aralarında kuantum kuramıyla ilgili olarak, indis notasyonunca da talep edildiği üzere (*bkz.* §12.8), doğru biçimde dönüştürülmesidir.

Görelilik kuramında, bir sisteme ilişkin toplam kütlenin skaler bir nicelik olmadığını belirtelim, böylece ona ait değer, içinde ölçüldüğü referans sistemine bağlı olur. Örneğin, kendi durağan sisteminde ölçülen m kütleli bir parçacık, kendisinin ona göre hareket halinde olduğu ikinci bir sistemde ölçüldüğünde daha büyük nir kütleye sahip görünür. Bununla birlikte, bunun belirgin bir etki olması için iki sistem arasındaki göreli hızın ışık hızıyla kıyaslanabilir olması gerekir.[18.18]

Bununla birlikte bu yorumlar yalnızca az önce açıklanmış olan toplamsal anlamda *korunan* türde kütle için (dış kuvvetler tarafından etki edilmeyen bir sistem için) geçerlidir. Görelilikte, referans sistemine bağlı olmayıp μ (≥ 0) *durağan kütlesi* denilen başka bir kütle kavramı mevcuttur. Bu, sisteme ait kendi referans çerçevesinde, diğer bir deyişle momentumun sıfır olduğu çerçevede ölçülen kütleye eşittir. μ durağan kütlesi c^{-2}'yle *durağan enerji* $(p_a p^a)^{1/2}$'nin

[18.18] Arttırılmış kütleye ilişkin denklemin, v parçacığın ikinci çerçevedeki hızı olmak üzere $m(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ olduğunu gösterin; alta bakın.

$$(c^2\mu)^2 = p_a p^a = E^2 - c^2\mathbf{p}^2$$

olacak şekilde çarpımıdır; buradan $\mu = c^{-2}(E^2 - c^2\mathbf{p}^2)^{1/2}$ ifadesine sahip oluruz. Burada, kendisi aracılığıyla rasgele bir **a** 3–vektörüyle ilgili olarak $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ ifadesi tanımladığımız 3–uzay vektörünü benimsiyorum. "Nokta", $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$'le birlikte

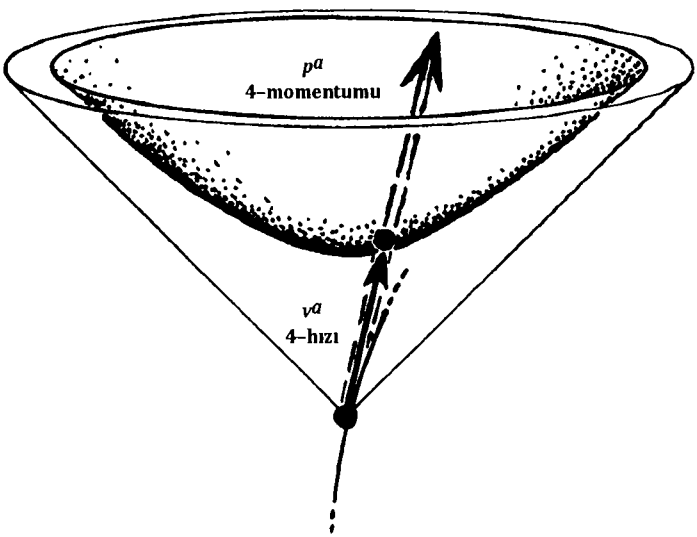
$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

"skaler çarpımı"nı (§12.3'ün notasyonuna benzer biçimde) tanımlar. (Bu notasyon daha sonra kullanışlı olacak.)

$\mu > 0$ anlamında *kütleli* olan tekil bir parçacıkla ilgili 4–momentumu μ durağan kütlesiyle ölçeklenmiş *4–hız* olarak kabul edebiliriz. v^a 4–hızı, parçacığın dünya çizgisine, (Minkowskici) bir c uzunluğuna sahip (gelecek) zamansal vektör tanjantıdır (diğer bir deyişle $c = 1$'se bir *birim* vektör):

$$v_a v^a = c^2 \text{ olmak üzere } p^a = \mu v^a;$$

bkz. Şekil 18.17. Yukarıda belirtildiği gibi iri kütleli bir parçacığın durağan kütlesi, o parçacığın kendi durağan çerçevesinde ölçülen kütledir



Şekil 18.17 Kütleli bir parçacıkla ilgili olarak p^a 4–momentumu, v^a parçacığın dünya çizgisine (gelecek zamansal) bir birim 4–vektör tanjantı olmak üzere ($c = 1$ alınarak), μ durağan kütlesiyle ölçeklendirilen v^a 4–hızıdır.

(kütle enerji). Parçacığa ait olağan 3–hızı, $\mathbf{v} = (dx^1/dt, dx^2/dt, dx^3/dt)$ olacak şekilde $\mathbf{v}$ olarak kabul ettiğimizde

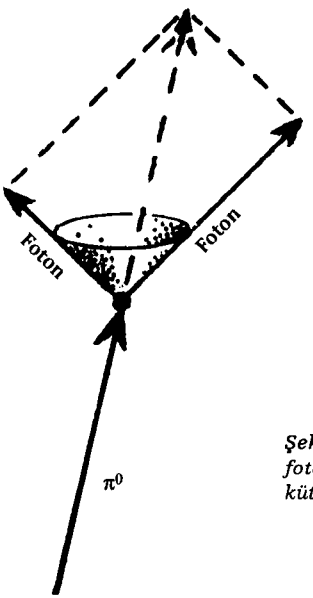
$$\gamma = (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$$

olmak üzere

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},\ m = \gamma\mu,\ v^a = \gamma(c^2, \mathbf{v})$$

elde ederiz.[18.19], [18.20]

Parçacıklar, foton başat örnek olmak üzere, *kütlesiz* olabilir (diğer bir deyişle *sıfır durağan kütle*, $\mu = 0$). Şu halde 4–momentum bir *boş vektör* olur. Durağan kütle korunmadığından kütleli bir parçacığın kütlesiz olanlara bozunması ya da kütlesiz parçacıkların kütlelileri üretmek üzere bir araya gelmeleri önünde hiçbir engel yoktur. Aslında, "doğal pion" olarak bilinen (π^0'la gösterilen) kütleli bir parçaçık normalde yaklaşık 10^{-16} saniyede iki ayrı fotona bozunacaktır.



Şekil 18.18 Kütleli bir yüksüz pionun, iki kütlesiz fotona bozunumu. Durgun kütle korunmazken, kütle-enerji 4-vektörü korunur.

[18.19] Niçin?

[18.20] $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots$ ifadesini türetmek üzere §6.4'ün Taylor serisini kullanın. Buradan, μ durağan kütlesi ve $\mathbf{p}$ 3–momentumuna sahip bir parçacığın $E = [(c^2\mu)^2 + c^2\mathbf{p}^2]^{1/2}$ enerjisine ilişkin üslü seri açılımını elde edin. Öndeki terimin tam da Einstein'ın, μ durağan enerjisine uygulanan $E = mc^2$'si ve sonraki terimin de kinetik enerjiyle ilgili Newtoncı ifade olduğunu gösterin. Görelilikle ilgili bütünsel enerjiye daha iyi yaklaşıklık tahmini sağlamak üzere sonraki iki terimi yazın.

Herhangi belirli bir sistemde toplam kütle enerji (durağan kütle *değil*), tekil her bir fotonun kütle enerjisi sıfır olmamak üzere, toplamsal olarak korunur. 4–momentumun toplanma biçimi Şekil 18.18'de gösterilmektedir.

Son olarak, *açısal* momentumun özel görelilikte nasıl ele alınması gerektiğini görelim. O, iki indisinde de ters simetrik olan bir M^{ab} tensör niceliğince tanımlanır:

$$M^{ab} = -M^{ba}.$$

(M^{ab}'nin kuantum mekaniğiyle ilişkisi için §22.2'ye bakın.) Tekil bir yapısız nokta parçacıkla ilgili olarak, x^a, kendisine ait açısal momentum ele alınmakta olduğu anda parçacığın dünya çizgisi üzerindeki noktaya ait (indis biçimli) konum 4–vektörü olmak üzere,

$$M^{ab} = x^a p^b - x^b p^a$$

ifadesine sahip oluruz.[11] Parçacık eylemsiz bir hareket içindeyse bu durumda M^{ab}, ona ait dünya çizgilerinin *tüm* noktaları için aynıdır.[18.21] Görelilikle ilgili toplam açısal momentumu elde etmek üzere basit biçimde her bir parçacığa ilişkin açısal momentum tensörlerini ayrı ayrı toplarız. Tekil bir (spin sıfır) parçacıkla ilgili olarak tümüyle uzamsal bağımsız üç M^{23}, M^{31}, M^{12} bileşeni, üstte §18.6'da ele alınan olağan açısal $\mathbf{M} = 2\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}$ momentumuna ilişkin bileşendir ($\times c^2$) ve geri kalan bağımsız M^{01}, M^{02}, M^{03} bileşenleri $\mathbf{N} = t\mathbf{p} - m\mathbf{x}$ ($\times c^2$) niceliğini oluşturur. (Toplam $\mathbf{N}$'nin korunumu kütle merkezinin düzenli hareketini ifade eder; *bkz.* Şekil 18.16.)[18.22]

§18.2'den, Minkowski uzayına ilişkin 10–boyutlu Poincaré simetri grubunun uzayzaman ötelemelerine atfedilen 4 boyuta ve döndürmelere (Lorentz) atfedilen 6 boyuta sahip olduğunu anımsayın. §20.6'da klasik mekanikte *Noether teoremi* olarak bilinen önemli bir ilkenin simetrileri korunum yasalarıyla nasıl ilişkilendirdiğini ve §§21.1–5 ve §22.8'de benzer türde bir şeyin kuantum kuramında nasıl ortaya çıktığını görüyor olacağız. Bu durum, p_a 4–momentumuna ve M^{ab} 6–açısal momentumuna ilişkin korunum yasalarıyla ilgili, bunlar Minkowski uzayına ilişkin sırasıyla ötelemeli 4 simetri ve dönel (Lorentz) 6–simetriden kaynaklandığından, derinlikli bir neden sunar. p_a ve M^{ab}'nin korunumu 21. bölümde ve §22.8, 12, 13'te önemli anlama sahiptir.

---

[11] §22.8'de çoğu (kuantum) parçacığın ayrıca, burada verilen "M^{ab} orbitali"ne eklenen M^{ab}'ye (sabit) "spin" katkısı sağlayan (*bkz.* §22.12) bir *esas spine* sahip olduğunu göreceğiz.

[18.21] Niçin?

[18.22] Görelilikle ilgili durumda, ayrıntılı biçimde açıklayın.

19

MAXWELL VE EINSTEIN'IN KLASİK ALANLARI

19.1 Newtoncı dinamik ötesindeki evrim

Newton'ın, en uygun olarak 1687'de *Principia*'sının basımıyla tarihleyebileceğimiz dinamik biçimli muhteşem düzeninin ortaya konmasıyla Einstein'ın, makul biçimde, konu üzerine 1905'teki ilk yayımıyla tarihlenebilen özel görelilik kuramının ortaya çıkışı arasındaki sürede temel fiziğe ilişkin tablomuzda pek çok önemli gelişme gerçekleşti. Bu sürede, esas olarak Faraday ve Maxwell'in 19. yüzyıl çalışmaları yoluyla gerçekleşen en büyük değişim, bir *fiziki alan* kavramının, içe işleyen uzay, anlık kuvvetler yoluyla etkileşen tekil parçacıkların daha önceden geçerli olan "Newtoncı gerçekliği"yle birlikte var olması gerektiğinin fark edilmesiydi.[1] Bu "alan" kavramı ayrıca daha sonra Einstein'ın 1915'teki eğik uzayzaman kütleçekim kuramının kritik bir bileşeni haline geldi. Şu an *klasik* alan olarak adlandırılan şeyler, Maxwell'in elektromanyetik alanı ve Einstein'ın kütleçekimle ilgili alanıdır.

Yine de fiziki dünyanın doğasıyla ilgili yalnızca klasik fizikten çok daha fazlasının olduğunu biliyoruz. Daha 1900'de Max Planck bir "kuantum kuramı"na ilişkin gereksinimin ilk ipuçlarını, iyi formüle edilmiş ve geniş kapsamlı bir kuram ortaya konabilmesi için bir çeyrek yüzyıldan fazlası gerekmiş olmasına rağmen, açığa çıkarmıştı. Ayrıca, fiziğin var olan "Newtoncı" altyapısındaki tüm bu köklü değişikliklere ek olarak hepsi de bu değişikliklerin önceli olan ve bunlardan bazılarıyla Newtoncı kuramın kendisi içinde güçlü matematiksel atılımlar biçiminde bir arada var olan önemli başkaca gelişmeler mevcuttu. Bu matematiksel atılımlar 20. bölümün konusu olacak. Klasik alanlar kuramıyla aralarında karşılıklı olarak önemli bir ilişki mevcuttur ve daha da önemli biçimde, daha sonraki bö-

---

[1] Newton'ın kendisinin de bu tür parçacık temelli bir tabloyu böylesine dogmatik biçimde kavramış olması şüpheli görünmektedir, *bkz.* Newton'ın 1730 tarihli *Opticks*'indeki *Sorgulamalar*'ı. Bununla birlikte "Newtoncı" bakış açısı 18. yüzyılda R.G. Boscovich tarafından kuvvetli biçimde eleştirilmiştir; *bkz.* Barbour, 1989.

lümlerde tartışılacak olan kuantum mekaniğine ilişkin uygun bir kavrayışa ilişkin temel bir öncül oluştururlar. Gelişimin daha da önemli bir alanı olarak *termodinamik* konusu, (ve *istatistiksel mekanik* olarak adlandırılan arıtılmış hali) kesinlikle ele alınmalıdır. Bu durum, hareketlerin ayrıntıları önemli olarak değerlendirilmemek ve sistem davranışı uygun niceliklerin *ortalamaları* biçiminde tanımlanmak üzere, çok sayıdaki cisim içeren sistemlere ilişkin davranışla ilgilenir. Bu, 19.yüzyıl ortalarından 20.yüzyıl başlarına dek başlatılmış bulunan bir başarıydı ve dönemi en güçlü biçimde karakterize eden isimler Carnot, Clausius, Maxwell, Boltzmann, Gibbs, ve Einstein isimleriydi. Daha sonra 27. bölümde termodinamiğin ortaya koyduğu en temel ve kafa karıştırıcı konulardan bazılarına yöneleceğim.

Bu bölümde Maxwell ve Einstein'ın fiziki *alan* kuramlarını açıklayacağım: elektromanyetizma ve kütleçekimin "klasik fiziği". Elektromanyetizma kuramı ayrıca, 26. bölümde karşılaşacağımız *kuantum alan kuramı*na ilişkin daha fazla gelişme için arketip biçimli "alan"ı sunarak kuantum kuramında önemli bir rol oynar. Öte taraftan kütleçekimle ilgili alana uygun kuantum yaklaşımı gizemli ve tartışmalı olarak kalır. Bu kuantum/kütleçekimle ilgili konulara yönelmek kitabın ilerideki bölümlerinin (28. bölümden sonra) önemli kısmını oluşturacak. Bununla birlikte şimdi inceleyeceğimiz fizikle ilgili olarak araştırmamızı, kendi *klasik* görünümleri içindeki fiziki alanlarla sınırlayacağız.

Bu bölümün başında, Newtoncı altyapıdaki köklü değişimin daha 19. yüzyılda, 20. yüzyılın görelilik ve kuantum kuramları devrimlerinden önce başladığı gerçeğine değindim. Bu tür bir değişikliğin gerekli olabileceğine ilişkin ilk ipucu, Michael Faraday'ın 1833 dolaylarındaki harika deneysel bulguları ve kendisini bunlara uyum sağlama gereksiniminde bulduğu gerçeklik tablosundan kaynaklandı. Temel olarak, başlıca değişim "Newtoncı parçacıklar" ve onlar arasında etkiyen "kuvvetler"in evrenin biricik yerleşimcileri olmadığını göz önüne almaktı. Bunun yerine, bir "alan" fikri artık, kendisine ilişkin gövdesiz bir varoluşla birlikte ciddiye alınmak zorundaydı. Bu "gövdesiz alan"ın geçerli olma zorunluluğuna ilişkin denklemleri 1864'te formüle eden kişi büyük İskoç fizikçi James Clark Maxwell'di ve o, bu alanların bir yerden diğerine enerji taşıyabildiklerini gösterdi. Bu denklemler elektrik alanlarının, manyetik alanların ve hatta ışığın davranışını birleştirdi ve görelilikle ilgili alan denklemlerinin ilki olan bunlar günümüzde basit biçimde *Maxwell denklemleri* olarak bilinir.

20. yüzyılın üstün bakış açısıyla, matematiksel teknikte köklü gelişmeler sağlandığında (ve burada özellikle bölümler 12–15'te görmüş olduğumuz manifoldlar hakkındaki kalkülüsten bahsediyorum) Maxwell denk-

lemleri, bizi elektrik/manyetik alanların nasıl olup da başkaca kurallara uyduklarının düşünülebilmiş olması konusunda neredeyse hayrete düşüren, zorlayıcı bir doğallık ve basitliğe sahip görünür. Bununla birlikte şeylerle ilgili bu tür bir bakış açısı, bu matematiksel gelişmelerin çok büyük kısmına yol açan şeyin Maxwell denklemlerinin kendisi olduğu gerçeğini göz ardı eder. Sırasıyla Minkowski'nin *uzayzaman* kavramına yol açan Lorentz, Poincaré ve Einstein'ın özel görelilikle ilgili uzayzaman dönüşümlerine ilişkin yönlendirici de bu denklemlerin bir biçimiydi. Uzayzaman sisteminde bu denklemler, doğal şekilde Cartan'ın diferansiyel biçimler kuramına (§12.6) gelişen bir biçim buldu ve Maxwell kuramına ilişkin yük ve manyetik akımın korunumu yasaları şu an, §§12.5, 6'da *dışsal kalkülüsün temel teoremi* olarak değinilen nefis denklem tarafından oldukça zarif biçimde kapsanan bütünleşik ifadeler bütününe yol açtı.

Belki de, tüm bu atılımları Maxwell denklemlerinin etkisine bağlar görünerek, bu yorumlarla oldukça uç bir konumu benimsedim. Aslında, Maxwell denklemleri bu değerlendirme uyarınca şüphesiz biçimde kilit bir öneme sahipken, ayrıca bu denklemin Laplace, D'Alembert, Gauss, Green, Ostrogradski, Coulomb, Ampère ve diğerleri gibi pek çok önceli de önemli etkiye sahip olmuştur. Yine de bu gelişmelerin, bunlar ve de ayrıca kütleçekimle ilgili alanın arkasındaki itici kuvveti büyük oranda sağlayan elektrik ve manyetik alanları anlamak hâlâ gereksinimdi. Bu bölümün geri kalanı elektromanyetik ve kütleçekim alanlarının kavranmasına ve onların modern matematiksel sisteme nasıl uyum sağladıklarına ayrıldı.

19.2 Maxwell'in elektromanyetik kuramı

Öyleyse Maxwell denklemleri nedir? Bunlar, üç elektrik alan bileşeni E_1, E_2, E_3 ve üç manyetik alan bileşeni B_1, B_2, B_3'e ilişkin, elektrik yük yoğunluğu ρ ve elektrik akım yoğunluğuna ilişkin üç bileşen j_1, j_2, j_3 verili nicelikler olarak değerlendirilmek üzere, zaman akışını açıklayan kısmi diferansiyel denklemlerdir (*bkz.* §10.2). İçerisinde alanların yayılabilir biçimde değerlendirildiği bir çevre maddesiyle ilgili belirli başka alan nicelikleri de ayrıca dahil edilebilir. Burada ilgilendiğimiz üzere, *temel* fizik tartışmalarında Maxwell denklemlerinin bu tür bir çevre ortamıyla ilişkilenen görünümlerini göz ardı etmek, aslında ortamın kendisi her biri kural olarak çok daha temel düzeyde ele alınan pek çok minik bileşenden oluştuğundan olağandır. Ayrıca, "Gauss birimleri" denen şeyleri seçmek ve *standart Minkowski koordinatlarını* (§18.1), diğer bir deyişle $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$'yi $(+---$ imzalı) c ışık hızının birim ($c = 1$)

kabul edileceği şekilde uzayzaman birimleriyle birlikte kullanmak uygun olacaktır.

Elektromanyetik alan ve yük–akım yoğunluğu sırasıyla *Maxwell alan tensörü* denen bir 2–biçimli $\boldsymbol{F}$ uzayzamanına ve *yük–akım vektörü* denen bir $\boldsymbol{J}$ uzayzaman vektörü içinde, matris biçimindeki

$$\begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} J^0 \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix}$$

bileşenler olarak gösterilerek bir araya toplanır. $F_{ba} = -F_{ab}$ ters simetrisinin, bir 2–biçim için gerekli olduğu üzere geçerli olduğuna dikkat edin. Ayrıca $\boldsymbol{F}$ ve $\boldsymbol{J}$'ye ilişkin *Hodge ikilileri* olarak anılan şeyleri de, bunlar sırasıyla

$$\begin{pmatrix} {}^*F_{00} & {}^*F_{01} & {}^*F_{02} & {}^*F_{03} \\ {}^*F_{10} & {}^*F_{11} & {}^*F_{12} & {}^*F_{13} \\ {}^*F_{20} & {}^*F_{21} & {}^*F_{22} & {}^*F_{23} \\ {}^*F_{30} & {}^*F_{31} & {}^*F_{32} & {}^*F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} {}^*J_{123} \\ {}^*J_{023} \\ {}^*J_{013} \\ {}^*J_{012} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ j_1 \\ -j_2 \\ j_3 \end{pmatrix}$$

ifadeleriyle tanımlanan ${}^*\boldsymbol{F}$ 2–biçimlisi ve ${}^*\boldsymbol{J}$ 3–biçimlisi olmak üzere, kullanacağım. Burada istenen ${}^*F_{ab} = {}^*F_{[ab]}$ ve ${}^*J_{abc} = {}^*J_{[abc]}$ ters simetri özellikleri sağlanır. Bütünüyle ters simetrik olan $\varepsilon_{abcd}(= \varepsilon_{[abcd]})$ bileşenleriyle birlikte $\boldsymbol{\varepsilon}$ *Levi–Civita tensörü* (§ 12.7) biçiminde ve $\varepsilon_{0123} = 1$ olacak şekilde normalleştirilerek, ikililer, F_{ab}'nin yükseltilmiş F^{ab} versiyonu, §14.7'yle uyumlu biçimde, basitçe $g^{ac}g^{bd}F_{cd}$ olmak üzere,

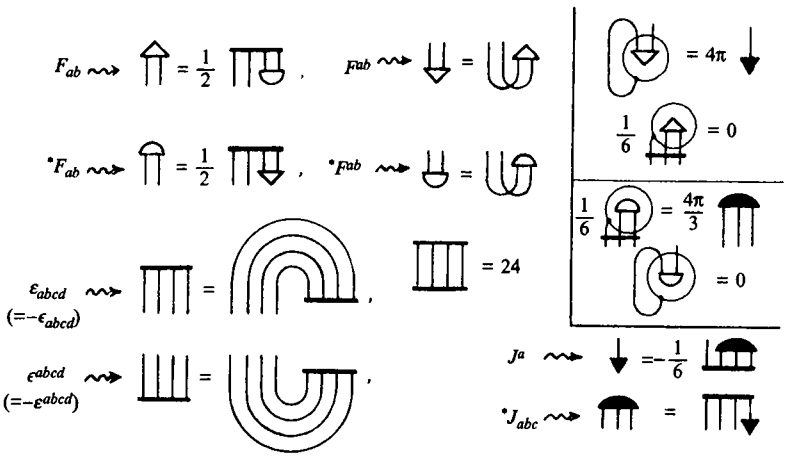
$${}^*F_{ab} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd} \text{ ve } {}^*J_{abc} = \varepsilon_{abcd}J^d$$

olarak yazılabilir. "Yükseltilmiş" $\varepsilon^{abcd} = g^{ap}g^{bq}g^{cr}g^{ds}\varepsilon_{pqrs}$ versiyonunun $\varepsilon^{0123} = -1$'i sağladığına ve bu nedenle §12.7'deki $\boldsymbol{\epsilon}$'nin $\epsilon^{abcd} = -\varepsilon^{abcd}$ ifadesiyle verildiğine dikkat edin.[19.1] Bu "ikilileme" işlemlerine (ve ayrıca

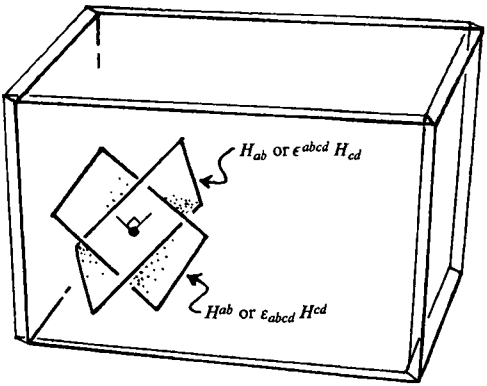
[19.1] İfadelerin ikisini de kontrol edin.

Maxwell denklemlerinin kendilerine) ilişkin diyagram biçimli gösterim için Şekil 19.1'e bakın. Bu anlamdaki (ve ilgili başka anlamlarda) bir "ikili" kavramının bizim için daha sonraki bölümlerde pek çok farklı bağlamda öneme sahip olacağını bulacağız.

Hodge ikiliğinin geometrik önemine ilişkin bir saptama yapılmalıdır. §12.7'den, ters simetrik H^{ab} niceliğince tanımlanan bir $\boldsymbol{H}$ *ikili-vektörü*nden ona ilişkin, $\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}H^{cd}$ tarafından verilen 2-biçimli $\boldsymbol{H}^{\#}$ "ikiliği"ne geçme işleminin, onun geometrik yorumuna ilişkin pek fazla değişiklik yapmadığını anımsayın. Örneğin, $\boldsymbol{H}$ *basit* bir ikili-vektör olsaydı, bu durumda $\boldsymbol{H}^{\#}$ 2-biçimlisi de basit olurdu (§12.7'nin sonuna bakın) ve böylece $\boldsymbol{H}^{\#}$ tarafından tanımlanan 2-düzlem elemanı kesinlikle $\boldsymbol{H}$ tarafından tanımlanan 2-düzlem elemanının (tek fark, katı biçimde, $\boldsymbol{H}^{\#}$'nin §12.7'de işaret edilen bir yoğunluk niteliğine sahip olması olmak üzere) aynısı olurdu. Öte taraftan, bizi H_{ab}'yle tanımlanan bir 2-biçimliden bir $H^{ab}(=H_{cd}g^{ca}g^{db})$ ikili-vektörüne getiren indis yükseltme çok daha önemli bir geometrik etkiye sahiptir. Basit bir ikili-vektör durumunda H_{ab}'yle saptanan 2-düzlem elemanı H^{ab}'yle saptanan 2-düzlem elemanının *ortogonal tümleyen*idir (*bkz.* §18.3). Hodge ikiliği H_{ab} 2-biçimlisine uygulanır-



Şekil 19.1 Hodge ikilileri ve Maxwell denklemlerine ilişkin diyagramlar. Standart Minkowski sisteminde $\epsilon_{0123} = \epsilon^{0123} = 1$ olacak şekilde normalize edilmiş $\varepsilon_{abcd}(=\varepsilon_{[abcd]})$ ve $\epsilon^{abcd} = (-\epsilon^{[abcd]})$ nicelikleri kendilerinin, $\boldsymbol{\epsilon}^{abcd} = -\boldsymbol{\varepsilon}_{abcd}$ ve $\epsilon^{abcd} = -\varepsilon^{abcd}$ tarafından yükseltilmiş/düşürülmüş versiyonlarıyla ilişkilenir. Diyagramlarda (sol orta, iki sıra aşağıda), işaret değişimi etkin bir indis ters çevrimince yutulur. Sağ üstte kutulanmış olanlar Maxwell denklemleridir. İlki, $\boldsymbol{F}$ alan tensörünü (yükseltilmiş $F^{ab} = g^{ac}g^{bd}F_{cd}$ biçiminde; *krş.* Şekil 14.21) kullanır, böylece eşitlikler $\nabla_a F^{ab} = 4\pi J^b$, $\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$ olur ve onun altında uygun şekilde $^*\boldsymbol{F}$ ikiliğini ($^*F_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}$ ve $^*J_{abc} = \varepsilon_{abcd}J^d$ olmak üzere) kullanıp denklemleri $\nabla^*_{[a}F_{bc]} = \frac{4\pi}{3}\,{}^*J_{abc}$, $\nabla^*_a F^{ab} = 0$ olan ikincisi bulunur.



Şekil 19.2 4–uzayda basit bir $\boldsymbol{H}$ (H^{ab}) ikili-vektörü kendi "ikili" $\boldsymbol{H}^{\#}$ ($\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}H^{cd}$) 2–biçimlisi gibi aynı 2–uzayı gösterir. Bununla birlikte, kendi "ikili" $\frac{1}{2}\epsilon^{abcd}\mathbf{H}_{cd}$ ikili-vektörüne denk olan $\boldsymbol{H}$'nin indis düşürülmüş biçimi, $\mathbf{H}_{ab}$ basit 2–biçimlisi, ortogonal tümleyen 2–düzlem elemanını göserir (*bkz.* Şekil 18.4). Bu nedenle, ortogonal tümleyene geçişe yol açan şey, Hodge ikiliğindeki indis yükseltme/düşürmesidir.

ken bizi $\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}H^{cd}$'ye (diğer bir deyişle $\boldsymbol{H}^{\#}$) getirerek $H_{ab} \longmapsto H^{ab}$ indis yükseltmesini işe koşar ve böylece ortogonal tümleyene geçmeyi içerir. *Bkz.* Şekil 19.2. Buna göre bizi $\boldsymbol{F}$'den $^*\boldsymbol{F}$'ye götüren Hodge ikiliği de ayrıca bir ortogonal tümleyen içerir.

Bu notasyonu kurduktan sonra artık *Maxwell denklemleri*ni oldukça basit olarak

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0,\ \mathrm{d}\,{}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J}$$

biçiminde yazabiliriz.[19.2] Maxwell denklemlerini ayrıca tümüyle indis biçimli olarak

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0,\ \nabla_a F^{ab} = 4\pi J^b$$

şeklinde de yazabiliriz.[19.3] Dışsal d türev işlemcisini ikinci Maxwell denklemine, $\mathrm{d}\,{}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J}$, uygularsak ve $\mathrm{d}^2 = 0$ (§12.6) gerçeğini kullanırsak, $\boldsymbol{J}$ yük–akım vektörünün

$$\mathrm{d}\,{}^*\boldsymbol{J} = 0 \text{ ya da eşdeğer olarak } \nabla_a J^a = 0$$

"yok olan ıraksama" denklemini sağladığı sonucunu çıkarırız.[19.4]

[19.2] Bunları, elektrik ve manyetik alan bileşenleri şeklinde ayrıntılı olarak, bu denklemlerin $\partial/\partial t$ işlemcisi biçiminde elektrik ve manyetik alanlara ilişkin bir zaman akışını nasıl sağladığını göstererek yazın.

[19.3] Önceki denklem çiftiyle denkliğini gösterin.

[19.4] Yok olma ıraksaklığına ilişkin iki versiyonun eşdeğer olduğunu gösterin.

Bu noktada, konudan hafif bir sapma olarak daha sonradan bizim için dikkat çekici öneme sahip olacak, Maxwell tensörüne ilişkin, sırasıyla (birbirinin karmaşık eşleniği olan)

$$^{+}\boldsymbol{F} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F} - \mathrm{i}\,{}^{*}\boldsymbol{F}) \text{ ve } {}^{-}\boldsymbol{F} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F} + \mathrm{i}\,{}^{*}\boldsymbol{F})$$

ifadeleriyle verilen *öz–ikili* ve *karşı–öz–ikili* kavramlarına işaret etmeye değer. Kuantum kuramında, bu karmaşık niceliklerin sırasıyla *sağ*–spin halindeki fotonlar ve *sol*–spin halindeki fotonları (elektromanyetik alan kuantası) tanımladığı ortaya çıkar; *bkz.* §§22.7, 12, Şekil 22.7. Öz ikili/karşı–öz ikili özellikler

$$^{*}(^{\pm}\boldsymbol{F}) = \pm\mathrm{i}\,^{\pm}\boldsymbol{F}$$

biçiminde ifade edilir.[19.5] $^{*}\boldsymbol{J}$'nin gerçel olduğunu akılda tutarak iki Maxwell denklemini (sırasıyla sanal ve gerçel kısımlar olarak)

$$\mathrm{d}\,^{+}\boldsymbol{F} = -2\pi\mathrm{i}\,^{*}\boldsymbol{J}$$

biçiminde birleştirebiliriz.

Fotonlar *ışığa* ilişkin parçacık tanımını sağlar. 21. bölümde kuantum kuramının ışığa ilişkin parçacık ve dalga tanımlarının bir arada olmasına nasıl olanak sağladığını göreceğiz. Denklemleri aracılığıyla, ışık hızıyla hareket eden elektromanyetik dalgalar bulunduğunu ve bunların (§ 22.7'de inceleyeceğimiz) ışığın sahip olduğu tüm kutuplanma özelliklerine sahip olduğunu göstermek Maxwell'in en büyük başarılarından biriydi. Bu dikkat çekici gerçeklerle uyumlu olarak Maxwell, ışığın aslında elektromanyetik bir olgu olduğunu ileri sürdü. 1888'de, Maxwell denklemlerini yayımladıktan neredeyse çeyrek asır sonra, Heinrich Hertz, Maxwell'in olağanüstü kuramsal öngörüsünü deney yoluyla doğruladı.

Üstteki açık tanımlarda ardalan uzayzamanının düz Minkowski $\mathbb{M}$ uzayı olduğunu varsaydım ve §§19.3, 4'te ve §19.5'in ilk bölümünde izlenecek tartışmaların tümü bu temelde kabul edilebilir. Bununla birlikte bu durum gerçekten gerekli değildir ve tüm çıkarımlar uzayzaman eğriliği var olduğunda da hâlâ geçerlidir. Bununla ilgili olarak, üstte verilmiş bileşenler, yerel bir Minkowskici sistemde kabul edilmiş olarak değerlendirilmelidir; indis notasyonu geri kalanın icabına bakacaktır.[19.6]

[19.5] Bunu, ilk olarak, iki kez ikilemenin orijinal niceliğin eksi işaretlisini verdiğini ortaya koyarak gösterin. Bu işaret, uzayzamana ilişkin Lorentzci imzayla ilişkili midir? Açıklayın.

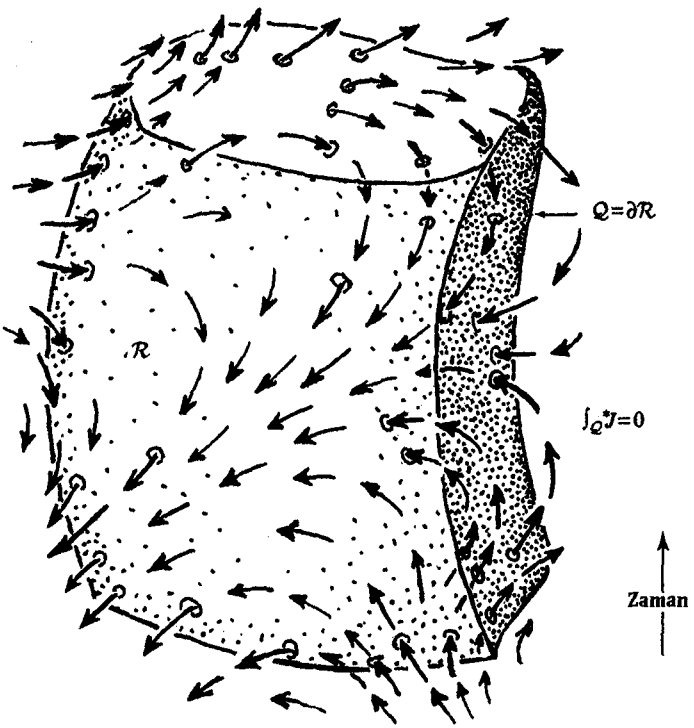
[19.6] Bunu ayrıntılı biçimde açıklayabilir misiniz? Genel bir eğri çizgisel koordinat sisteminde $\boldsymbol{F}$ ve $^{*}\boldsymbol{F}$'nin bileşenlerine ne olur? Maxwell denklemleri doğru biçimde ifade edildiğinde niçin etkilenmemiş kalır?

19.3 Maxwell kuramındaki korunum ve akış yasaları

Yük–akım vektörünün yok olma ıraksaklığı bize *elektrik yükünün korunumunu* sunar. Bunun bir "korunum denklemi" olarak adlandırılmasının nedeni, temel dışsal kalkülüs teoremince (*bkz.* §12.6), $\mathbb{M}$ Minkowski uzayındaki herhangi kapalı $\mathcal{Q}$ 3–yüzeyi boyunca

$$\int_{\mathcal{Q}} {}^*\boldsymbol{J} = 0$$

biçiminde integrallenecek şekilde, $\int_{\mathcal{R}} \mathbf{d}\,{}^*\boldsymbol{J} = \int_{\partial\mathcal{R}} {}^*\boldsymbol{J}$ ifadesine sahip olmamızdan kaynaklanır. ($\mathbb{M}$'deki kapalı herhangi 3–yüzey, $\mathbb{M}$'deki 4–boyutlu bir tıkız $\mathcal{R}$ bölgesine ilişkin $\partial\mathcal{R}$ sınırıdır.) *Bkz.* Şekil 19.3. ${}^*\boldsymbol{J}$ niceliği $\mathcal{Q} = \partial\mathcal{R}$ içindeki "yük akışı" (ya da yükün "akma"sı) olarak yorumlanabilir.



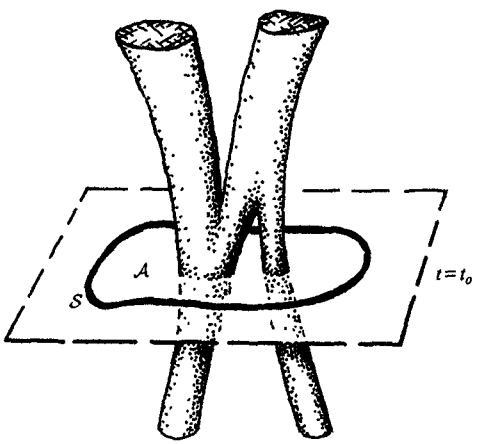
Şekil 19.3 Elektrik yükün uzayzamanda korunumu. $\mathbb{M}$'deki kapalı $\mathcal{Q}$ 3–yüzey, 4–hacimli tıkız $\mathcal{R}$'ye ilişkin $\mathcal{Q} = \partial\mathcal{R}$ sınırıdır, böylece dışsal kalkülüsün temel teoremi, $\mathbf{d}\,{}^*\boldsymbol{J} = \mathbf{0}$ olduğundan bize $\int_{\mathcal{Q}} {}^*\boldsymbol{J} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{d}\,{}^*\boldsymbol{J} = \mathbf{0}$ olduğunu söyler. ${}^*\boldsymbol{J}$ niceliği $\mathcal{Q}$ içerisindeki yük "akışı"nı (ya da "akma") tanımlar, böylece $\mathcal{Q}$ içine akan toplam yük dışarı çıkana, yük korunumunu ifade ederek eşittir.

Böylece, yukarıdaki denklemin bize söylediği şey, bu sınır içinden geçen net elektrik yükü akışının sıfır olmak zorunda oluşudur; diğer bir deyişle $\mathcal{R}$ içine giren toplam $\mathcal{R}$ dışına çıkan toplama kesin olarak eşit olmak zorundadır: *elektrik yükü korunur.*[19.7] "Gauss yasası" denen şeyi türetmek üzere ayrıca ikinci Maxwell denklemini de, $d\,{}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J}$, kullanabiliriz. Bu belirli yasa verili bir $t = t_0$ anında geçerlidir, böylece artık temel dışsal kalkülüs teoremine ilişkin üç boyutlu versiyonu kullanırız. Bu bize, kapalı bir $\mathcal{S}$ 2–yüzeyi içinde t_0 anında bulunan (*bkz.* Şekil 19.4) toplam yükün değerini, bu yükü ${}^*\boldsymbol{F}$ Maxwell tensörüne ilişkin $\mathcal{S}$ üzerinde bir integral biçiminde ifade ederek söyler; bu, $\mathcal{S}$ tarafından çevrelenmiş toplam yükü, $\boldsymbol{E}$ elektrik alanının toplam akışını $\mathcal{S}$ içinde integrallediğimizde elde edebileceğimizi söylemek anlamına gelir.[19.8]

Daha genel olarak bu, $\mathcal{S}$, sabit bir $t = t_0$ zamanında bulunmasa bile geçerlidir. $\mathcal{S}$'nin 3–uzamlı tıkız bir $\mathcal{A}$ bölgesine ilişkin uzaysal 2–sınır olduğunu düşünün. Bu durumda $\mathcal{A}$ bölgesindeki $\mathcal{S}$ tarafından çevrelenmiş (ya da uzayzaman terimleriyle $\mathcal{S}$ "boyunca kaplanmış"; *bkz.* Şekil 19.4) χ toplam yükü,

$$\chi = \int_{\mathcal{A}} {}^*\boldsymbol{J} \text{ olmak üzere } \int_{\mathcal{S}} {}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\chi$$

ifadesiyle verilir.



Şekil 19.4 $t = t_0$ sabit zamanlı 3–yüzey içinde, kendisi aracılığıyla kapalı bir uzamsal 2–yüzey üzerinde elektrik akışının integrali (${}^*\boldsymbol{F}$'nin integrali) alınarak çevrelenen toplam yükü ölçülen (dışsal kalkülüsün temel teoremi tarafından) Maxwell'in $d\,{}^*\boldsymbol{F} = 4\pi\,{}^*\boldsymbol{J}$'si, bize Gauss yasasını verir. Aslında bu durum sabit zamandaki 2–yüzeylerle sınırlanmaz ve böylelikle Gauss yasası genelleştirilir.

[19.7] Doğru olmasına rağmen bu argüman bir şekilde biraz üstünkörü biçimde verilmektedir. $\mathcal{R}$'nin, t zaman koordinatına ilişkin sabitlenmiş bir sonlu aralıkla ilgili olarak, zamanda sabit bir sınırlı uzamsal bölge içeren bir uzayzaman "silindir"i olduğu durumdaki ayrıntıları daha bütünsel olarak inceleyin. Dahil edilen farklı "yük akışı" kavramlarını, bunu silindire ilişkin uzaysal "taban" ve "tavan" kavramları ve zamansal "kenarlar"la karşılaştırarak açıklayın.

[19.8] Bunun neden yalnızca elektrik akışı olduğunu ayrıntılı biçimde açıklayın.

Ayrıca, ilgili bir tür korunum yasasını ilk Maxwell denkleminden de, $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$, elde edebiliriz. Bu, $^*\boldsymbol{F}$'nin yerine $\boldsymbol{F}$ geçmesi ve $^*\boldsymbol{J}$'ye karşılık gelen kaynağın artık sıfır olması dışında ikinci Maxwell denklemiyle tam olarak aynı biçime sahiptir. Bu nedenle, Minkowski uzayındaki herhangi kapalı bir 2–yüzeyle ilgili olarak[2] her zaman

$$\int_S \boldsymbol{F} = 0$$

akış yasasına sahip oluruz.

$^*\boldsymbol{F}$'den $\boldsymbol{F}$'ye (ya da $\boldsymbol{F}$'den $^*\boldsymbol{F}$'ye) geçişte basit olarak elektrik ve manyetik alan vektörlerini kendi aralarında (biriyle ilgili bir işaret değişimiyle birlikte) değiştiririz. $\boldsymbol{F}$'ye ilişkin bir kaynak yokluğu, Doğada (bilindiği kadarıyla) *manyetik tek kutupların* mevcut olmaması gerçeğinin bir ifadesidir. Manyetik bir tek kutup, sıradan bir mıktanısta olan durum gibi her zaman birlikte bulunan kuzey ve güney kutuları yerine, kendisinde bir manyetik kuzey kutbu ya da bir manyetik güney kutbu olur. (Bu kutuplar fiziki olarak bağımsız değildir fakat *elektrik* yüklerin dolaşımından kaynaklanır.) Doğadaki fiziki bir nesne üzerinde hiçbir zaman net bir "manyetik yük" (sıfır olmayan kutup kuvveti) bulunmadığı görülür. Tek başına Maxwell denklemleri bakış açısından, manyetik tek kutupların yokluğuna ilişkin, ilk Maxwell denklemine, $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$, herhangi bir tutarlılık kaybı olmaksızın basitçe bir sağ taraf sağlayabileceğimiz için, herhangi iyi bir sebep yokmuş gibi görünür. Aslında fizikçiler zaman zaman manyetik tek kutupların gerçekten var olabileceğini düşünüp onları aramayı denediler. Varlıkları parçacık fiziği için önemli anlamlara sahip olurdu (*bkz.* §28.2) fakat şimdilik bu tür tek kutupların gerçek evrende var olduklarına ilişkin herhangi bir belirti yoktur.

19.4 Ayar eğriliği olarak Maxwell alanı

İlk Maxwell denklemi, $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$, ayrıca bir $\boldsymbol{A}$ 1–biçimlisiyle ilgili olarak

$$\boldsymbol{F} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

anlatımına da sahiptir. (Bu, $\boldsymbol{\alpha}$ r–biçimlisi $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = 0$'ı sağlarsa bu durumda *yerel olarak* her zaman, kendisi için $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}$ olan bir $\boldsymbol{\beta}$ $(r-1)$–biçimlisinin var olduğunu belirten "Poincaré önsavı"ndan yararlanmaktır; *bkz.* §12.6.) Dahası, Öklitçi topolojideki bir bölgede bu yerel sonuç, evrensel bir sonu-

[2] Sonuç ayrıca topolojik olarak önemsiz eğik uzayzamanda da geçerlidir, böylece, en belirgin biçimde, kapalı bir 2–yüzey tıkız bir 3–hacmi her zaman kapsar.

ca genişler.[3] $\boldsymbol{A}$ niceliği *elektromanyetik potansiyel* olarak adlandırılır. Tek başına $\boldsymbol{F}$ alanı tarafından belirlenmez fakat bir $\mathrm{d}\Theta$ niceliğinin eklenmesiyle,[19.9] Θ gerçel bir skaler alan olmak üzere, düzeltilir:

$$\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + \mathrm{d}\Theta.$$

Bu bağıntılar indis biçiminde,

$$A_a \mapsto A_a + \nabla_a \Theta$$

serbestisiyle birlikte

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$$

halini alır.

Elektromanyetik potansiyeldeki bu "ayar serbestisi" bize $\boldsymbol{A}$'mın yerel olarak hesaplanabilir bir nicelik olmadığını söyler. "$\boldsymbol{A}$'nın değeri"ni bir noktada hesaplayabilecek hiçbir deney yoktur çünkü $\boldsymbol{A} + \mathrm{d}\Theta$ tam olarak $\boldsymbol{A}$'nın hizmet ettiği amaca hizmet eder. Bununla birlikte potansiyel, Maxwell alanının, kendisi aracılığıyla başka bir Ψ fiziki niceliğiyle etkileştiği işleme ilişkin matematiksel anahtarı sağlar. Bu durum nasıl işler? A_a'nın belirli rolü, onun bize, e, Ψ niceliğiyle tanımlanan nesneye ilişkin *elektrik yükü*nü kuantize eden belirli bir gerçel sayı olmak üzere, bir

$$\nabla_a = \partial/\partial x^a - \mathrm{i}eA_a$$

ayar bağlantısı (ya da demet bağlantısı; *bkz.* §15.8) sunmaktır. Aslında bu genellikle örneğin bir elektron ya da proton gibi yüklü bir kuantum parçacığı olacaktır ve böylece Ψ ona ilişkin kuantum mekaniksel dalga fonksiyonu hâline gelir. Bu terimlerin bütünsel anlamı 21. bölümdeki tartışmada dalga fonksiyonu kavramı açıklanan dek beklemek zorunda kalacaktır. Şu anda bunun hakkında bilmeye gerek duyacağımız şeyin tümü Ψ'nin bir demete, yüklü alanları tanımlayan bir demet ve $\boldsymbol{\nabla}$'nın üzerinde bir bağlantı olarak etkidiği demet budur, ait bir ara kesit (§15.3) olarak düşünülmek durumunda olduğudur.

$\boldsymbol{F}$ ve $\boldsymbol{A}$ elektromanyetik alan nicelikleri yüksüzdür (bunlar için $e = 0$'dır), böylece Maxwell denklemlerimizin, vb, tümü, ∇_a'yla ilgili bu yeni tanıma sahip olmak yoluyla bozulmamış biçimde kalır; diğer bir deyişle düz Minkowski koordinatlarındaki bu denklemlerde hâlâ $\nabla_a = \partial/\partial x^a$'ya ya da eğik uzayzamanı ele alıyorsak uygun bir genellemeye (§14.3) sahibiz. Bu bağlantının kendisine etkidiği demetin geometrik doğası nedir? Olası bir bakış açısı bu demeti $\mathbb{M}$ uzayzamanı üzerinde çemberler (S^1'ler) olan, bu çember Ψ'yle ilgili bir $e^{\mathrm{i}\grave{e}}$ faz çarpanı olmak üzere, liflere sahip olarak

---

[3] *Bkz.*, örneğin, Flanders, 1963.

[19.9] Bu tür bir niceliği niçin toplayabiliriz?

düşünmektir. (Bu, §15.1'de değinilmiş olan "Kaluza–Klein" tablosunda ortaya çıkan türde bir şeydir fakat o durumda tüm demet "uzayzaman" olarak düşünülür.) Daha uygun olanı demeti, her bir noktadaki olası Ψ değerlerine ilişkin vektör demeti olarak, faz çarpımlarına ilişkin serbestlik, demeti $\mathbb{M}$ uzayzamanı üzerinde bir U(1) demeti yapmak üzere, düşünmektir. (Bu tür bir konu §15.8'in sonunda ele alındı.) Bunun anlam ifade etmesi için Ψ, fiziki yorumu uygun bir anlamda, (θ $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde gerçel değerli bir alan olmak üzere) $\Psi \mapsto e^{i\theta}\Psi$ yer değişikliğine duyarsız bir karmaşık alan olmak zorundadır. Bu yer değişikliği elektromanyetik bir *ayar dönüşümü* olarak ve fiziki yorumun bu yer değişikliğine duyarsız olması gerçeği *ayar değişmezliği* olarak adlandırılır. Böylece ayar bağlantımıza ilişkin *eğriliğin* F_{ab} Maxwell alan tensörü olduğu açığa çıkar.[19.10]

Bu fikirleri daha fazla araştırmadan önce bazı kısa tarihi yorumlarda bulunmak uygun olur. Einstein 1915'te genel görelilik kuramını ortaya koyduktan kısa süre sonra 1918'de Weyl *uzunluk* kavramının yol bağımlı hale geleceği bir genelleme önerisinde bulundu. (Hermann Weyl, 1885–1955, önemli bir 20. yüzyıl matematiksel figürüydü. Aslında çalışmalarını bütünüyle 20. yüzyılda gerçekleştiren matematikçiler arasında onun çalışması bana göre en etkileyicisiydi ve o, yalnızca bir matematikçi olarak değil aynı zamanda bir fizikçi olarak da önemliydi.) Weyl'in kuramında boş koniler Einstein'ın kuramında (*örn.* kütleli parçacıklara ilişkin sınırlayıcı hızı tanımlamak ve bize her bir noktanın komşuluğunda etkiyen yerel "Lorentz grubu"nu sağlamak üzere) sahip oldukları temel rolü korur, böylece bir Lorentzci $\boldsymbol{g}$ (diyelim ki $+---$) metriğine bu konileri tanımlamak amacıyla yerel olarak hâlâ gerek duyulur. Bununla birlikte Weyl'in düzeninde zaman ya da uzay ölçüleriyle ilgili mutlak bir ölçekleme mevcut değildir, böylece metrik yalnızca *orantılılığa bağlı* olarak verilir. Bu nedenle $\mathcal{M}$ uzayzamanı üzerindeki bir λ (pozitif diyelim) skaler fonksiyonuna ilişkin

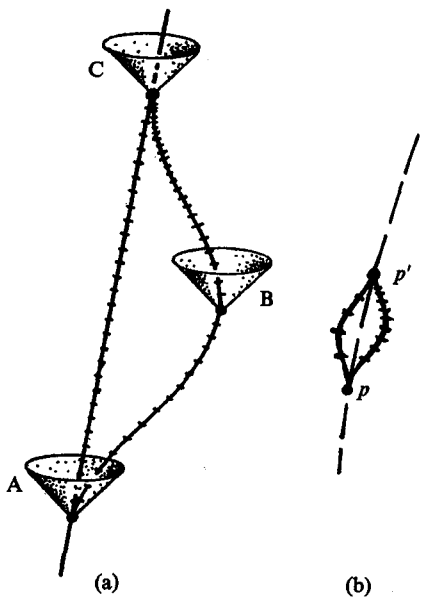
$$\boldsymbol{g} \mapsto \lambda \boldsymbol{g}$$

biçimindeki dönüşümler, bunlar $\mathcal{M}$'ye ait boş konileri etkilememek üzere, izinlidir. (Bu tür dönüşümler $\boldsymbol{g}$ metriğine ilişkin *konformal yeniden ölçeklendirme* olarak adlandırılır; Weyl'in kuramında $\boldsymbol{g}$'ye ilişkin her seçim bize, uzaklıklar ve zamanın ölçülebileceği biçimdeki olası bir *ayarı* sağlar.) Weyl uzamsal ayrımlara daha çok zihninde sahip olmuş olsa da (17. bölümdeki bakış açısı uyarınca) zaman ölçümleri biçiminde düşünmemiz uygun olacaktır. Bu nedenle Weyl geometrisinde mutlak "ideal saatler" yoktur. Herhangi bir saatin zamanı ölçme oranı o saatin geçmişine bağlıdır.

[19.10] Bunu gösterin. *İpucu*: §15.8'e bir göz atın.

Durum, §18.3'te açıkladığım (Şekil 18.6d) standart "saat paradoksu"ndan "daha kötü"dür. Weyl geometrisinde kafamızda, uzak bir yıldıza yolculuk edip dünyaya döndüğünde yalnızca dünyadakilerin daha fazla yaşlandığını değil dünyadaki saatlerin de artık uzay gemisindekilerden farklı *oran*da çalıştığını gören bir uzay gezginini canlandırabiliriz. *Bkz.* Şekil 19.5a. Bu oldukça çarpıcı fikri kullanarak Weyl, Maxwell'in elektromanyetik kuramına ilişkin denklemleri uzayzaman geometrisine eklemlemeyi başardı.

Bunu yaptığı temel yöntem, tıpkı benim üstte yaptığım gibi elektromanyetik potansiyeli bir demet bağlantısı içine fakat ∇_a'yla ilgili ifadede sanal "i" birimi olmaksızın kodlamaktı. $\mathcal{M}$ üzerindeki ilgili demeti, aynı boş koniyi paylaşan Lorentzci $\boldsymbol{g}$ metriğince verilmiş olarak düşünebiliriz. Böylece, $\mathcal{M}$ içindeki bir x noktası üzerindeki lif bir *orantılı* metrikler ailesinden oluşur (istersek orantılılık çarpanlarını pozitif olarak seçebiliriz). Bu çarpanlar üstteki $\boldsymbol{g} \mapsto \lambda \boldsymbol{g}$'de bulunan olası "$\lambda$"lardır. Metriğe ilişkin herhangi belirli bir seçimle ilgili olarak, kendisi aracılığıyla eğriler üzerinde uzaklık ya da zamanların tanımlanabileceği bir *ayar*a sahip oluruz. Bununla birlikte ayara ilişkin herhangi mutlak bir seçim ve böylece de $\boldsymbol{g}$ metriğine ilişkin orantılı olanların eşdeğerlik sınıfından yapılan tercih edilmiş hiçbir seçim söz konusu değildir. Ayrıca, boş konilerinkine ek ola-



Şekil 19.5 Weyl'in orijinal elektromanyetik ayar kuramında zaman aralığı (ya da uzay aralığı) kavramı mutlak değil fakat gidilen yola bağlıdır. (a) Şekil 18.6'da gösterilen "saat paradoksu"yla bir karşılaştırma: Weyl'in kuramında uzay gezgininin eve yalnızca (dolaysız AB rotası) Dünyadakilerle uzay gemisindeki saat ölçümleri arasındaki farkı değil fakat ayrıca saat *vurma sıklıkları*ndaki farkı da bulmak üzere geldiğini (ABC dünya çizgisi) görürüz! (b) Weyl'in (Maxwell alanı $\boldsymbol{F}$'yi veren) ayar eğriliği, sonsuz küçük bir döngü çevresinde ($\boldsymbol{p}$'yle komşu $\boldsymbol{p}'$ noktası arasındaki iki farklı rota) ilerlediğimiz zamanki bu (konformal) zaman ölçeği değişiminden kaynaklanır.

rak, Weyl'in Maxwell'in F'sine (F_{ab}) kendi *eğriliği* olarak sahip olmak üzere ortaya koyduğu bir demet bağlantısı, ya da *ayar bağlantısı*, yapısı da (diğer bir deyişle *konformal* yapı) mevcuttur. Bu eğrilik, Şekil 19.5a'da gösterildiği gibi dünya çizgileri yalnızca sonsuz küçük bir kısım kadar farklılaştığında saat vurum sıklıklarındaki tutarsızlığı ölçer; *bkz.* Şekil 19.5b. (Bu, §15.8, Şekil 15.16 ve 15.21'de ele alınan $\mathbb{C}$ üzerindeki $\mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ "zorlanmış demet"iyle karşılaştırılabilir; temel demet kavramı çok benzerdir.)

Einstein bu kuramı duyduğunda Weyl'i, buna karşı, Weyl'in fikirlerindeki matematiksel inceliğe karşın, temel bir *fiziki* itiraza sahip olduğu konusunda bilgilendirdi. Spektral frekanslar örneğin, Weyl'in kuramı tersini öngörmekteyken, bir atom geçmişi tarafından hiçbir biçimde etkilenmemiş olarak görünür. Daha temel olarak, zamanında ilgili tüm kuantum mekaniksel kurallar bütünüyle formüle edilmemiş olsa da (ve bunlara daha sonra §21.4, §§23.7, 8'de geleceğiz), Weyl'in kuramı aynı türdeki farklı parçacıklar arasındaki zorunlu biçimdeki kesin özdeşlikle (*bkz.* §21.4) çelişir. Özelde, saat vurum sıklıklarıyla parçacık kütleleri arasında dolaysız bir ilişki mevcuttur. Daha sonra göreceğimiz üzere m durağan kütleli bir parçacık, h Planck sabiti ve c ışık hızı olmak üzere, bir mc^2h^{-1} doğal frekansına sahiptir. Böylece Weyl geometrisinde, yalnızca saat vurma sıklıkları değil fakat bir parçacığın *kütle*si de kendisine ilişkin geçmişe bağlı olacaktır. Buna göre, iki proton farklı geçmişlere sahiplerse bu durumda Weyl'in kuramına göre neredeyse kesin olarak farklı kütlelere sahip olur ve böylece de aynı türdeki parçacıkların *kesin biçimde* özdeş olmaları gerektiğini söyleyen kuantum mekaniksel kuralı çiğner (*bkz.* §§23.7, 8).

Bu, lanet olası bir gözlem olmasına rağmen, Weyl kuramının orijinal versiyonuyla ilgili olarak daha sonra, onun "ayar"ı (λ tarafından yapılan) *gerçel* ölçeklemeye değil de bir *birim modüllü karmaşık sayı* ($e^{i\theta}$) tarafından yapılan ölçeklemeye atfediliyorsa, bu durumda aynı fikrin geçerli olacağı fark edildi.[4] Bu, tuhaf bir fikir gibi görünebilir fakat 21. bölüm ve sonrasında göreceğimiz üzere *kuantum mekanik* kuralları bize, bir sistemin durumunun tanımlanmasında karmaşık sayıların kullanımını dayatır. Özellikle, bu "kuantum durumu"nu, sıklıkla Ψ olarak değinilen durum, yerel olarak gözlemlenebilir herhangi bir sonuç olmaksızın çarpabilen birim modüllü bir $e^{i\theta}$ karmaşık sayısı mevcuttur. Bu "gözlemlenebilir olmayan" $\Psi \longmapsto e^{i\theta}\Psi$ yer değişikliği bugün hâlâ, artık uzunluk ölçeğine dahil edilen herhangi bir değişiklik, bu değişiklik karmaşık düzlemdeki (uzay ya da zaman boyutlarından herhangi biriyle dolaysız hiçbir bağlantısı olma-

[4] *Bkz.* Weyl, 1928, s. 87–88, çevirisinde s. 100–101. Bu gözlem ayrıca bağımsız biçimde W. Gordon tarafından ve Pauli ve Heisenberg tarafından da yapıldı; *bkz.* Pais, 1986, s. 345.

yan bir karmaşık düzlem) bir döndürme olmak üzere, olmasa dahi, bir "ayar dönüşümü" olarak adlandırılmaktadır. Tuhaf şekilde çarpıtılmış bu biçimde, Weyl'in fikri 15. bölümün sonunda örneklediğim türdeki bir U(1) bağlantısına ilişkin uygun fiziki kurulumu sağlar ve o artık elektromanyetik alanın gerçekte nasıl etkileştiğine ilişkin modern tabloya ait temeli oluşturur. Üstte, elektromanyetik potansiyelden yola çıkarak tanımlanan ∇ işlemcisi (diğer bir deyişle $\nabla_a = \partial/\partial x^a - ieA_a$) yüklü ψ kuantum dalga fonksiyonları demeti üzerinde bir U(1) demet bağlantısı sağlar (*bkz.* §21.9).

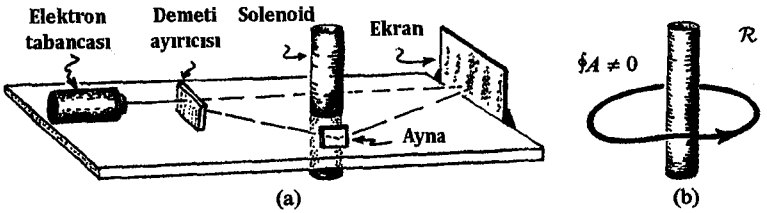
Bağlantıya ilişkin (Şekil 19.5'te gösterilmiş olan yol bağımlılığıyla kıyaslayabileceğimiz) yol bağımlılığının deneyle ilgili belirli türdeki durumlarda, *Aharonov–Bohm etkisi* olarak bilinen şeyi[5] göstererek çarpıcı bir biçimde belirmesi ilginçtir. ∇ bağlantımız yalnızca kuantum olguları düzeyinde geçerli olduğundan bu yol bağımlılığını klasik deneylerde görmeyiz; Aharonov–Bohm etkisi bunun yerine *kuantum girişimine* dayanır (*bkz.* §21.4 ve Şekil 21.4). En iyi bilinen türünde, elektronların, elektromanyetik alandan yoksun ($\boldsymbol{F} = 0$) fakat birbirinden (manyetik kuvvet çizgileri içeren) silindir biçimli uzun bir solenoid tarafından ayrılmış iki bölge içinden geçerek arkada bulunan algılayıcı bir ekrana ulaşması hedeflenir (*bkz.* Şekil 19.6a). Elektronlar hiçbir aşamada sıfır olmayan herhangi bir $\boldsymbol{F}$ alanıyla karşılaşmaz. Bununla birlikte (kaynaktan başlayıp solenoidin her iki tarafından geçecek şekilde ikiye ayrılarak ekranda yeniden birleşen) ilgili alan serbest $\mathcal{R}$ bölgesi basit–biçimde–bağlı değildir ve $\mathcal{R}$ dışındaki $\boldsymbol{F}$ alanı, kendisiyle ilgili olarak $\boldsymbol{A}$ potansiyelinin $\mathcal{R}$ içindeki her yerde yok olduğu hiçbir ayar seçiminin olmayacağı şekildedir. Bu sıfır olmayan potansiyelin basit–biçimde–bağlı–olmayan $\mathcal{R}$'deki varlığı, ya da daha doğru olarak ∇'nın $\mathcal{R}$'deki yol bağımlılığı, ekrandaki girişim saçaklarında bir yer değiştirmeye yol açar.

Aslında saçak kaydırma etkisi $\boldsymbol{A}$'mn sahip olabileceği herhangi belirli bir yerel değere değil (olamaz çünkü üstte belirtildiği üzere $\boldsymbol{A}$ yerel olarak gözlemlenebilir değildir) fakat $\boldsymbol{A}$'nın yerel olmayan belirli bir integraline bağlıdır. Bu, $\mathcal{R}$ içerisinde toplojik olarak önemsiz olmayan bir döngü etrafında alman $\oint \boldsymbol{A}$ niceliğidir. *Bkz.* Şekil 19.6b. d$\boldsymbol{A}$ $\mathcal{R}$ içerisinde yok olduğundan (çünkü $\mathcal{R}$'de $\mathbf{F} = 0$'dır) $\oint \boldsymbol{A}$ integrali, $\mathcal{R}$ içindeki kapalı döngü etrafında sürekli biçimde hareket edersek etkilenmemiş olarak kalır.[19.11] Buradan

---

[5] *Bkz.* Aharonov ve Bohm, 1959. Aslında bu etki 10 yıl önceden Ehrenberg ve Siday, 1949, tarafından belirtilmişti. Deneysel olarak Chambers, 1982, tarafından doğrulandı ve daha ikna edici biçimde Tonomura, 1986, tarafından oluşturuldu.

[19.11] Bunu açıklayın.



Şekil 19.6 Aharonov–Bohm etkisi. (a) Bir elektron demeti, (uzun bir solenoid yoluyla elde edilen) manyetik akışa ilişkin çizgiler toplamının her iki tarafına giden iki yola ayrılır. Demetler bir ekranda bir araya getirilir ve sonuçtaki kuantum girişim örüntüsü, elektronların yalnızca bir sıfır alan kuvvetiyle ($F = 0$) karşılaşmış olmaları gerçeğine karşın, manyetik akış kuvvetine bağlı olur. (b) Etki $\oint A$'nın, topolojik olarak önemsiz olmayan ilgili kapalı yolda, F'nin bu yol üzerinde kayboluşuna karşın, sıfır olmayabilen değerine bağlıdır. $\oint A$'nın değeri alan serbest bölge içindeki sürekli deformasyonlarla ilgili olarak değişmez halde kalır.

hareketle, alan serbest bir bölge içinde $\oint A$'nın ve bu yüzden Aharonov–Bohm etkisinin kendisinin yok olmayışı, bu alan serbest bölgenin topolojik olarak önemsiz olmayışına bağlıdır.

Weyl'in (orijinal olarak yol bağımlı bir "ayarlama" biçiminde bir rol oynayan) çarpıcı fikrindeki tarihi kökenleri nedeniyle bu elektromanyetik ∇ bağlantısına, bir *ayar* bağlantısı deriz ve bu isim ayrıca modern parçacık fiziğindeki zayıf ve yeğin etkileşimlerin her ikisinin tanımında da kullanılan, "Yang–Mills" kuramı olarak anılan elektromanyetizmaya ilişkin genellemelerle ilgili olarak da benimsenir. Kesin konuşacak olursak, "ayar bağlantısı" fikrinin gerçekten *kesin* ve dolaysızca gözlenebilir olması gereken (kendisi için elektromanyetizmanın $\Psi \mapsto e^{i\theta}\Psi$ simetrisi olduğu) bir simetrinin varlığına dayandığını belirtiriz. Weyl'in orijinal ayar fikrine Einstein'ın, aslında bir parçacığa ilişkin kütlenin (ve buradan doğal frekansının) dolaysızca ölçülebilir olup gerekli anlamdaki bir "ayar alanı" olarak kullanılamayacağına yönelik itirazını anımsayalım. Daha sonra bu konunun, "ayar" fikrine ilişkin bazı modern kullanımlarda belirgin biçimde bulanıklaştırıldığını göreceğiz.

19.5 Enerji momentum tensörü

İlgimizi temel diğer klasik alana, diğer bir deyişle kütleçekim alanına, "ayar kuramı" görünümleriyle birlikte çevirmek üzere bir ön koşul olarak öncelikle bir alana ilişkin *enerji yoğunluğu* sorununu ele almak, bu yoğunluk kütleçekim kaynağı olmak üzere, önemli olacaktır. Einstein'ın ünlü $E = mc^2$ denklemi madde ve enerjinin temelde aynı şey olduğunu söylediği

(*bkz.* §18.6) ve Newton bizi daha önceden bilgilendirdiği üzere kütleçekimin kaynağı kütledir. Bu nedenle, bir alana ilişkin, örneğin Maxwell'inki, enerji yoğunluğunun nasıl açıklandığını ve bunun bir kütleçekim kaynağı olarak nasıl hareket ettiğini anlamamız gerekir. Einstein bize onun, bunu *enerji momentum tensörü* olarak bilinen bir tensör niceliği yoluyla gerçekleştirdiğini söyler. Bu, bir

$$\nabla^a T_{ab} = 0$$

"korunum denklemi"ni sağlayan $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$–değerli simetrik bir $\boldsymbol{T}$ (indis biçimi $T_{ab} = T_{ba}$) tensörüdür. (Bu bölümün geri kalanında $\partial/\partial x^a$ yerine kovaryant ∇_o uzayzaman türev işlemcisini kullanacağız. Buradaki alanlarımızın tümü yüksüz olduğundan daha önceki ifadelerimiz yüksüz olmaya devam edecek; ayrıca *bkz.* §19.2'nin son paragrafı, not 19.2 ve alıştırma [19.6].) Bu ifadeyi elektrik yüküyle ilgili $\nabla^a J_a = 0$ korunum denklemiyle karşılaştırabiliriz. T_{ab} üzerindeki ek indisin nedeni, korunan şeyin, enerji momentum, *skaler* elektrik yükünün aksine bir 4–(ko)vektör (§18.7'de ele alınan p_a enerji momentum 4–(ko)vektörü) niceliği olmasıdır. T_{ab}'nin fiziki kapsamını biraz daha ayrıntılı olarak açıklamak üzere eşdeğer $T^a_b = g^{ac}T_{cb}$ niceliğine geçmek, bir indis g^{ab} metrik tensörünün kullanımı yoluyla yükseltilmiş olmak üzere, uygun olur.[19.12] T^a_b niceliği, alan ve parçacıklardaki enerji ve momentuma ilişkin farklı tüm yoğunluk ve akışları bir araya toplar. Daha belirgin olarak standart bir Minkowski koordinat sisteminde T^0_b kovektörü 4–momentuma ilişkin yoğunluğu tanımlar ve üç kovektör T^1_b, T^2_b, T^3_b, bağımsız üç uzamsal yöndeki 4–momentum akışını sağlar. Bu durum J^a durumundakiyle, J^0 yük yoğunluğunu ve üç nicelik J^1, J^2, J^3, bağımsız üç uzamsal yöndeki yük akışını (diğer bir deyişle elektrik akım) sağladığı için, dolaysız biçimde benzerdir. Bize korunum yasamızın artık bir (ko–)vektör niceliğine karşılık geldiğini söyleyen şey ek b indisidir. T_{00} niceliğinin enerji yoğunluğunu ve T_{11}, T_{22}, T_{33}'ün uzamsal koordinat ekseninin üç yönündeki *basıncı* ölçtüğü açığa çıkar.

Maxwell'in bize öğrettiği üzere elektromanyetik alanların kendilerinin enerji taşıdığını anımsayın. Elektromanyetik alana ilişkin enerji momentum tensörünün indisli notasyonda

$$\frac{1}{8\pi}(F_{ac}F^c_b + {}^*F_{ac}\,{}^*F^c_b)$$

[19.12] g_{ab} bileşenlerinin (1, –1, –1, –1) biçimine sahip olduğu yerel bir Minkowskici sistemde tekil T^a_b bileşnleri T_{ab}'yle nasıl ilişkilenir?

biçiminde olduğu ortaya çıkar.[19.13] Diğer fiziki alanlar da ayrıca kendi enerji momentum tensörlerine sahiptir ve bu tür pek çok farklı katılım bütünsel $\boldsymbol{T}$ enerji momentum tensörünü vermek üzere, $\nabla^a T_{ab} = 0$ *korunum* denklemini sağlayarak, bir arada toplanmak durumundadır.

Bununla birlikte, birazdan göreceğimiz üzere kütleçekimin kendisine ilişkin enerji momentumla ilgili oldukça farklı bir şey ortaya çıkar. Kütleçekim yokluğunda, uzayzaman düzdür (Minkowski uzayı) ve düz (Minkowskici) koordinatlar kullanabiliriz. Böylece $T_0^a, T_1^a, T_2^a, T_3^a$ dört vektöründen her biri bireysel olarak J^a'nın sağladığıyla ($\nabla^a T_0^a = 0$, vb, $\nabla_a J^a = 0$'a benzerdir) tam olarak aynı olan korunum denklemini, enerji momentuma ilişkin 4 bileşenin ayrı ayrı her biriyle ilgili olarak yükünkine tam olarak benzer (diğer bir deyişle $\int_Q {}^*J = 0$'a benzer) bir *integral* korunum yasasının var olduğu imasıyla birlikte, sağlar. Bu nedenle toplam kütle ve toplam momentumun üç bileşeni korunur. Yine de 17. bölümde verilmiş olan Einstein'ın eşdeğerlik ilkesi tartışmasını ve bunun niçin bizi eğik bir uzayzamana yönlendirdiğini anımsayın. Böylece kütleçekim var olduğunda, "∇_a"nın daha fazla basitçe "$\partial/\partial x^a$" olmadığı gerçeğini hesaba katmak zorundayız fakat (§14.3 uyarınca) "$\nabla_a T_0^a$"ın anlamını karıştıran ve bizi kesinlikle yalnızca $\nabla_a T_{ab} = 0$ "korunum denklemi"mizden enerji ve momentumla ilgili bir integral korunum yasası türetmekten alıkoyan ek Γ_{ac}^b terimleri mevcuttur. Sorun, T_{ab}'deki ek b indisinin, onun bir 3–biçimlinin ikiliği olmasını engellemesi gerçeği olarak nitelenebilir ve bir "korunum denklemi"ne ilişkin ("d ${}^*J = 0$'daki ${}^*J$ 3–biçimlisinin dışsal türevinin yok oluşu gibi) koordinat bağımsız bir denklem yazamayız. Fiziğe ilişkin en kritik korunum yasalarını, enerji ve momentumun korunum yasalarını kaybetmiş görünüyoruz!

Aslında enerji/momentum korunumu üzerine, Minkowski uzayına olduğu gibi ayrıca belirli eğik $\mathcal{M}$ uzayzamanlarıyla da ilgili daha tatmin edici bir bakış açısı mevcuttur ve bu ayrıca açısal momentum korunumunda da (*bkz.* §18.6 ve §§22.8, 11) geçerlidir. Bu bakış açısıyla ilgili olarak $\mathcal{M}$'yle ilgili ona ait bir *sürekli simetri* tanımlayan $\boldsymbol{\kappa}$ *Killing vektörü*ne (bu $\nabla_{(a}\kappa_{b)} = 0$'ı sağlar; *bkz.* §14.8) sahip olduğumuzu düşünün. Minkowski uzayında, 4'ü bağımsız *ötelemeli* simetriyle (3 uzay ve 1 zaman) ve 6'sı bağımsız uzayzaman *döndürmesi*yle (O(1, 3) Lorentz grubunun yansımalı olmayan kısmı) ilgili olan bu tür 10 bağımsız simetri mevcuttur. *Bkz.* Şekil 18.3b. Böylece, Minkowski uzayı bağımsız 10 Killing vektörüne sahiptir.

[19.13] Bunun, $J = 0$ olduğunda $\nabla^a T_{ab} = 0$ korunum denklemini sağladığını gösterin. Bu tensörün 00 bileşenini elde edin ve Maxwell'in orijinal $(E^2 + B^2)/8\pi$ ifadesini, elektromanyetik bir alana ait enerji yoğunluğuyla ilgili olarak (E_1, E_2, E_3) ve (B_1, B_2, B_3) biçiminde düzeltin.

Bir sonraki bölümde rastlayacağımız üzere Lagrange formalizmi (Noether teoremi) bize, sistemin kurallarının sahip olduğu her bir sürekli simetriden bir korunum yasası türetmemize izin verir. Zaman ötelemeli simetri enerji korunumuna olanak sağlarken uzay ötelemeli simetri 3–momentum korunumuna olanak sağlar. Dönel simetri açısal momentumu verir. (Olağan uzamsal döndürmeler bize olağan açısal momentumun 3 bileşenini verir fakat ayrıca Lorentzci artışlardan gelerek bizi bir hızdan diğerine götüren 3 bileşen daha mevcuttur. Bunlar bize kütle merkezi hareketinin korunumunu verir; *bkz.* §18.6, 7, Şekil 18.16.) Herhangi belirli bir $\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektöründen uygun korunum yasasını elde etmek üzere, simetrik T_{ab}'nin $\nabla^a T_{ab} = 0$'ı sağladığı her durumda $\nabla_a L^a = 0$ korunum yasasını sağlayan,

$$L_a = T_{ab}\kappa^b$$

akış yasasını oluştururuz.[19.14] Bu nedenle, §19.3'te olduğu üzere, bir $\int_Q {}^*\boldsymbol{L} = 0$ integral korunum yasası mevcuttur.

Bu korunum yasaları yalnızca, kendisiyle ilgili $\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektörünce verilen uygun bir simetrinin mevcut *olduğu* bir uzayzamanda geçerlidir. Fiziki olarak bunun nedeni uzayzaman geometrisindeki alanlardan, diğer bir deyişle kütleçekimden, ayrışmış olmasıdır. Uzayzaman geometrisi yalnızca bir ardalan olarak hizmet verir, böylece kendi içindeki alanlar tarafından rahatsız edilmemiş olarak kalır; dahası, alanlar söz konusu niceliği simetri nedeniyle ardalandan çıkaramaz (ya da ardalana kaptıramaz). Bu değerlendirmeler bizim için daha sonra, özellikle 30. bölümde (§§30.6, 7) önemli olacak. Yine de bunlar bize korunum yasalarının akıbetinin, kütleçekimin kendisi aktif bir oyuncu haline geldiğinde gerçekten ne olacağını anlamamızda yardımcı olmaz. Kütleçekim tabloya girdiğinde enerji ve momentuma ilişkin kayıp korunum yasalarımızı hâlâ geri kazanmış değiliz.

Bu tuhaf görünümlü gerçek, genel göreliliğin ilk günlerinden beri bu kurama ilişkin en şiddetli itirazlardan bazılarını ve ona ilişkin, yıllar içinde pek çok fizikçi tarafından ifade edilen huzursuzluk sebeplerini gündeme getirdi.[6] Daha sonra §19.8'de, aslında Einstein'ın kuramının enerji momentum korunumunu görece daha karışık bir şekilde, en azından bu tür bir korunum yasasının en çok gerekli olduğu koşullarda hesaba kattığını göreceğiz. Şimdilik Einstein'ın kuramındaki, kendisinin alan denkleminde

---

[19.14] Neden? Bu işlem niçin üstteki $\nabla_a T_0^a = 0$, vb'ye özelleşir? Çarpışmalarda 4–momentumun korunduğu ayrık bir parçacık sistemiyle ilgili olarak, $\nabla^a(T_{ab}\kappa^b) = 0$ sürekli alan korunum yasasına ilişkin bir benzer bulabilir misiniz? *İpucu*: Verili κ^a Killing vektörüyle birlikte, çarpışmalar arasındaki her parçacık için sabit olan bir nicelik bulun.

[6] *Bkz.* Pais, 1982.

görünen $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$–değerli simetrik $\boldsymbol{T}$ tensörünün kütleçekimle ilgili *olmayan* tüm alanların (ya da parçacıkların) enerji momentumunu içerdiği gerçeğini not edelim. Kütleçekim alanının kendisinde ne tür bir enerji mevcut olursa olsun, $\boldsymbol{T}$ içerisinde herhangi bir gösterime sahip olmaktan alıkonur.

Bu bakış açısı, yine eşdeğerlik ilkesini düşündüğümüzde bir biçimde mantıklı hale gelir. Serbest bir yörüngedeki bir gözlemciyi, diyelim ki penceresiz bir uzay gemisinde, en azından ilk yaklaşıklık tahmini için hiçbir kütleçekim alanının mevcut olmadığı görünecek şekilde düşünün. Bu gözlemci enerjinin gemi içerisinde korunduğunu ve bu nedenle $\nabla^a T_{ab} = 0$ denkleminin orada kütleçekim alanından kaynaklı herhangi bir katkı olmaksızın geçerli olmasını bekler. Bununla birlikte bu "korunum" yalnızca, göreli ivme (gelgit) etkileri, kütleçekim alanının (§17.5'te çalışıldığı üzere, *bkz.* şekiller 17.8a, 17.8b ve 17.9) düzenli olmayışı nedeniyle bir role sahip olmaya başlar başlamaz düzeltilmeye gerek duyması beklenen bir yaklaşıklık tahminidir. Tümüne ilişkin sonuç $\boldsymbol{T}$ niceliği ve ona ilişkin $\nabla^a T_{ab} = 0$ denkleminin kütleçekim alanına ilişkin düzenli olmayış tarafından rahatsız edilmemiş, diğer bir deyişle $\boldsymbol{\nabla}$ uzayzaman bağlantısına ilişkin $\boldsymbol{R}$ eğrisince rahatsız edilmemiş olarak kalması gerektiği ve kütleçekimin enerji momentum korunumuna katkılarının toplam enerji momentum hesaplamasına düzeltmeler olarak *yerel olmayan biçimde* bir şekilde girmesi gerektiğidir. (Bu yorumun gerçek tek istisnası, bize fiziki alanların $\boldsymbol{T}$'ye nasıl katıldığını söyleyen o matematiksel ifadelere ilişkin uzayzaman eğriliği düzeltmelerinin tasarlanmasına gerek duyulduğunda ortaya çıkabilir. Normalde bu tür hiçbir düzeltme yoktur ve bu durum buradaki değerlendirmelerimizle ilgili olarak önemli bir konu değildir.) Bu bakış açısıyla, enerji momentuma kütleçekimle ilgili yapılan katkılar, bir anlamda, *toplam* enerji momentuma ilişkin bir integral korunum yasasını *yerel* $\nabla^a T_{ab} = 0$ denkleminden ayıran "çatlakların içine doğru kayar".

19.6 Einstein'ın alan denklemi

Bu konuya §19.8'de döneceğim fakat şimdilik Einstein'ın alan denklemine ilişkin gerçek biçimi bilmeye gerek duyacağız. Bu denklem, artık okuyucunun çok fazla sıkıcı bulmayacağı (umarım!) *tensör* formalizmi biçiminde ifade edilir. Tensörlere o uzayzamanda, 4–boyutta gerek duyulmasının nedeninin bir kısmı karışık bir konudur. §17.5'te dünyanın kütleçekim alanında serbestçe dolanan astronotumuz Albert'i anımsayın. A'dan çıkan çeşitli yönlerde içe doğru olan ivmeler ve diğer yönlerde de dışa

doğru olan ivmeler söz konusudur. Bunlar A tarafından deneyimlenen *gelgitle ilgili* kuvvetleri gösterir. Gelgitle ilgili kuvvetler uzayzaman eğriliğine ilişkin anlatımdır. Bu karışık etkileri bir araya toplamak üzere, boş uzayda bağımsız 10 ve ayrıca etrafta kütle yoğunluğu olduğunda toplam 20 bileşene sahip R_{abcd} bileşenli bir tensör niceliği kullanılır. Aslında R_{abcd} basit olarak, daha önce §14.7'de karşılaştığımız $\boldsymbol{R}$ Riemann (–Christoffel) tensörünün indisli biçimidir.

Bununla birlikte tek başına düzenleyici karışıklıktan farklı olarak, tensör analizinin Einstein'ın kuramında temel bir rol oynamasına ilişkin başka bir neden mevcuttur. Bu durum, Einstein'ın tüm düşünüş hattını başlatan kurucu *eşdeğerlik ilkesi*ne kadar geriye gider. Kütleçekim bir kuvvet olarak değerlendirilmez çünkü serbest biçimde düşen bir gözlemciye göre (örneğin astronotumuz A) hissedilen hiçbir kütleçekim kuvveti yoktur. Kütleçekim bunun yerine kendini uzayzaman eğriliği biçiminde gösterir. Şu halde bu fikir geçerli olacaksa kuramda hiçbir "tercih edilmiş koordinat" olmaması önemlidir.[7] Çünkü belirli bir sınırlı koordinat sistemi sınıfı Doğanın tercih edilmiş seçimi olarak kabul edilseydi, bu durumda bunlar "kütleçekim kuvveti" kavramının kendisine göre yeniden ortaya konabildiği "doğal gözlemci sistemleri" tanımlar ve eşdeğerlik ilkesinin merkezi rolü ortadan kaybolurdu. Konu aslında oldukça hassastır ve pek çok fizikçi zaman zaman bundan o veya bu şekilde uzaklaşmıştır. Benim düşünüş biçimime göre, bu koordinat bağımsızlığı kavramının korunması Einstein kuramının özü bakımından temeldir. Bu, *genel kovaryans ilkesi* olarak adlandırılan şeydir. Bize yalnızca tercih edilmiş hiçbir koordinat olamayacağını değil aynı zamanda fiziki olarak ayrık iki kütleçekim alanını gösteren farklı iki uzayzamana sahip olduğumuzda ikisi arasında doğal biçimde tercih edilmiş hiçbir noktasal belirleme olamayacağını da söyler, öyleyse birine ait belirli bir uzayzaman noktasının diğerine ait belirli bir uzayzaman noktasıyla *aynı* olarak kabul edildiğini söyleyemeyiz! Einstein kuramının kuantum mekaniği ilkeleriyle nasıl ilişkilendiği hakkındaki bu felsefi konu bizi daha sonra (§30.11) ilgilendirecek. Şimdilik genel kovaryans ilkesinin bizim için önemi bizi kütleçekim fiziğini koordinat serbest

---

[7] Metindeki "hiçbir tercih edilmiş koordinat"a ilişkin gereksinim yalnızca muğlak değil fakat ayrıca oldukça kuvvetli birşey olarak değerlendirilebilen bir şeydir de. Düz uzayda örneğin, "Kartezyen koordinatları"na, burada Minkowski koordinatları, kendisiyle ilgili metriğin özellikle basit $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ biçimini aldığı (t, x, y, z)'dir, ilişkin seçimlerin diğer tüm koordinat sistemleri üzerinde "tercih edildiği" söylenebilir ve ayrıca kozmolojik modeller de metrik biçiminin içinde özellikle basit göründüğü özel koordinat sistemlerine sahiptir, *bkz.* §27.11, alıştırma [27.18]. Konu, görece, bu tür özel koordinatların oynayacak fiziki bir role sahip olmamasına ve onlara ait en doğal ifadelerin herhangi belirli bir koordinat seçimine bağlı olmamasına ilişkin daha hassas bir konudur.

bir tanımlamaya zorlamasıdır. En önemli olarak bu nedenledir ki tensör formalizmi Einstein'ın kuramında merkezidir.

Şimdi Einstein denkleminin gerçekte ne olduğunu görelim. Bu denklemin biçimi temel olarak iki ek gereklilik tarafından zorlanır: (i) (yerel) kütleçekim kaynağının aslında $\nabla^a T_{ab} = 0$'a bağlı enerji momentum tensörü $\boldsymbol{T}$ olması ve (ii) uygun *Newtoncı sınırda (ışığınkiyle kıyaslandığında küçük* hızlar ve zayıf kütleçekim alanları), Newtoncı standart kütleçekim kuramının düzeltilmesi. Newtoncı kuramda, bir gözlemcinin jeodezik γ dünya çizgisine komşu ya da başlangıçta paralel olan jeodezilerle ilgili hacim azaltıcı bir etkinin var olduğunu gördüğümüz §17.5'teki tartışmaya geri dönmek zorundayız. Bu komşu jeodeziler γ'ya göre, içerdikleri (sonsuz küçük) uzaysal δV *3–hacimleri*nin $-4\pi G\delta M$'ye eşit bir toplam ivmeye sahip olacağı şekilde, δM jeodezilerce kapsanan (sonsuz küçük) hacim içindeki kütleçekimle ilgili etken kütle olmak üzere, ivmelenir. Eksi işaret, içerilenin bir hacim *azaltımı* olmasından kaynaklanır; *bkz.* Şekil 17.8b. Bu, Newton kuramının, bir kütle dağılımına ilişkin etken kütleçekim etkisiyle ilgili tam bir ifadesidir.

Bunu, $\boldsymbol{R}$ uzayzaman eğriliğini $\boldsymbol{T}$ enerji momentum tensörüyle ilişkilendiren bir denkleme nasıl çevirmeliyiz? Geometrik olarak kilit gerçek, hacmin bu durumda ortaya çıkan içe doğru olan ivmesinin *Ricci tensörü* olarak adlandırılıp, R_{abcd} Riemann tensörü olmak üzere,

$$R_{ab} = R_{acb}{}^{c}$$

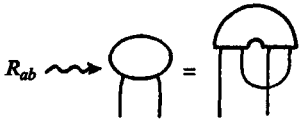
ifadesiyle tanımlanan $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$–değerli simetrik bir tensör tarafından ölçülmesidir.[19.15] (Bununla ilgili diyagram biçimli notasyon için *bkz.* Şekil 19.7.) Yine işaretler, indis düzenleri, imzalar, vb'yle ilgili olarak sayısız farklı uzlaşı mevcuttur. Daha önce olduğu gibi okuyucuya kendi tercihlerimi dayatıyorum; *bkz.* §14.4. Daha belirgin olarak, hacme ilişkin (durağan durumdan başlayan) ivme

$$\mathbf{D}^2(\delta V) = R_{ab}t^a t^b \delta V$$

ifadesince verilir.[19.16] Burada $\mathbf{D}$, gözlemciye ait γ dünya çizgisi üzerinde, gözlemcinin uygun *zaman*ına (*bkz.* § 17.9) göre değişim oranını gösterir. t^a, γ'ya gelecek zamansal birim vektör tanjantı olmak üzere (böylece $t^a t_a = 1$'dir),

[19.15] R_{ab} niçin simetriktir?

[19.16] Bunu, Ricci özdeşliği ve Lie türevinin özelliklerini kullanarak kanıtlayabilir misiniz bakın.



Şekil 19.7 $R_{ab} = R_{acb}{}^{c}$ Ricci tensör tanımıyla ilgili diyagram biçimli notasyon.

$$\mathbf{D} = t^a \nabla_a = \frac{\Delta}{t}$$

ifadesine sahip oluruz.

Kütle yoğunluğu ($c = 1$'le birlikte "$E = mc^2$" uyarınca *enerji* yoğunluğuyla aynı), gözlemci tarafından ölçüldüğü üzere, gözlemcinin bulunduğu yerel çerçevedeki T_{ab}'nin "00 bileşeni"dir. Bu yalnızca, $T_{ab}t^a t^b$ niceliğidir, böylece komşu jeodeziler tarafından kapsanan δV hacmi içindeki δM kütlesi

$$\delta M = T_{ab} t^a t^b \delta V$$

olur. Bu nedenle madde yoğunluğundan kaynaklı hacim ivmesiyle ilgili $-4\pi G\delta M$ (§ 17.5) "Newtoncı beklentisi"

$$-4\pi G T_{ab} t^a t^b \delta V$$

olur. Bununla birlikte az önce uzayzaman eğriliğinden kaynaklanan hacim ivme etkisinin $R_{ab}t^a t^b \delta V$ olduğunu gördük, öyleyse bu durumda,

$$R_{ab} t^a t^b \delta V = -4\pi G T_{ab} t^a t^b \delta V$$

beklentisine ulaşırız. δV'yle bölerek ve bunun aynı olay içindeki *tüm* gözlemciler için geçerli olduğunu fark ederek, böylece $t^a t^b$'yi çıkarabiliriz,[19.17] aslında Einstein'ın başlangıç önermesi olan,

$$R_{ab} = -4\pi G T_{ab}$$

önerilmiş alan denklemine ulaşırız. Yine de bu yeterli değildir çünkü $\nabla^a T_{ab} = 0$ "korunum denklemi" şimdi bizi sonuçta tehlikeye yol açan $\nabla^a R_{ab} = 0$'a yöneltir!

Tehlike nedir? §14.4'ten *Bianchi özdeşlik* denkleminin $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = 0$ olduğunu anımsayın. Bu denklemin bir karşıtımı alarak, *Ricci skaleri* (ya da, "$-R$" pozitif belirli durumla ilgili çoğu matematiksel uzlaşıyla daha uyumlu olsa da, *skaler eğrilik*)

$$R = R_a{}^a$$

[19.17] Tüm $t^a s$'leri niçin kesip atabildiğimizi, tensörlere ilişkin simetrinin rolünü açıklayarak gösterin.

ifadesiyle (*R tüm* eğrilik tensörü yerine kullanılan koyu renk yazılan ***R***'yle karıştırılmamalıdır) tanımlanmak üzere,

$$\nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) = 0$$

ifadesini elde ederiz.[19.18] Yukarıda ileri sürülmüş $R_{ab} = -4\pi G T_{ab}$ denklemiyle ilgili "tehlike", daraltılmış Bianchi özdeşliğiyle birleştiğinde, enerji momentum tensörüne ilişkin,

$$T = T_a{}^a$$

ifadesiyle tanımlanan *iz* T'nin uzayzaman boyunca *sabit* olmak zorunda olduğu sonucuna yöneltmesidir.[19.19] Bu, sıradan (kütleçekimle ilgili olmayan) fizikle apaçık şekilde çelişki içindedir. Bu nedenle Einstein, tutarlılık adına, $\nabla^a(\ldots) = 0$ "korunum denklemi"ni sağlayan iki tensörün (sabit bir çarpanla) *eşitlenmesi* gerektiği sonucuna vardı (1915'te) ve şimdi *Einstein'ın alan denklemi* olarak bildiğimiz şeyle ortaya çıktı:[8, 19.20]

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = -8\pi G T_{ab}.$$

Maddenin (elektromanyetik alan da dahil) var olmadığı belirli durumda $T_{ab} = 0$'a sahip oluruz. Bu *vakum* olarak adlandırılır. Einstein'ın denklemi, *vakum denklemi*, yeniden

$$R_{ab} = 0$$

olarak yazılabilecek şekilde[19.21] $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0$ haline gelir. Yok olan Ricci tensörlü bir uzay bazen *Ricci–düzlüğü* olarak adlandırılır.

19.7 Daha başkaca konular: kozmolojik sabit; Weyl tensörü

Bu noktada, Einstein'ın 1917'de önerdiği *kozmolojik sabit* olarak adlandırılan ek bir terimi ele almalıyız. Bu, gerçek varlığı modern kozmolojik gözlemlerle kuvvetli biçimde ortaya konan fakat 0'dan 10^{-55} cm^{-2} civarındaki çok küçük miktardan daha fazla bir farklılık göstermeyen son derece küçük Λ sabit niceliğidir. Kozmolojik ölçeklere erişilene kadar dolay-

[19.18] İsterseniz bunu, diyagram biçimli notasyonu kullanarak gösterin.

[19.19] Niçin?

[8] *Bkz.* Stachel, 2002, s. 353–364.

[19.20] $-8\pi G$ katsayısını $-4\pi G'$yle kıyaslayarak açıklayın.

[19.21] Niçin?

sız gözleme dayalı bir anlamı yoktur. Üstteki ifadede bulunan $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ niceliği buradan hareketle $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda R_{ab}$ ifadesiyle değiştirilir. Bu, Λ sabit olduğundan (ve $\nabla \mathbf{g} = 0$), "korunum denklemini" hâlâ sağlar. Einstein denklemi artık

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda R_{ab} = -8\pi G T_{ab}$$

şeklindedir.

Einstein başlangıçta bu ek terimi, kozmolojik ölçekte uzamsal olarak - *statik* bir kapalı evren olasılığına sahip olmak üzere ortaya koydu.[9] Bununla birlikte evrenin genişlediği, böylece statik *olmadığı*, Edwin Hubble'ın 1929'daki gözlemleriyle açık hale geldiğinde Einstein, kozmolojik sabite olan desteğini, bunun "en büyük hatası" olduğunu ileri sürerek (belki de aksi halde evrenin genişlediğini öngörmüş olabilecekti!) geri çekti. Yine de bir kez ileri sürülen fikirler kolay kolay ortadan kaybolmaz. Kozmolojik sabit, Einstein onu ilk ileri sürdüğünden beri, bazılarında kaygı ve diğer bazılarındaysa avuntuya neden olarak kozmoloji kuramının ardalanında asılı kaldı. Oldukça yakın zamanda uzak süpernovalara ilişkin gözlemler çoğu kuramcıyı Λ, ya da "kara enerji" biçiminde adlandırılan benzer bir şeyi, bu gözlemleri algılanmış olan diğer gerekliliklerle tutarlı hale getirmenin bir yolu olarak yeniden ileri sürmeye yöneltti.[10] Kozmolojik sabit konusuna daha sonra yeniden döneceğim (özellikle *bkz.* §28.10). Kendi adıma, çoğu görelilik kuramcısıyla ortak biçimde, normalde sıfır olmayan bir Λ'nın denklemlerdeki olasılığına izin vermeme rağmen, Doğanın bu terimi kullanma eğiliminde oluşunu kabul etmekte isteksizdim. Bununla birlikte §28.10'da göreceğimiz üzere, pek çok yeni kozmolojik kanıt bu doğrultuyu işaret eder görünmektedir.

Einstein'ın (kozmolojik sabiti içeren) alan denklemini ayrıca ters biçimde de yazabiliriz:[19.22] $R_{ab} = -8\pi G\left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right) + \Lambda g_{ab}$. Yerel bir koor-

---

9 Einstein'ın modeli §31.16'da ele alacağımız $S^3 \times E^1$ topolojili $\mathcal{E}$ uzayıdır.

10 Einstein'ın ortaya koyduğu kozmolojik terim, yıllar önce ileri sürülmüş genel görelilikle ilgili orijinal kuramın geliştirilmiş sayısız örneklerinden biridir. §19.4'te tartışılan Weyl kuramına ve §31.4'te değinilen, bugünlerde genellikle süpersimetriyle birleştirilen, *bkz.* §§31.2, 3, yüksek-boyutlu Kaluza-Klein fikirlerine ek olarak içinde ek bir skaler alan bulunan Brans-Dicke geliştirmesi mevcuttur ve Einstein'ın bir "birleşik alan kuramı"na ilişkin kendi sayısız girişimi 1925 ve 1955 arasındaki zaman zarfında ortaya konmuştur. *Bkz.* Einstein, 1925; Einstein, 1945; Einstein ve Straus, 1946; Einstein, 1948; Einstein ve Kaufman, 1955; Schrödinger, 1950; daha yeni bir kaynak için *bkz.* Antoci, 2001. Bu önermelerin çoğu elektromanyetizmayla belki diğer alanları genel göreliliğin toplam yapısında birleştirme niyetindeydi. İçinde bir torsiyonun ortaya konduğu, §14.4, ve bir spin yoğunluğuna, §22.8, ilişkin dolaysız bir kütleçekim etkisini tanımlamak üzere ele alınan Einstein-Cartan-Sciama-Kibble kuramı biçiminde adlandırılan kuram da ayrıca dikkate değerdir.

[19.22] Niçin?

dinat sistemini t^a'yla verilen zaman ekseniyle birlikte, bunu $t^a t^b$'yle daraltmanın 00–bileşenini vereceği şekilde kullanarak hacme ait içe doğru olan ivmenin $8\pi G(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00})$'la verildiğini görürüz; bu da P_1, P_2 ve P_3 (ortogonal) üç uzamsal eksen boyunca yer alan maddeye ilişkin *basınç* değeri olmak üzere, $4\pi G(\rho + P_1 + P_2 + P_3) - \Lambda$'dır. Gelin şimdi, *kütleçekimle ilgili etken kütle*ye ilişkin ρ_G yoğunluğunun, Einstein'ın genel göreliliğinde $\rho_G = \rho$ olmak yerine

$$\rho_G = \rho + P_1 + P_2 + P_3 - \frac{\Lambda}{4\pi G}$$

olduğunu, ilki "$E = mc^2$"den basit biçimde gelmesini bekleyebileceğimiz şey olmak üzere bularak, Newton'm kuramının ileri sürdüğü $4\pi G\delta M$'yle karşılaştırma yapalım. (Birimler $c = 1$ olacak şekilde seçilmiştir.) Λ katkısı son derece ufaktır ve aslında ek basınç terimleri de normalde enerjiyle kıyaslandığında oldukça ufaktır çünkü kabaca konuşursak söz konusu maddeyi oluşturan küçük parçacıklar, ışık hızıyla kıyaslandığında etrafta görece daha yavaş hareket eder. Bununla birlikte kütleçekimle ilgili etkin kütleye yapılan basınç katkısı, belirli uç koşullar altında önemli roller oynar. Çok iri kütleli bir yıldız, kendisine ait içe dönük kütleçekim etkisi altında çökme tehlikesinde bulunulan bir duruma yakın hale geldiğinde, yıldız içinde, yıldızın desteklenmesine yardım etmesini bekleyebileceğimiz artan bir basıncın, kütleçekimle ilgili ürettiği ek kütle nedeniyle çökme eğilimini aslında *arttırdığını* görürüz!

Üstte (§19.5) işaret edildiği üzere Einstein'ın kuramındaki T_{ab} enerji momentum tensörü Maxwell kuramındaki J_a yük akım vektörüne benzerdir. T_{ab} niceliği, J_a'nın elektromanyetizma kaynağını tanımladığı aynı biçimde kütleçekim *kaynağını* tanımlar biçimde değerlendirilebilir. *Kütleçekimle ilgili serbestlik derecesi*ni tanımlayan F_{ab} Maxwell alan tensörünün uygun benzerinin ne olabileceği sorusunu sorabiliriz? Yanıt, **A** elektromanyetik potansiyeline daha fazla benzeyen **g** metrik tensörü *değildir*. Bazıları tam Riemann eğrilik tensörü R_{abcd}'yi **F**'nin benzeri olarak değerlendirebilmekteler fakat Ricci tensör kısmı "çıkarılmış" tam Riemann tensörüne benzeyen ve *Weyl tensörü* (ya da *konformal* tensör) olarak adlandırılan C_{abcd}'yi seçmek daha uygun olur. Bu durum makuldur çünkü Ricci tensörü T_{ab} kaynağıyla yakın şekilde saptanabilir, öyleyse kütleçekim alanım dolaysız biçimde tanımlayan serbestlik derecesini saptamak istersek bu "serbestlik derecesi kaynağı"nı çıkarmamız gerekir. Maddenin olmadığı boş uzayda (ve basitlik adına Λ kozmolojik sabitini sıfır kabul edin), Weyl tensörü Riemann eğrilik tensörüne *eşit*tir fakat Weyl tensörü genellikle, Ricci tensör kısmını tam eğrilikten ayıran, bir şekilde karışık görünümlü

bir denklemle tanımlanır (§11.6'nın köşeli parantez notasyonundan tümüyle yararlanmak üzere iki indise yükseldim):[19.23]

$$C_{ab}{}^{cd} = R_{ab}{}^{cd} - 2R_{[a}{}^{[c}g_{b]}{}^{d]} + \frac{1}{3}Rg_{[a}{}^{c}g_{b]}{}^{d}.$$

§28.8'de Weyl tensörüne ilişkin kilit bir fiziki rolü göreceğiz. Bu niceliğin yok olması, uzayzamana ilişkin konformal düzlüğün koşuludur.

19.8 Kütleçekimle ilgili alan enerjisi

Kütleçekim alanının kendisi içindeki kütle enerji sorununa dönelim. $\boldsymbol{T}$ enerji momentum tensöründe bu tür bir şeye yer olmamasına rağmen "gövdesizleştirilmiş" kütleçekim enerjisinin aslında fiziki bir rol oynadığı durumların varlığı açıktır. Kütleye sahip iki cisim (gezegenler diyelim) düşünün. Birbirlerine yakınlarsa (ve birbirlerine göre anlık olarak durağan olduklarını varsayabiliriz), bu durumda toplam enerjiyi ve böylece toplam kütleyi birbirlerine uzak oldukları durumdakinden daha küçük hale getiren bir (negatif) kütleçekim potansiyel enerjisi mevcut olacaktır (*bkz.* Şekil 19.8). Örneğin her birinin, kütleçekimle ilgili gelgit alanı nedeniyle diğerinin biçimini bozması gibi çok daha küçük enerji etkilerini göz ardı edersek, gerçek $\boldsymbol{T}$ enerji momentum tensöründen gelen toplam katkının, iki cisim yakın da olsa ayrı da olsa aynı olacağını görürüz. Yine de, toplam kütle/enerji iki durumda farklılaşacaktır ve bu fark kütleçekim alanının

Şekil 19.8 Kütleçekimle ilgili potansiyel enerjinin yerelsel olmayışı. (Basitlik için birbirlerine göre anlık olarak durağan olduklarını varsayabileceğimiz) iki gezegen hayal edin. (a) çok uzaklar, böylece (Newtoncu) negatif potansiyel enerji (b) birbirlerine yakın oldukları durumdaki kadar büyük değil. Bu nedenle (a) durumundaki toplam enerji (ve buradan tüm sistemin toplam kütlesi), enerji momentum tensörlerince ölçülen toplam enerji yoğunluğunun aslında her iki durumda da aynı olmasına karşın (b) durumun-dakinden daha büyüktür.

[19.23] C'ye ilişkin tüm "izler"in yok olduğunu gösterin (*örn.* $C_{abc}{}^{d} = 0$, vb). Dilerseniz bu hesaplamayı diyagram biçiminde gerçekleştirin.

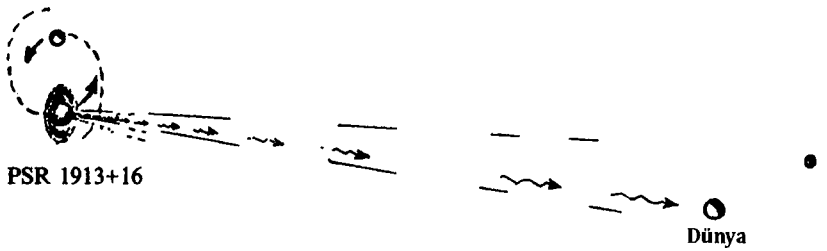
kendisinde bulunan enerjiye dayanır (aslında kütleler birbirlerine yakınken uzak oldukları durumdan daha boyutlu olan negatif bir katkı).

Şimdi cisimleri birbiri etrafındaki bir yörüngede hareket halinde olarak ele alalım. *Kütleçekimle ilgili dalgaların*, uzayzaman kumaşındaki dalgacıklar, sistemden yayılarak kendi dışına (pozitif) enerji taşıyacağı Einstein'ın alan denkleminin bir sonucudur. Normal şartlarda bu enerji kaybı çok küçük olacaktır. Örneğin güneş sistemimizdeki bu tür en büyük etki Jüpiter güneş sisteminden kaynaklanır ve enerji kaybının oranı yalnızca 40 watt'lık bir ampülün yaydığı kadardır! Bununla birlikte, örneğin birbirine doğru sarmal hareket halindeki iki kara deliğin son birleşimleri gibi daha iri kütleli ve azılı sistemlerle ilgili olarak enerji kaybının, halihazırda burada dünya üzerinde inşa edilmiş algılayıcıların, 15 megaparsek ya da yaklaşık $4{,}6\times10^{23}$ metre uzaklıktaki bu tür dalgaların varlığını kaydedebileceği denli büyük olması beklenir.

Joseph Taylor ve Russell Hulse'ın Nobel Ödülü kazanan takımca çalışılmış, PSR 1913 + 16 olarak bilinen dikkat çekici çift nötron yıldızının yaydığı kütleçekim dalgaları bu iki uç arasında yer alır; *bkz.* Şekil 19.9. (Bir nötron yıldızı, esas olarak birbirlerine, yıldızın toplam yoğunluğunun bir atom çekirdeğininkiyle kıyaslanabilir olduğu biçimde yakın olarak sıkıştırılmış nötronlardan oluşan son derece yoğun bir yıldızdır. Bu tür bir malzemeyle doldurulmuş bir tenis topu Mars'ın uydusu Deimos'la kıyaslanabilir bir toplam kütleye sahip olurdu!) Bu sistem 25 yıldan fazlaca bir süredir gözlemlenmektedir ve ayrıntılı hareketi büyük bir kesinlikle (yıldızlardan birinin oldukça kesin bir zamanlamayla, 17 saniyede bir elektromanyetik bir "sinyal" yayan bir *pulsar* olması nedeniyle olasıdır) izlenmektedir. Bu sinyallerin zamanlaması çok kesindir ve sistemin kendisi öylesine "temiz"dir ki gözlemle kuramsal beklenti arasındaki karşılaştırma Einstein'ın genel göreliliğine ilişkin yaklaşık 10^{14}'te birlik bir doğrulama sağlar, belirli bir sisteme ilişkin gözlemle kuram arasındaki bilimsel kıyaslamada eşi benzeri görülmemiş bir isabet. Bu figür 20 yıldan fazla bir süredeki toplam zamanlamaya ilişkin kesinliğe karşılık geliyor.[11]

Bu doğaya ve ayrıca §28.8'de ele alınacak etkileyici kütleçekim kırma etkisine ilişkin gözlemlerle, gözleme dayalı genel görelilik konunun ilk günlerinden bu yana uzunca bir yol kat etti. Bununla birlikte, 1915–1969 yılları arasında (1969, uzak kuasarlara ilişkin radyo gözlemlerinin genel

[11] Burada, Einstein'ın kuramının Newton'ınkini içerdiği kabul edilir ve "10^{14}" figürünün Newton'ın kuramı üzerinden bir isabet artışını göstermediği vurgulanmalıdır. Dahası, zamanlama isabetinin bir miktarının örneğin kütle, yörünge eğimi, dış merkezlik, vb gibi sistemin ayrıntılarını hesaplamakta gerekli olan, bilinmeyen parametreleri saptamaya ayrıldığı zihinde canlanmalıdır. "10^{14}" gerçekten tablonun toplam tutarlılığına ilişkin bir ölçüdür.



Şekil 19.9 Hulse–Taylor çift nötron yıldızı sistemi PDR 1913 + 16. Bir üye, dünyada algılanan kesin zamanlı elektromanyetik sinyaller göndererek yörüngelerin olağanüstü isabetle belirlenmesini sağlayan bir pulsardır. Sistemin, Einstein'ın bu tür sistemleri tarafından yayılan enerji taşıyıcı kütleçekim dalgalarına ilişkin öngörüsüyle kesin bir uyum içinde enerji kaybettiği gözlenir. Bu dalgalar, enerji momentum tensörünün kaybolduğu uzayzaman vakumundaki dalgacıklardır. (Ölçeksiz.)

göreliliğe ilişkin yeni bir test ailesi girişimini başlattığı yılı işaretlemek üzere[12]) kuramı destekleyen yalnızca, ünlü fakat karşılaştırmalı olarak etkileyici olmayan "üç test" mevcuttu. Bunların en önemlisi Einstein'ın Merkür gezegenine ilişkin "kuraldışı günberi gelişimi" açıklamasıydı. Bu, yarım yüzyıldan fazla zaman önce gözlenmiş Newtoncı kütleçekim kuramının öngörüsünden oldukça hafif bir sapmaydı (yüz yılda yalnızca 43 açısal saniye ya da 3 milyon yılda yaklaşık bir yörünge dönümü).[13] (*Bkz.* ayrıca §30.1ve §34.9.) Gözleme dayalı ikinci etki, Principe adasına (Batı Afrika kıyısı açıkları) yaptığı yolculukta Arthur Eddington tarafından 1919 güneş tutulması esnasında gözlenen, uzak bir yıldıza ait ışığın güneş tarafından hafifçe bükülmesiydi. Bu, üstte değinilen "kütleçekimle ilgili kırma" olgusunun aynısı olan, artık evrendeki kütle dağılımıyla ilgili önemli bilgiler elde etmek üzere yakın kozmolojik uzaklıklarda etkileyici biçimde kullanılan bir örnektir. (*Bkz.* §28.8.) Son olarak bir kütleçekim potansiyelindeki saat vurma sıklıklarının yavaşlamasına ilişkin Einstein kuramınca öngörülen durum söz konusu. Bu, 1925'te W.S. Adams tarafından Sirius'un arkadaşı olarak bilinen bir beyaz cüce yıldızla (güneşten birkaç bin kat daha yoğun bir yıldız) ilgili olarak geçici (ve kuşkulu) biçimde gözlendi. Çok daha ikna edici bir doğrulamaysa Pound ve Rebka tarafından dünyanın kendi kütleçekim alanıyla ilgili olarak 1960 yılında gerçekleştirilen hassas bir deneyle elde edildi. (Bununla birlikte bu etki, basit biçimde genel enerji ve temel kuantum değerlendirmelerinden beklenir ve Einstein kuramına iliş-

[12] D.S. Robinson ve iş arkadaşlarının "Very Long Baseline Interferometry" (Çok Uzun Anahat İnterferometresi) kullanarak elde ettikleri 1991 sonuçları, genel göreliliğe ilişkin ışık bükme etkisini artık 10^{-4} isabetine kadar doğrulamatadır.

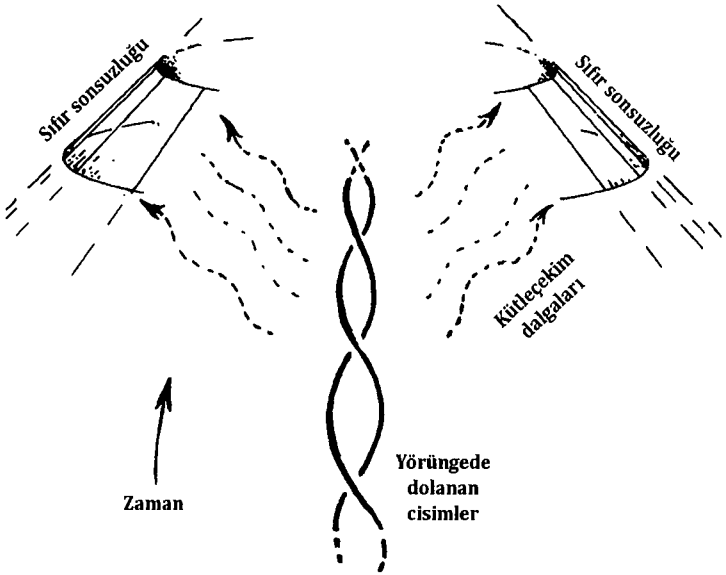
[13] Merkür'ün kuraldışı anomalisine ilişkin ayrıntılı bir açıklama için *bkz.* Roseveare, 1982.

kin oldukça zayıf bir testtir.) Ayrıca, ilk olarak (1964'te) Erwin Shapiro tarafından ileri sürülen ve daha sonra kendisi tarafından 1968–1971'de Merkür ve Venüs'e ilişkin gözlemlerle doğrulanan ve daha isabetli olarak (1971'de yüzde 0,1 kadar) Reasenberg ve Shapiro tarafından Mars etrafındaki bir yörüngede bulunan Viking uzay aracındaki sinyal aktarıcılar, Mars yüzeyinde bulunan biriyle kıyaslamalı biçimde kullanılarak doğrulanan, neredeyse tam olarak güneşin arka tarafında bulunan nesnelerden dünyaya ulaşan ışık sinyalleriyle ilgili farklı bir tür "zaman gecikme" etkisi vardır.

Açıktır ki Einstein'ın kuramı artık gözleme dayalı olarak çok iyi biçimde desteklenmektedir. Kütleçekimle ilgili dalgaların varlığı Hulse–Taylor gözlemlerince, bu, bu tür dalgalara ilişkin dolaysız bir saptama olmasa bile, açık biçimde doğrulanmış görünmektedir. Şimdilerde kütleçekim dalgalarının dolaysız biçimde saptanmasıyla ilgili olarak, bu tür dalgaları evrenin uzak kısımlarındaki azılı hareketlilikleri (örneğin kara delik çarpışmaları) derinlemesine araştırmakta kullanmak üzere dünya çapında kararlaştırılmış bir çabayı oluşturan çeşitli projeler mevcuttur. Aslında bu birleşik projeler[14], Einstein'ın kuramının uzak evreni araştırmak üzere bize hâlâ güçlü bir yöntem sağlama potansiyeline sahip olacağı şekilde, kütleçekimle ilgili bir dalga teleskobu sunacaktır.

Bazılarının enerji korunumuyla ilgili kaygılarına karşın, genel göreliliğin oldukça kayda değer bazı gözleme dayalı doğrulamalara sahip olduğunu görmekteyiz. Öyleyse, kütleçekimle ilgili soruna geri dönelim. PSR 1913 + 16 ve bu tür öteki sistemler tarafından yayılan kütleçekim dalgalarını oluşturan boş uzay dalgacıklarının aslında gerçek enerjiyi nakletmeleri, hem kuram hem de gözlemde temel bir tutarlılık konusudur. Boş uzaydaki enerji momentum tensörü sıfırdır, öyleyse bu durumda kütleçekimle ilgili dalga enerjisi yerel olarak bir enerji "yoğunluğu"na atfedilebilir olmayan başka bir biçimde ölçülmek zorundadır. Kütleçekim enerjisi gerçekten yerel olmayan bir niceliktir. Bununla birlikte bu durum, kütleçekim enerjisine ilişkin hiçbir matematiksel açıklama bulunmadığını ima etmez. Kütleçekimle ilgili kütle enerjiye ilişkin bütünsel bir algılayışa henüz sahip olmadığımızı söylemenin yerinde olduğunu düşünsem de, oldukça tam bir yanıtın verilebileceği önemli bir durumlar kümesi mevcuttur. Bu durumlar, *asimptotik olarak düz* biçiminde anılanlardır ve esasen

[14] Bu kütleçekim dalgası araştırmaları LIGO, LISA ve GEO türü renkli kısaltmalar yoluyla ilerlemektedir. *Bkz.* Shawhan, 2001; Abbott, 2004; Grishchuket vd., 2001; Thorne, 1995b; ayrıca *bkz.* John Baez'in oldukça yararlı internet yorumu, http://math.ucr.edu/home/baez/week143.html.



Şekil 19.10 Uzayzamanın asimptotik biçimde düz olduğunun varsayılabildiği, kütleçekim dalgaları yayan yalıtılmış bir sistemle ilgili olarak toplam kütle/enerji momentumuna ve kütleçekim ışınımı yoluyla kaybına ilişkin, Bondi–Sachs kütle/enerji korunum yasası olarak adlandırılan kesin bir ölçü mevcuttur. İlgili matematiksel nicelikler yerel değildir ve "boş sonsuz"da (§27.12'de tartışılacak olan geometrik bir kavram) tanımlanır.

diğer her şeye olan çok büyük uzaklıkları nedeniyle evrenin geri kalanından yalıtılmış olarak değerlendirilebilen kütleçekimli sistemlerle ilgilidirler. Bu, kendisine ilişkin olarak kütleçekimle ilgili ışınım yoluyla kaybolan enerjiyle ilgilenilen, diyelim ki Hulse–Taylor ikili pulsarı gibi bir çift yıldız sistemi olabilir. Hermann Bondi ve iş arkadaşlarının, Rayner Sachs[15] tarafından (Bondi'nin eksenle ilgili simetri varsayımını ortadan kaldırmak üzere) genelleştirilen çalışması, bu tür bir sistemden kütleçekim dalgaları biçiminde nakledilen kütle/enerjiye ilişkin açıkça anlaşılır bir matematiksel anlatım sağladı ve buradan hareketle enerji momentuma ilişkin bir korunum yasasına ulaşıldı;[16] *bkz.* Şekil 19.10. Bu korunum yasası, $\nabla^a T_{ab} = 0$ "korunum yasası"nda gösterildiği üzere kütleçekimle ilgili olmayan alanlara ilişkin o yerel niteliğe sahip değildir ve yalnızca sistemin uzamsal olarak öteki her şeyden bütünüyle yalıtıldığı durumdaki sınırda tam anlamıyla geçerli olur. Yine de, daha sonra kanıtlanmış olan ve bize bir siste-

[15] Bu çalışma kısmi olarak Trautmann, 1958, tarafından öngörülmüştü; Bondi, 1960; Bondi vd., 1962; Sachs, 1961, 1962a.

[16] Ayrıca *bkz.* Newman ve Unti, 1962; Penrose, 1963, 1964; Sachs, 1962b; Bonnor ve Rotenberg, 1966; Penrose ve Rindler, 1986, s. 423–427.

me ilişkin (üstte tartışılmış olan "kütleçekimle ilgili negatif potansiyel enerji katkıları"nı da içeren) *toplam kütle*nin negatif olamayacağını söyleyen belirli "pozitiflik" teoremlerini de içeren her şeyin yerli yerine oturmasında bir miktar "mucizevi" bir şey mevcuttur.[17]

Etkileşen alanlara ilişkin sistemlerle ilgili korunum yasalarını elde etmek üzere genel reçeteler mevcuttur. Bunlar, sonraki bölümde sunulacak olan Lagrange yaklaşımından gelir. Lagrange yaklaşımı, bize kütleçekim durumunda gereksinim duyduğumuz her şeyi verir görünmemesi (ya da en azından doğrudan) gerçeğine karşın, oldukça güçlü, genel ve güzeldir. O ve yakından ilişkili Hamiltoncı yaklaşım, her ikisi de modern fiziğin merkezi bölümünü oluşturur ve onlarla ilgili bir şeyler bilmek önemlidir. Şimdi bu müthiş alana girme cüreti gösterelim.

[17] Schoen ve Yau, 1979, 1982; Witten, 1981; Nester, 1981; Parker ve Taubes, 1982; Ludvigsen ve Vickers, 1982; Horowitz ve Perry, 1982; Reula ve Tod, 1984; ayrıca *bkz.* Penrose ve Rindler, 1986; ve §32.3, özellikle not 32.11.

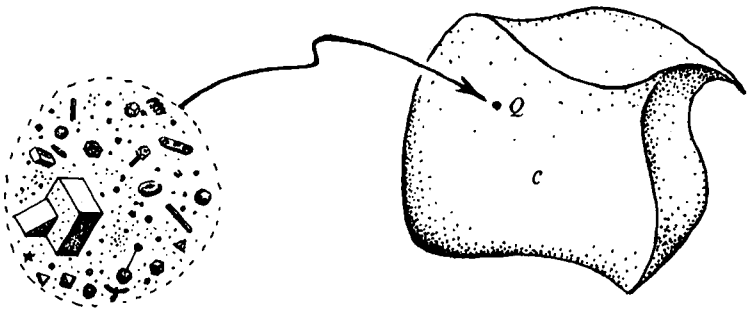
20

LAGRANGE DENKLEMİ VE HAMILTONLAR

20.1 Sihirli Lagrange formalizmi

Newton'ın dinamik yasalarını ortaya koymasını izleyen yüzyıllarda bu Newtoncı temellerden son derece etkileyici bir kuramsal çalışma çerçevesi oluşturuldu. Euler, Laplace, Lagrange, Legendre, Gauss, Liouville, Ostrogradski, Poisson, Jacobi, Hamilton ve diğerleri derinlemesine birleştirici bir bakış açısına yol açan fikirleri yeniden formüle ederek ortaya çıktılar. Burada bu dinamik biçimli bakış açısına ilişkin, korkarım ki ona ilişkin açıklamam başarılanın büyüklüğüyle ilgili oldukça yetersiz bir izlenim sunacak olmasına rağmen kısa bir özet vereceğim. Bize fiziki evrenimizle ilgili matematiksel destekler hakkında, 17. yüzyıl Newtoncı mekaniğinde açığa çıkan kurallar düzeyinde bile, matematiksel olarak yalnızca bu tür zarif bir birleştirici tablonun varlığının bir şeyler söyler göründüğü belirtilmelidir. Fiziki evrene ilişkin önerilmiş yasaların pek azı böylesi görkeme sahip heybetli bir matematiksel yapıya yol açabilir.

Newton'ın mekaniği sonucu ortaya çıkan hangi birleştirici zarif tablodur bu? Temel olarak her biri kendi karakteristik özelliğine sahip iki farklı fakat yakından ilişkili form biçiminde ortaya çıkar. İlkini *Lagrange denklemi* tablosu olarak ve ikincisini *Hamilton* olarak adlandıralım. (İsimlerle ilgili zorluk burada da mevcuttur. Açıktır ki her iki tablo da Hamilton'dan çok önce Lagrange'la bilinirdi ve Euler tarafından en azından kısmi olarak öngörülmekteydi.) Bir miktar (sonlu) tekil parçacıktan oluşan Newtoncı bir sisteme ve belki bölünemez bir varlık olarak değerlendirilen bazı katı cisimlere sahip olduğumuzu düşünelim. Noktalarının her biri tüm bu parçacık ve cisimlerin tekil bir uzamsal ayarlamasını gösteren (*bkz.* Şekil 12.1), büyük bir N sayısı boyutuna sahip bir $\mathcal{C}$ *düzenleme uzayı* söz konusu olacaktır. Zaman ilerledikçe, tüm sistemi gösteren $\mathcal{C}$'ye ait *tekil nokta* $\mathcal{C}$ içinde sistemin Newtoncı davranışını kapsayan bir yasaya göre hareket edecektir; *bkz.* Şekil 20.1. Bu yasanın *tekil bir fonksiyon*dan dolaysız bir matematiksel işlem yoluyla elde edilebilmesi dikkat çekici (ve hesaplamayla ilgili olarak çok değerli) bir gerçektir.

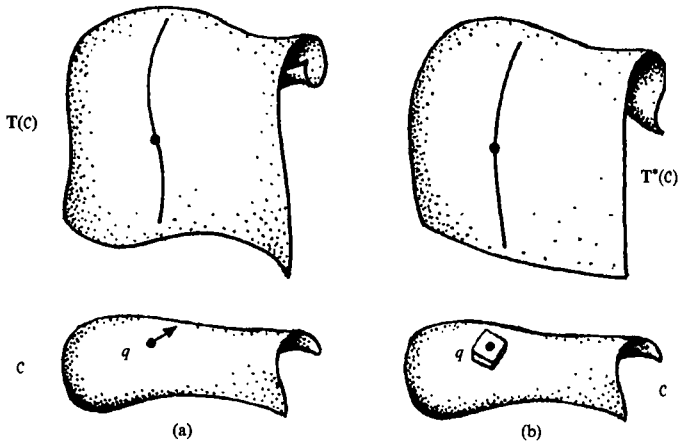


Şekil 20.1 Düzenleme uzayı. N–boyutlu C manifolduna ait her Q noktası, (diyelim ki) Newtoncı bir nokta parçacıklar ve katı cisimler ailesinin olası tüm bir kurulumunu gösterir. Sistem zaman içinde ilerledikçe Q, C içindeki bir eğriyi tanımlar.

Lagrange denklemi fonksiyonu olarak adlandırılan bu fonksiyon, Lagrange denklemi tablosunda (en azından en basit ve alışıldık halinde)[1], C düzenleme uzayına ilişkin T(C) *tanjant demeti* üzerinde tanımlanır (Şekil 20.2a); *bkz.* §15.5. Hamilton tablosundaki, *Hamilton* fonksiyonu olarak adlandırılan, fonksiyon *faz uzayı* denen T*(C) *kotanjant demeti* (*bkz.* §15.5) üzerinde tanımlanır (Şekil 20.2b). T(C) (her bir noktası Q'daki bir tanjant vektörüyle birlikte C'ye ait bir Q noktası yerine geçmek üzere) ve T*(C)'nin (her bir noktası Q'daki bir kotanjant vektörüyle birlikte C'ye ait bir Q noktası yerine geçmek üzere) $2N$–boyutlu manifoldlar olduğunu dikkat edelim.

Bu bölümde Hamilton olanı bir sonrakine bırakarak Lagrange denklemi tablosunu inceleyeceğiz. Lagrange'ın T(C)'siyle ilgili koordinatlar Newtoncı tüm cisimlerin konumlarını (katı cisimler, vb ilişkin uzamsal yönelimleri belirlemek üzere uygun açıları içermek üzere) ve ayrıca hızlarını (katı cisimlere ilişkin ilgili açısal hızlar, vb de içermek üzere) saptamaya hizmet eder. Genellikle "genellenmiş koordinatlar" olarak adlandırılan $q^1, \ldots, q^N$ konum koordinatları (belki yalnızca "yamalı biçimde" verilmiş, *bkz.* §12.2) C düzenleme uzayına ilişkin farklı q noktalarını işaretler. Herhangi (uygun) bir koordinat sistemi yapacaktır. "Kartezyen" ya da herhangi başka bir standart türde olmaları gerekmez. Bu, Lagrange denklemi yaklaşımının (ve ayrıca Hamilton yaklaşımının) güzelliğidir. Koordinat seçimi yalnızca uyumluluk tarafından yönetilir. Bu, bölümler 8, 10, 12, 14 ve 15, vb çeşitli türdeki genel manifoldlar ele alınırken kullanılmış olan

[1] Daha genel (Newtoncı olmayan sistemlere ilişkin) Lagrange denklemi türleri yüksek dereceli türevler içerebilir ve C'ye ilişkin "jet demetleri" denen şeyler üzerinde tanımlanır fakat burada bunlarla ilgilenmemiz gerekmez.



Şekil 20.2 (a) Standart Lagrange denklemi tablosunda $\mathcal{L}$ Lagrange denklemi $\mathcal{C}$ düzenleme uzayına ilişkin $\mathbf{T}(\mathcal{C})$ tanjant demeti üzerindeki pürüzsüz bir fonkksiyondur. (b) Hamilton tablosunda $\mathcal{H}$ Hamiltonı faz uzayı denen $\mathbf{T}^*(\mathcal{C})$ kotanjant demeti üzerindeki pürüzsüz bir fonksiyondur.

koordinatlarınkiyle tam olarak aynı roldür. Seçili genellenmiş koordinatlar kümesinin karşılığı $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^N$ "genellenmiş hızlar"ıdır ve "nokta" zamana göre değişim oranı, "d/dt", anlamına gelir:

$$\dot{q}^1 = \frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dot{q}^N = \frac{\mathrm{d}q^N}{\mathrm{d}t}.$$

Lagrange denklemi $\mathcal{L}$, *tüm* bunlara ilişkin bir fonksiyon olarak yazılabilir;[2]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^1, \ldots, q^N; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^N).$$

Her bir $\dot{q}^r$, bu ifadede *bağımsız* bir değişken olarak (özelde q^r'den bağımsız) ele alınır. Bu, Lagrange denklemine ilişkin şaşırtıcı başlangıç özelliklerinden biridir; fakat çalışır![3]

---

[2] Buradaki açıklamamda, sistemimizin *holonomik* denen şey olduğunu varsayarak Lagrange denklemlerine ilişkin genel tartışmayı basitleştiriyorum. Holonomik olmayan bir sistemde, genellenmiş konumlarla ilişkisi içinde, yeteri kadar uygun hız koordinatı mevcut değildir. Holonomik olmayan bir sisteme ilişkin güzel bir örnek yatay bir düzlem üzerinde dönen bir çemberdir. Çember, temas noktası yalnızca kendisinin tanjantı yönündeki bir dönme hareketiyle hareket edebilecek şekilde kaymamaya zorlanır. Bu temas noktasının konumu için iki koordinat gereklidir fakat hızına ilişkin yalnızca bir adet bulunur.

Temel düzeydeki açıklamada ele alınan sistemlerle ilgili olarak, bu tür holonomik olmayışın bulunmadığı göz önüne alınabilir. Çemberimizle ilgili durumda, dönme zorlaması kayma olasılığının reddedildiği bir idealleştirmedir. Bir kez küçük bir miktar kaymaya izin verilirse sistem holonomik hale gelir.

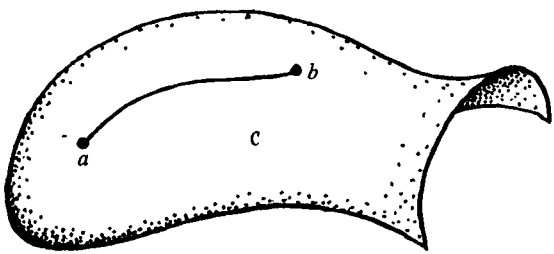
[3] Burada açıklamaya ilişkin basitlik için bir "zaman bağımsız Lagrange denklemi" durumunu

$\mathcal{L}$ fonksiyonunun gerçek değerine ilişkin fiziki yorum sistemin K kinetik emerjisiyle iç ve dış kuvvetlerden kaynaklı V potansiyel enerjisi arasında bu koordinatlarda ifade edilen $\mathcal{L} = K - V$ farkı olur (*bkz.* §18.6). Sistemin hareketine ilişkin ona ait *tüm* Newtoncı davranışı kodlayan denklemler olağanüstü kapsam ve temel basitlikteki, *Euler–Lagrange* denklemleri denen şey yoluyla verilir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^r} \quad (r = 1, \ldots, N).$$

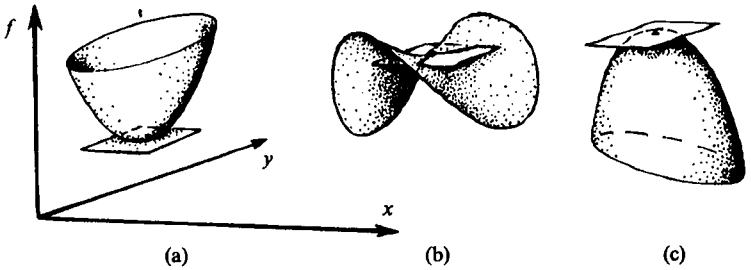
Her $\dot{q}^r$'nin, ("diğer tüm değişkenleri sabit tutarak $\mathcal{L}$'nin türevini $\dot{q}^r$'ye göre *biçimsel olarak* alın" anlamına gelen) "$\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}^r$" ifadesi gerçekten anlam ifade edecek şekilde bağımsız bir değişken olarak ele alındığını anımsayın.

Bu denklemler bazen *Hamilton ilkesi* ya da *durağan eylem ilkesi* olarak adlandırılan kayda değer bir gerçeği ifade eder. Bunun anlamı belki de, $\mathcal{C}$'deki Q noktasının hareketi biçiminde düşündüğümüzde, $\mathcal{C}$'nin tüm sisteme ait olası uzamsal düzenleme uzayını (diğer bir deyişle tüm parçalarına ait tüm yerler) gösterdiğini anımsayalım, en açık halde olur. Herhangi bir zamandaki konumu q^r tarafından işaretlenen Q noktası $\mathcal{C}$'deki bir eğri üzerinde belirli bir oranda, bu oran eğriye olan tanjant yönüyle birlikte $\dot{q}^r$ değerleri tarafından saptanmak üzere, hareket eder. Euler–Lagrange denklemleri temel olarak bize, Q'nun $\mathcal{C}$ boyunca olan hareketinin *eylemi*, bu "eylem" $\mathcal{C}$ düzenleme uzayında, $\mathcal{L}$'nin eğri üzerindeki sabit iki uç a ve b noktaları arasında alınan integrali olmak üzere, *bkz.* Şekil 20.3, minimize etmek biçiminde olduğunu söyler.



Şekil 20.3 Hamilton ilkesi. Euler–Lagrange denklemleri, Q'nun $\mathcal{C}$ boyunca olan hareketinin, eylemi, $\mathcal{C}$'deki bir eğri üzerinde sabit iki a, b noktaları arasında alınan $\mathcal{L}$'ye ilişkin integral, eğrinin değişimleri altında durağanlaştırmak biçiminde olduğunu söyler.

kabul ediyorum. Bununla birlikte dışsal kuvvetlere ilişkin bir zaman bağımlılığını kolaylıkla, başka bir $q^0 = t$ "genellenmiş koordinat"ını ve sonuçta 1 değerini alan biçimsel bir $\dot{q}^0$ niceliğini dahil etmek yoluyla gündeme getirebiliriz.



Şekil 20.4 Çeşitli değişkenli, gerçel değerli pürüzsüz bir f fonksiyonunun durağan değerleri. İki değişkenli bir $f(x,y)$ fonksiyonuna ilişkin durum gösterilmektedir. Bu, kendisine ait grafiğin (2–boyutlu bir yüzey) yatay olduğu yerde ($\partial f/\partial x = 0 = \partial f/\partial y$) durağandır. Bu durum (a) F bir minimuma sahip olduğunda ya da örneğin (b) bir eyer noktası ve (c) bir maksimum gibi diğer durumlarda da ortaya çıkar. Hamilton ilkesi durumunda (Şekil 20.3), ya da iki a ve b noktasını birleştiren bir jeodezi, $\mathcal{L}$ Lagrange denklemi f'nin yerini alır fakat bir yola ilişkin belirleme yalnızca x ve y yerine sonsuz sayıda parametre gerektirir. $\mathcal{L}$, bir tür durağan bir nokta olsa da, yine bir minimum olmayabilir.

Daha doğrusu aslında bu bir "minimum" olmayabilir fakat "durağan" terimi uygun olur. Temel olarak durum, olağan analizdeki gerçel değerli pürüzsüz bir $f(x)$ fonksiyonuna ilişkin bir *minimum*un ortaya çıkışının $df/dx = 0$'i gerektirmesi fakat bazen $df/dx = 0$ olduğu durumda f fonksiyonunun bir minimum olmaması durumundakine benzerdir; bir maksimum ya da olasılıkla bir dönüm noktası ya da yüksek boyutta *eyer noktası* denen şey olabilir, (Şekil 20.4b). $df(x)/dx = 0$ olan tüm yerler *durağan* olarak adlandırılır. *Bkz.* şekiller 6.4 ve 20.4. §14.8, §17.9 ve §18.3'te verilmiş olan (sözde) Riemanncı uzaydaki bir *jeodezi*nin, genel durumda yalnızca bir "durağan uzunluk" olmasına rağmen, temelde (yerel olarak) pozitif belirli durumda "minimum uzunluktaki yol" ve bazen Lorentzci durumda "maksimum uzunluktaki zamansal yol" biçimindeki benzer nitelenişini anımsayın. Böylece Q'ya ilişkin yörünge $\mathcal{C}$ uzayındaki bir tür "jeodezi" olarak düşünülebilir.

Bir Lagrange denklemine ilişkin, örneğin $V = V(x,y,z,t)$ konumuna bağlı bir V potansiyelince verilen sabit bir dışsal alanda hareket eden m kütleli basit bir Newtoncı parçacığa ilişkin olan gibi basit bir örneği ele almak yararlı olur. V'nin anlamı onun, parçacığın bu dışsal alandan kaynaklanan *potansiyel enerji*sini tanımlamasıdır. Aşağıya doğru sabit bir çekiş olarak düşünülen dünyaya ait (dünya yüzeyine yakın) kütleçekim alanı durumuyla ilgili olarak, z yer üzerindeki yükseklik ve g kütleçekimden kaynaklı aşağıya doğru olan ivme olmak üzere $V = mgz$ olarak kabul edebiliriz. Hıza ait üç bileşen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$'dir, böylece kinetik enerjiyle ilgili $\frac{1}{2}mv^2$ ifadesini kullanarak (*bkz.* §18.6)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Lagrange denklemini buluruz. z'ye ilişkin Euler–Lagrange denklemi artık bize, kendisini izleyerek Galilei'nin dünya yönünde olan ivme sabitliği sonucunu çıkaracağımız $\mathrm{d}(m\dot{z})/\mathrm{d}t = -mg$'yi verir.[20.1]

20.2 Daha simetrik biçimli Hamilton tablosu

Hamilton tablosunda da genellenmiş koordinatları kullanırız fakat artık genellenmiş $q^1, \ldots, q^N$ konum koordinaları (hızlar yerine) onlara ilişkin $p_1, \ldots, p_N$ *genellenmiş momentum* koordinatları denen şeyle birlikte ele alınır. Tekil bir serbest parçacıkla ilgili olarak *momentum* parçacığın hızıyla kütlesinin çarpımıdır. Yine de genel olarak genellenmiş momentumla ilgili ifade bu olmak zorunda değildir. Bununla birlikte onu Lagrange denkleminden ve her zaman tanımlayıcı

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^r}$$

denkleminden elde edebiliriz. Her durumda, bu p_r parametreleri $\mathcal{C}$'nin *kotanjant uzaylarıyla* ilgili koordinatlar sunmaya hizmet eder, böylece bir kovektör (§12.7'nin burada benimsediğimiz toplama uzlaşısını, her ne kadar bunu §12.8'deki gibi bir soyut indis ifadesi olarak okumak meşru olsa da, anımsarız)

$$p_a \mathrm{d}q^a$$

biçiminde yazılabilir. Elbette bu bir 1–biçimlidir ve

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{d}p_a \wedge \mathrm{d}q^a$$

türevi ($\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$'ı sağlayarak),[20.2] $\mathrm{T}^*(\mathcal{C})$ faz uzayına doğal bir *simplektik yapı* atayan bir 2–biçimlidir (*bkz.* §14.8). Hamilton tablosunun kuvvetli oluşu büyük oranda faz uzaylarının *simplektik manifoldlar* olmasına ve bu simplektik yapının dinamiği sunmak üzere seçilmiş belirli Hamiltondan bağımsız olmasına dayanır. Böylece klasik fizik §20.4'te geleceğimiz simplektik manifoldlara ilişkin güzel ve şaşırtıcı geometriye özel bir şekilde bağlanır.

Bu geometrinin oynadığı rolü anlamanın bir ön koşulu olarak Hamilton'un dinamik denklemlerine ilişkin forma göz atalım. Bunlar bir sistem

---

[20.1] Galile'nin kütleçekim etkisi altındaki serbest düşmeyle ilgili parabolik hareketini elde etmek üzere, argümanı tamamlayarak tüm ayrıntıları doldurun.

[20.2] Niçin?

e ilişkin zaman akışını, $T^*(\mathcal{C})$ faz uzayı içerisinde, tüm Newtoncı sistemi gösteren bir noktaya ait bir yörünge olarak açıklar. Bu akış bütünüyle, (burada ele aldığımız zaman bağımsız Lagrange denklemi ve Hamiltonlar durumunda) sistemin *toplam enerji*sini (genellenmiş) momentum ve konum biçiminde açıklayan

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(p_1, \ldots, p_N; q^1, \ldots, q^N)$$

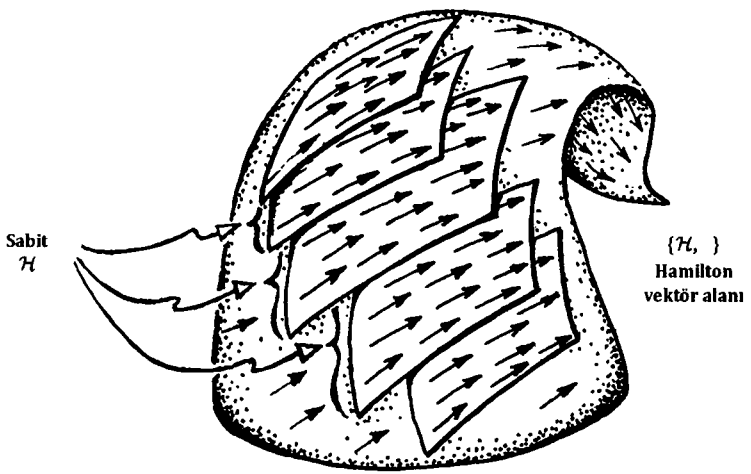
Hamilton fonksiyonu tarafından yönetilir. Bunu aslında Lagrange denkleminden ve daha sonra genellenmiş momentumlar yararına tüm genellenmiş hızları sadeleştirmek yoluyla yeniden yazılmak (genellikle kolay bir iş değildir!) zorunda olan (toplama uzlaşısı ya da soyut indis)

$$\mathcal{H} = \dot{q}^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^r} - \mathcal{L}$$

ifadesi yoluyla elde edebiliriz. Hamilton'un bu momentum ve konum koordinatları biçimindeki akış denklemleri güzel şekilde simetriktir:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^r}, \quad \frac{dq^r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}.$$

Bu denklemler $T^*(\mathcal{C})$'deki bir P noktasının hızını açıklar. Bu hız her P için tanımlanır, böylece $T^*(\mathcal{C})$ üzerinde $\mathcal{H}$ Hamiltonıyla tanımlanan bir vektör



Şekil 20.5 Sisteme ilişkin Newtoncı zaman akışını gösteren $\{\mathcal{H}, \}$ Hamilton akış (*bkz.* §20.4), $T^*(\mathcal{C})$ faz uzayı üzerindeki bir vektör alanıdır. Sabit $\mathcal{H}$ değerlerine ilişkin ($\mathcal{H}$'yi zaman bağımsız kabul ederek sabit enerji) hiper yüzeylerle ilgili olarak, yörüngeler, enerji korunumuyla uyum içerisinde, sabit $\mathcal{H}$ hiper yüzeyleri içinde kalır.

alanına sahip oluruz. §12.3'te verilmiş bir vektör alanıyla ilgili "kısmi türev işlemcisi" notasyonu biçiminde bu;[20.3]

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}\frac{\partial}{\partial q^r} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^r}\frac{\partial}{\partial p_r}$$

olur. Bu, sistemin $T^*(\mathcal{C})$ üzerindeki Newtoncı davranışını açıklayan bir "akış" sağlar (Şekil 20.5).

Sabit bir kütleçekim alanında, üstte (§ 20.1) Lagrange denklemi formunda verildiği üzere düşmekte olan bir parçacığa ilişkin belirli örnekteki Hamilton, p_x, p_y ve p_z sırasıyla Kartezyen x, y ve z eksenleri doğrultusundaki sıradan uzamsal momentum bileşenleri olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m} + mgz \\ &= \frac{p^2}{2m} + mgz\end{aligned}$$

olur. Bu, konum ve momentum bileşenleri biçiminde ifade edildiğinde parçacığın toplam enerjisinin ne olması gerektiğine ilişkin bilgiden dolaysız biçimde yazılabilir ya da onu üstteki işlemlerle verildiği üzere Lagrange denkleminden elde edebiliriz.[20.4]

Bu noktada hiçbir yerde görmediğim notasyonal bir tuhaflığı itiraf etmeliyim ki temize çıkayım! §18.7'de düz uzayzamanla ilgili standart Minkowski koordinatlarındaki p_1, p_2, p_3 uzamsal momentum bileşenlerinin, tercih edilmiş $(+---)$ imzamla birlikte, normal momentum bileşenlerinin *negatifleri* olduğunu gördük. Bu nedenle üstteki örnekte $p_x = -p_1$, $p_y = -p_2$ ve $p_z = -p_3$ ifadelerine sahip oluruz. Hamiltonlara ilişkin *genel* tartışmada p_a momentumlarının "alt kat" versiyonunu kullanmak doğaldır; yine de bu, $(+---)$ imzasıyla birlikte görelilikte doğal olmayan "p_a"larla (p_1, p_2, p_3) uyuşmaz haldedir. Kitaptaki bu notasyonal sorunla ilgilenme biçimim, her q ya da p'nin sahip olabileceği belirli yoruma ilişkin kesin belirlenmiş değilken (böylece okuyucu işaretlerle ilgili kendi seçimini ayırabilir), q^a ve p_a birleşimini p'leri q'lara bağlayan olağan işaret uzlaşısıyla birlikte kullanarak basit biçimde genel biçimciliği vermektir. Öte taraftan x^a ve p_a birleşimini kullandığımda gerçekten, $-p_1, -p_2, -p_3$ sıradan uzamsal momentuma ilişkin sıradan uzamsal momentum bileşenleri (standart bir Minkowski sistemindeki p^1, p^2, p^3'e eşit) olacak şe kilde §18.7'ninkiyle uyumlu bir notasyonu *kastediyorum*. Bu, q'lar yerine x'ler biçiminde yazıldığında

[20.3] Bunu açıklayın.

[20.4] Bunu açık biçimde yapın. Sabit bir kütleçekim alanında düşmekte olan bir parçacıkla ilgili Newtoncı denklemleri elde etmek üzere Hamilton denklemlerini kullanın.

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^r}, \frac{dx^r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}.$$

Şeklindeki Hamilton denklemlerinin ters işaretli biçimde göründüğü imasına sahiptir. Sunacağım formalizmlerin tüm ayrıntılarıyla pek fazla ilgilenmeyen herhangi bir okuyucuya konuyu basit biçimde tümüyle görmezden gelmesi önerilir. (Çoğu uzman konuyla ilgili makale ya da kitap yazma zamanı gelene dek aynısını yapmaktadır!)

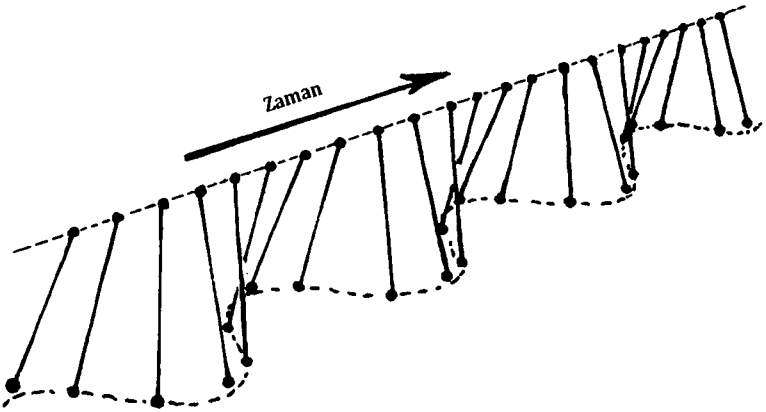
20.3 Küçük salınımlar

Sonraki bölümde şeylerin Hamiltoncı açıklamasının bizi yönelteceği kayda değer geometriye geçmeden önce ilk olarak denge durumundaki bir fiziki sisteme ilişkin önemli titreşimler konusunu ele almak aydınlatıcı olacaktır. Konu pek çok farklı alanda dikkate değer bir öneme sahiptir ve bizim için daha sonra kuantum mekaniği bağlamında (§22.11) özel bir öneme sahip olacaktır. Titreşim kuramı, ele alınması noktasında her biri oldukça yeterli olan Lagrange denklemi ya da Hamilton formalizmiyle uygun biçimde açıklanabilir. Açıklamalarımı burada ilk olarak Hamilton formalizmle vereceğim çünkü bu bizi, titreşimlerle ilgili §22.11'de güzel bir fotoğrafını çekeceğimiz kuantum mekaniksel versiyona daha dolaysız biçimde yöneltir. Hamilton olanla çok benzer durumdaki Lagrange denklemi titreşim kuramı okuyucuya bırakılıyor (*bkz.* alıştırma [20.10]).

Titreşen bir sisteme ilişkin basit bir örnek kütleçekim etkisi altında sallanan sıradan bir sarkaçta ortaya çıkar. Salınımlar küçük olduğunda sarkaç topunun ileri geri hareketi zamanın bir fonksiyonu olarak bir sinüs dalgası tanımlar (*bkz.* Şekil 20.6). (Bu, §9.1'de çalışılmış olan tekil "Fourier bileşenleri"nde karşılaşılan türde bir davranıştır.) Böylesi küçük salınımların titreşim periyodu aslında salınımın genliğinden (diğer bir deyişle topun kendisi üzerinde salındığı uzaklık) bağımsızdır; Galilei'nin 1583'teki meşhur ilk gözleminden. Bu tür hareket *basit harmonik hareket* olarak adlandırılır.

Bu bölümde bu hareketin nasıl aynı anda her yerde bulunur bir nitelikte olduğunu göreceğiz. Genel bir fiziki yapı kendi denge durumu dolayında (sürtünme etkisinin göz ardı edildiğini varsayarak) yalnızca çok belirli biçimlerde "sallanabilir". Küçük ölçekli her sallanmanın, içerisinde yapının *normal frekans* olarak çok belirli bir frekanstaki basit harmonik hareketi andırdığı, *normal modlar* denen belirli titreşim modlarına ayrılabildiğini göreceğiz.

İlk olarak basit harmonik hareketin analitik biçimde nasıl açıklandığını görelim. q, sarkaç topumuzun en düşük noktadan ölçülen yatay uzaklığını, ya da ele aldığımız başka bir titreşen niceliğin dengesinden dışa doğ-



Şekil 20.6 Kütleçekim etkisiyle sallanan bir sarkaç. Küçük salınımlar için topun hareketi basit harmonik harekete yaklaşır. Topun (bir zaman fonksiyonu biçiminde çizilen) yer değişimi bir "sinüs dalgası" verir.

ru olan yer değiştirmeyi göstersin. Böylece küçük q yer değiştirmeleriyle ilgili hareket denklemi, $\omega/2\pi$ pozitif sabit niceliği salınımın *frekansı* olmak üzere,

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q$$

olur. Bu bize, içe doğru olan d^2q/dt^2 ivmesinin dışa doğru olan yer değiştirmeyle (ω^2 çarpanıyla) orantılı olduğunu söyler. §6.5'ten $q = \cos\omega t$ ve $q = \sin\omega t$'nin ikisinin de bu denklemi ve ayrıca genel

$$q = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

çizgisel birleşimini de, a ve b sabitler olmak üzere, sağladığını görürüz.[20.5] Kütleçekim etkisiyle (bir düzlemde) sallanan h uzunluğundaki bir sarkaçla ilgili olarak, q küçük olduğunda, $\omega^2 = g/h$'yle birlikte üstte verilmiş olana çok yakın biçimde yaklaşan bir hareket denklemi buluruz; fakat q'nun büyük değerleri için bu denklemden sapmalar ortaya çıkar.[20.6]

q'lar belirli $q^a = q_0^a$ değerlerini aldığında dengede olan genel bir Hamilton sistemine sahip olduğumuzu düşünelim. Genellenmiş koordinatla-

---

[20.5] Bunu, frekansın niçin $\omega/2\pi$ olduğunu açıklayarak doğrulayın. Bu fonksiyona ait grafiğin niçin hâlâ bir sinüs eğrisi gibi göründüğünü açıklayın. Bu, niçin *genel* çözümdür?

[20.6] Bunu, (a) Lagrange denklemi yöntemi kullanarak, (b) Hamilton yöntemi kullanarak, (c) Doğrudan Newton yasalarından, *tüm* denklemi bularak gösterin. *İpucu*: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mh^2\dot{q}^2(h^2 - \dot{q}^2)^{-1} + mg(h^2 - q^2)^{1/2}$ olduğunu gösterin. Bu basit durumda Lagrange denklemi ve Hamilton yöntemlerin bize hiçbir şey kazandırmadığına dikkat edin; onların gücü daha genel durumları ele almakta yatar.

rımızın *orijin*ini denge durumumuzu göstermek üzere seçmek, diğer bir deyişle $q_0^a = 0$ şeklinde seçmek uygun olacaktır. "Denge", başlangıçta hiçbir hareket yoksa bu durumda sistemin durağan *kalacağı* bir düzene karşılık gelir. Dengenin *kararlı*, bu, sisteme küçük bir rahatsızlık verildiğinde sistemin dengeden fazlaca uzaklaşmayıp onun etrafında salınacağı durum olmak üzere, olup olmadığıyla ilgilenebiliriz. Titreşimlerle ilgili çalışmamızda aslında kararlı bir denge düzeni dolayındaki salınımlarla ilgileniyoruz. Böylece yalnızca, genellenmiş q^a koordinatlarına ilişkin *küçük* değerlerle ilgiliyiz. Dahası, salınımlarımız yalnızca küçük hızdaki küçük rahatsızlıkları içerdiğinden ayrıca p_a momentumlarının küçük değerleriyle de ilgilenmeliyiz. Hamiltonımızın q ve p'ler içeren analitik bir ifade olduğunu varsayarız, "analitik" anlamı için *bkz.* §6.4, böylece onu q ve p'li bir üslü seri biçiminde genişletebiliriz. Kararlı bir denge düzeniyle ilgili olarak $q^a = 0$ potansiyel enerjiye ilişkin (yerel) bir minimumu göstermek zorundadır.[20.7] Dahası, hareket söz konusu olduğunda bu yalnızca enerjiyi (kinetik enerji) arttırabilir; $p_a = 0$ olduğunda kinetik enerji minimum olur. Böylece, $\mathcal{H}$ Hamiltonının değeri olan *toplam* enerji $q^a = 0 = p_a$'da yerel olarak bir minimumdur. Buradan, üslü seri açılımımızın, Q_{ab} ve P^{ab} *pozitif belirli* sabit simetrik matrislerin bileşenleri olmak üzere,

$$\mathcal{H} = \text{sabit} + \tfrac{1}{2}Q_{ab}q^a q^b + \tfrac{1}{2}P^{ab}p_a p_b$$
$$+\ q \text{ ve } p\text{'ler biçimindeki 3 ya da daha yüksek dereceli terimler}$$

olarak başlaması (q ve p'ler ya da ikisi biçimindeki *çizgisel* terimler eksik olmak üzere) gerektiği sonucu izler (böylece $q^a \neq 0$'sa $Q_{ab}q^a q^b > 0$ ve $p_a \neq 0$'sa $P^{ab}p_a p_b > 0$; *bkz.* §13.8). $\frac{1}{2}$ çarpanları uygunluk için konuldu.[20.8] Küçük salınımların doğasını bulmak üzere yüksek dereceli terimleri göz ardı edelim. Böylece Hamilton denklemi

$$\frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a} = P^{ab}p_b$$

ifadesini verir; buradan t'ye göre bir kez daha türev alarak

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 q^a}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^{ab}p_b = P^{ab}\frac{\mathrm{d}p_b}{\mathrm{d}t}\\ &= -P^{ab}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^b} = -P^{ab}Q_{bc}q^c = -W^a{}_c q^c\end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. $W^a{}_c = P^{ab}Q_{bc}$, Q_{ab}'nin P^{ab}'yle

[20.7] Niçin?

[20.8] Tüm bunları daha ayrıntılı açıklayabilir misiniz? Denge kararsızsa çizgisel terimlere sahip olabilir miyiz? Açıklayın.

$$\mathbf{W} = \mathbf{PQ}$$

biçiminde yazabileceğimiz matris çarpımıdır ve böylece daha önce gösterilmiş denklemimize ilişkin sonucu

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\mathbf{Wq}$$

biçiminde yeniden yazabiliriz. **W** matrisine ait (*bkz.* §13.5), ω^2 **W**'nin **q**'ya karşılık gelen *öz değeri* olmak üzere,

$$\mathbf{Wq} = \omega^2\mathbf{q}$$

ifadesini sağlayan **q** vektörleri olan *öz vektörler*le ilgileniyoruz. Aslında bu öz değer pozitif olmak zorundadır çünkü **P** ve **Q** matrislerinin ikisi de pozitif belirlidir[20.9] ve böylece bunu ω pozitif niceliğinin karesi olarak yazabiliriz. Bu tür herhangi bir **q** öz vektörünün $\omega/2\pi$ frekanslı basit harmonik hareketi gösteren

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{q}$$

denklemini sağlamasının zorunlu olduğunu görürüz.[20.10]

Bu tür her **q** öz vektörü genellenmiş q^a koordinatlarına ilişkin bir birleşimdir, böylece **q**'ya karşılık gelen salınım bu koordinatların tümünün aynı frekansta hep birlikte titreşmesine gereksinim duyar. Bu, salınımın *normal modu* olarak ve bu moda karşılık gelen ilgili $\omega/2\pi$, *normal frekans* olarak adlandırılır. En genel durumda bu frekansların tümü farklıdır fakat belirli "bozulmuş" durumlarda bu normal frekanslar örtüşebilir.[20.11] Bozuk öz değerler kendi uygun *çok katlılıklar*ıyla hesaba katılmalıdır; bu nedenle normal modların toplam sayısı hâlâ $q^1, \ldots, q^N$ genellenmiş koordinatlarının N sayısına eşittir. Farklı frekanslara karşılık gelen herhangi iki **q** ve **r** normal modunun birbirlerine **Q**'yla tanımlanan "metriğe" göre $\mathbf{r}^T\mathbf{Qq} = 0$ anlamında "ortogonal" olduğu belirtilmelidir.[20.12]

Tüm bunlardan ne öğrendik. N serbestlik derecesine sahip klasik bir sistemin kararlı bir denge düzeni dolayında nasıl titreşebileceğiyle ilgili oldukça genel ve kayda değer bir sonuç oluşturduk. Böylesi herhangi bir titreşim, her biri kendi karakteristik frekansına sahip, birbirlerinden ba-

---

[20.9] Bu türetmeyi kanıtlayabilir misiniz bakın. *İpucu*: Pozitif belirli bir matrisin tersinin pozitif belirli olduğunu gösterin.

[20.10] Anılan analizi Hamilton yerine Lagrange denklemi formda gerçekleştirebilir misiniz bakın.

[20.11] Bu tür bozuk durumlardaki öz vektör sistemini açıklayın.

[20.12] Bunu kanıtlayın. §13.7'den "T"nin "yeri değiştirilmiş"e karşılık geldiğini anımsayın.

ğımsız biçimde ele alınabilecek normal modlardan oluşur ve hep birlikte N adet mod nevcuttur. Bu açıklamada, uygulamada, makroskopik bir sistemdeki titreşimin, enerjisi bileşen parçacıkların rasgele hareketlerine aktarılmak üzere, kendisi uyarınca neticede kaybolduğu *dağılım* etkisini göz ardı ederiz. Bileşen kısımlarının (örneğin bir moleküldeki gibi) tümü hesaba katıldığında, dağılım ortaya çıkmaz.

Bu noktaya kadar sistemdeki N serbestlik derecesi sayısının sonlu olduğu sıradan durumu ele alageldim fakat sözü edilen kuram ayrıca, en azından ideal halde, sonsuz boyutlu olan sistemlerde de geçerlidir. Bu fikir, bir müzik aletinin sesiyle ilgilendiğimiz durumdan tanıdık gelecektir. Bir davul örneğin ya da üçgen çalgı, vurulduğunda çeşitli frekanslarla, bu frekanslar ona özgü tınıyı tanımlamak üzere, uyumlu biçimde salınacaktır. Üflemeli bir çalgının, içerisindeki hava kolonunun salınımından kaynaklanan sesi benzerdir. Ayrıca telli bir çalgıdaki tellerin titreşimi, vb de benzerdir.

9. bölümde çalıştığımız Fourier analizi sonlu uzunluktaki tele ilişkin titreşimleri ifade etmemize olanak sağlar. Bu teli uç noktalarından sabitlenmiş ya da bir çember biçiminde bükülmüş olarak kabul edebiliriz. Fourier analizi genel titreşimleri modların çizgisel bir birleşimi, bunlar saf sinüs ya da kosinüs dalgası tonları ve sayıca sonsuz olmak üzere, olarak ifade eder. Bu durumda, tüm frekanslar öncül modun sahip olduklarının integral katlarıdır. Bu, yankılı bir müzik aleti yapmak için uğraşılan türde bir şeydir! Yine de genellikle (bir davul ya da zildeki gibi), normal frekanslar bu kadar basit şekilde ilgili değildir.

Bu tür durumlarda Hamilton ya da Lagrange denklemi formalizmleri $N = \infty$ durumunu kapsayacak biçimde kolayca genişletilebilir fakat bir miktar özen gereklidir. Bir anlamda, §20.5'te göz atacağımız Lagrange denklemi (ya da Hamilton) *alanlar* kuramına doğal biçimde ulaştık. Modern fizikte bu, pek çok uygulamaya sahiptir. Özellikle, yerleri küçük döngüler tarafından alınan nokta parçacıkların formalizm gerektirdiği Doğaya ait, *sicim kuramı* olarak adlandırılan temel bir kurama yaklaşımda. Burada, Doğaya ait çeşitli parçacık ve alanların "sicimler"e ilişkin normal modlu titreşimlerden kaynaklandığı kabul edilir (*bkz.* §§31.5, 7, 14).

Burada son bir noktaya değinilmelidir. Bu bölümdeki tartışma yalnızca *kararlı* denge dolayındaki salınımla ilgilendi fakat o ayrıca, *kararsız denge* durumundaki hareketler için de geçerlidir. Temel fark **Q** gerçel simetrik matrisimizin artık pozitif belirli olmayışıdır, böylece $\mathbf{W} = \mathbf{PQ}$ *negatif* öz değerlere sahip olabilir. Bu durumda ilgili küçük rahatsızlıklar dengeden üstel biçimde ıraksar.[20.13]

[20.13] Bu davranışı açıklayın.

20.4 Simplektik geometri olarak Hamiltoncı dinamik

Hamilton denklemlerinin sonlu sayıda bir boyutta simplektik geometriye nasıl bağlandığını görmek üzere geri çekilelim. §14.8'de açıklandığı üzere, manifold üzerindeki Φ ve Ψ skaler alan çiftleri üzerinde başka bir Θ skaler alanı üretmek üzere uygulanabilen bir işleme sahip herhangi bir simplektik manifold onlara ait

$$\Theta = \{\Phi, \Psi\} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_a}\frac{\partial \Psi}{\partial q^a} - \frac{\partial \Phi}{\partial q^a}\frac{\partial \Psi}{\partial p_a}$$

Poisson parantezi olarak adlandırılır.[20.14] "Ψ yarığı" boş bırakılırsa böylece diferansiyel bir $\{\Phi, \}$ işlemciyi, Ψ üzerindeki eylemi $\{\Phi, \Psi\}$ veren bir *vektör alanını* elde ederiz. Φ yerine $\mathcal{H}$ koyalım. $\{\mathcal{H}, \}$ vektör alanının $T^*(\mathcal{C})$ üzerinde *zaman akışını* gösteren yörüngeler "boyunca uç verdiği"ni buluruz; aslında $\{\mathcal{H}, \}$ Hamilton denklemlerine göre tam olarak bu akıştır (*bkz.* §20.2). Simplektik geometrinin kayda değer özelliklerinden biri, bir sisteme ilişkin dinamik gelişimin geometrik olarak tekil bir skaler fonksiyon (Hamilton) içinde kapsanabileceğidir.

Simplektik geometri bizim için pek çok farklı şey yapar. Örneğin, faz uzay hacminin dinamik tarafından her zaman korunduğunu ileri süren, Liouville'e bağlanan ünlü bir sonuç mevcuttur; *bkz.* Şekil 20.7. Faz uzayındaki *hacim* elemanı, $\boldsymbol{S}$'lerin N adedi birbirine kamalanmak üzere, $2N$–biçimli

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{S} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{S}$$

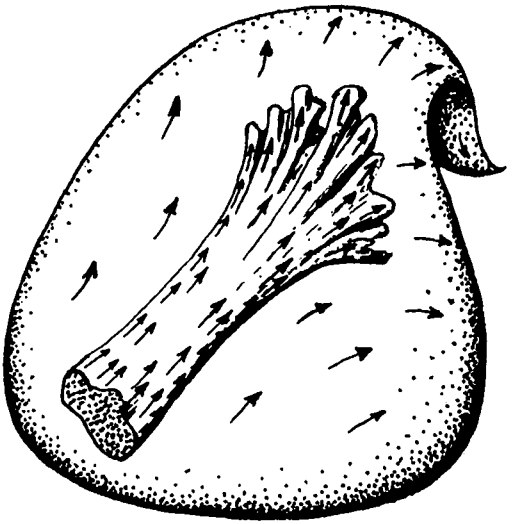
olarak kabul edilir; anımsayacağımız üzere burada $\boldsymbol{S}$ 2–biçimlisi $\boldsymbol{S} = \mathrm{d}p_a \wedge \mathrm{d}q^a$'yla verilir. Şu halde $\boldsymbol{S}$'nin kendisinin Hamilton akış tarafından korunduğunu (diğer bir deyişle $\{\mathcal{H}, \}$ vektör alanıyla ilgili $\boldsymbol{S}$'ye ilişkin Lie türevinin yok olduğunu) sınamak zor değildir.[20.15] Buradan hemen, $\boldsymbol{\Sigma}$ tüm hacim formunun da bu akış tarafından korunduğu sonucu ortaya çıkar. Bu, Liouville kuramıdır.

$\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$[20.16] olduğunudan bunu, Hamiltonın kendisinin de korunması sonucu izler, diğer bir deyişle o, *kapalı bir sistemin toplam enerjisi sabittir* gerçeğinin bir yansıması olarak yörüngeler boyunca sabittir. Bu nedenle her bir yörünge, $\mathcal{H}$ = sabit tarafından verilen $(N-1)$–boyutlu bir yüzey üzerinde bulunur; *bkz.* Şekil 20.5. Artık sisteme ilişkin tüm hikayeyi kendisine ait $T^*(\mathcal{C})$ üzerindeki yörünge tarafından gösterilir biçimde dü-

[20.14] $\{\Phi, \Psi\}$'ye ilişkin bu ifadenin §14.9'dakiyle uyumlu olduğunu doğrulayın.

[20.15] Bunu gösterin.

[20.16] Niçin?

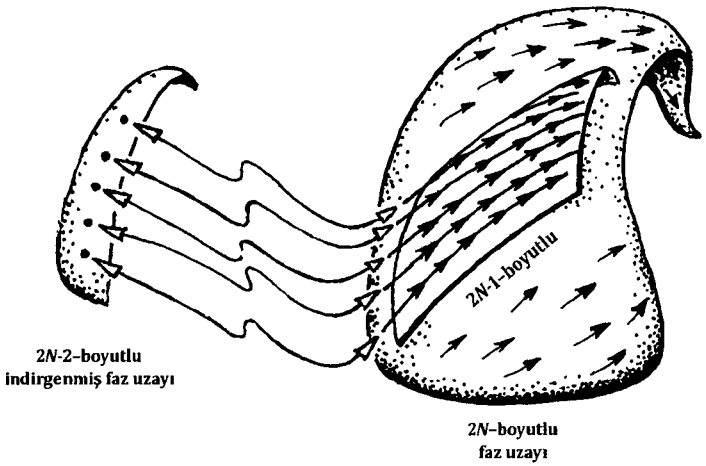


Şekil 20.7 Liouville'nin teoremi. Hamilton akış başlangıç faz uzayı bölgesinin hacmini, bu bölgenin biçimi zaman akışı içinde büyük oranda bozulmuş olsa bile, (bir dizi olası başlangıç durumunu temsil ederek) korur.

şünebiliriz. Sabit bir $\mathcal{H}$ değeri için bu yörüngelerin uzayı $(N-2)$–boyutludur; *bkz.* Şekil 20.8. Bir boyutu sabit bir $\mathcal{H}$ değeri için ve bir başkasını da 1–boyutlu yörüngelerle "çarpanlara ayırdığımız" için kaybederiz.) Sonuçtaki $(N-2)$–manifoldun yine simplektik olması çarpıcı ve önemli bir gerçektir. Bu işlem (Φ yalnızca $\mathcal{H}$ olarak seçildiğinde değil) klasik mekanik ve simplektik geometride pek çok zarif uygulamaya sahiptir.

Newtoncı dinamiğe ilişkin bu mükemmel biçimde kapsamlı tabloda şüphe götürmez bir güzellik mevcuttur. Yine de sonraki fiziki kuramlarla ilişkili olarak da göreceğimiz üzere, bu tür açık biçimde sıkıca örülü matematiksel düzenlerin güzelliği ve görünüşteki kesinliği tarafından sürüklenmeye izin vermememiz önemlidir. Doğa geçmişte, ilk olarak bizi matematiksel yapıların güç ve zarafeti tarafından, onun dünyasına yön verdiğimizi kabul etmeye zorlar görünerek, son derece mutluluk verici bir hoşnutluğa özendirme fakat sonra zaman zaman tablomuzun sonuç olarak doğru olamayacağını göstererek bizi kavramsal uyuşukluğumuzdan sarsarak uyandırma alışkanlığına sahipti! Yine de değişim her zaman, önceki yapının, üzerinde durduğu temellerin artık tümüyle değişmiş olması gerçeğine karşın hâlâ gururlu biçimde ayakta olmasını sağlayacak kadar incelikli olagelmiştir.

Hamiltoncı bakış, nefis bir örnek sunar. Cisimleştirdiği klasik mekanik kuantum dünyasına ilişkin bazı kaba gerçeklerle çelişse de Hamiltoncı yapı bize, kuantum mekaniğine ilişkin gerçek kurama yönlendiren bir kılavuzluk sunar. Dahası, Hamiltonların kuantum versiyonları standart kuan-



Şekil 20.8 $T^*(C)$ faz uzayı, N–boyutlu bir C için $2N$–boyutlu simplektik bir manifolddur. Verili bir enerji değeri için (Şekil 20.5'teki gibi sabit $\mathcal{H}$) $(2N-2)$–boyutlu bir Hamiltoncu akış yörüngeleri ailesini içeren $(2N-1)$–boyutlu bir bölgeye sahip oluruz. Noktaları bu yörüngeleri temsil eden indirgenmiş faz uzayının kendisi $2(N-1)$–boyutlu bir simplektik manifolddur.

tum formalizmiyle ilgili temel bileşenleri sunar. Bu, ifade etmeliyim ki, içerisinde görelilik yasaları uyarınca zaman ve uzayı bir araya getirmeye yönelik hiçbir ciddi girişim bulunmayan görelilikçi olmayan standart kuantum kuramıyla ilgilidir. Bununla birlikte görelilikçi kuantum kuramında daha doğal sıçrama noktasını sağlayan genellikle Lagrange denklemidir. Peki ama nereye sıçrıyoruz? Bu, bizi kuantum alan kuramının derin bataklığına dalmaya ikna eden, özel göreliliğin kurallarıyla kuantum mekaniğininkilerini uygun biçimde birleştirmekle ilgili gereksinimdir!

Kuantum kuramı ve kuantum alan kuramına ilişkin işlemlere 21–23 ve 26. bölümlerde geleceğiz. Bundan önceyse, biraz daha altyapı çalışması gerekli olacak. "Kuantum alan kuramı" kavramı kuantum mekaniksel kurallar çerçevesine alınması gerekenin yalnızca parçacıklar değil aynı zamanda alanlar da olduğunu ima eder. Bu nedenle, alanların Lagrange denklemi (ya da Hamilton) yöntemi kullanılarak nasıl ele alınması gerektiğini görmeye gereksinim duyacağız.

20.5 Alanların Lagrange denkleminin ele alınışı

Lagrange denklemlerine (ve Hamiltonlara) ilişkin üstte verilmiş olan tartışmada sonlu sayıda parçacık ve katı cisimden oluşan Newtoncı sistemler değerlendirildi. Bunlarda sonlu biçimde çok serbestlik derecesi

mevcuttu, böylece düzenleme uzayı manifoldu $\mathcal{M}$ ve ona ait $T(\mathcal{M})$ tanjant demeti (ve ayrıca $T^*(\mathcal{M})$ kotanjant demeti) sıradan sonlu boyutlu manifoldlardır. Bununla birlikte Lagrange denklemi (ve Hamilton) formalizmi bundan daha geneldir ve aslında fiziki alanlara da uygulanabilir. Bir alan konumdan konuma sürekli biçimde değişir ve sonlu sayıdaki parametrelerle belirtilemez. Bir bölgedeki serbest Maxwell alanlarına ilişkin düzenleme uzayı örneğin sonsuz boyutlu olacaktır.

Lagrange denklemi (ya da Hamilton) formalizmi sonsuz boyutlu bir düzenleme uzayı durumunda kullanmak hâlâ olasıdır; aslında bu hem klasik hem de kuantum alan kuramlarındaki standart işlemdir. Gerekli biçimsel matematiksel işlemlere ilişkin temel yenilik *işlevsel türev alma* kavramıdır. Lagrange denklemi, sonlu sayıdaki genellenmiş $q^1, \ldots, q^N$ koordinatlarının ve sonlu sayıdaki genellenmiş $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^N$ hızlarının bir fonksiyonu olmak yerine (her biri uzayzaman üzerindeki bir fonksiyon olan ve belki de kendisine ilişkin tensör ve spinör biçimli karakteri belirtmek üzere indislere sahip olan) bir miktar $\Phi, \ldots, \Psi$ *alanı*nın ve bu alanlara ilişkin $\nabla_a\Phi, \ldots, \nabla_a\emptyset$ *türevler*in (genellikle yalnızca ilk türevin göründüğü fakat daha yüksek dereceli türevlere de izin verildiği) bir fonksiyonu olarak kabul edilir. Artık zaman türevleriyle ilgili (orijinal Lagrange denklemiyle ilgili argümanımızdaki "noktalar"ca belirtildiği üzere) hiçbir özel rolün mevcut olmadığına ve ∇_a işlemcisini kullanarak daha tarafsız hale geldiğimize dikkat edin. Buradan hareketle formalizm, göreliliğin gerekliliklerivle benzer hale getirilmektedir.

Özellikle bu tür bir durumda Lagrange denklemleri sıklıkla *işlevseller* olarak adlandırılır çünkü argümanlarının belirli değerlerine ait gerçek değerleri yerine sahip oldukları işlevsel biçimle ilgileniyoruz. Euler–Lagrange denklemleri artık "alanlara göre türevler" ve "alanların gradyanlarına göre türevler" içerir. Bu işlemlerin normal biçimde uygulanışı, olağan kalkülüsün 6. bölümde açıklanan işlemlerini oldukça yakından yansıtır. Sonuçların hassas biçimde doğru olması istenirse matematiksel incelikler de sıklıkla içerilir fakat fizikçiler için bunlara ilişkin çok fazla kaygılanmamak alışıldıktır ve temel ilgi biçimsel kuralların doğru biçimde izlenişidir.

Benim buradaki amacım bu konuların ayrıntısına girmek değil fakat Bu "işlevsel türev" durumuyla ilgili olarak Euler–Lagrange denklemlerini yazmaya değer (işlevsel türev "∂" yerine "δ" kullanılarak gösterilmek üzere):

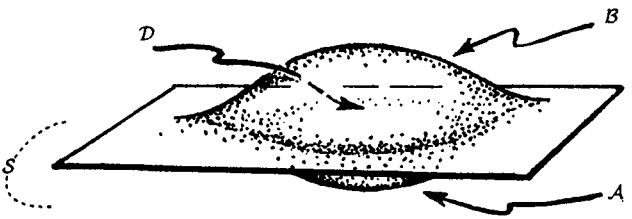
$$\nabla_a \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\nabla_a\Phi} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi}, \ldots, \nabla_a \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\nabla_a\Psi} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi}.$$

Üstte belirtildiği üzere $\Phi, \ldots, \Psi$ alanları ayrıca indislere sahip olabilir. İşlevsel bir türevi fiilen gerçekleştirmek temel olarak olağan kalkülüsle ilgili aynı kuralları uygulamak ve makul miktarda "matematiksel sağduyu"

(*örn.* $\mathcal{L} = \Phi^a\Phi^b\nabla_a\Psi_b$ ise bu durumda $\delta\mathcal{L}/\delta\Phi^c = \Phi^b\nabla_c\Psi_b + \Phi^a\nabla_a\Psi_c$, $\delta\mathcal{L}/\delta\nabla_c\Phi^d = 0$, $\delta\mathcal{L}/\delta\Psi_c = 0, \delta\mathcal{L}/\delta\nabla_c\Psi_d = \Phi^c\Phi^d$) kullanmaktır.

Bu tür Lagrange denklemleri için Hamilton kuralının bir benzeri mevcuttur. Bu kuralın Euler–Lagrange denklemlerini *eylem*in durağanlığı olarak, bu eylem düzenleme uzayına ait sabit iki a ve b noktasını birleştiren bir eğri üzerindeki Lagrange denkleminin integrali olmak üzere (Şekil 20.3'ü anımsayın), ifade ettiğini anımsayalım. Burada ele alınan daha genel durumlarımızda $\mathcal{C}$'deki sabit a ve b sabit uç noktaları uzayzamana ilişkin 3–boyutlu bir bölge(ler)deki alan düzenlemelerince yer değiştirir. Bunlar sıklıkla, uzayzamandaki aynı $\mathcal{S}$ 2–uzayını ($\mathcal{S}$ belki de sonsuzda kabul edilmek üzere) kapsayan iki $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ 3–uzay bölgesi olarak kabul edilir, *bkz.* Şekil 20.9 ve ayrıca bu tablo daha sonra geleceğimiz (§26.6) kuantum alan kuramının yol integral formülasyonunda önemlidir. İstenirse $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'yi birlikte (birinin yönelimini ters çevirerek) bir $\mathcal{D}$ (olasılıkla tıkız, *bkz.* §12.6) uzayzaman 4–hacminin $\partial\mathcal{D}$ *sınırı*nı oluşturmak üzere alabiliriz, *bkz.* Şekil 20.10. Her durumda Hamilton kuralı Lagrange denkleminin $\mathcal{D}$ bölgesi üzerindeki uzayzaman integraline ilişkin durağanlığı ifade eder. Bu nedenle, $\mathcal{L}$ Lagrange denklemi, doğal $\boldsymbol{\varepsilon}$ 4–biçimlisi genellikle $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3\sqrt{(-\det \boldsymbol{g})}$ olarak ifade edilen nicelik[4] olmak üzere, kesin konuşursak değişmezin 4–biçimli $\mathcal{L}\boldsymbol{\varepsilon}$ anlamına geldiği bir uzayzaman *yoğunluğu* olarak düşünülmelidir. Böylece *eylem* integrali

$$S = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}\boldsymbol{\varepsilon}$$

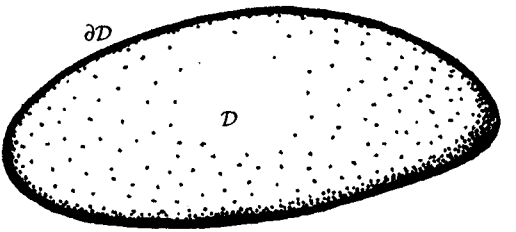


Şekil 20.9 Alan Lagrange denklemleriyle ilgili Hamilton ilkesi. Şekil 20.3'ün, $\mathcal{C}$'deki sabit iki a ve b uç noktası, sırasıyla 3–boyutlu iki $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ uzayzaman bölgesinde, $\mathcal{D}$ 4–bölgesini kapsayan bir "kabarcık" oluşturarak, alan düzenlemelerini temsil eder. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'nin, sınırlı bir $\mathcal{S}$ 2–yüzeyinde sonlanacak şekilde bir araya geldiğini kabul edebiliriz (Şekilde çizilmemiş) ya da "$\mathcal{S}$"yi sonsuzun dışında, belki $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'nin $\mathcal{D}$ bölgesi ötesinde, kendisi boyunca çakıştığı, dışarıdaki uzaysal bir hiper yüzey üzerinde olarak değerlendirebiliriz (durum gösterilmektedir).

---

[4] $\boldsymbol{\varepsilon}$'yi belirtmenin bir diğer yolu $\boldsymbol{\varepsilon}$'ye ait ε_{0123} bileşeninin yerel bir sağ–elli ortonormal çerçevede, $\varepsilon_{0123} = 1$'i sağladığını söylemektir (§19.2). $\boldsymbol{\varepsilon}$ $\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$–tensörü, metrik tarafından $\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{pqrs} = g^{ap}g^{bq}g^{cr}g^{ds} = -24$ yoluyla imzalanmak üzere, $\boldsymbol{\varepsilon}$'yle ilgili imza seçimi uzayzaman hacmine ilişkin *yönelimi* sunarak, ayarlanır.

dipnot 4'e bağlı alıştırma. Bu reçetenin ana metinde verilene denk olduğunu gösterin.



Şekil 20.10 İstenirse Şekil 20.9'un $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'sini birbirlerine eklenmiş fakat farklı yönelimlerde alınmış olarak, (tıkız) bir uzayzaman 4–hacimlisi $\mathcal{D}$'ye ilişkin $\partial\mathcal{D}$ sınırını oluşturacak şekilde, değerlendirebiliriz (*bkz.* Şekil 12.16). Hamilton ilkesi (Şekil 20.3) $\partial\mathcal{D}$ sınırı üzerinde verili bir alan düzenlemesine ilişkin $\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}\varepsilon$'nin durağanlığını ifade eder.

olur. Öyleyse alan denklemleri, S niceliğinin tüm değişkenlerin değişimlerine göre durağan olması savından kaynaklanır (şu halde bu, bir jeodezinin benzerini verir; *bkz.* Şekil 20.3). Bu, $\mathcal{L}$'nin tüm oluşturucu alanlara ve onların türevlerine göre değişken türevinin yok olmak zorunda olması anlamına gelir. Bu koşul

$$\delta S = 0$$

biçiminde yazılır. S niceliği §26.6'da göreceğimiz kuantum alan kuramına ilişkin yol integral yaklaşımının merkezindedir.

20.6 Lagrange denklemlerinin modern kuramı güdüleme biçimi

Lagrange denklemi kuramı (aynı zamanda Hamilton kuram da) modern fizikte, burada kullanıma sunulabileceği pek çok kayda değer kullanım mevcut olmak üzere, son derece etkili bir role sahiptir. Örneğin bize, sıradan bir Lagrange denkleminin sürekli bir (pürüzsüz) simetriye sahip olduğu durumda o simetriyle ilgili bir korunum yasasının var olacağını söyleyen, *Noether teoremi* denen önemli bir teorem söz konusudur. Özelde, Lagrange denkleminin *zaman ötelemesi* (zamandan bağımsız) etkisinde değişmezlik mevcutsa korunan bir *enerji* söz konusudur; *uzamsal öteleme* etkisi altında değişmezse bu durumda korunan bir *momentum* söz konusudur. Bundan başka, bir eksen etrafında *açısal döndürme* etkisi altında değişmezlik bulunuyorsa aynı eksen etrafında korunan bir *açısal momentum* söz konusu olur. Bu simetriler düz uzayzamandaki yalıtık bir sistemle ilgili olarak beklenmelidir. Koordinatları, $\mathcal{L}$ Lagrange denklemine ilişkin verili simetrimizin $\mathcal{L}$'nin genellenmiş bir q_r "konum" koordinatından ba-

ğımsız olması gerçeğiyle ifade edilecek biçimde seçersek bu durumda korunan nicelik, üstteki reçetede (§20.2'de) verildiği üzere, bu q_r koordinatının p_r "eşlenik momentum"u olacaktır: $p_r = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}^r$. Bu p_r'nin aslında zamanda sabit oluşu Euler–Lagrange denklemlerinin dolaysız sonucudur.[20.17]

Bu işlem alanlara ilişkin Lagrange denklemi fonksiyonellerine genellenebilir. Örneğin, bir "ayar değişmezliği" mevcutsa, bu durumda ilgili bir "korunan yük" (*örn.* $\Psi \mapsto e^{i\theta}\Psi$ etkisi altındaki elektromanyetik ayar değişmezliği durumunda elektrik yükü) bulmayı bekleriz. Bununla birlikte böylesi durumlarda karışık konular ortaya çıkmaya başlar. Örneğin, genel görelilikte enerji momentum korunumu elde etmek üzere bu fikirlerin uygulanması pek de belirgin bir durum değildir ve kesin konuşursak yöntem bu durumda geçerli değildir. $\Psi \mapsto e^{i\theta}\Psi$ ayar simetrisine ilişkin kütleçekimle ilgili belirgin benzer, (genel göreliliğin, tensör işlemleri biçiminde yazılmış kendisine ait denklemlere sahip olmak yoluyla icabına baktığı) "genel koordinat dönüşümleri altındaki değişmezlik"tir fakat Noether teoremi bu durumda "0 = 0" doğasında bir şey verir ve geçerli olmaz. Genel göreliliğe ilişkin, bazıları §21.1'de belirtileceği üzere bazıları kuantum kuramına etkileyici yöntemler aktaran oldukça farklı türde birtakım kavrayışa, başka koşullarda Noether teoreminin kullanımından elde edilebilecek güçlü algılayışa karşın, gerek duyulduğu görülüyor. Noether teoreminin kütleçekim kuramı durumundaki sınırlılıklarını örneklemek üzere, genel görelilikteki açısal momentum konusu üzerinde, asimptotik olarak düz uzayzamanlar durumunda bile, belirgin bir soru işaretinin hâlâ asılı durmakta olduğu belirtilmelidir.[5] Einstein kuramı Lagrange denklemi tarzı bir yaklaşımdan, ilk olarak bilge ve çok yönlü matematikçi David Hilbert (1915) tarafından gösterildiği üzere, kesinlikle türetilebilir. Hilbert'in kütleçekimle ilgili Lagrange denklemini temel olarak $-16\pi G$ sabitine bölünmüş skaler R eğriliğidir fakat bunun, §20.5'in doğal $\boldsymbol{\varepsilon}$ 4–biçimlisiyle çarpılarak bir yoğunluk (ya da bir 4–biçimli) haline getirilmesi gerekir. Bunun, maddeye ilişkin $\mathcal{L}$ Lagrange denklemine eklenmesi gerekir ve toplam eylemle ilgili olarak

$$S = \int_{\mathcal{D}} (\mathcal{L} - \frac{1}{16\pi G} R)\boldsymbol{\varepsilon}$$

ifadesini elde ederiz.

Hilbert bu eylemi önerdiğinde, zamanında çok popüler olan, *Mie kuramı* olarak adlandırılan bir madde kuramının etkisindeydi ve kütleçekimle

[20.17] Nedenini açıklayın.

[5] *Bkz.* Penrose, 1982; Penrose ve Rindler,1986; Winicour,1980; Rizzi, 1998.

ilgili eylem ilkesini aslında yalnızca maddeye ilişkin Lagrange denkleminin Mie kuramına uygun olan Lagrange denklemi olduğu durumla ilgili olarak belirtti. Toplam Lagrange denkleminin bugün artık "her şeyin kuramı" olarak adlandırdığımız şeyi verdiğine inanır görünmekteydi. Bu 1915'teydi. Bugün Mie kuramını kim hatırlıyor?

Mie kuramı Maxwell kuramından bir ayrılığı içeriyorsa da, elektromanyetik alana ilişkin *standart* Maxwell kuramıyla ilgili uygun bir Lagrange denklemi,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab},$$

aslında yıllar önce bilinmekteydi.[6] Yine de bu çalışmayı gerçekleştirmek üzere bu Lagrange denkleminin A_a *elektromanyetik potansiyeli* biçiminde yazıldığından emin olmamız gerekir. Ayrıca yüklü alanlar mevcut olduğunda bu etkileşimi ifade eden, ayrıca bunlar da A_a'yı içeren ek terimler gerekir. Önemli bir nokta olarak tüm işlem ayar değişmezliğiyle ilgili olarak da sınanmalıdır. Kütleçekimin de işin içine girdiği durumda kütleçekime uygun "ayar değişmezliği", diğer bir deyişle koordinat değişmezliği gerekir. Bu genellikle her şeyi uygun olarak tensör biçiminde yazmak yoluyla (ya da değişmez diğer reçetelere göre taban çerçevesi ya da uygun spinör formalizmiyle) halledilir.

Temel fizikteki modern girişimlerde varsayılan yeni bir kuram ortaya konduğunda, o neredeyse değişmez şekilde Lagrange denklemi bir fonksiyonel biçiminde verilir. Bunun, örneğin sonuçtaki kuramın gerekli tutarlılık ve değişmezlik özelliklerine sahip olmasına ilişkin daha büyük bir şansın mevcut olması (fakat mutlak bir kesinlikte değil) ve "Newton'ın üçüncü yasası"na ilişkin bir biçimin belirgin olması (iki alan kesiştiğinde etkileşimin karşılıklı olması anlamında: biri diğeri üzerine etkirse, diğeri eşit biçimde ilki üzerine geri etkir) gerçekleri gibi pek çok avantajı vardır. Dahası Lagrange denklemleri, yeni bir alan sunulduğunda ona ait katkıların genellikle basit biçimde daha önce var olan Lagrange denklemine, ayrıca gerekli etkileşim terimlerinin herhangi biriyle birlikte eklenmesi sevimli özelliğine sahiptir. Daha önemlisi belki de, kuantum kuramına ilişkin oluşuma, üstte değindiğim ve §26.6'da göreceğimiz yol integral yaklaşımı yoluyla ulaşılan dolaysız bir rota mevcuttur.

Bununla birlikte, *temel* bir yaklaşım olarak buna ilişkin huzursuzluğumu itiraf etmeliyim. Huzursuzluğumu tanımlamakta zorlanıyorum fakat bu durum Lagrange denklemi yaklaşımının genelliğiyle ilgilidir; biraz yönlendirme belki de doğru kuramları bulmayı sağlayabilir. Ayrıca Lag-

[6] *Bkz.* Pais, 1986, s. 342 ve s. 357, referanslar 46, 47,48.

range denklemi seçimi çoklukla eşsiz değildir ve bazen oldukça zahmetlidir; hatta bazen gizli olmayan karışıklık derecesinde. "Aktif biçimli" gerçek fiziki kavrayıştan, özellikle alanlarla ilgili Lagrange denklemleri durumunda bir uzaklık söz konusudur. Serbest Maxwell kuramıyla, $\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}$, ilgili Lagrange denklemi bile belirgin herhangi bir fiziki öneme sahip değildir (bu nicelik elektrik ve manyetik alan vektörlerine ilişkin, 3–boyutlu terimler biçimindeki uzunlukların kareleri arasındaki farkın $\frac{1}{8}$'i olmak üzere).[20.18] Dahası "Maxwell Lagrange denklemi" bir potansiyel biçiminde ifade edilmedikçe, A_a potansiyeline ilişkin gerçek değer dolaysız biçimde gözlenebilir bir nicelik olmamasına rağmen, bir Lagrange denklemi olarak işlemez. Kütleçekim durumunda (elektromanyetizma durumunun aksine) serbest Einstein kuramına ilişkin Lagrange alan denklemi sağlandığında ($R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0$, $R = 0$'ı ima ettiğinden) *özdeş biçimde yok olur*. Yine R, değişmez biçimde anlamlı olmayan nicelikler (normalde bir koordinat sistemindeki metrik bileşenler) biçiminde ifade edilmedikçe bir Lagrange denklemi olarak işlemez. Çoğu durumda Lagrange denklemi yoğunluğunun kendisi de açık bir fiziki anlama sahip görünmez; dahası aynı alan denklemlerine yönelten pek çok farklı Lagrange denklemi var olma eğilimindedir.

Alanlarla ilgili Lagrange denklemleri matematiksel araçlar olarak kuşkusuz son derece yararlıdır ve onlar fiziki kuramlara ilişkin çok büyük sayıda öneriyi not etmemize olanak sağlar. Yine de gelişkin temel fiziki kuramlarla ilgili olan araştırmalarımızda, onlara oldukça kuvvetli biçimde bağlanmakla ilgili huzursuzluğum sürüyor. Bu huzursuzluk ayrıca §26.6'da geleceğimiz kuantum alan kuramına ilişkin konularla da ilişkilidir fakat şimdilik bu kadarı yeter.

[20.18] Bunu gösterin.

21

KUANTUM PARÇACIĞI

21.1 Değişmeli olmayan değişkenler

Çoğu fizikçinin, kuantum mekaniğinin, dünyaya ilişkin tablomuzdaki değişiklikleri Einstein'ın genel göreliliğinin olağanüstü eğik uzayzamanından bile çok daha devrimci biçimde işlediğini düşünmeleri olasıdır. Aslında kuantum mekaniğinin bize mikroskopla bile görülemeyecek atomlar ya da temel parçacıklar düzeyindeki "gerçeklik" üzerine inanmamızı esasen söylediği şey, bu ve izleyen iki bölümde göreceğimiz üzere, çok büyük oranda, kuantum düzeyindeki "tablolar"da tümüyle basit biçimde terk etmeyi seçebildiğimiz olağan klasik tablomuzdan çıkarılır. Aslında çoğu fizikçi kuantum ölçeğindeki doğru bir "gerçeklik" varlığından bile kuşkulanır görünmekte ve yanıtlar elde etmek üzere bunun yerine yalnızca kuantum mekaniğiyle ilgili matematiksel formalizme güvenmektedir. (29. bölümde tartışmalı "kuantum gerçekliği" konusuna daha ayrıntılı biçimde döneceğim.)

Yine de tüm bunlara rağmen, 20 bölümdeki, 17. yüzyıl Newtoncı mekaniğine sığmayacak kadar kapsamlı fakat tümüyle klasik düzendeki Lagrange denklemi/Hamilton işlemler toplamının ne kadarının kuantum mekaniği kuramına ilişkin temel altyapıyı sağladığı oldukça dikkat çekicidir. Elbette matematiksel formalizmde değişiklikler olmak zorundaydı. Öteki türlü yeni kuram tam olarak eskisinin bir kopyası olurdu. Bununla birlikte sanki Newton'ın düzenine sığmayan formalizm, yeni kuantum bileşenlerinin basitçe kendi yerlerine oturtulabileceği şekilde, tam olarak doğru biçim ve boyuttaki bir kısım mekanizmasıyla birlikte kuantum mekaniğinin gelmesini bekler gibiydi.

Bunun olmasına olanak sağlayan kilit matematiksel özellik 19. yüzyıl sonlarına doğru, §6.1'den anımsayacağımız son derece orijinal bir elektrik mühendisi ve matematik fizikçisi olan Oliver Heaviside (1850–1925) tarafından çoktan kaydedilmiş olan belirgin bir "merak"tır. Heaviside'ın gözlemi, belirli tipteki diferansiyel denklemleri çözmekte sıklıkla fayda sağ-

layan bir gerçek olarak diferansiyel işlemcilerin tam olarak sıradan sayılara uygulanabilen aynı biçimde ele alınabileceğiydi. Bir örneğe göz atalım. Örneğin

$$y + \frac{d^2y}{dx^2} = x^5$$

diferansiyel denklemini göz önüne alın (ve sembollerin anlamları için §6.3'e bakın).[1] Bu bağıntıyı sağlayan belirli bir $y = y(x)$ fonksiyonu bulmak istiyoruz. Heaviside'ın yöntemi d/dx'i sanki sıradan bir sayıymış gibi ele almaktı. Bunun daha "akla uygun" görünmesini sağlamak üzere işlemciyi tekil D harfiyle gösterelim:

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Bu durumda "D^2"yle gösterilen işlem, *ikinci* türev işlemcisi olan $d^2/dx^2 = (d/dx)^2$ yinelenen türev almadır; "D^3"le gösterilen üçüncü türev d^3/dx^3'tür, vb. Böylece denklemimiz $y + D^2y = x^5$ haline gelir ve bunu

$$(1 + D^2)y = x^5$$

biçiminde ifade edebiliriz. Bunu biçimsel olarak "$1 + D^2$'yle bölerek" "çözebiliriz" ve yanıtı $y = (1 + D^2)^{-1}x^5$ biçiminde yazarız. $(1 + D^2)^{-1}$'i bir "D'li üslü seri" biçiminde açarak

$$y = (1 - D^2 + D^4 - D^6 + \cdots)x^5$$

ifadesini buluruz. (Bu seriyi §4.3'te D yerinde x'in bulunduğu durumda ele aldığımızı anımsayın.) $Dx^5 = 5x^4$, $D^2x^5 = 20x^3$, $D^3x^5 = 60x^2$, $D^4x^5 = 120x$, $D^5x^5 = 120$, $D^6x^5 = 0$, vb olduğunu belirterek (§6.5) belirli (doğru!) çözümü,

$$y = x^5 - 20x^3 + 120x,$$

buluruz.[21.1], [21.2], [21.3] Uygun kurallara özenli bir dikkatle bu tür bir işlem,

---

[1] Bu, yalnızca örneğin d/dx, d/dy, vb ya da bunların kuvvetleri, *örn.* d^3/dx^3 gibi sıradan diferansiyel işlemciler içerdiğinden *sıradan* diferansiyel denklem ya da ODE olarak adlandırılan şeye ilişkin bir örnektir. Bir *kısmi* diferansiyel denklem ya da PDE, bölüm 19'da Maxwell ya da Einstein'ın denklemlerindeki gibi $\partial/\partial x$, $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial x\partial y$ kısmi diferansiyel işlemcileri içeren denklemdir.

[21.1] $(1 + D^2)\cos x = 0$ ve $(1 + D^2)\sin x = 0$ olduğunu, gerek duyarsanız §6.5'teki denkleme başvurarak gösterin.

[21.2] Alıştırma [21.1]'e dikkat ederek, çözümünüzün aslında en genel olduğuna ilişkin bir kanıt sunmak yoluyla $(1 + D^2)y = x^5$'in *genel* çözümünü bulun.

[21.3] Metinde verilen işlemin alıştırma [21.2]'deki çözümlerin çoğunu neden ıskaladığını açıklayabilir misiniz, bakın. Tümünü bulan, değiştirilmiş genel bir yöntem düşünebiliyor musunuz? *İpucu*: "$1 - D^2 + D^4 - D^6 + \cdots$" gerçekte $1 + D^2$'nin bir tersiyle ilgili gerekliliklerı ne dereceye kadar sağlar? Bu sonsuz ifadeyle birlikte $(1 + D^2)\cos x$ üzerinde çalışın.

Heaviside başlangıçta bunun kullanımıyla ilgili çok fazla itirazla karşılaşmış olsa da, mükemmel derecede hassas hale getirilebilir.

Her ne kadar $D(= \mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ niceliği (gerekli özen gösterilirse) sıradan bir sayıdaki gibi cebirsel bir yolla ele alınabilse de, birbirine karışmış D'ler ve x'lere sahip olduğumuzda dikkatli olmalıyız çünkü bunlar değişmeli değildir. "x" ve "D"yi sağ taraftaki görünmez bir, diyelim ki $\Psi(x)$ fonksiyonuna etki eder şekilde düşünmek zorundayız. x işlemcisi kendi sağında yer alanı basitçe x'le çarparken D sağındakinin x'e göre türevini alır. Böylece

$$Dx - xD = 1$$

değişme özelliğini buluruz. Bunun nedeni nedir? Bize $D(x\psi) = (D(x))\psi + xD(\psi)$, diğer bir deyişle $D(x\psi) - xD(\psi) = (D(x))\psi$, olduğunu söyleyen §6.5'teki "Leibniz yasası" özelliğini anımsayın. Bu basit biçimde, üstte gösterilen bağıntının sağ taraftaki rasgele bir $\psi = \psi(x)$'e uygulaması olan, $D(x) = 1$'i (diğer bir deyişle x'e doğrudan uygulanan D 1'dir) aklımızda tutmak üzere, $(Dx - xD)\psi = 1\psi$ bağıntısıdır.

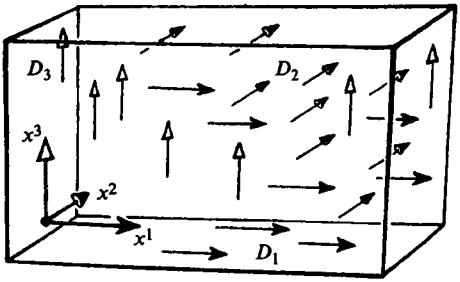
Şimdi bunu çok değişkenli $x^1, \ldots, x^N$'ye ve ilgili $D_1 = \partial/\partial x^1, \ldots, D_N = \partial/\partial x^N$ işlemcilerine (artık kısmi türev işlemcileri ve x^N'nin, x'in birbiriyle çarpılan N adet kopyası değil, N'inci koordinat olduğunu unutmayın), sağ taraftaki "görünmez" fonksiyon artık tüm bu değişkenlerin yeni bir, $\psi = \psi(x^1, \ldots, x^N)$ fonksiyonu olmak üzere, genişletelim.

$$D_b x^a - x^a D_b = \delta^a_b$$

değişme bağıntısını elde ederiz. (§13.3'teki δ^a_b Kronecker deltasını anımsayın; üstteki ifade hem $a = b$ olduğunda ilk çeviriciyi hem de $a \neq b$ olduğunda x ve D'nin değişmesi[21.4] gerçeğini içerir.) x^a koordinatlarının düz uzaydaki sıradan uzamsal ve uzayzaman koordinatları olduğunu varsayabiliriz fakat onların, örneğin Lagrange denklemi ya da Hamilton formalizminin genellenmiş koordinatları gibi biraz daha özel bir şey olabildiklerini de düşünebiliriz. Bununla birlikte bu genellemeyi daha ileriye götürmekte derin bazı zorluklar mevcuttur. Bu nedenle en azından şimdilik *düz* bir $\mathbb{E}^N$ (tam olarak 3 ya da 4 boyutlu olması gerekmeyen) N–uzayıyla ilgilendiğimizi düşünmek daha iyi olacaktır. $D_1, \ldots, D_N$ işlemcileri böylece $\mathbb{E}^N$'ye ait, her biri afin $\mathbb{E}^N$ uzayının bağımsız bir simetrisini ifade eden, tüm eksenler yönündeki (Şekil 21.1) sonsuz küçük ötelemeleri tanımlar.

Noether teoreminden (§20.6) uzayın bu tür simetrileriyle *momentum korunumu* arasında yakın bir ilişki olduğunu anımsarız: bir Lagrange

[21.4] Niçin?



Şekil 21.1 Öklitçi (ilgin) $\mathbb{E}^N$ N-uzayında, $D_1 = \partial/\partial x^1, D_2 = \partial/\partial x^2 \ldots, D_N = \partial/\partial x^N$ işlemcileri (vektör alanları) tarafından üretilmiş, ilgili $x^1, x^2 \ldots, x^N$ Kartezyen koordinatlarıyla birlikte $D_b x^a - x^a D_b = \delta^a_b$ değişmeli bağıntılarını sağlayan bağımsız N adet ötelemeli simetri mevcuttur. (N = 3 durumu gösteriliyor.)

denklemi bir yöndeki uzamsal öteleme tarafından değiştirilmemişse bu durumda o yönde sağladığı momentum korunur. Bu zarif ve önemli bir gerçektir ve matematiksel olarak mükemmel şekilde kavranabilirdir. Kuantum mekaniği buna oldukça benzer görünen bir şeydir fakat matematiksel olarak bu derece kavranabilir değildir. Aslında matematiksel olarak tümüyle çılgınca görünür! Yine de bu tuhaf kuantum mekaniksel işlemde şüphe götürmez matematiksel bir zarafet bulunur. Kuantum mekaniğiyle ilgili yalnızca bu tür bir simetriyle ilgili olarak korunan bir momentum mevcut değildir fakat aslında momentumun kendisi bu belirli simetriyi üreten türev alma işlemcisiyle *belirtilir*!

21.2 Kuantum Hamiltonları

Bir momentum gerçekte bir türev alma işlemcisiyle nasıl belirtilebilir? Aslında bu, kulağa çılgınca gelir! Daha doğrusu işin içine katılması gereken bir $\hbar$ çarpanı (Planck sabitinin, h orijinal Planck sabiti olmak üzere, Dirac versiyonu, $h/2\pi$; alta bakın) ve ayrıca sanal i birimi mevcuttur. Böylece saçma görünümlü $p_a = \mathrm{i}\hbar D_a$, diğer bir deyişle x^a'yla ilgili momentum için

$$p_a = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x^a}$$

tanımlamasını yaparız. Buradan hareketle konum ve momentumu ilişkilendiren, *kanonik değişme kuralı* olarak adlandırılan bir değişim yasasına ulaşırız:

$$p_b x^a - x^a p_b = \mathrm{i}\hbar \delta^a_b.$$

Bu çılgın görünümlü işlemci/momentumla ne yapmalıyız? "Kuantum mekaniksel momentumun", $\mathrm{i}\hbar\partial/\partial x^a$, rolü klasik biçimli $\mathcal{H}$ Hamilton fonksiyonunda $(p_1, \ldots, p_N; x^a, \ldots, x^N)$ tam olarak eski klasik p_a momentumunun olduğu yere yerleştirilmesi gerektiğidir. Bu, (kanonik) *kuantizasyon* ola-

rak bilinen işlemin anahtarıdır. Şimdiye dek görelilikle ilgilenmedik, bu nedenle üstte ele alınan "momentumlar" aslında enerji değil fakat uzamsal momentumlardır.[2] $\mathbb{E}^N$ uzayımız yalnızca 3–boyutludan oldukça büyük olma eğilimindedir çünkü içerilmiş çok fazla sayıda parçacık ve diğer yapı söz konusu olabilir ve bu farklı konum ve momentum bileşenlerinin tümü listede olmak durumundadır. 20. bölümün genel tartışmasıyla uyumlu olarak, Hamiltondaki açık biçimli bir zaman bağımlılığı olasılığına izin vermiyorum.[3]

Bu x^a koordinatlarının normal yorumlanışı, onların pek çok sayıdaki parçacığa (ya da uygun başka parametrelere) ilişkin konum sunması olacaktır. Bu bölümde yalnızca tekil bir parçacığa ilişkin kuantum mekaniğiyle ayrıntılı biçimde ilgileneceğim fakat 23. bölümde daha karışık çok parçacıklı sistemler ele alındığında genel formalizme hazır biçimde sahip olmak da olası olacak. Tekil bir parçacık için özelde, ona ait x^0 zaman bileşeniyle üç uzamsal bileşeni x^1, x^2, x^3 arasında belirgin bir görelilikçi simetri bulunduğu ortaya çıkar. Birazdan bunun, kuantum mekaniğine ilişkin gerçek zaman akışını tanımlamada nasıl önemli bir rol oynadığını görüyor olacağız. Yine de (kanonik) kuantizasyon işlemi var olduğu sürece, özellikle çok parçacıklı durumlarda, fiziğe ilişkin uzamsal ve zamansal görünümlerin ele alınışının çok farklı olduğu görelilikçi olmayan bir işlem sunar.

Bu çılgın fikrin nasıl ilerlediğini görmek üzere bir kuantum Hamiltonına ilişkin basit bir örneğe göz atalım. $V = V(x, y, z)$ konumuna bağlı olabilen bir V potansiyel enerji fonksiyonu tarafından verilen dışsal bir alanda hareket eden m kütleli tekil bir Newtoncı parçacık durumunu ele alabiliriz. §20.2'de *klasik biçimli* Hamiltonı zaten gördük ve bunun p_x, p_y ve p_z Kartezyen x, y ve z eksenleri yönlerindeki uzamsal momentumlar olmak üzere $\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + V(x, y, z)$ olduğunu anımsarız. Böylece (kanonik biçimde kuantize olan) kuantum Hamiltonı, $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ anlamına gelen) $\nabla^2 = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$ (daha önce §10.5'te değerlendirilmiş fakat bu kez 3–boyutlu durumdaki) Laplace işlemcisi olmak üzere,

---

[2] Bununla birlikte tutarlılık adına (ayrıca *bkz.* §21.3) göreliliğe uygun notasyona bağlı kalıyorum, böylece "p_a"daki momentumların uzamsal bileşimleri, (uzamsal p_a bileşenlerinin c^{-2} katı olan) olağan momentum bileşenlerinin *negatifler*idir. Bu seçim §20.2'deki yorumlarımla uyumludur çünkü artık (genel Lagrange/Hamilton formalizminin q'su yerine) x kullanıyorum.

[3] Bu kez bağımsızlık $\mathcal{H}$'nin korunan bir *toplam enerji* biçimindeki yorumunun sürdürülebileceğini garanti eder. Okur, uzay koordinatlarına bağlı olma durumuna izin verildiğinden, temel düzeyli görelilikçi bir değişmezliğin gerekliliklerinin ayrıca zaman bağlılığına izin verişimizi de talep etmesi gerçeğinden rahatsız olabilir; ve *bkz.* not 20.3. Bununla birlikte *temel* bir düzeyde *hem* zaman *hem de* uzay bağımsızlığı normal bir gereklilik olur.

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x,y,z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)$$

olur.

Bu örnekte her şey pürüzsüz biçimde ilerledi (fakat *nereye*; sonraki bölümü beklememiz gerekecek!). Bununla birlikte genellikle klasik momentumların Hamiltonlarda kuantum olanlarla değiştirilmesi temel olarak kuantum mekaniksel p ve ona karşılık gelen x arasındaki değişmeli olmayış nedeniyle belirsiz olmayan bir işlem olabilir. Örneğin px biçiminde bir *çarpım* terimi klasik Hamiltonda görünürse bunun, ilgili kuantum Hamiltonında px ya da xp ya da belki $\frac{1}{2}(px + xp)$ ya da sonsuz sayıdaki diğer olasılıklardan herhangi biri olarak mı görünmesi gerektiği açık değildir. Bu tür bir anlam bulanıklığı *çarpan–düzenleme problemi* olarak adlandırılır. Pek çok pratik durumda bu bulanıklık, bazı "belirgin" seçimlerin varlığı sıkça ortaya çıktığından, pek önemli olmayabilir. Seçim, örneğin bir simetri ya da değişmezlik gereksinimi gibi başat bir yönlendirici ilke tarafından ya da belki zorlayıcı fiziki ya da matematiksel sezgisel ya da estetik bazı talepler tarafından yönetilebilir. Ya da bazen o, her durumda eşdeğer kuantum kuramlarıyla sonuçlanan o farklı alternatiflerden olabilir. Yine de bu tür belirsizliklerin var olması gerçeği bize, bazı verili klasik kuramları "kuantizasyon" işleminin bazen ciddi seçim konularını da içerebileceğini söyler.

$x^1,\ldots,x^N$ koordinatlarının seçimine ilişkin "genellik"le ilgilenen bağlantılı bir konu mevcuttur. §§20.1, 2'den, $\mathcal{C}$ düzenleme uzayı üzerindeki $q^1,\ldots,q^N$ genellenmiş koordinatlarına ilişkin seçimimizde bütünsel serbestliğe izin verildiğini anımsayın. Şunu sorabiliriz: bu bütünsel serbestlik kuantum kuramına geçtiğimizde hâlâ izinli midir? Aslında yanıt, her q^a'ya ilişkin klasik p_a eşlenik momentumunun basit biçimde $-i\hbar\partial/\partial q^a$ biçiminde "kuantize olmasını" bekliyorsak "hayır"dır. Konu oldukça hassastır ve bizi *geometrik* kuantizasyon olarak bilinen büyüleyici alana götürür.[4] Bu, "kütleçekim alanının kuantize olmasının" ya da yalnızca eğik bir uzayzaman ardalanındaki kuantum alanlarının tartışılmasının önerilmesine göre genel görelilikle ilişkisi içinde özel bir öneme sahiptir. (Eğik bir ardalandaki kuantum kuramı konusuna §30.4'te döneceğim.) Bununla birlikte uygun biçimde dikkatli olduğumuz sürece yalnızca düz olanlardan daha genel olan koordinatlardan kaçınabileceğimiz pek çok standart durum söz konusudur. Özellikle, açısal koordinatları kullanmak faydalıdır ve böylece eşlenik momentumlar açısal momentumlar olur. Açısal momentumla daha sonra ilgileneceğiz (§22.8 ve görelilikçi durumla ilgili §22.12).

[4] *Bkz.* Woodhouse, 1991.

21.3 Schrödinger'in denklemi

En azından şimdilik bu çarpan düzenleme ve genellenmiş koordinatlar vb konularını göz ardı edelim ve kendisinden memnun olduğumuz bir kuantum mekaniksel Hamiltona sahip olduğumuzu düşünelim. Onu hangi kullanıma sokmalıyız? Yanıt onun, bir kuantum sisteminin zamanla nasıl geliştiğine ilişkin anlayışımıza temel olan, *Schrödinger denklemi* olarak bilinen o denklemde kritik bir rol oynamasıdır. Aslında bu denklemin formu, üstte zaten oluşturulmuş olan kurallarca etkin biçimde belirlenir. Bu durum nasıl işler? İlk olarak, çevirici denklemlerimizin tümünün en sağ tarafında görünmeyen biçimde gizlenmiş olan ψ "görünmez" fonksiyonunu görünür hale getirmeliyiz. Sonuçta Hamilton artık, tüm bu $\partial/\partial x$'lerden kaynaklı olarak bir işlemcidir ve kendi en uç sağ tarafında, üzerine (en azından potansiyel olarak) işleyebileceği bir şeylere gerek duyar. Schrödinger denklemi, bir zaman akış denklemi olarak, artık ψ'yi zamanla birlikte değişir hale getireceği için ψ'yi tüm uzamsal x^a'larımız gibi t'ye ilişkin bir fonksiyon olarak yazmamız gerekir:

$$\psi = \psi(x^1, \ldots, x^N; t).$$

Bununla birlikte p_a'lara bağlı olamaz çünkü bu nicelikler artık "bağımsız değişkenler" değildir fakat x^a'lara göre türevler olarak yorumlanmalıdır. Bu tür bir ψ fonksiyonu *dalga fonksiyonu* olarak adlandırılır. Bu, sistemin *kuantum hali*ni sunar. Dalga fonksiyonlarına ilişkin fiziki yoruma daha sonra geleceğiz.

t'ye göre türev alma buraya nasıl oturur? Bu nokta Schrödinger'in dikkat çekici zaman akışının devreye girdiği yerdir. §20.2'den (klasik zaman bağımsız) Hamiltonın, sistemin toplam enerjisini gösterdiğini anımsayın. Ayrıca kuantum kuramımız göreliliğin gereklilikleriyle uyumlu olacaksa (tekil bir parçacık için) $p_a = \mathrm{i}\hbar\partial/\partial x^a$ kuralının uzamsal üç bileşene olduğu gibi $a = 0$ bileşenine de genişlemesi gerektiği gerçeğini belirtelim (*bkz.* §18.7). Buna göre, "kuantizasyon" işleminde, enerjinin yeri zamana göre türev alma işlemi tarafından alınmalıdır ($E = \mathrm{i}\hbar\partial/\partial t$). Schrödinger denkleminin ifade ettiği tam olarak, Hamiltona ilişkin toplam enerji yorumuna ait bu "kuantum rolü"dür:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(\frac{\mathrm{i}\hbar\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\mathrm{i}\hbar\partial}{\partial x^N}; x^1, \ldots, x^N\right)$$

olmak üzere

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi.$$

Basit bir örnek olarak üstte §21.2'de verilen bir kuantum Hamiltonına ilişkin belirli durumu kullanarak artık m kütleli tekil bir parçacığa ilişkin

Schrödinger denklemini enerji içeriği $V = V(x, y, z)$ olan dışsal bir alanda hareket ederek yazabiliriz:[21.5], [21.6]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi.$$

Elbette momentum ve enerjinin yerlerinin türev işlemcileri tarafından tüm bu yer değiştirmeleri epeyce matematiksel saçmalık gibi görünür ve bu tür şirinliklerin bir boksörün yumruğu ya da bir golfçünün sopasını sallaması tarafından ortaya çıkan momentumla ne ilgisi olduğunu sorabiliriz. Elbette sorabiliriz! Kuantum mekaniğine göre her şey bununla ilgilidir. Momentuma ilişkin kilit nokta onun korunmasıdır ve alıcısı üzerindeki esintiye ilişkin etki basit olarak bu korunumun kaçınılmazlığıdır. Momentum bir yerlere gitmelidir; korunduğu için öylece kaybolamaz. Aynısı enerji için de geçerlidir.

Kuşkucu okur, *klasik* Hamiltoncı kuramda enerji ve momentum korunumuna zaten kesin olarak sahip olduğumuzdan, şöyle şikâyet edebilir: fiziki bir nicelikle etkin biçimde cisimden soyutlanmış bir türev işlemcisi arasında böylesi tuhaf bir belirlemeye, ne tür bir faydası olursa olsun, niçin gerek var?[21.7] Buna yanıt vermeye girişmek ve önermeyi daha makul hale getirmek üzere deneye başvurulması gerekir. (Bu tür saçma görünümlü bir önerme öteki türlü pek de kuvvetli olamaz!) Ayrıntılı deneysel konular burada ele alabileceğim şeyler değil fakat devasa miktardaki deneysel kanıtın ortaya koyduğu asıl nokta frekans ve enerji arasında var olan dolaysız bir ilişki ve buna bağlı olarak dalga sayısıyla (dalga boyunun tersi) momentum arasındaki ilişkidir; dahası ilişkilerin tüm olgularda evrensel olduğu görünür. Bunun "$p_a = i\hbar\partial/\partial x^a$"yla olan bağlantısını §21.5'te göreceğiz. Bu arada, enerji ve momentumun gerçekte bu tür bir

---

[21.5] Bu Schrödinger denklemini, sabit bir Newtoncı $V = mgz$ kütleçekim alanındaki m kütleli bir parçacık durumunda açık biçimde çözün. (Buradaki m dünya yüzeyi üzerindeki yükseklik ve g aşağıya doğru olan kütleçekim ivmesidir.)

[21.6] $X = x$, $Y = y$, $Z = z - 1/2t^2 g$, $T = t$ koordinatlı serbest düşüş sistemine geçerek alıştırma [21.5]'teki Schrödinger denkleminin $\psi = e^{i(\frac{1}{6}mt^3g^2 + mtzg)}\psi$ dalga fonksiyonuyla birlikte kütleçekim alanından yoksun duruma dönüştüğünü gösterin. Bu bize, Einstein'ın eşdeğerlik ilkesinin (*bkz.* §17.4) kuantum sistemlerine uygulanmış haliyle ilgili olarak ne söyler? (§21.9'a dikkat edin.)

[21.16] 16'ya bağlı alıştırma:
$-\frac{1}{2}\hbar\log 2$çarpanının nasıl gerekçelendirildiğini görebiliyor musunuz? Yarı ömür bozunma olasılığının yarıya inmesi için gerekli zamandır.

[21.7] $\mathcal{H}$ kuantum Hamiltonı bir öteleme değişmezliğine sahip olduğunda, x^3 konum değişkeninden bağımsız olmak üzere diyelim, ilgili p_3 momentumunun, p_3 işlemcisinin $\partial/\partial t$ zaman akışıyla değişmeli olması anlamında korunduğunu gösterin. Bu değişme özelliğinin niçin korunumu ifade ettiğini ileriki yorumların ışığında açıklayın.

"dalgalı" ilişkiye sahip olduğuna inanmaya ilişkin bazı deneysel nedenlere göz atalım.

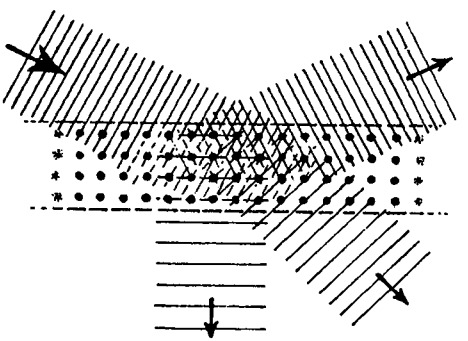
21.4 Kuantum kuramının deneysel ardalanı

Bu tür ilişkinin belki de en dolaysız görünümü kristal yapılı malzemelerde ortaya çıkar. Bu tür yapılarda kristalin atomik düzenlemelerinde uzamsal bir periyodik oluşa sahip oluruz. C. J. Davisson ve L. H. Germer (1927) tarafından gerçekleştirilen ünlü bir deneyde gösterildiği üzere uygun bir başlangıç 3–momentum seçimine sahip elektronlar bu tür bir malzemeye doğru fırlatılırsa bu durumda malzemeden belirli çok özel açılarla sapma göstererek geçerler (ya da yansırlar). Bu yön ve açıların, kristal kafesinin periyodik doğasıyla ilişkili olarak, belirgin biçimde gelen ya da ayrılan 3–momentumlara bağlı olduğu bulunur. Bu deneye dayalı sonuçların açık bir anlamı, elektronların 3–momentumlarıyla periyodik yer değiştirmeye ilişkin uzaklık arasında ters orantılı kesin bir ilişki bulunmasıdır; *bkz.* Şekil 21.2. Aynısı diğer türdeki parçacıklar için de geçerlidir. Sonuç, p momentumlu bir parçacığın, bir dalga gibi periyodik bir şey olmasının görülmesidir. Burada parçacığın λ dalga boyuyla p momentumu arasında terslik denklemi uyarınca evrensel bir ($h = 2\pi\hbar$ Planck sabitini içeren)

$$\lambda = hp^{-1} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

bağıntısı söz konusudur.

p momentumuna sahip bir parçacıkla ilgili λ dalga boyu, 1923 yılında madde biçimli tüm parçacıkların üstteki denklemle verilen bir dalga boyuyla birlikte dalga benzeri bir doğaya sahip olduğunu ilk olarak ileri süren son derece öngörülü Fransız aristokrat ve fizikçisi Prens Lois de Brog-



Şekil 21.2 Davisson–Germer deneyi. **p** *3–momentumlu bir elektron huzmesi periyodik biçimli kristal yapıdaki bir maddeyle karşılaşır. Saçılma ya da yansıma atom biçimli dizilim elektronlarınkiyle, bunlar,* h*'nin Planck sabiti olduğu* $\lambda = h/p$ *uyarınca,* **p** *momentumunun büyüklüğüyle ilişkili bir* λ *dalga boyuna sahip dalgalar olarak değerlendirilmek üzere, eşleştiğinde ortaya çıkar.*

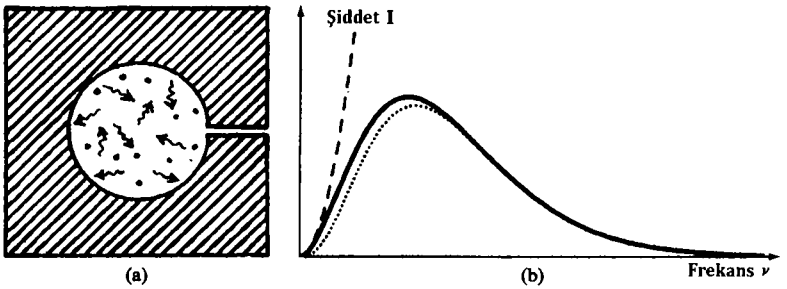
lie'nin ardından *de Broglie* dalga boyu olarak adlandırılır. Dahası parçacık göreliliğin gerekliliklerivle uyumlu olarak (*bkz.* §18.7) ayrıca birazdan geleceğimiz

$$E = h\nu = 2\pi\hbar\nu$$

Planck denklemi tarafından, kendine ait E enerjisi biçiminde verilen bir ν frekansına da sahip olmalıdır.[21.8] Kendi durağan çerçevesinde parçacığın enerjisi, μ durağan kütle olmak üzere, Einstein'ın $E = \mu c^2$'sidir, böylece o $\mu c^2/2\pi\hbar$, diğer bir deyişle $\mu c^2/h$, frekansıyla esaslı bir biçimde ilişkilidir.

Bu tür düşünme biçimi sıradan bir parçacığın dalga benzeri davranış gösterdiği sonucuna, bu davranış, parçacığın durağan kütlesiyle Planck ve de Broglie denklemlerince belirlenmiş evrensel bir ilişkiye sahip olmak üzere, yol açtı. Bununla birlikte önceki iki on yılda bunun bir karşıtı, başlangıçta saf biçimde dalga benzeri olan kavramların, temelde ışığın bileşenleri olarak (§19.2'den anımsayın) Maxwell'in titreşen elektrik ve manyetik alanlarının, yine Planck ve de Broglie denklemleriyle uyumlu şekilde, ayrıca *parçacıklı* bir doğaya da sahip oldukları gösterilerek zaten ortaya konmuştu. Buna ilişkin en ikna edici kanıt, ilk olarak 1887'de Heinrich Hertz tarafından gözlenen ve 1902'de Philipp Lenard tarafından gösterilen en karışık görünümleri Einstein tarafından 1905'te ışığın parçacık tablosu kullanılarak harika biçimde açıklanan *foto elektrik etkisi*ydi. (Einstein'a 1921 yılında Nobel Ödülü kazandıran görelilik kuramı değil buydu!) Foto elektrik etki, gereğince yüksek ν frekansına sahip olan ışık uygun bir metalik malzeme üzerine gönderilip elektron yayınımına neden olduğunda ortaya çıkar. Dolanıklık, yayılan elektronların enerjisinin tümüyle (ν frekansı sabit kabul edilen) ışığın şiddetine bağlı olmaması gerçeğinden kaynaklanır. Bir dalga tablosunda, şiddet ne kadar büyükse dışarı fırlatılan elektronların o kadar fazla enerjiye sahip olması beklenir. Bu gerçekleşmez (aksine şiddet daha büyük olduğunda *daha fazla* elektron dışarı çıkar). Einstein bunu ışığın, bireysel enerjileri Planck'ın $E = h\nu$'since verilen ayrıksı parçacıklar biçiminde resmedilmesi temelinde açıkladı; böylece fırlatılan her elektron, bu tür bir foton tarafından tekil bir atoma çarpmanın sonucu olarak kabul edilir. Einstein Planck'ın denklemini, daha sonra özellikle, başlangıçta kuşkucu Amerikalı deneyci Robert Millikan tarafından 1916'ya kadar olan yıllarda doğrulanan bazı tahminlerde bulunarak oldukça etkili biçimde kullandı.

[21.8] Özel göreliliğin gerekliliklerinin, Planck'ın $E = h\nu$'sinin niçin de Broglie'nin $p = h\lambda^{-1}$'inden türetilmesine olanak sağladığını görebilir misiniz bakın. *İpucu*: Dalganın kendisi boyunca sabit bir değer aldığı $\mathbb{M}$'deki hiper düzlemlerin parçacığa ilişkin 4–hıza Lorentz–ortogonal olduğunu varsayabilirsiniz.



Şekil 21.3 Kara cisim ışınımı. (a) "Kara" boşluk içerilmiş olan ışınımın ısıtılmış çevresiyle T sıcaklığında ısıl dengede olmasını garanti eder. (b) Verili bir T için her bir ν frekansındaki I şiddeti, ν'ye ilişkin belirli bir fonksiyondur. Sürekli eğri Planck'ın ünlü $2h\nu^3/(e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$ denklemiyle verilen (h ve k sırasıyla Planck ve Boltzmann sabitleri olmak üzere), gözlenmiş olana aittir. Kesik çizgili eğri ışınımın klasik dalgalar biçiminde ele alındığı, küçük ν'ler için Planck denklemine yaklaşan fakat büyük ν'ler için ıraksayan Rayleigh–Jeans denklemine, $I = 2kT\nu^2$, aittir. Noktalı eğri ışınımın klasik parçacıklar biçiminde ele alındığı Wien yasasını, $I = 2h\nu^3 e^{-h\nu/kT}$, gösterir.

Aslında ışığın bu kuantum mekaniksel parçacıklı doğası kendini zaten bir miktar daha erkenden ortaya koymaya başlamıştı. Bu, Max Planck'ın kuantum devrimini başlattığı 1900 yılındaydı. Bunu, tümü belirli bir T sıcaklığında tutulan (*bkz.* Şekil 21.3a), kendine ait maddesel "kara"[5] çevresiyle denge halindeki elektromanyetik ışınımla ilgili olan son derece kayda değer *kara cisim ışınımı* analizini sunarak gerçekleştirdi. Şekil 21.3b'de, özgül *I şiddeti* için ν frekansının bir fonksiyonu olarak, k (sıcaklığın ölçüldüğü birimlerle ilgili; *krş.* §27.3) Boltzmann sabiti olmak üzere, çizilmiş olan

$$\frac{2h\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

(doğru) denklemini elde etti.

Planck'ın denkleminin gözlemlerle mükemmel biçimde uyuştuğu görülür. Planck'tan önce kara cisim spektrumunun doğası bir gizemdi. Elektromanyetik ışınıma ilişkin tümüyle dalga biçimli tablo, küçük ν'ler için isabetli fakat büyük ν'ler söz konusu olduğunda şiddetin sonsuza ıraksadığı paradoks halindeki $I = 2kT\nu^2$ Rayleigh–Jeans denklemine yol açmıştı. Işınımı sanki bir klasik biçimli parçacıklar banyosuymuş gibi ele alma te-

[5] "Kara" terimi burada ışınımı çevreleyen cismin (mümkün olduğunca yakın biçimde) tümüyle soğurucu doğasıyla ilgilidir. Bu ilk deneylerde ışınımı içermek üzere, iç hacmi dışarıya bağlayan oldukça dar bir açıklığa sahip, neredeyse tümüyle kara bir küresel boşluk kullanıldı. Bununla birlikte çevreleyen cisim sıcaklık nedeniyle akkor haline olabilir ve pek de kara görünmeyebilir.

melinde bir "gerekçelendirme" verilebilen, büyük ν'ler için isabetli olan belirgin bir gelişme Wien'in $I = 2h\nu^3 e^{-h\nu/kT}$ önermesiydi. Planck'ın kendi denkleminde göründüğü haliyle, son derece ufak değeri yaklaşık $6{,}62\times10^{-34}$ Joule saniye olarak bulunan h niceliği kendisi tarafından Doğanın *yeni* bir doğal sabiti (artık *Planck sabiti* olarak adlandırılmaktadır) olarak önerildi. Planck denklemini elde etmek üzere kendisini, elektromanyetik salınımların yalnızca, ayrıca §23.7'de geleceğimiz (kuantum mekaniksel olarak doğru) Bose–Einstein istatistiğinin şaşırtıcı biçimde habercisi durumundaki "çılgın" bir istatistiksel hesaplamayı benimsediği üstteki

$$E = h\nu$$

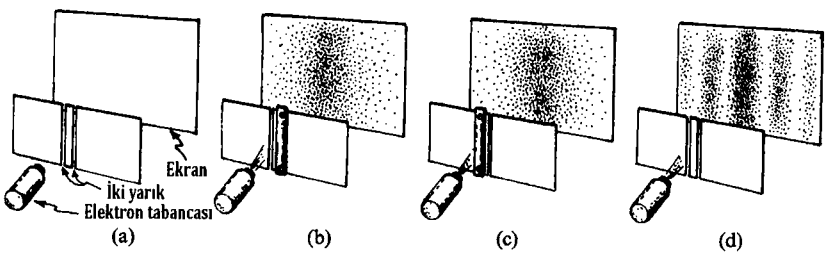
denklemi uyarınca, salınımın ν frekansıyla dolaysız biçimde ilişkili olan belirli E enerji demetleri halinde soğurulup yayılabildiğine ilişkin görüşe zorlanır buldu.

Buradaki fiziki karışıklık, elektromanyetik etkiler, her ne kadar artık parçacık özelliklerine sahip görünseler de zamanında yalnızca dalgalar *olarak* düşünüldüğünden, bir kristalle karşılaşan elektronlar durumundakinin diğer türlüsüydü. Planck sabitinin Dirac biçimini kullanarak $E = 2\pi\hbar\nu$ olduğunu buluruz; böylece ν^{-1} salınımının zaman periyodu, dalga boyunu momentumla ilişkilendiren daha önceki denklemimize ($\lambda = 2\pi\hbar/p$) karşılık gelen denklemi, diğer bir deyişle $\nu^{-1} = 2\pi\hbar/E$'yi sağlar. Bugünlerde Planck bağıntısının (Einstein, Bose ve diğerlerinin ileriki öngörülerini izleyerek) yalnızca "elektromanyetik alan salınımları"yla değil fakat ayrıca, Einstein'ın yalnız kalmış orijinal öngörülerinin kabul edilir hale gelmesi yıllar sürmüş olsa da, *gerçek* "parçacıklar"la, Maxwell elektromanyetizmasının fotonlar olarak adlandırdığımız kuantasıyla da ilgili olduğunu anlıyoruz. Foto elektrik etkinin bu başarılarını izleyen doğrulamalar arasındaki biri, Arthur Compton'ın (1923) yüklü parçacıklarla karşılaştıklarında fotonların aslında, §18.7'nin görelilikçi dinamiğiyle uyumlu biçimde, tam olarak kütlesiz parçacıklar gibi davrandığını gösteren kritik deneyiydi (*bkz.* §25.4, Şekil 25.9). Buradan hareketle enerji ve momentumun ikisi de (enerjiyle ilgili zamana ait ve momentumla ilgili uzaya ait) bir periyotla ters orantılı biçimde, bu periyot her zaman $2\pi\hbar$ biçiminde ölçeklenmek üzere, ilişkilidir.

Parçacıkların dalga olarak ve dalgaların parçacık olarak davranabilmesi gerçeğiyle yüzleşme zorunluluğumuza ilişkin en ikna edici (ve en iyi bilinen) nedenlerden biri *çift–yarık deneyi*dir.[6] Burada bir parçacık kay-

[6] Bu deneye ilişkin açıklamalarımda, temel noktaya açıklık kazandırmak üzere tüm pratik zorlukları bir kenara bırakıp durumu idealize etmekteyim.

nağına ve bir algılayıcı ekrana sahibiz. Kaynak ve ekran arasında, oldukça dar bir çift paralel yarığa sahip bir engel bulunur; *bkz.* Şekil 21.4a. Ekrana doğru bir seferde bir parçacığın yayıldığını varsayarız. Bir yarık açık ve diğeri kapalı olarak başlarsak bu durumda ekranda, kaynaktan gelen parçacıklar kendisine çarptığında her seferde bir adet oluşacak şekilde rasgele bir nokta örüntüsü görülecektir. Örüntü şiddeti (en büyük nokta yoğunluğu anlamında), bekleneceği üzere, kaynağı yarığa bağlayan düzleme yakın bir merkezi şeritte en yüksek olur ve merkezi şeritten iki yöne doğru da düzenli biçimde azalır (Şekil 21.4b). Bu örüntü, deney diğer yarığın açık olduğu şekilde yapıldığında da sonuç olarak aynı olur (Şekil 21.4c). Burada karışıklık söz konusu değil fakat deney artık her iki yarık da açık olarak bir kez daha gerçekleştirilirse sıra dışı bir şey ortaya çıkar; *bkz.* Şekil 21.4d. Parçacıklar ekran üzerinde hâlâ her seferde bir nokta oluşturur fakat şimdi paralel şiddet bantlarına ilişkin dalgalı bir *girişim* örüntüsü söz konusu olur. Hatta kaynaktan gelen parçacıkların ekran üzerinde asla ulaşamadıkları bölgeler olduğunu, yalnızca bir ya da diğer yarık açık olduğunda parçacıkların o bölgelere mükemmel biçimde mutlu olarak ulaşabilmeleri gerçeğine karşın, görürüz. Parçacıklar ekran üzerindeki saptanmış konumlara her seferinde bir adet olacak şekilde ulaşsa da ve bir parçacığın ekranla buluşmasına ilişkin her olay kaynaktaki belirli bir parçacık yayma olayıyla belirlenebilse de parçacığın kaynak ve ekran *arasındaki* engeldeki iki yarıkla belirsiz karşılaşmasını da içeren davranışı, dalga/parçacık bu karşılaşma sırasında her iki yarığı da hissetmek üzere, bir dalganınki gibidir. Dahası, bu en acil amaçlarımızla ilgili özel önemde bir konudur, ekran üzerindeki bantlardaki boşluk bize dalga/parçacığımızın



Şekil 21.4 (a) Çift yarık deneyiyle ilgili düzenek. İki yarık arasından ekrana doğru bir seferde bir elektron yayılır. (b) Sağ taraftaki yarık kapalıyken ekran üzerindeki örüntü. (c) Sol taraftaki yarığın kapalı olduğu aynı durum. (d) Her iki yarık da açıkken girişim ortaya çıkar. Ekran üzerindeki bazı bölgelere, yarıklardan biri ya da diğerinin kapalı olduğu durumda ulaşılabilirken artık ulaşılamaz.

dalga boyunun ne olduğunu söyler ve bu λ dalga boyu aslında parçacığın p momentumu biçiminde daha önceki aynı denklemle, diğer bir deyişle $\lambda = 2\pi\hbar/p$'yle verilir.

21.5 Dalga parçacık ikiliğini anlamak

Tüm bunlar kalın kafalı şüphecinin itiraz ettiği gibi de olabilir fakat bu bizi hâlâ enerji momentumla bir işlemci arasındaki saçma görünümlü saptamayı yapmaya zorlamaz! Gerçekten yapmaz fakat bize sunulan bir *mucize*yi reddetmemeliyiz. Bu ne mucizesidir? Mucize, deneye dayalı, dalgaların parçacık ve parçacıkların dalga olduğuyla ilgili gerçeklere ilişkin görünüşteki bu büyük saçmalıkların tümünün güzel bir matematiksel formalizm içerisinde, momentumun gerçekte "konuma göre türev alma"yla ve enerjinin "zamana göre türev alma"yla belirlendiği bir formalizm içerisinde birleştirilebilir olmasıdır.

Bu formalizm gizemli dalga parçacık ikiliğini anlamamıza nasıl yardım eder? Dalga/parçacığımızı tanımlamak üzere, bize, uzam ve zamanla ilgili üstte önerilen nicelikte dalga benzeri periyodik oluşa sahipken parçacığın berrak biçimde tanımlanmış bir P_a 4–momentumunu sağlayabilen matematiksel bir kavrama gerek duyacağız. (Artık *büyük* harf P'yi kullanıyorum çünkü bu belirli örnekte parçacığımızın sahip olduğu açığa çıkabilecek belirli bir "klasik" 4–momentum değerine atıfta bulunuyorum. "Kuantum 4–momentumu"nu hâlâ bir türev işlemcisince tanımlanır biçimde düşünürüz.) Bu tür doğal bir dalga benzeri matematiksel işlem,

$$\psi(x^a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P_a x^a/\hbar}$$

biçimindeki belirli uzam zamansal bağımlılıktaki bir dalga fonksiyonu (*bkz.* §5.3) olur (bir düzlem dalga). Bu nicelik $P_a x^a$'yı $2\pi\hbar$'la büyütürsek yine kendisi haline gelir (üsse $-2\pi\mathrm{i}$ ekleyeceğinden ifade $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}} = 1$'le çarpılır). Öyleyse $2\pi\hbar/P_0$'lık zamansal bir periyodikliğe ve x_1–yönünde ve diğer üç uzamsal yönde de benzer şekilde, $2\pi\hbar/P_1$'lik uzamsal bir periyodikliğe sahip olur. Bu durum üstte istenmiş olan gerekliliklerle tam olarak uyumludur.

Peki ama bu belirli işleme özel olan şey nedir? Bu,

$$p_{\boxtimes} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x^a}$$

kuantum momentum işlemcimize ilişkin *öz vektör* olarak adlandırılan şeydir. Bunun anlamı bu işlemciyi üstteki $\psi(x^a)$'ya uygularsak yine basit biçimde $\psi(x^a)$'nın sabit bir katını elde edecek olmamızdır (§6.5):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x^a}\psi(x^b) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^a}e^{-iP_b x^b/\hbar} = P_a e^{-iP_b x^b/\hbar} = P_a\psi(x^b).$$

Bu sabit çarpanın aslında tam olarak, denklemimizin sahip olmasını istediğimiz (klasik) P_a 4–momentumu olduğuna dikkat edin. Bu nedenle $\psi(x^a)$ üstte verilmiş olan gibi doğru biçime sahip olduğunda, gizemli $\boxtimes_a = i\hbar\partial/\partial x^a$ kuantum momentumumuz bu ψ'ye uygulandığında kendisini klasik, kestirme P_a momentumuna çevirir:

$$p_a\psi = P_a\psi,$$

fakat bunu başka tür durumlar için yapmaz. Üstteki ψ'nin, 4–momentumla ilgili bir *belirli değere* sahip olduğunu söyleriz ve onu bir *momentum durumu* olarak adlandırırız. Şans eseri, klasik şekilde saptanabilir bir belirli P_a momentumuna sahip serbest düşüş halindeki bir parçacığı, p_a kuantum işlemcisinin P_a öz değerine sahip öz vektörü olan bu ψ dalga fonksiyonunca tanımlanır biçimde düşünmek durumundayız. Belirli bir klasik momentuma sahip dalga fonksiyonları aslında yalnızca kuantum momentum işlemcilerinin öz fonksiyonları olanlardır.

§13.5'te çizgisel $\boldsymbol{T}$ işlemcisine ilişkin bir *öz vektör* kavramının, bu ona ait *öz değer* olarak adlandırılan bir λ skaler niceliği için $\boldsymbol{Tv} = \lambda\boldsymbol{v}$ olacak şekildeki bir $\boldsymbol{v}$ vektörü olmak üzere, ortaya konduğunu anımsayın. §13.5'te temel olarak *sonlu* boyutlu vektör uzayları ve onların doğrusal dönüşümlerine atıfta bulunmamız dışında bu tam olarak, $\boldsymbol{T}$ işlemcisi yerine $i\hbar\partial/\partial x^a$ ve λ yerine P_a'nın kullanıldığı burada sahip olduğumuz durumdur. Burada olası $\psi(x^a)$'lara ilişkin **W** vektör uzayıyla ilgileniyoruz ve bu bir *sonsuz* boyutlu vektör uzayı olacaktır. (Bu bir vektör uzayıdır çünkü x^a fonksiyonlarını birbirleriyle toplayabilir ve bu fonksiyonları sayılarla çarpabiliriz ve her durumda yalnızca yeni x^a fonksiyonları elde ederiz. Sonsuz boyutludur çünkü örneğin, üstte ele almakta olduğumuz belirli türdeki tüm fonksiyonlar, P_a'ya ilişkin sonsuz sayıda farklı seçim için, çizgisel olarak bağımsızdır.)[21.9]

Öz vektörler (ya da kuantum mekaniğinde sıklıkla adlandırıldığı gibi *öz durumlar*) kuantum formalizminde kilit bir rol oynar. Kuantum mekaniği dilinde değişik işlemciler (ele almakta olduğumuz $p_a = i\hbar\partial/\partial x^a$ gibi ya da daha sonra ele alacağımız konum ya da açısal momentum gibi diğerleri) *dinamik biçimli değişkenler* olarak adlandırılır. Başlangıçta basit olarak, tüm işlemcilerimizin en sağ tarafında gölgeler içinde konumlanır biçimde düşündüğümüz "görünmez fonksiyon" rolünü oynayan ψ dalga

[21.9] Niçin? Burada çizgisel bağımsızlık sürekli toplamları, diğer bir deyişle integralleri içerebilir.

fonksiyonumuz artık kesin olarak etkin bir rol üstlenmeye başlıyor. Onu, üstte belirtildiği üzere fiziki sisteme ilişkin *durum* biçiminde düşünürüz. Bazen o (bu gerçekten de, ψ için kullanageldiğim uzay ve zaman koordinatları biçimindeki belirli tanımlamaların geçerli olmasının gerekmediği daha genel bir terim olmasına rağmen) bir *durum vektörü* olarak adlandırılır. Üstte ele alınan 4–momentum durumundaki olduğu gibi bazı dinamik biçimli değişkenlerin *öz durumları* o belirli dinamik biçimli değişkenlerin "belirli bir değer" olarak adlandırılan şeye sahip oldukları durumlardır ve öz değer, dinamik değişkenin o durumla ilgili olarak sahip olduğu gerçek "değer"dir.

Momentum öz durumumuzu bu noktaya kadar özel göreliliğin gerekliliklerivle uyumlu olarak tümüyle 4–boyutlu bir uzayzaman biçiminde ele almakta olduğum gerçeğine değinilmelidir. Bu durum, (§18.7'deki gibi $P_a = (E, -\mathbf{P})$ ve $x^a = (t, \mathbf{x})$ olmak üzere)

$$e^{-iP_a x^a/\hbar} = e^{-iEt/\hbar} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$$

ifadesinin[21.10] hem onu $\mathbf{P}$ öz değeriyle birlikte sıradan bir uzamsal

$$\mathbf{p} = (-p_1, -p_2, -p_3) = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

3–momentumlu öz durum haline getiren *uzamsal* bağımlılık hem de onu E enerji öz değeriyle birlikte Schrödinger denkleminin bir çözümü yapan *zamansal* bağımlılığı içermesi anlamında tasarrufludur. Bununla birlikte, bir bütün olarak Schrödinger denklemi zamanı uzamsal değişkenlerden farklı biçimde ele alması anlamında görelilikçi bir düzen değildir, öyleyse bu bölümün ileriki tartışmalarında görelilikçi olmayan açıklamalara dönüş yapmam daha iyi olur.

21.6 Kuantum "gerçekliği" nedir?

Bu ayrıntılı konulardan bir anlığına uzaklaşalım ve tüm bunların bize "gerçeklik"le ilgili ne söylemeye çalıştığını soralım. Dinamik biçimli değişkenler "gerçek şeyler" midir? Ya da gerçekliği yalnızca dinamik biçimli değişkenlerin (ya da diğer işlemcilerin) öz değerleri olarak ortaya çıkan görünüşte "klasik biçimli" niceliklere ulaştığımızda mı elde ettik demeliyiz? Aslında kuantum fizikçileri bu konuyla ilgili çok açık olmaya meyilli değildir. Çoğu belirgin biçimde "gerçeklik" konusuna yönelmekle ilgili olarak bile huzursuzdur. "Pozitivist" duruş dedikleri şeyi kabul ettiklerini iddia

[21.10] Bunu niçin bu şekilde bölebiliyorum?

ederler ve "gerçekliğin" ne anlama gelmesi gerektiğini ele almayı, bu tür bir araştırmayı "bilim dışı" olarak değerlendirip reddederler. Formalizmimizde sorgulamamız gereken tüm şeyin bir sisteme sorabileceğimiz sorulara ilişkin uygun yanıtlar vermesi ve bu yanıtların gözleme dayalı gerçekle uyum göstermesi olduğunu iddia ederler.

Kuantum formalizmindeki, bir kuantum sistemiyle ilgili herhangi bir şeyin "gerçekten" gerçek olduğuna inanmamız gerekirse bu durumda bence bu kuantum gerçekliğini açıklayan dalga fonksiyonu (ya da durum vektörü) olmak zorundadır. (Başka bazı olasılıklara daha sonra, 29. bölümde yöneleceğim; ayrıca §22.4'ün sonuna da bakın.) Kendi bakış açım "gerçeklik" sorununun, özellikle kuantum formalizminin fiziğin tümünde evrensel olarak geçerli olduğu görüşü (pek çok fizikçinin yapar göründüğü gibi) benimsenirse, kuantum mekaniğinde adreslenmek *zorunda ol*duğudur çünkü herhangi bir kuantum gerçekliği söz konusu değilse hiçbir düzeyde (bu bakışta tüm düzeyler kuantum düzeyi olmak üzere) hiçbir gerçeklik söz konusu olamaz. Bana göre gerçekliği tümüyle bu biçimde yadsımanın anlamı yok. Geçici ya da yaklaşık bile olsa fiziki bir gerçeklik kavramına gerek duyarız çünkü onsuz, nesnel evrenimiz ve buradan da bilimin tümü düşünceli bakışlarımız huzurunda öylece uçup gider!

Peki öyleyse, durum vektöründen ne haber? *Onu* gerçekliği gösterir olarak kabul etmekteki zorluk nedir? Niçin fizikçiler bu felsefi duruşu benimsemekle ilgili sıklıkla aşırı isteksizlik ifade ederler? Zorlukları anlamak üzere dalga fonksiyonlarının doğasına ve buna ilişkin fiziki yorumlara daha dikkatli biçimde bakmak zorundayız.

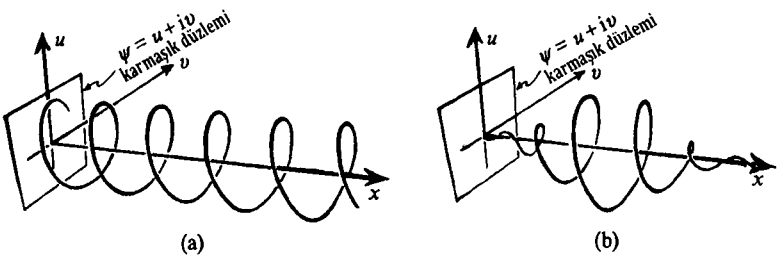
Öncelikle $\psi = e^{iP\cdot x/\hbar}$ momentum durumumuzu (uygunluk adına bunu $t = 0$ zamanında kabul ettim) daha yakından inceleyelim. Bunun hiçbir biçimde sıradan bir parçacık gibi yerelleşmemiş olduğunu belirtelim. O, tüm evrene eşit biçimde dağılmıştır. "Büyüklüğü", kendisine ait $|e^{iP\cdot x/\hbar}|$ modülüyle ölçüldüğü üzere uzayın her yerinde aynı 1 değerine sahiptir (*bkz.* §5.1) Okur, tekil bir parçacıkla ilgili olarak bunun uzamsal bir yönde, yalnızca iyi tanımlı bir momentumla birlikte eğlendirmek üzere sahip olunacak tuhaf bir tablo olduğunu düşünmekle ilgili mazur görülecek. Tekil bir noktada (en azından yaklaşık olarak) yerelleşmiş bir şey biçimindeki bir parçacığa ilişkin sıradan tablomuzun başına ne geldi? Bir momentum durumunun yalnızca bir idealleştirme olduğunu söyleyebiliriz. "Dalga paketleri" olarak adlandırılan bir biçimde benzer durumlara geçersek (mükemmel derecede kesin olarak tanımlanmış değilse de) çok iyi tanımlanmış bir momentuma sahip olmaktan yırtabiliriz. Bunlar, bir yerde büyüklük olarak keskin biçimde tepe yapan dalga fonksiyonları tarafından verilir ve uygun bir anlamda momentuma ait "neredeyse" öz fonksiyondur. Bu

tür dalga paketleri tek boyutta, bir momentum durumuyla bir e^{-x^2} Gauss işlemcisi ya da daha uygun biçimde (A, B ve C gerçel sabitler olmak üzere) genel bir

$$Ae^{-B^2(x-C)^2}$$

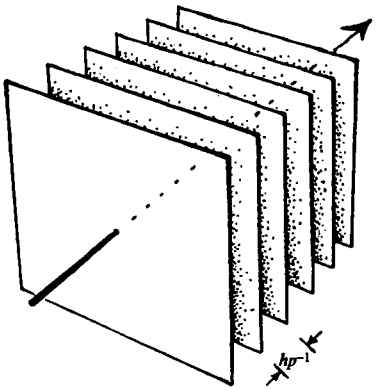
Gauss işlemcisinin çarpımını almak yoluyla açık biçimde sunulabilir. Bu, üstteki ifadede "tepe noktası" $x = C$ noktasında merkezlenmiş, istatistikteki iyi bilinen "çan biçimli" eğridir (buna ait bir gösterim için §27.4'teki Şekil 27.5'e bakın). Üstteki ifadede C'nin bir *karmaşık sayı* olmasına izin vermek yoluyla kesin biçimde ifade edilebilen bu tür bir çarpım alarak elde ettiğimiz dalga paketi ilgi çekicidir.[21.11] Ayrıca tam üç boyutlu uzaydaki dalga paketleri de benzer biçimde, örneğin tepe noktası karmaşık yönde gösterilen bir $Ae^{-B^2(x^2+y^2+z^2)}$ şeklindeki Gauss işlemcisini kullanılarak oluşturulabilir. Her bir durumda, B^{-1} ona ilişkin dağılımın bir ölçüsünü sunar. Aslında, "Heisenberg belirsizlik ilkesi" olarak adlandırılan şeyi temelleyen, "neredeyse" bir momentum durumu olmaya ne derece yakın olduğuyla bağlantılı olarak dağılımının ne kadar küçük olabileceğine ilişkin mutlak bir sınır bulunduğunu söyleyen bir teorem mevcuttur. Bunu §21.11'de biraz daha açık biçimde göreceğiz.

Şimdilik momentum durumları ve dalga paketlerinin gerçekten neye benzediklerine ilişkin daha iyi bir tablo elde etmeye çalışalım. Bir dalga fonksiyonunun karmaşık değerli bir dalga olduğunu ve "dalgalı" karakterinin zorunlu olarak büyüklüğündeki (ya da şiddet) bir salınım olarak görünmesi gerekmediğini aklımızda tutalım. Bir momentum durumu olayında "dalgalı" karaktere sahip olan şey dalga fonksiyonunun *argümanı* (§5.1),



Şekil 21.5 Bir parçacık dalga fonksiyonu: x fonksiyonuna ilişkin bir karmaşık fonksiyon olarak ψ. (a) Bir tirbuşon (p momentumunun öz fonksiyonu) olarak gösterilmiş $e^{-ipx/\hbar}$ momentum durumu. (b) Bir $e^{-A^2x^2/\hbar}e^{-ipx/\hbar}$ dalga paketi.

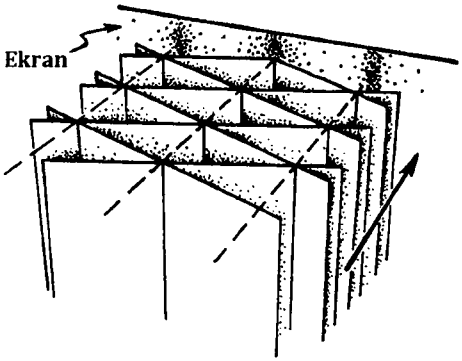
[21.11] Üstte gösterilen ifadede gerçel C sayısının yerine (C ve D gerçel olmak üzere) $C + iD$ koyarak dalga paketinin frekansını ve tepe noktasının konumunu bulun.



Şekil 21.6 p uzamsal 3–momentumun büyüklüğü olmak üzere, hp^{-1} boşluklu bir momentum öz durumuyla ilgili verili faz düzlemleri. (Şekil 21.2'yle karşılaştırın.)

diğer bir deyişle bir çember etrafında ölçülmüş olarak kabul edilen $-P_a x^a/\hbar$'dir; karmaşık düzlemdeki birim çember üzerinde alınan $e^{-iP_a x^a/\hbar}$. Kuantum kuramında dalga fonksiyonunun değerine ilişkin argümana onun *fazı* olarak adlandırmaya eğilimliyiz. Bu fazın o kadar da "bir o yana bir bu yana bükülür" biçimde dalgalı olmadığını görürüz. Şekil 21.5a'da dalga fonksiyonunun belirli bir yöndeki bu davranışını, o yönü sağa doğru uzaklaşan bir açıyla çizerek (resimdeki x ekseni) ve ψ dalga fonksiyonunun alabileceği değerlere ilişkin karmaşık düzlemi (resimde geri kalan u ve v eksenleri) göstermek üzere o yöne dik bir düzlem alarak göstermeye çalıştım (böylece resim o düzlemdeki $\psi = u + iv$'yi çizer). Bu nedenle, resmimdeki x yönü olağan uzaydaki gerçek bir yöne karşılık gelir fakat u ve v yönleri olağan uzamsal yönler değildir; onlar dalga fonksiyonunun olası değerlerine ilişkin karmaşık düzlemi göstermek üzere ortaya konur. Momentum durumumuzla ilgili olarak dalga fonksiyonunun (resmimizin x yönüyle gösterilen uzamsal yöndeki pozitif momentum için sağ–elli olan) bir tirbuşon olduğunu fark ederiz. Şekil 21.5b'de bir dalga paketine ilişkin ilgili resmi çizdim. Bu gerili bir tirbuşona benzer (böylece yalnızca bir dereceye kadar iyi tanımlı bir momentuma sahiptir) fakat bu durumda bu "tirbuşonluk" her iki yönde de azalarak yok olur ve dalga fonksiyonu belirli bir aralık dışında çok küçük hale gelir.

Elbette bu dalgalara ilişkin *toplam* tabloyu elde etmek üzere bunun, uzayın üç boyutunun tamamında gerçekleşmekte olduğunu düşünmeye çalışmak zorundayız. Bunu yapmak zordur çünkü uzamsal boyutlara olduğu kadar karmaşık düzleme uymak üzere de iki ek boyuta (toplamda beş) daha gerek duyarız! Bununla birlikte, yalnızca *sabit fazlı düzlemleri* düşünürsek işler momentum durumu olayında pek de kötü değildir. Bunlar, her bir düzlemle sonraki arasındaki uzaklığın, p (uzamsal) 3–momen-



Şekil 21.7 Şekil 21.4'teki 2–yarık deneyinde ekrana yaklaşan bir elektronun dalga fonksiyonu Şekil 21.6'nın karşılıklı olarak hafif bir açıyla eğilmiş iki düzlem dalgasının bir çakışması olarak değerlendirilebilir. Fazlar uyuştuğunda (kesik çizgiler boyunca) ikisi birbirini güçlendirerek, ekrana ulaşmaya ilişkin en büyük olasılığı ortaya çıkarır. Bu maksimumların ortasında fazlar terstir ve birbirlerini eleyerek elektronun ekrana ulaşma olasılığını sıfırlar.

tumun büyüklüğü olmak üzere, $2\pi\hbar/p$ olduğu, momentum yönüne dik paralel düzlemlerdir. *Bkz.* Şekil 21.6. Bu tür bir açıklama, böylesi şeyleri Şekil 21.2'de yapıldığı üzere bir kristalle karşılaşan foton dalga fonksiyonu tablosu olarak değerlendirmekte faydalıdır. Bu açıklamayı ayrıca yarıkların ekrandan oldukça uzak olduklarını kabul edersek çift yarık deneyi durumunda da kullanabiliriz; böylece her bir parçacığın dalga fonksiyonunu, ekranın yerel bir bölgesine yaklaşırken her biri (yarıkların ekrana olan büyük uzaklığı nedeniyle esasen tek frekanslı bir düzlem dalgası olan) momentum durumu olmaya çok yakın fakat yönleri hafifçe farklı iki parçanın toplamından oluşmuş olarak düşünebiliriz. İki dalga, ekran üzerindeki bazı yerlerde birbirlerini güçlendirirken diğer yerlerde üstte açıkladığım üzere (Şekil 21.4d'de) daha büyük ve daha küçük şiddete sahip bantlar vererek birbirlerini eleyecektir. Bu geometriyi düzlemlerin uzaydaki, her bir dalga bileşeninin kendisine ait fazla ilgili sabit bir değere sahip olduğu bölgeleri gösterdiği Şekil 21.7'de görebiliriz. Böylece her parçanın bireysel olarak aynı şiddete sahip olduğunu varsayarsak, faz dışı olduklarında yok olup faz içinde olduklarında birbirlerini güçlendireceklerdir. Bu bize, gerçekten çift yarık deneyinde gözlenmiş olan şiddet bantlarını sunar.

Evet evet, sabırsız okur söylenmeye başlayabilir fakat *dalgalar* tam olarak böyle davranır. Dalga/parçacıklarımızın dalga/*parçacıklar* olması gerçeğiyle yüzleşmedim! Dalgalarımın karmaşık dalgalar olmasına ilişkin görünüşteki oldukça önemsiz süslemeden ayrı olarak tüm yaptığım, denizdeki sıradan dalgalar ya da ses dalgaları ya da klasik biçimli elektromanyetik alanlardan oluşturulan Maxwell dalgalarında (radyo dalgaları, görünür ışık, X–ışmları, vb) ortaya çıkan bir tür dalga girişimini açıklamaktır. Bununla birlikte iki yarık deneyinin, ısrar etmeye yükümlü olduğum, tüm anlamı, deneyin dalga tablosuyla parçacık tablosu arasındaki

bir çelişkiyi ortaya çıkarmasıdır. Gerçekten de böyle; bu deneyde parçacık doğasına ilişkin en belirgin görünüm, bu küçük ahbaplar ekran üzerine minik işaretlerini, her seferinde bir adet olmak üzere, bıraktıklarında ortaya çıkar.

21.7 Bir dalga fonksiyonunun "holistik" doğası

Burada vurgulanması gereken bir şey söz konusudur. Dalganın yerel şiddeti belirli kritik bir değere ulaştığında ekran üzerinde anbean minik bir beneğin ortaya çıktığı ya da daha çok, ekran üzerinde görünecek minik benek olasılığının dalganın şiddeti arttığında arttığı düşünülebilir. İyi deneme! Buna karşın üstteki (idealize edilmiş haldeki) çift yarık deneyinde açıkladığım üzere bu işlemeyecektir. Çünkü bu yalnızca, tekil yerlerdeki tekil olasılıklar konusu olsaydı, bazen ekran üzerinde, kayda değer şiddetin bulunduğu oldukça ayrı konumlarda iki beneğin görünmesini, kaynaktaki tekil bir parçacığın yayınımını açıklayan yalnızca bir dalga fonksiyonuyla birlikte, beklememiz gerekirdi. Zorluk, parçacıklarımızın elektronlar gibi yüklü parçacıklar olduğunu düşünürsek daha belirgin hale getirilmiş olur. Çünkü, kaynaktaki tekil bir elektronun yayınımı ekrana ulaşan bir çift elektron şeklinde sonuçlanabilse, yalnızca ara sıra bile böyle olsa, bu durumda yük korunumu yasasının çiğnenmesine sahip olmamız gerekirdi. Aynı durum, korunan herhangi başka bir parçacık "kuantum sayısı"nda da, örneğin nötronları kullanmamız gerekseydi baryon korunumunda (§25.6) olduğu gibi, geçerlidir.[21.12] Bu tür korunum dışı davranış devasa boyuttaki deneysel kanıtla büyük uyuşmazlık gösterir. Yine de elektron ve nötronlar, az önce açıkladığım çift yarık deneyindeki davranışla sonuçlanan türde öz girişim gösteri*r*!

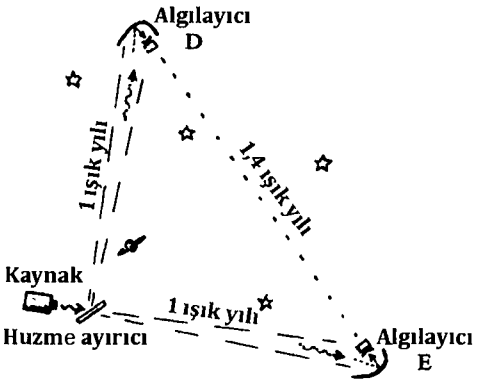
Öyleyse dalga/parçacığı anlamada tam olarak *hiçbir yere* gelmiş olduk; bazı kızgın okurlar haklı biçimde artan bir sabırsızlık içinde kesinlikle itiraz edecektir! Sabredin lütfen, dalga fonksiyonlarımızı yorumlamayı bitirmedik. Dalganın tümünü yalnızca tekil bir parçacığı açıklar biçimde (ya da parçacık "olarak") düşünmek zorundayız. Belirli bir anlamda o, ekran üzerindeki değişik yerlerde ortaya çıkacak bir benek olasılığını belirlese de bu olasılık yalnızca o tek parçacıkla ilgilidir. Bu yorum, dalga fonksiyonunu yerel biçimde, ekran üzerinde bulunan her ayrı yerdeki bir benek

[21.12] Bu tür çift benekli bir görünüm olasılığının böylesi bir tablo uyarınca, dalga fonksiyonu şiddeti biçimindeki benek görünümü olasılığı yasası ne olursa olsun, son derece mümkün olması gerektiğini gösterir. *İpucu*: Ekranı, her birindeki benek görünüm olasılığı eşit olacak şekilde ikiye bölün.

oluşumu olasılığını bağımsız olarak sunar şekilde düşünürsek geçersiz olacaktır. Bir dalga fonksiyonunu bütün bir şey gibi düşünmek zorundayız. Bir yerde bir benek oluşmasına sebep olursa görevini yapmış demektir ve bu belirgin yaratma eylemi onun başka bir yerde de bir benek oluşturmasını yasaklar. Dalga fonksiyonları bu önemli anlamda, klasik fizikteki dalgalardan oldukça farklıdır. Dalganın farklı parçaları, her biri yoluna uzak bir bölgede ne olmakta olduğundan bağımsız biçimde devam eden yerel rahatsızlıklar şeklinde düşünülemez. Dalga fonksiyonları kuvvetli şekilde yerel olmayan bir karaktere sahiptir; bu anlamda onlar tümüyle holistiktir.

Hatta bu noktaya, bir şekilde farklı bir deneysel durumla daha güçlü biçimde ulaşılabilir. Bu bize, bir dalga/parçacığa ilişkin dalga paket tablosunun, parçacık benzeri kuantum davranışını kendi başına açıklamakta oldukça yetersiz kaldığını son derece açık hale getirme ek avantajına da sahiptir. Tıpkı önceki gibi bir parçacık kaynağı olduğunu düşünelim. Bu kaynağın yalnızca bir tek parçacık yaydığını varsayacağız. Bir çift yarığa sahip bir engel kullanmak yerine parçacığın yolu üzerinde *huzme ayırıcı* olarak adlandırılan bir şey olduğunu varsayacağız. Parçacığımızı bir foton olarak düşünmek hayal gücümüze yardımcı olur ve huzme ayırıcının foton dalga paketimizi derin biçimde uzaklaştırılmış iki parçaya bölmesi gereken bir tür "yarı gümüşlenmiş ayna"[7] olduğunu hayal edebiliriz. Kavrayışa ilişkin açıklık için gelin zihnimizde "deney"imizin yıldızlararası uzayda gerçekleştirildiğini canlandıralım (ve okur burada birazcık da olsa pratik olmayan hiçbir şey önermediğime dikkat etmelidir; örneğimiz yalnızca, kuantum mekaniğinin olağanüstü koşullar altındaki çok temel bazı öngörülerini göstermeye hizmet edecektir). Dilersek fotona ait dalga fonksiyonunu, kaynaktan derli toplu küçük bir dalga paketi biçiminde çıkan fakat huzme ayırıcıyla karşılaştıktan sonra kendisini, diyelim ki birbirine dik yönlerde, bir dalga paket parçası huzme ayırıcıdan yansıtılacak ve diğer dalga paket parçası onun içinden aktarılacak biçimde ikiye bölecek bir şekilde hayal edebiliriz (Şekil 21.8). Tüm dalga fonksiyonu bu iki parçanın toplamıdır. İstersek fotona ait dalga fonksiyonunun fotoğraf levhası ya da başka tür bir algılayıcıyla durdurulmasını seçmekten önce bir yıl boyunca bekleyebiliriz. Artık iki parça birbirinden çok uzakta olacaktır fakat birbirinden 1,4 ışık yılından daha fazla bir uzaklıkla ayrı (iki farklı uzay laboratuvarında) bulunan iki meslektaşa sahip olduğumu hayal edebilirim.

[7] Kesinliğe sahip deneylerde, böylesi bir şeyin gerçek bir gümüşleme içermesi olası değildir fakat o, ince bir saydam malzemenin iki tarafından yansıtılan dalgalar arasındaki girişim etkilerini kullanır.



Şekil 21.8 Ölçülen bir dalga fonksiyonunun yerel olmayan doğasını gösteren kuramsal bir uzay deneyi. Fotona ilişkin dalga fonksiyonu kaynaktan derli toplu küçük bir dalga paketi olarak çıkar fakat huzme ayırıcıyla karşılaştıktan sonra bir ışık yılı uzaklıktaki D ve E algılayıcılarına bir yıl sonra ulaşmak üzere ikiye bölünür. D ve E'den yalnızca biri fotonu kaydedebilir.

Her bir meslektaşım ayrı bir algılayıcıya sahiptir ve her ne kadar iki dalga paket parçasının her biri artık bireysel olarak önemli biçimde dağınık hale gelmiş olsa da meslektaşlarımın ikisi de dağınık dalga paketini toplayıp kendi algılayıcılarına odaklayan parabol biçimli büyük birer yansıtıcı aynaya sahiptir. Kuantum mekaniği ne olacağını söyler? O, aslında fotonu meslektaşlarımdan biri ya da diğerinin algılayacağını fakat *ikisinin birlikte* algılayamayacağını söyler. Bu, klasik bir dalganın yapacağı bir şey değildir. İki meslektaşımın 1,4 ışık yılından daha fazla uzak olduklarını anımsayın. Görelilik aralarından 1,4 yıldan daha az sürede hiçbir sinyalin geçemeyeceğinde ısrarlıdır (§17.8); yine de bir dalga paketi parçasının bir foton ortaya koyması gerçeği, karşılıklı biçimde, 1,4 ışık yılı uzaktaki diğerinin aynı şeyi yapmasını önler. Yalnızca bir yıllık bir zamanda her birinden ne olduğunu öğrenirim ve yalnızca birine bir fotonun ulaştığını görürüm. Her meslektaşın eriştiği dalga fonksiyon parçası, dalga fonksiyonun diğer parçasının neyin peşinde olduğunu "bilir" görünür! Bu deneyi gerçekleştirdiğim her seferinde onlardan biri ya da diğerinin fakat ikisinin de değil, foton aldığını bulurum. Klasik biçimli hiçbir dalga etkisi, dalga fonksiyonunun iki parçası arasında görünürdeki bu "anlık iletişimi" gerçekleştiremez. Kuantum dalga fonksiyonları klasik dalgalardan öylece *farklı*dır.

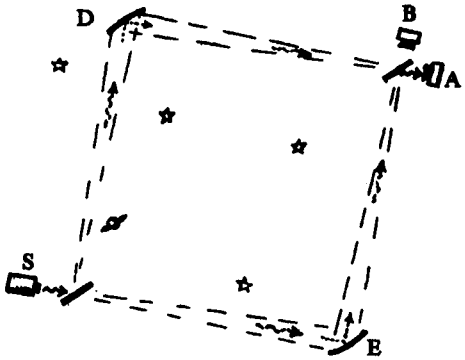
Yine de şüpheci okur hâlâ ikna olmamış olabilir çünkü foton *huzme ayırıcı*da bir yönde ya da diğerinde gitmeye ilişkin seçimini basitçe yapmışsa bu tür hiçbir iletişim gerekmez. Çok doğru. Üstteki deneysel düzeneğin gösterdiği şey bir fotona ilişkin parçacık benzeri görünümdür. Foton yerelleşmiş ve parçacık benzeri biçimde kalacaksa bu durumda hangi yöne gideceğiyle ilgili karar huzme ayırıcıda verilmiş olmalıdır. (Yerelleşmiş bir parçacık eşzamanlı olarak ışık yılı süreleri üzerinden uzatılamaz!)

Bu tür deneyler tümüyle fotonların uğraşmak zorunda olduğu şeyler olsaydı böylece dalga fonksiyonlarına gerek olmazdı. Bununla birlikte huzme ayırıcıdan ortaya çıktıktan sonra foton üzerinde gerçekleştirilebilecek farklı deneyler de mevcuttur. Zavallı minik fotonumuz, ortaya çıkmak üzereyken, meslektaşlarımın ona ilişkin farklı bir alın yazısı tasarlamadıklarını nasıl bilebilir? Her birinin, bireysel olarak fotonu algılamak yerine şu planı hazırlamış olduklarını düşünün. Dalga fonksiyonuna ait kendi parçalarını ayrı ayrı dördüncü bir konuma yansıtırlar ve yansıtılan bu iki parça fazladan bir yıl sonra eşzamanlı olarak ikinci bir huzme ayırıcıyla karşılaşır (Şekil 21.9). Orada, gelen her bir dalga paketi parçası bireysel olarak ikiye ayrılır ve böylece bu huzme ayırıcıdan ortaya çıkan bir yarı, bir A algılayıcısıyla karşılaşmak üzere bir yöne ve ortaya çıkan diğer yarı da başka bir B algılayıcısına varmak üzere diğer yöne gider. (Bu, iki meslektaşımdan her birinin bulunduğu ayrı ortamdan gelen iki dalga paketi parçasının her biri için ayrı ayrı geçerlidir.) Tüm yol uzunlukları uygun biçimde tam olarak ayarlanmışsa (hepsi eşit diyelim), bu durumda dikkat çekici biçimde, ortaya çıkan fotonun algılayıcılardan yalnızca *birini* etkinleştirebileceğini, diyelim ki A, B değil, görürüz çünkü B'deki dalga fonksiyonunun iki parçası arasında yıkıcı bir girişim söz konusuyken A'dakinde yapıcı bir girişim mevcuttur.

Bir fotona ilişkin bütünüyle parçacıklı hiçbir tablo bunu gerçekleştiremez. Dalga/parçacık ikiliğine ilişkin dalga görünümünü açıklamak üzere artık dalga fonksiyonu kesinlikle gereklidir. Foton ilk huzme ayırıcısını terk ederken hangi meslektaşıma doğru yol alacağına ilişkin seçimini çoktan yapmışsa diğer rota ilgisiz hale gelir. Bu durumda sonuç olarak foton ikinci huzme ayırıcıya ulaştığında yalnızca bir yönden gelmiş olur ve *ya* A *ya da* B'ye ulaşmak üzere her iki yoldan da gidebilir. Artık onun B algılayıcısına ulaşmasını engelleyen gerekli yıkıcı girişime ilişkin hiçbir olasılık yoktur. Kayıt yapan algılayıcı her zaman A olduğundan, bu durum, fotonun ilk huzme ayırıcıyı terk ederken seçimini basit biçimde yapmış olması olamaz. Fotonun kullanabileceği alternatif rotaların her ikisinin de foton tarafından ilk huzme ayırıcıdan ikincisine geçişi sırasında eşzamanlı olarak hissedilmiş olması gereklidir.[8]

---

[8] Kuantum mekaniğine ilişkin de Broglie–Bohm kuramı, Bohm ve Hiley, 1994, olarak anılan açıklamada dalga ve parçacık görünümlerinin *her ikisi de* aslında eşzamanlı olarak korunur. Burada parçacık seçimini aslında huzme ayırıcıda yapar fakat dalga her iki rotayı da eşzamanlı olarak incelemeye devam eder. Son huzme ayırıcıya ulaşıldığında, parçacığı A algılayıcısına ulaşmak konusunda bilgilendirip onun B'ye gitmesini yasaklayan şey dalgadır. Bu ilginç fakat "alışılmadık" (ve hâlâ yerel olmayan) bakış açısını §29.2'de değerlendirmeye çalışacağım.



Şekil 21.9 Yıldızlararası bir ölçekteki Mach–Zehnder girişimölçeri. İlk huzme ayırıcıdan ortaya çıkması üzerine bir foton, Şekil 21.8'deki düzenleme yerine dalga fonksiyonu kısımlarının D ve E'de bulunan aynalardan ikinci bir huzme ayırıcısına yansıtılacağını nasıl bilebilir? Bu karşılaşma sonrası fotonu yalnızca A algılayıcısı hissedebilir.

Elbette, üstte açıklanan astronomik ölçekli belirli durumlarımda büyük oranda aşırı hayalperest oldum. Bu tür bir temele sahip hiçbir kuantum deneyinin gerçekten yapılmadığı açıktır! Öte taraftan bu tür deneyin yer temelli versiyonları, ışık yılı yerine belki de metre uzunluğu kullanılarak (sonuncusu bir Mach–Zehnder girişimölçer olarak adlandırılan şey olmak üzere) sıklıkla yapılageldi ve kuantum mekaniğinin beklentileriyle asla çelişilmedi. Kilit bilmece, bir fotonun (ya da başka kuantum parçacığı) kendisi üzerinde ne türde bir deney gerçekleştirileceğini o deney gerçekten yapılmadan önce bir şekilde "bilmek" zorunda görünmesidir. Kendini, (ilk) huzme ayırıcıdan ayrılırken "parçacık modu"na mı yoksa "dalga modu"na mı sokacağını bilmeye ilişkin öngörüye nasıl sahip olabilir?

Kuantum kuramının işleme biçimi parçacığa bu tür herhangi bir öngörü vermek değil fakat bir dalga fonksiyonuna ilişkin yerel olmayan holistik karakteri basit olarak kabul etmektir. Yukarıdaki deneylerin ikisinde de dalga fonksiyonunu ilk huzme ayırıcıda iki parçaya bölünmüş olarak kabul ettik ve dalga/parçacığa ilişkin parçacık benzeri görünüm algılayıcıda yalnızca ölçüm sonuç olarak gerçekleştirildiğinde ortaya çıktı. Ölçüm, dalga fonksiyonunun holistik karakterini parçacığın her zaman yalnızca tek bir yerde ortaya çıkması, bir konumdaki görünümünün herhangi başka bir yerdeki eşzamanlı görünümünü yasaklaması anlamında açık hale getirir.

21.8 Gizemli "kuantum sıçramaları"

Artık daha büyük bir sorun belirmektedir. Bir "ölçüm"ü oluşturan fiziki durumun hangisi olduğunu nasıl biliriz? Bir parçacığa ilişkin, uzayın menzili boyunca oldukça farklı iki yöne dağılmış olan bir dalga biçimindeki bu dalga fonksiyonu açıklamasını memnun şekilde kullanageldikten

sonra, niçin birdenbire buna ilişkin, algılanması gerçekleşir gerçekleşmez yerelleşmiş bir parçacık biçimindeki açıklamaya dönmemiz gerekir? Bir kuantum parçacığıyla ilgili bu aynı türdeki tuhaf tablo, çift yarık deneyimizin ekranındaki algılamaya ilişkin olarak da, tıpkı çok uzaklardaki meslektaşlarım tarafından kullanılan (belirsiz) "algılayıcılar"da olduğu gibi, uygun görünür. Şimdiye kadarki açıklamalarımda, dalga benzeri görünümlerin parçacığı algılamak üzere "bir ölçüm gerçekleştirmeyi" tam olarak seçene dek korunmak zorunda olduğu kesin biçimde görülüyor fakat daha sonra aniden, dalga fonksiyonu tablosundan ölçüm tarafından sunulan "gerçekliğe" geçtiğimizde duruma ilişkin tuhaf bir süreksiz (ve yerel olmayan) değişimin, bir *kuantum sıçramasının* söz konusu olduğu parçacık benzeri bir açıklamaya dönüyoruz. Neden? Bir "ölçüm" olayında Schrödinger denkleminde sunulan standart kuantum gelişim işleminden farklı (ve son derece yerel olmayan) bir matematiksel işlemin benimsemesi gerektiğini talep eden algılama işleminden ne haber?

Bu kafa karıştırıcı konulara daha sonra 23, 29 ve 30. bölümlerde biraz daha derin biçimde yönelmeye çalışacağım. Yine de bu tuhaf "sıçrama" işlemini, en azından biçimsel matematiksel açıklama düzeyinde benimsemek zorunda olduğumuzu kabul etsek bile, bunun bize dalga fonksiyonunun "gerçekliği" hakkında ne söylediği sorusu orta yerde durmaktadır. Kuantum durumuna ilişkin, Schrödinger denklemiyle uyumlu herhangi bir sürekli gelişim tarafından kapsanır görünmeyen bir işlem olan bu "sıçrama" çok sayıda fizikçinin, durum vektörünün gelişiminin fiziki gerçekliğe ilişkin yeterli bir açıklama olarak ciddi biçimde kabul edilip edilemeyeceğine dair şüphelenmesine yol açan şeydir. Schrödinger'in kendisi de "kuantum sıçramaları"yla ilgili son derece rahatsızdı ve Niels Bohr'la olan bir diyaloğunda şunu belirtti:[9]

Tüm bu lanet olası kuantum sıçraması gerçekten kalıcıysa şimdiye dek kuantum kuramıyla ilgilendiğim için üzgün olmalıyım.

Şimdilik, kuantum durumunun kendisi aracılığıyla bir süre bir dalga fonksiyonu biçiminde genellikle uzay içerisinde (fakat olasılıkla yine daha yerelleşmiş bir bölgeye odaklanmış olmak üzere) dağılarak geliştiği bu tuhaf açıklamayı, en azından kuantum dünyasına ilişkin matematiksel bir model olarak kabul edelim; fakat sonra bir ölçüm gerçekleştirildiğinde durum yerelleşmiş ve özgün bir şey haline çöker. Bu anlık yerelleşme, dalga fonksiyonunun dağılımı ölçümden önce hangi biçimde olursa olsun gerçekleştikten sonra durum yine bu belirli yerelleşmiş durumdan başlayarak genellikle yine bir sonraki ölçüm gerçekleşene kadar dağılarak Sch-

[9] Heisenberg tarafından aktarıldığı üzere, 1971, s. 73.

rödinger güdümlü bir dalga biçiminde gelişir. Üstteki deneye (ve "düşünce deneyine") dayalı durumlardan, bir dalga/parçacığın parçacık benzeri görünümleri bir ölçümde ortaya çıkan şeylerken, ölçümler arasında ortaya çıkanların dalga benzeri şeyler olduğu izlenimi elde edilebilir.

Bu, kuantum mekaniğinin bize söylediği gerçekten çok uzak değildir fakat iki dalga/parçacık görünümü hiçbir biçimde böylesine basit olarak betimlenemez. Bazı fizikçiler esasen, tüm ölçümlerin sonuçta konuma ilişkin olduğu biçimindeki görüşü benimserken,[10] ben bu tür bir perspektifin son derece dar olduğunu düşünüyorum. Aslında kuantum formalizminin normal sunuluş biçimi ölçümlerin tek başına konuma ilişkin olmasını gerektirmez. Örneğin bir parçacığın momentumuna (ya da diyelim ki bir eksende ona ait açısal momentuma) ilişkin ölçüm, konuma ilişkin olan kadar iyi bir ölçüm oluşturur. Konum ve momentum ölçümleri arasındaki ilişkiyi §21.11'de tartışacağım fakat kuantum formalizminin ölçümleri nasıl ele aldığına ilişkin genel soru sonraki bölüme kalacak. Bir kuantum sisteminin fiziki ölçümüne ilişkin matematiksel açıklamanın, bir (Schrödinger) kuantum gelişiminden çok farklı bir şey olduğu görülecek. Bu tuhaf gerçekten kaynaklanan tartışmalı konular daha sonra, en bütünlüklü biçimde 29. bölümde tartışılacak.

21.9 Bir dalga fonksiyonundaki olasılık dağılımı

Gelin burada biraz daha sınırlanmış olan, ψ dalga fonksiyonunun bize parçacığın konumuyla ilgili ne söylemesi gerektiği sorusuna yönelelim. Kuantum kuramının kuralları bize ψ'nin *modül karesi* $|\psi|^2$'nin (= $\bar{\psi}\psi$; *bkz.* §10.1), parçacığı çeşitli olası uzamsal konumlarda bularak bir konum ölçümünün olabilirliğini veren olasılık dağılımı olarak yorumlanması gerektiğini söyler. Bu nedenle parçacık en çok, dalga fonksiyonunun mutlak değerinin en büyük olduğu yerde bulunma eğilimindedir. Bu değer nerede sıfırsa parçacık orada bulunmaz. Parçacığı uzayda herhangi bir yerde bulma olasılığı 1'dir; böylece $|\psi|^2$'nin tüm uzay üzerinde alınan integrali,[11] diğer bir deyişle

$$\|\psi\| = \int_{E^3} |\psi(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

1'e eşittir:

$$\|\psi\| = 1.$$

Bu koşul sağlanırsa ψ dalga fonksiyonu *normalleştirilmiş*tir deriz.

---

[10] *Bkz.* Goldstein, 1987; Bell, 1987.

[11] Pek çok yazar "norm"u burada $\|\psi\|$'yle ifade ettiğim şeyin *karekökü* olarak tanımlayabilir, başka bir deyişle benim kullandığım $\|\psi\|$ onların $\|\psi\|^2$'sidir.

Bu normalleştirme gereksinimi, kendisinin başladığımız $\psi = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ "momentum durumu" dalga fonksiyonlarını reddettiğine ilişkin rahatsız edici bir imaya sahiptir çünkü sonsuz uzayın tümü üzerinde $|\psi|^2 = 1$'dir, böylece üstteki integral (uzayın toplam hacmine eşit olmak üzere) *ıraksar*. Bu nedenle momentum durumlarını gerçekleştirilemez idealizasyonlar olarak değerlendirmek zorundayız. Diğer taraftan dalga fonksiyonlarıyla ilgili bir biçimde daha rahat bir tutum benimsersek hayatı momentum durumları için biraz daha kolay hale getirebiliriz. Normalleştirme koşulunu sağlamasa bile ψ'ye hâlâ bir "dalga fonksiyonu" diyebiliriz fakat sağlarsa onu bir *normalleştirilmiş dalga fonksiyonu* olarak adlandırırız.

Bir dalga fonksiyonu, $\|\psi\|$'yi tanımlayan integral yakınsarsa *normalleşebilir* olacaktır. Bu durumda normalleştirilmiş dalga fonksiyonunu elde etmek üzere ψ'yi $\|\psi\|$'nin kareköküne bölebiliriz: $\psi\|\psi\|^{-1/2}$. Yalnızca normalleşebilir dalga fonksiyonları fiziki olarak gerçekleştirilme şansına sahiptir. Diğerleri (örneğin momentum durumları) aslında fiziki idealizasyonları temsil eder. Dalga fonksiyonlarına (normalleştirilmesi zorunlu değildir) ilişkin karmaşık vektör uzayı **W** durum uzayımızdır. Aslında dalga fonksiyonlarımızdan bazılarının esasen hiper işlevsel (§9.7) olabilmesine de izin vermek zorunda olacağım. Bunun nedeni kısa süre içinde açık hale gelecek.

Fiziki yorumla ilgili olarak (bu daha rahat tutuma izin vererek), ψ sıfır olmayan sabit bir karmaşık sayıyla çarpılırsa bu durumda daha önceki gibi aynı fiziki durumu gösterir. θ gerçel bir sabit olmak üzere, ψ ve $e^{i\theta}\psi$'yi fiziki olarak eşdeğer kabul etmek, her durumda, kuantum kuramında standarttır. Başka bir deyişle, dalga fonksiyonunu sabit bir fazla çarpmak fiziki duruma ilişkin hiçbir farklılık yaratmaz. (Açıktır ki bu, $|\psi(\boldsymbol{x})|^2$'nin değerini etkilemez.) Bunu biraz daha ileriye taşıyıp, dalga fonksiyonlarını hâlâ eşdeğer kabul ederek sıfır olmayan karmaşık herhangi bir κ sabitiyle çarpmaya izin vermek çok da mantık dışı olmaz:

$$\psi \equiv \kappa\psi.$$

(Schrödinger denkleminin de bu değişiklikten etkilenmediği açıktır.) Bu denkliği hesaba katmak dalga fonksiyonlarının W karmaşık vektör uzayından onun idealize edilmiş "fiziki durumlar"ının izdüşümsel $\mathbb{P}$W uzayına geçmek anlamına gelir. (İzdüşümsel uzay kavramı için §15.6'ya bakın.)[12] Elbette genel $\psi \longmapsto \kappa\psi$ genel sabit ölçeklemesi $|\psi|^2$'yi korumaz, öyleyse parçacığın konumuna ilişkin olasılık yoğunluğunu, ψ normalleştirilmediğinde de geçerli olacak şekilde yeniden yorumlamamız gerekir. Bunu,

[12] Çeşitli yazarlar kuantum mekaniksel formalizmi zarif bir biçimde bütünüyle bu izdüşümsel çerçeve içinde geliştirdiler. Özellikle *bkz.* Brody ve Hughston, 2001; Hughston, 1995; Ashtekar ve Schilling, 1998.

olasılık yoğunluğunun, $|\psi|^2$'yi $|\psi|^2$'nin tüm uzay üzerindeki integraline bölerek elde edilmesi gerektiğine ilişkin gözden geçirilmiş kuralı sağlayarak yaparız:

$$\frac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|}.$$

Bazı durumlarla, örneğin momentum durumlarıyla ilgili olarak $\|\psi\|$ ıraksar ve böylece bu yolla hassas bir olasılık dağılımı elde edemeyiz (olasılık *yoğunluğu*, sonsuz bir evrendeki tekil bir parçacık için makul olarak, her yerde sıfır olmak üzere).

Bu olasılık yorumlamasıyla uyumlu olarak, dalga fonksiyonunun bir "olasılık dalgası" biçiminde adlandırılması alışılmadık değildir. Öte taraftan bunun çok yetersiz bir açıklama olduğunu düşünüyorum. İlk olarak $\psi(x)$'in kendisi karmaşıktır ve bu durumda kesinlikle bir olasılık olamaz. Dahası, (bütünsel bir sabit çarpana bağlı) ψ fazı Schrödinger gelişimi için temel bir bileşendir. $|\psi|^2$'yi (ya da $|\psi|^2/\|\psi\|$) bile bir "olasılık dalgası" olarak görmek bana pek akla uygun görünmüyor. Bir momentum durumuyla ilgili olarak ψ'ye ait $|\psi|$ modülünün gerçekten de tüm uzayzaman boyunca *sabit* olduğunu anımsayın. $|\psi|$'de, bize dalganın hareket yönünü bile söyleyen hiçbir bilgi yoktur! Bu dalgaya "dalga benzeri" karakterini veren yalnızca fazdır.

Dahası, olasılıklar asla negatif değildir ve yalnızca karmaşık olarak bırakılmaz. Dalga fonksiyonu yalnızca bir olasılıklar dalgası olsaydı bu durumda yıkıcı girişime ilişkin herhangi bir sadeleştirme asla söz konusu olmazdı. İki yarık deneyinde oldukça canlı biçimde portrelenmiş (Şekil 21.4d) bu sadeleştirme kuantum mekaniğine ilişkin karakteristik bir özelliktir.

Bu noktada tartışmayı hafifçe derinleştirmek ve §19.4'teki, elektromanyetik alan ve onunla ilgili ∇ ayar bağlantısına ilişkin değerlendirmelerimizle bağlantılı hale getirmek uygun olur. Dalga fonksiyonumuz yüklü bir parçacığı tanımlıyorsa bu durumda artık, θ $(= \theta(\mathbf{x}))$ elektromanyetizmanın bir ayar bağlantısı biçiminde davranmasına olanak sağlayan gerekli "ayar simetrisi"ni sunan, konuma ilişkin rasgele bir gerçel sayı fonksiyonu olmak üzere, $\psi \longmapsto e^{i\theta}\psi$ biçiminde *ayar* dönüşümleri yapmakta serbestiz. Az önce fakat Schrödinger'in zaman akışının *esasen* dalga fonksiyonuna ait fazların konumdan konuma nasıl değiştikleri bilgisine bağlı olduğunu ileri sürmedim mi? Bir $\psi \longmapsto e^{i\theta}\psi$ ayar dönüşümü uygulaması, fazların istediğimiz herhangi bir şeye dönüşme biçimini değiştirmemize olanak sağlar. Bu durum, fazların nasıl değiştiğine ilişkin kritik fiziki önemle ilgili az önce iddia ettiğim şeyle çelişmez mi?

Pek de değil: bu sabit olmayan faz değişimlerine izin verilse de bu, onlar yalnızca $\partial/\partial x^a$ işlemcilerinde (diğer bir deyişle momentumda) karşılığı olan bir değişimle birleştirilirse soz konusu olur. Bu değişim ($A_a = \nabla_a\theta$ ve $e = 1$ olmak üzere, $\partial/\partial x^a \mapsto \partial/\partial x^a - \mathrm{i}eA_a$) tam olarak, ∇ demet bağlantısının eylemini değişmemiş bırakmak gibidir. "Faz bilgisi" hâlâ buradadır fakat artık ∇'nın tanımıyla karışmıştır. $\psi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\psi$ tek başına, rasgele değişen θ'yla birlikte basitçe uygulanamaz ve fiziki durumun değişmemiş kalması umulamaz. θ'ya ilişkin uzamsal değişimin (∇'yla bağlantılı) ayrıntıları duruma ilişkin dinamik biçimli gelişim için temeldir ve iddia ediyorum ki ψ bir olasılık dalgasından açık olarak çok daha fazlasıdır. Her durumda, ψ yük*süz* bir dalga/parçacığı ($e = 0$) tanımlıyorsa durum öncekinin tam olarak aynısıdır.

21.10 Konum durumları

Dalga fonksiyonunun yalnızca "bir olasılık dalgası"yla ilgili durumdakinden çok daha fazla "gerçek" bir şey olması gerektiği bana açık görünüyor. Schrödinger denklemi bize (yüklü olsun ya da olmasın) bu durumla ilgili olarak zamanda kesin bir gelişim, aslında fazın konumdan konuma nasıl değiştiğine kritik biçimde bağlı olan bir gelişim sunar. Bununla birlikte bir dalga fonksiyonuna, üzerinde bir konum ölçümü gerçekleştirerek "parçacık nerede?" diye sorarsak bu faz dağılımı bilgisini kaybetmeye hazırlıklı olmamız gerekir. Aslında ölçümden sonra, her şeye yeni bir dalga fonksiyonuyla yeniden başlamak zorundayız. Ölçüm sonucu "parçacık burada" diye iddia ederse böylece yeni dalga fonksiyonumuz "burada" konumunda çok güçlü biçimde zirve yapmak zorundadır fakat sonra Schrödinger gelişimi uyarınca yine ani biçimde dağılır. Konum ölçümümüz *mutlak biçimde* kesinse bu durumda yeni durum o konumda "sonsuz biçimde zirve yapmış" olur; aslında o, §6.6'da kısaca ve §9.7'de bir hiper fonksiyon biçiminde karşılaştığımız bir nicelik olan Dirac delta fonksiyonuyla açıklanmak zorundadır.

Formalizmin bununla nasıl ilgilendiğini görelim. Basit olması için, bir parçacığın konumuyla, diyelim ki x^1 koordinatı, ilgili yalnızca bir bileşenin ölçümünü ele alalım. Ölçümümüzün *sonucu* "x^1'le ilgili belirli bir değer"e sahip bir konum olmalıdır; böylece momentum durumunda söylenenle uyumlu olarak ψ'nin x^1 işlemcisine (diğer bir deyişle x^1'le çarpımına) ilişkin bir öz durum olmasına, öz değer parçacığın sahip olduğu bilinen x^1 koordinatına ilişkin belirli X^1 değeri olmak üzere, gerek duyarız. x^1'e ilişkin

$$\psi \longmapsto x^1\psi$$

eyleminin belirli x^1 koordinat değeri X^1'e (gerçel bir sayı) sahip olması için

$$x^1\psi = X^1\psi$$

öz değer denklemine gerek duyarız (x^1'in çizgisel bir işlemci ve X^1'in bir saayı olduğunu anımsayalım). Bu, $\delta(x)$ §9.7'de (bir hiper fonksiyon olarak) tanımlanan Dirac "delta fonksiyonu" olmak üzere,

$$\psi = \delta(x^1 - X^1)$$

ifadesiyle tanımlanır. Bu, $x\delta(x) = 0$ özelliğine[21.13] sahip olduğu için buradan hareketle, gerektiği üzere $(x^1 - X^1)\delta(x^1 - X^1) = 0$, diğer bir deyişle $x^1\delta(x^1 - X^1) = X^1\delta(x^1 - X^1)$ olur. "Dalga fonksiyonu" olağan anlamdaki bir fonksiyon değil fakat üstte belirtildiği üzere, $x^1 = X^1$ öz değerinde sonsuz biçimde zirve yapmış olan idealize edilmiş (bir hiper fonksiyon ya da dağılım) bir fonksiyondur.

Bu belirli ölçüm kalan uzamsal koordinatlarla ilgili hiçbir şey söylemez ve dalga fonksiyonu, bize kalan x^2 ve x^3 koordinatlarının rasgele bir fonksiyonu olan delta fonksiyonuyla ilgili, x^1 işlemcisinin genel öz durumuna ilişkin

$$\psi = \phi(x^2, x^3)\delta(x^1 - X^1)$$

ifadesini elde edecek şekilde, bir ölçekleme sunarak bu koordinatlarda hâlâ rasgele değişikliğe sahip olabilir. (Bu meşru bir istemdir çünkü x^1, x^2 ve x^3'ün tümü değişmeli ifadelerdir.) Aslında, kuantum mekaniksel gözlemlenebilirlere ait, kendi aralarında değişmeli olan bu ifadelerin bir toplamına sahip olursak bu durumda ortak öz durumların bunların tümü için var olacağına ilişkin, *bkz.* §22.13, bir genel özellik söz konusudur.[13] Yanıt, uzamsal ölçüme ait $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$ sonuç değeriyle (*öz değer*) ilgili (bir toplam ölçek çarpanına bağlı)

$$\begin{aligned}\psi &= \delta(x^1 - X^1)\delta(x^2 - X^2)\delta(x^3 - X^3)\\ &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})\end{aligned}$$

ifadesine gerek duyarız.[14] Son satır, üstündeki tarafından tanımlanır. Bir *konum durumu* buna benzer.

[21.13] Bunu §9.7'de verilmiş olan hiper fonksiyon biçimindeki tanımdan kontrol edin.

[13] Değişmeli gözlemlenebilirlere ilişkin bu özellik kuantum mekaniğiyle ilgili her metinde tartışılır; örneğin *bkz.* Shankar, 1994.

[14] *Farklı* değişkenlerle ilgililerse, delta fonksiyonlarını çarpmak meşrudur. Delta fonksiyonlarının özelliklerine ilişkin *bkz.* Arfken ve Weber, 2000.

Bu tür "konum durumları" momentum durumlarına karşıt anlamda idealize edilmiş dalga fonksiyonlarıdır. Momentum konumları sonsuz biçimde dağılmışken konum durumları sonsuz biçimde yoğunlaşmıştır. İkisi de ($\psi = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})$'deki tehlike delta fonksiyonlarının karesinin alınamaması olmak üzere, *krş.* §9.7) normalleştirilebilir değildir. Bu bölümü, konum ve momentum arasındaki, bu konuyu aydınlatan önemli bir ikiliği işaret ederek bitireceğim.

21.11 Momentum uzay açıklaması

Bu noktaya kadar kuantum durumlarını tümüyle konum fonksiyonları olarak gösterdim: dalga fonksiyonları. Aslında bunun anlamı, her *durum*un –**W** elemanı–, **x** konum işlemcisine, diğer bir deyişle *konum durumlarına* ($\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})$durumları) ilişkin öz durumların çizgisel bir birleşimi olarak düşünülmesidir. Bir ψ dalga fonksiyonunu konum fonksiyonu olarak ifade etmek aslında onun bu tür delta fonksiyonlarının çizgisel bir birleşimi biçiminde değerlendirilmesi anlamına gelir. Bunu, $\psi(\mathbf{x})$'i onlara ilişkin *sürekli* bir birleşim biçiminde ifade ederek, $\mathrm{d}^3\mathbf{X} = \mathrm{d}X^1 \wedge \mathrm{d}X^2 \wedge \mathrm{d}X^3$ olmak üzere, $\psi(\mathbf{x}) = \int \psi(\mathbf{X})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})\mathrm{d}^3\mathbf{X}$ denklemi aracılığıyla gerçekleştiririz. Bu denklemde, çizgisel birleşimdeki "katsayılar" karmaşık $\psi(\mathbf{X})$ sayılarıdır.

Bununla birlikte bir ψ kuantum durumunu göstermenin pek çok farklı yolu mevcuttur. Onu alternatif biçimde $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ *momentum* durumlarının çizgisel bir birleşimi biçiminde gösterebiliriz. Artık "katsayılar", $(2\pi)^{-3/2}$'nin $\tilde{\psi}(\mathbf{P})$ nicelikleriyle çarpımı olarak alabileceğimiz farklı karmaşık sayılardır ve böylece

$$\psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{E}^3} \tilde{\psi}(\mathbf{P})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \mathrm{d}^3\mathbf{P}$$

denklemine ulaşırız. ($(2\pi)^{-3/2}$'yle ilgili sebep birazdan açıklanacak.) Bu denklem $\psi(\mathbf{x})$'i tıpkı §9.4'te yapıldığı gibi, burada §9.4'teki denklemi üst üste 3 kez uygulamak anlamına gelen 3–boyutlu bir Fourier dönüşümüne sahip olduğumuzu dışta tutarsak, $\tilde{\psi}(\mathbf{P})$'ye ilişkin bir Fourier dönüşümü biçiminde ifade eder.

Bu durum $\tilde{\psi}$'nin ($\mathbf{P}$'nin bir fonksiyonu olarak fakat artık onu $\mathbf{p}$'nin bir fonksiyonu olarak yazabiliriz), parçacığın kuantum durumuna ilişkin $\psi(\mathbf{x})$'inki kadar iyi bir gösterim sağladığını ileri sürer. Aslında konum ve momentum değişkenleri arasında çok kesin bir simetri mevcuttur. Artık $\mathbf{p}$ *momentum* değişkenlerini birincil olanlar biçiminde değerlendirmeyi düşünebilir ve $\boldsymbol{x}$ konum değişkenlerini "$\mathbf{p}$'ye göre türev alma" biçiminde gösterebiliriz, böylece (işaret değişimine dikkat ederek)

$$x^a = -i\hbar \frac{\partial}{\partial p_a}$$

biçimindeki *ters* yorumlamayı (en azından x^1, x^2, x^3 uzamsal değişkenleri için) yapabiliriz.[21.14] Aslında, daha önce sahip olduklarımıza eşdeğer olan değişme bağıntıları sağlanır:

$$p_b x^a - x^a p_b = i\hbar\delta^a_b.$$

En sağ taraftaki "görünmez" fonksiyon artık x^a konumu yerine p_a momentumuna ilişkin bir fonksiyon olmak durumundadır. Şimdi $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P})$ delta fonksiyonlarıyla gösterilenler momentum durumlarıdır ve konum durumlarıysa $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{X}/\hbar}$ düzlem dalgaları biçiminde gösterilir. Momentum "dalga fonksiyonları"nın $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{X}/\hbar}$ konum öz durumları biçimindeki gösterimi fiilen, yalnızca üsteki oldukça önemsiz işaret değişimiyle birlikte, eşdeğer (ters) Fourier dönüşümünce verilir:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{E}^3} \psi(\mathbf{X})\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{X}/\hbar} d^3\mathbf{X}.$$

(Artık $(2\pi)^{-3/2}$'ye ilişkin sebebi görürüz; o işleri, ters Fourier dönüşümünün orijinal olanla fiilen aynı olacağı şekilde dengelemek içindir.)

Dalga paketleri konum gösterimiyle olduğu kadar momentum uzay gösterimiyle de açıklanabilir.[21.15] Bir dalga paketine ilişkin, konum açıklaması ya da momentum açıklamasında, kesin bir "dağılım" (ya da yerelleşme eksikliği) kavramı sunulabilir. Bu dağılım ölçümlerini sırasıyla Δx ve Δp'yle gösterelim. *Heisenberg belirsizlik ilkesi* bize bu dağılımların çarpımının Planck sabiti mertebesinden küçük olamayacağını söyler ve

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{1}{2}\hbar$$

ifadesine sahip oluruz.[15]

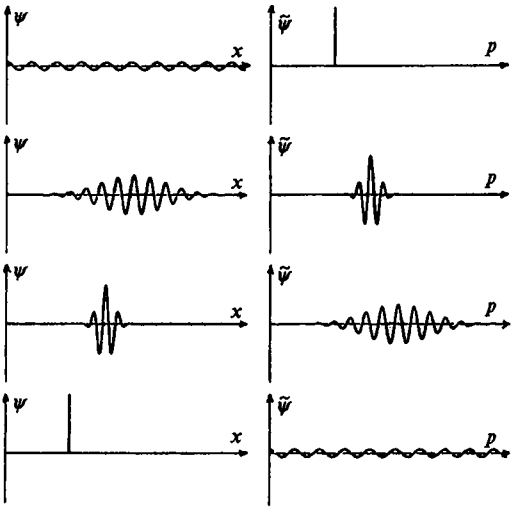
Konum durumları, momentum durumları ve dalga paketleri hem konum hem de momentum gösterimleriyle Şekil 21.10'da gösteriliyor. Saf bir momentum durumuna ilişkin uç durumda momentumdaki dağılımın (diğer bir deyişle momentum uzayındaki delta fonksiyonu) sıfır olduğunu, $\Delta p = 0$, belirtelim. Artık Δx, Heisenberg bağıntısından kaynaklı, üstte

---

[21.14] ψ'yi $x^1\psi$ ya da $i\hbar\partial\psi/\partial x^1$'le değiştirmenin sırasıyla $\tilde{\psi}$'yi $-i\hbar\partial\tilde{\psi}/\partial p_1$ ya da $p_1\tilde{\psi}$'yle değiştirmeye karşılık geldiğini gösterin. $\psi(x^a)$'yı $\psi(x^a + C^a)$'yla değiştirmenin ψ'yi $e^{-iC^a p_a/\hbar}\tilde{\psi}$'yle değiştirmeye karşılık geldiğini (a 1, 2, 3 aralığında değişmek üzere) gösterin.

[21.15] $\psi = Ae^{-B^2(x-C)^2}e^{i\omega x}$ dalga paketinin Fourier dönüşümünün $\tilde{\psi} = (Ae^{i\omega C}/B\sqrt{2})e^{-(p-\omega)^2/4B^2}e^{-iCp}$ olduğunu göstermek üzere alıştırmalar [21.10], [21.13] ve [21.14]'ün sonuçlarını kullanın (uyumlu olması için $\hbar = 1$ koyun).

[15] *Bkz.* Shankar, 1994; Hannabuss, 1997.



Şekil 21.10 ψ dalga fonksiyonlarının konum uzay çizimleri sol tarafta ve ilgili ψ̃ momentum uzay çizimleri sağ tarafta bulunmaktadır. Üstteki çift bir momentum durumunu ve alttaki çiftse bir konum durumunu gösterir. Aralarındaki ikisi dalga paketlerini gösteriyor. Heisenberg belirsizlik ilkesi, momentumdaki daha küçük dağılımla birleştirilmiş olan konumdaki daha büyük dağılım tarafından gösterilir ve tam tersi.

açıklanan tabloyla uyumlu olarak (§21.6'da) sonsuzdur ve dalga fonksiyonu konum uzayının tümünde düzgün biçimde dağılmış haldedir. Durum, artık $\Delta x = 0$ olmak ve konum tam bir kesinlikte tanımlanmak üzere fakat momentumdaki Δp dağılımı şimdi sonsuz olacak biçimde, konum durumundakinin tam olarak tersidir.

Burada kuantum mekaniğindeki değişmeli olmayan ölçümlerin uyuşmazlığını açık biçimde gösteren (daha sonraki değerlendirmelerimizde sıkça karşılaşacağımız genel bir olgu olan) örneklere sahip olduğumuzu görmek ilginçtir. Parçacığın momentumuna ilişkin bir ölçüm onu, klasik bir P değerine karşılık gelen bir momentum durumuna çevirir ve bu durumdaki herhangi bir izleyen ölçüm aynı P sonucunu ortaya koyar. Bununla birlikte durum bunun yerine bir ilk momentum ölçümünü izleyen sonraki *konum* ölçümüne bağlıysa sonuç tümüyle belirsizdir ve konumla ilgili sonuçların herhangi biri diğer herhangi biri kadar aynıdır. Bu ölçüm, durumu konumdaki bir delta fonksiyonu haline getirir. Momentum uzayında bu konum, momentumla ilgili tüm olası değerler içinde düzenli biçimde dağılmış bir düzlem dalgasıdır. Böylece izleyen bir *momentum* ölçümü tümüyle belirsiz olur. Bu nedenle, ara konum ölçümü eyleminin kendisi orijinal momentum durumuna ilişkin saflığı bütünüyle bozmuştur.

Ayrıca belirtilmeli ki, enerji ve zaman arasında görelilikle uyumlu biçimde, benzer bir Heisenberg belirsizlik bağıntısı mevcuttur:

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \frac{1}{2}\hbar.$$

Normalde bunun, standart kuantum mekaniğinde zaman, dinamik biçimli bir değişken olmaktan daha çok yalnızca dışsal bir parametre biçiminde ele alındığından, daha tanıdık gelen momentum/konum belirsizlik bağıntısından bir şekilde farklı bir fiziki statüye sahip olduğu düşünülür. Enerji/zaman belirsizliğinin alışılmış yorumu, bir kuantum sisteminin enerjisi bir Δt zamanında gerçekleştirilen bir ölçümle öğrenilmişse bu durumda bu enerji ölçümünde üstteki bağıntıyı sağlamak zorunda olan bir ΔE belirsizliği mevcuttur.

Bu, diyelim ki, kararsız bir atom çekirdeğiyle ilgili özel öneme sahiptir. Bu tür bir çekirdeğin (diyelim ki uranyum) kararsız olması gerçeği parçacık enerjisinin öğrenilmesine ilişkin zamanın, diğer bir deyişle parçacığın ömrünün, bir sınırı olması anlamına gelir. Buradan hareketle, Heisenberg bağıntısı bize kararsız bir parçacık ya da çekirdeğe ilişkin ömrüyle ters orantılı olan temel bir enerji belirsizliği sunar. Einstein'ın $E = mc^2$'si (*bkz.* §18.7) nedeniyle bu bize kütlesindeki temel bir belirsizliği verir. Örneğin U_{238} uranyum çekirdeğinin ömrü yaklaşık 10^9 yıldır, böylece bu durumda 10^{-51} Joule kadar bir enerji belirsizliği söz konusudur; ilgili kütle belirsizliği büsbütün küçüktür, yaklaşık 10^{-68} kg. (Kararsız bir parçacığın dalga fonksiyonu belirli bir gerçel[16] E enerji değeriyle ilgili $e^{-iEt/\hbar}$ durağan biçimli olmaktan, burada ayrıca üstel bir bozunum katsayısı bulunmak üzere, sapar. Bir enerji öz durumu olmamak nedeniyle, ölçülmüş enerjide, enerji belirsizliğini veren bir sonuç dağılımı mevcuttur.) Heisenberg enerji/zaman belirsizliği §30.1'de, kuantum ölçümü bilmecesinin çözümüne ilişkin belirli bir yaklaşımla bağıntılı olarak, oynayacak özel bir role sahip olacak!

[16] Parçacık fiziğinde aynı $e^{-iEt/\hbar}$ zaman bağımlılığını fakat gerçel kısmı enerjinin ortalama değeri olan ve sanal kısmı yarı ömrün tersiyle $-\frac{1}{2}\hbar\log 2$'nin çarpımı olan *karmaşık* bir E'yle birlikte kullanmak ortak bir alıştırmadır. Örneğin *bkz.* Das ve Ferbel, 2004.

22

KUANTUM CEBİRİ, GEOMETRİ VE SPİN

22.1 U ve R kuantum işlemleri

Kuantum mekaniğinin sezgisel olmayan doğası, ya da daha çok kuantum mekaniksel etkinlik düzeyindeki Doğanın kendisi, pek çok insanı, kuantum düzeyindeki olgulara ilişkin herhangi türde güvenilir bir tablo bulmakla ilgili umutsuzluğa sevk eder. Yine de zarif cebirsel yapısına ek olarak kuantum mekaniğiyle ilgili güzel daha fazla geometri söz konusudur ve kuantum eylemlerine ilişkin açıklamada ilerleme kaydetmek üzere zorunlu biçimde yalnızca imgesiz, tasavvur edilemez bir formalizme inanılmak zorunda hissedilmesi yazık olur. Kuantum formalizmindeki tekil bir niteliksiz "nokta parçacığın" bile dağınık dalgalı, gizemli bir şey olarak göründüğünü görmüş olmamıza rağmen o, içinde karmaşık sayı sihrinin pek çok görünümünün kendisini göstermeye başladığı etkileyici bir matematiksel yapıya sahip biçimde resmedilebilen bir "şey"dir.

Bu resim, tekil bir nokta parçacığın kuantum açıklamasını kabullenmeye başlamamıza olanak sağlar ve tekil bir kuantum parçacığının neye benzediğini anlayarak, bu bize kural olarak kesin biçimde pek çok farklı türde parçacık içeren karışık sistemlere ilişkin bir kavrayış sunacağından, arkamıza yaslanıp biraz rahatlayabileceğimizi düşünebiliriz. Ne yazık ki bu beklenti biraz zamansızdır ve dünyanın geniş kapsamlı bir kuantum resmine ulaşmamız gerekiyorsa daha geniş bir bakış açısına gerek duyacağız. 23. bölümde, bir sistem içindeki pek çok parçacığın bir arada ele alınmak zorunda olduğu durumda şeylere ilişkin tablomuzun ne derece kafa karıştırıcı hale geldiğini göreceğiz. Her parçacığın bireysel olarak kendi ayrı "durum vektörü"ne sahip olması yerine tüm kuantum sisteminin bütünüyle kendine dolanmış *tekil* bir durum vektörü gerektirdiğini göreceğiz.

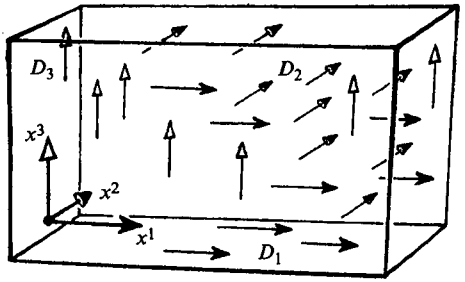
Yine de tekil "nokta parçacıklar" bile, şu ana kadar sunduğum açıklamalar tarafından kapsananlardan daha fazla yapıya sahip olma eğilimindedir. Çünkü onlar sıklıkla, daha çok karışıklığa yol açan *spin* adı verilen

şeye sahiptir. Neyse ki spinin kendisi, bu bölümde daha sonra göreceğimiz üzere, geometri ve karmaşık sayı sihrinin diğer görünümlerinin gündeme geldiği, özel zenginlik ve zarafette bir matematiksel açıklamaya sahip bir olgudur.

Kuantum parçacığına (görelilikçi olmayan), evrimi sistem üzerinde bir ölçüm gerçekleştirilene kadar çok kesin biçimde Schrödinger denklemi tarafından sunulan, bir *durum vektörü* (ya da dalga fonksiyonu) biçiminde adlandırdığımız şey tarafından açıklanan bir şey olarak alışmak zorunda kaldığımız bir önceki bölümün açıklamalarını gözden geçirelim. 23. bölümde daha açık biçimde göreceğimiz üzere, aynı şey karışık kuantum sistemlerinin tümünü açıklayan durum vektörleri için de geçerli olacak. Ölçümün kendisi, matematiksel olarak Schrödinger evriminden tümüyle farklı bir biçimde açıklanır. Bunun belirtilerini §§21.4, 7, 8'de gördük. §§21.10, 11'de, bir parçacık durumunun artık belirli bir konumda yerelleşmiş (genellikle farklı) bir duruma, diğer bir deyişle **x** konum işlemcisinin bir öz vektörü (bu öz vektör konum koordinatlarındaki bir delta fonksiyonu olmak üzere) olan bir duruma *sıçra*dığı esnada konum ölçümlerini ele aldık. Ayrıca, bir parçacığın durumunun kendisi aracılığıyla **p** momentum işlemcisinin öz durumuna, parçacığın durumunun artık dalga benzeri bir formda (kural olarak tüm uzay üzerinde) dağılacak şekilde sıçramış hale getirildiği, momentum ölçümlerine ilişkin sonuçları (§§21.5, 6, 11) ele aldık. Daha genel olarak, bir ölçüm bir çeşit $\boldsymbol{Q}$ işlemcisine (genellikle Hermitsel bir işlemci; *bkz.* §22.5) karşılık gelir ve ölçümün durum üzerindeki etkisi onu $\boldsymbol{Q}$'ya ilişkin bir öz duruma sıçrar hale getirir. Bu, $\boldsymbol{Q}$'nun sıçranılacak hangi öz durumudur? Kuantum kuramı uyarınca bu tümüyle şans meselesidir fakat olasılıkları hesaplamak üzere kesin kurallar söz konusudur (*bkz.* §22.5).

Kuantum durumunun[1] $\boldsymbol{Q}$'ya ait öz durumlardan birine sıçrama işlemi *durum vektörü indirgenmesi* ya da *dalga fonksiyonu çökmesi* biçiminde adlandırılır. Bu, kuantum kuramının en kafa karıştırıcı özelliklerinden biridir ve bu konuya kitapta daha pek çok kez döneceğiz. Çoğu kuantum fizikçisinin durum vektörü indirgenmesini, fiziki dünyanın *gerçek* bir eylemi olarak değil fakat durum vektörünü "gerçek" bir kuantum düzeyli fiziki gerçekliği açıklar biçimde ele almamız gerektiği gerçeğini yansıtır şekilde değerlendirdiklerine inanıyorum. Bu tartışmalı konuya daha ayrıntılı ola-

[1] Bu sıçramalar şimdiki günlük "kuantum atlaması" olarak ifade edilen şeyi uyarmış olan şey olarak görünmektedir. Bir fizikçi için bu saçma bir sözcük seçimidir çünkü kuantum durum indirgenmesindeki sıçramalar son derece küçük, güçlükle algılanabilen ve olasıkla gerçek olmayan olaylardır!



Şekil 22.1 Fiziki bir sisteme ilişkin ψ durumunun zaman evrimi kuantum mekaniğinin kabul edilen ilkeleri uyarınca sürekli olarak birbirini izleyen tümüyle farklı iki işlem biçimindedir: **U** *(Schrödinger) üniter evrimi (sürekli, belirlenimci) ve* **R** *durum indirgenmesi (süreksiz, olasılıklı).*

rak 29. bölümde geleceğiz. Yine de, olguya ilişkin fiziki gerçeklik hakkında nasıl bir tutuma sahip olabileceğimizle ilgisiz biçimde, kuantum mekaniğinin pratikte kullanıldığı yöntem, ne zaman bir ölçüm gerçekleştirildiği varsayılsa, durumun aslında bu tuhaf biçimde sıçradığını kabul etmektir. Ölçümden hemen sonra, sistem üzerinde yeni bir ölçüm gerçekleştirilene kadar Schrödinger evrimi ön plana çıkar ve böylece sürer.

Schrödinger evrimini **U**'yla ve durum indirgenmesini **R**'yle gösteriyorum. Tümüyle farklı görünen bu iki işlem arasındaki birbirini izleme, bir evrene ilişkin belirgin şekilde tuhaf bir davranış biçimi gibi görünür! *Bkz.* Şekil 22.1. Aslında, gerçekte, bunun henüz bilinmeyen başka bir şeye yapılmış olan bir yaklaşıklık tahmini olduğunu düşünebiliriz. Belki de, **U** ve **R**'nin her ikisine, sınırlayıcı yaklaşıklık tahminleri olarak sahip olan daha genel bir matematiksel denklem ya da bir tür uyumlu matematiksel evrim ilkesi mevcut*tur*? Kişisel fikrim kuantum kuramında bu tür bir değişikliğin yüksek olasılıkla, belki de yeni bir 21. yüzyıl fiziğinin bir parçası olarak doğru olduğudur ve 30. bölümde bu olasılığı işaret eden belirli bazı önerilerde bulunacağım. Bununla birlikte çoğu fizikçi bu tür bir yolun, izlenmesi verimli olan bir yol olmadığına inanır görünmektedir.

Kuantum mekaniğinin temel çerçevesinde değişiklik planlamayı tercih etmemelerinin nedeni, (kendisine ait **U** formalizmindeki büyük matematiksel zarafete ek olarak) kuantum kuramıyla deneye dayalı gerçek arasındaki, kuantum kuramına karşı (var olan melez biçiminde) söylenecek hiçbir şeyin bilinmediği ve çok çeşitli sonuçların onu son derece isabetli biçimde doğruladığı, olağanüstü etkileyici ve kesin anlaşmadır. Buna göre çoğu kuantum fizikçisi, günümüz kuantum formalizmini herhangi belirli bir biçimde değiştirmeye girişmeden **U** ve **R** işlemleri arasındaki belirgin çelişkiyi kabullenmeye çalışan felsefi bir bakış açısını (ya da daha çok §29.1'de açıklanacak olan pek çok farklı alternatif bakış açısından birini) benimser. Bu bölüm ve bir sonrakindeki amaçlarımdan biri bu formalizmi, kuantum kuramında artık geleneksel olan şeyden sapmaksızın incelemeye

başlamaktır. **U**/ **R** konusuna daha sonra, özellikle konu hakkında kendi bakış açımı daha ayrıntılı biçimde sunacağım §§29.1,2,7–9 ve ayrıca §§30.10–13'te geleceğim.

Kuantum mekaniğine "geleneksel" yaklaşımlar olarak adlandırılabilecek şeyin çoğundaki ortak bir noktanın, **U** işleminin "temeldeki bir gerçek" olarak kabul edilmesi gerektiğini ve **R**'nin, öyle ya da böyle, bir çeşit yaklaşıklık, ilüzyon ya da uygunluk biçiminde kabullenilmek zorunda olduğunu söylemek adil olur ve yazında bu tür bir yaklaşım izleyen pek çok açıklama mevcuttur.[2] Kuantum mekaniğinde, bir aşamada bir değişiklik gerektiği fikrinde olanlar (ben de dahil) bile günümüz düzeninin en iyi olasılıkla müthiş bir yaklaşıklık tahmini olduğunu ve bunun ötesine geçmeye ilişkin en ufak bir umut söz konusuysa bunu bütünüyle anlamanın gerekli olduğunu iddia ederler. Buradan hareketle **U**'nun nasıl işlediğini ve dahası onun **R**'yle uyuşmazlık içindeyken yine de nasıl bu kadar güzel biçimde kaynaşabildiğini daha derinden görmeye çalışmak zorundayız.

Ayrıca, **U** harfinin kullanımını da açıklamalıyım. O, *üniter evrim* yerine kullanılır. Schrödinger denkleminin aslında hangi anlamda "üniter" olduğunu (*bkz.* §13.9) görmeye gerek duyacağız ve buna kısa süre içinde, §22.4'te geleceğiz. Bu "üniter evrim"i ifade etmenin ayrıca başka (eşdeğer) yolları da mevcuttur; özellikle, yine §22.4'te geleceğimiz *Heisenberg tablosu* olarak anılan şey söz konusudur. Yine de Schrödinger denklemince sunulan tablonun buradaki açıklamalarımız için en uygun tablo olduğu görülür.

22.2 U'nun doğrusallığı ve R'ye çıkardığı sorunlar

Üniterliğe ilişkin bütünlüklü konuya yönelmeden önce **U**'nun *çizgiselliği*'yle ilgili daha öncelikli sorunu inceleyelim. **U**'ya ilişkin bu görünümün, tek başına, **R**'yle ciddi bir uyuşmazlık sergilediğini göreceğiz. Öyleyse yine Schrödinger'in $i\hbar\partial\psi/\partial t = \mathcal{H}\psi$ denklemini inceleyelim. $\mathcal{H}$ Hamiltonının (açıkladığı parçacıkların doğası ve onlar arasındaki kuvvetler tarafından ve sistem üzerinde bir etkiye sahip olabilecek her tür dışsal korunumlu kuvvet, diğer bir deyişle enerji korunumu, tarafından belirtilmek üzere) bilindiğini düşüneceğiz). Hemen denklemin genel biçiminden gelen ve Hamiltonın ayrıntılı doğasından son derece bağımsız olan belirli sonuçlar mevcuttur.

---

[2] Kuantum mekaniği üzerine farklı bakış açıları üzerine genel bir tartışma için *bkz.* Rae, 1994; Polkinghorne, 2002; Home, 1997; ya da DeWitt ve Graham, 1973.

Dikkatimizi çeken bir şey bunun (durum herhangi bir zamanda bir kez bilindiğinde zaman evrimi bütünüyle saptanmış olmak üzere) *belirlenimci* bir denklem oluşudur. Bu durum, "kuantum belirsizliği"ni ve kuantum sistemlerinin belirlenimci olmayan biçimlerde davrandığı gerçeğini duymuş olan insanlara bir sürpriz gibi görünebilir. Bu belirlenimcilik eksikliği yalnızca **R** işlemi uygulamalarında ortaya çıkar. Schrödinger denklemince açıklandığı üzere kuantum durumuna ilişkin (**U**) zaman evriminde bulunmaz. Schrödinger denkleminde hemen gördüğümüz bir başka şey, i'nin sol taraftaki belirgin görünümü nedeniyle (ve i'nin Hamiltonda ortaya çıkışına ilişkin pek çok olasılık mevcuttur), onun *karmaşık* bir denklem oluşudur.

Son olarak, Schrödinger denkleminin aslında, ψ ve ϕ

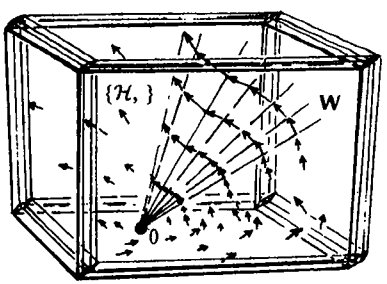
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi, i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mathcal{H}\phi$$

ifadelerinin (aynı $\mathcal{H}$'ye sahip) çözümleriyse bu durumda ayrıca, w ve z karmaşık sabitler olmak üzere, herhangi bir $w\psi + z\phi$ *doğrusal birleşimi*nin de öyle olması anlamında doğrusal olduğunu görürüz. Çünkü üstteki denklemlerden ilkinin w'yla çarpımını ikincisinin z'yle çarpımına eklersek

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(w\psi + z\phi) = \mathcal{H}(w\psi + z\phi)$$

ifadesini elde ederiz (§6.5). Tüm bunlardan, Schrödinger evriminin (genellikle sonsuz boyutlu bir uzay olan) **W** durum uzayına ilişkin *karmaşık vektör uzayı* yapısını koruduğunu görürüz.

$\mathcal{H}$ Hamiltonı, **W**'nin, sonsuz küçük bir zaman diliminde evrildikten sonra ortaya çıkan bir durumdaki değişikliği açıklayan sonsuz küçük doğrusal dönüşümünü tanımlar. Öyleyse bu Hamilton eylemi **W** üzerindeki bir vektör alanı tarafından açıklanır (*bkz.* Şekil 22.2). Sonlu bir zamanın ardından durumlar, sonsuz küçük Hamilton eyleminin "üssünü alma" olarak adlandırılan şey tarafından elde edilen sonlu bir doğrusal dönüşüm



*Şekil 22.2 Hamilton akış {ℋ, } (bir vektör alanı), **W** durum uzayına ilişkin, sonsuz küçük bir zaman ardından durumdaki değişimi veren sonsuz küçük bir doğrusal dönüşümü tanımlar. Sonlu bir zaman ardından (üniter) değişimi elde etmek üzere sonsuz küçük Hamilton eyleminin "üssünü almak" zorunda oluruz.*

uyarınca değiştirilecektir. Bu, daha önce karşılaştığımız (§14.6), kendisi aracılığıyla bir Lie grup elemanının ilgili Lie cebirine ait bir elemanın üssü alınarak elde edildiği işlemi tanımlayan "üs alma"ya oldukça benzerdir. Bununla birlikte Hamilton evrimindeki üs almanın gerçekleştirilmesi çok daha zor olabilir. (Ayrıca, **W**'nin sonsuz boyutlu doğası nedeniyle başkaca zorluklar ortaya çıkabilir.)

Zor ya da değil, yine de buradaki esas nokta, herhangi sonlu bir T zamanının ardından, kuantum durumlarına ilişkin **W** uzayının dönüşümünün her zaman doğrusal olacağıdır. Bu durum şu sava tekabül eder ($\rightsquigarrow$ sembolünü bir durumun belirli bir T zaman periyodu ardından nasıl evrilmiş olacağını belirtmek üzere kullanacağım):

$$\psi \rightsquigarrow \psi' \text{ ve } \phi \rightsquigarrow \phi'$$

olursa böylece

$$w\psi + z\phi \rightsquigarrow w\psi' + z\phi'$$

olur. Buradaki ψ ve ϕ rasgele seçilmiş iki durum (dalga fonksiyonları) ve w ve z rasgele karmaşık sabitlerdir.[22.1]

Bu, **U**'nun hikayenin tümü olduğu bakışını benimsemeyi denersek belirli çok tuhaf imalara sahip olur ve ölçüm işlemi gerçekten, kuantum durumunun yönetilemez biçimde, belki sistemde ve ona ait ölçüm düzeneğinde korkunç miktarda "dolanık" parçacık içeren karmaşık durumları ele almakta başvurulacak bir tür "uygunluk" halini alır. (Kuantum mekaniksel "dolanıklık" kavramına daha özel olarak 23. bölümde geleceğiz. Kuantum durumlarının, §21.7'dekinden çok daha ciddi biçimde, sistemin farklı parçacıklarının kendilerine ait ayrı kuantum durumlarına sahip olmayıp dolanık bir "bütün"ün parçaları olduğunu, "holistik" olduğunu göreceğiz. Bununla birlikte bunların hiçbiri var olan tartışmayı etkilemez.) **R**'ye ilişkin bu tür bir "uygunluk" bakışı uyarınca **R**'nin, temeldeki "gerçek" bir **U** evrimine yapılan bir tür yaklaşıklık tahmini olarak ortaya çıktığı düşünülür. Bununla birlikte bu bakış açısı ciddi paradokslara yol açar.

Örneğin §21.7'deki, uzaydaki iki meslektaşımın kendi algılayıcılarına sahip oldukları düşünce deneyini anımsayalım ve her bir algılayıcının tepkisinin basitçe, algıladığı dalga paketi parçasıyla etkileşiminden başlayan bir Schrödinger evrimine ilişkin sonuç olduğunu düşünmeyi deneyebiliriz. Algılamadan önceki kuantum durumu aslında, biri bir algılayıcıya ve diğer parçası öteki algılayıcıya ulaşan bireysel iki dalga paketi parçasının bir toplamıdır; böylece doğrusallık sebebiyle, her bir algılayıcıda-

[22.1] $\mathcal{H}$'nin p ve x'ler biçiminde son derece doğrusal olmayan bir fonksiyon olabilmesi gerçeğine karşın herhangi bir Schrödinger evrimi eyleminin niçin doğrusal olduğunu açıklayın.

ki Schrödinger evrimli tepki diğerinin tepkisiyle üst üste binme içinde bir arada bulunmak zorundadır. Schrödinger evrimi, bir algılayıcı tepkisi *artı* (iki algılayıcı tepkisinin kuantum üst üste binmesi anlamında "artı") diğer algılayıcı tepkisine yol açar, bir algılayıcı tepkisi *ya da* ("ya da" fiiliyatta her zaman gerçekten görülen olmak üzere) diğer algılayıcı tepkisine değil. **U**'nun tüm hikayeyi anlatır olmasını sürdürmek bana katlanılamaz görünüyor (ve Niels Bohr'un kuantum mekaniğine ilişkin "geleneksel Kopenhag yorumu" kesinlikle bunu yapmayı denemez çünkü o algılayıcıların kendisini "klasik biçimli kavramlar" olarak ele alır).

Görebildiğim kadarıyla **U**'nun, ölçümü de içeren tüm işlemler için geçerli olmasında ısrar etmenin tek yolu, içinde iki algılayıcının tepkilerinin gerçekten bir arada bulunduğu "çoklu dünya" türünde bir bakışa fakat "farklı dünyalar" olarak adlandırılan şey içinde geçmek olur.[3] Yine bundan sonra bile **U** "tüm hikaye" olamaz çünkü, tepki olmayan tepkilerin üst üste binmeleri hiçbir zaman bilinçli olarak algılanamazken, bilinçli algılarımızın, yalnızca bireysel algılayıcı tepkisinin bilinçli biçimde algılanmasına olanak sağlayan o görünümünü açıklayan bir kurama gerek duyarız! (Bu konulara §§29.1,8'de yeniden dönülecek.) Bu noktada, ben de "çoklu dünya"nın gidilecek doğru yol olduğuna inanmadığımı belirtmeliyim; yalnızca, "**U**'da her düzeyde" ısrar edilirse, nereye gidilir gibi olduğunu tartışmaktayım.

Bu konulara daha sonra, **U** ve **R**'nin, geleceğin daha geniş kapsamlı bir kuramına yapılan yaklaşıklık tahminleri olarak ele alınmak zorunda olup olmadıkları sorusunun yöneltileceği 29 ve 30. bölümlerde geleceğiz. Şimdilik geleneksel formalizmin reçetelerini izleyelim. Geliştirilmiş bir kuram gerekirse, o, her durumda bu geleneksel kuramın reçeteleriyle oldukça yüksek bir isabetle uyuşmak zorunda olacaktır. Yeni bir kuram bulma özlemindeki her okura (ve böyleleri olduğunu umuyorum!), geleneksel kuramın söylemek zorunda olduğu şeyleri tam olarak kabullenmesi önerisinde bulunulacaktır.

22.3 Üniter yapı, Hilbert uzayı, Dirac notasyonu

Schrödinger evriminin "üniter" görünümüne henüz uygun biçimde yönelmedim. Bu, önceki bölümde değinilen dalga fonksiyonlarının "normalleşme" özelliğiyle ilgilidir. Tekil bir (spinsiz) parçacığın ψ dalga fonksiyonuyla ilgili olarak, $\|\psi\|$ niceliğine karşılık gelen "norm"un $|\psi(x)|^2$'nin tüm

Bkz. bölüm 29 ve Everett, 1957; Wheeler, 1957; DeWitt ve Graham, 1973; Geroch, 1984.

uzay üzerindeki integrali biçiminde tanımlandığını anımsayın. ψ üzerindeki normalleşme koşulu $\|\psi\| = 1$ olmasıdır (ve bu koşul yürürlükte olduğunda parçacığı x noktasında bulmaya ilişkin bir konum ölçümüyle ilgili olasılık yoğunluğu $|\psi(x)|^2$ olur). Etkileşen pek çok spin halindeki parçacığın (ya da örneğin sicimler, vb gibi daha genel türdeki kavramların) bulunduğu genel bir kuantum mekaniksel durumda, her zaman, uygun biçimde kabul edilebilir herhangi bir ψ kuantum durumu için pozitif bir gerçel sayı[4] olması gereken ilgili bir $\|\psi\|$ *norm* kavramını talep ederiz. Bu norm kuantum formalizminin **U** kısmıyla ilgili bir şey olsa da aslında ortaya çıkan tüm *olasılıkları* saptayarak **R** kısmında da kritik bir rol oynar.

Normu matematiksel olarak, **W** durum uzayına ait "kabul edilebilir" vektörler için sonlu olması gereken bir *uzunluk karesi* kavramını sağlar biçimde düşünebiliriz. Zamana ilişkin evrime uygulandığı biçimiyle "üniter" sıfatı bize bu normun evrim süresince korunduğunu söyler. Birazdan (§22.4'te) bunun aslında niçin Schrödinger evriminde geçerli olduğunu göreceğiz.

İlk olarak birkaç notasyonu oturtmak ve normalleşebilir kuantum durumlarının özelliklerinden bazılarını incelemek faydalı olacaktır. Normu, durumlar arasındaki bir Hermitsel skaler çarpıma (§13.9) ilişkin belirli bir durum olarak düşünmek değerli olacaktır. Kuantum mekaniksel yazında bu, ϕ ve ψ durumları için genellikle $\langle\phi|\psi\rangle$ biçiminde yazılır ve ψ'nin normu, bununla ilgili $\phi = \psi$ olduğundaki özel durumdur:

$$\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle.$$

Spin halindeki tekil bir parçacık durumunda skaler çarpım, $\|\psi\|$'yle ilgili §21.9'da verilen belirli ifadeyi genelleyen

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{\mathbb{E}^3} \bar{\phi}\psi \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

ifadesi olur. Bu bize, normalleşebilir herhangi iki 1–parçacıklı ϕ ve ψ dalga fonksiyonları arasında tanımlanan pozitif belirli bir Hermitsel skaler çarpımı verir.[22.2]

---

[4] Tekil bir parçacık durumuyla ilgili olarak, §21.9, bazı yazarlar benim kullandığım $\|\psi\|$ yerine "$\|\psi\|^2$"'yi kullanabilirler.

[22.2] Hem $\langle\phi|\phi\rangle$ hem de $\langle\psi|\psi\rangle$'nin yakınsadığı zamanlarda $\langle\phi|\psi\rangle$ integralinin de niçin yakınsadığını açıklayabiliyor musunuz, görün. *İpucu*: Herhangi *sonlu* $\mathbb{E}^3$ bölgesi üzerinde negatif olmayan $|\phi - \lambda\psi|^2$ integraliyle ne ifade edildiğini, $\bar{\phi}\psi$'nin integralinin modül karesiyle, $\bar{\phi}\phi$ ve $\bar{\psi}\psi$'nin integralleri çarpımını birleştiren bir eşitsizlik türeterek değerlendirin. Ara bir basamak olarak, a, b, c, d karmaşık sayılarıyla ilgili, tüm λ'lar için $a + \lambda b + \bar{\lambda}c + \bar{\lambda}\lambda d \geq 0$ olduğunu ifade eden koşullar bulun.

Aslında normalleşebilir dalga fonksiyonları karmaşık bir **H** vektör uzayını (**W**'nun bir alt uzayı) oluşturur ve bu *Hilbert uzayı* olarak bilinen belirli türdeki bir vektör uzayıdır.[22.3] Bir Hilbert uzayının tanımı onun, değeri karmaşık bir sayı olup (tümü, üstte verilen 1–parçacıklı integral durumunda dolaysız olan)[22.4]

$$\langle\phi|\psi+\chi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle$$

$$\langle\phi|a\psi\rangle = a\langle\phi|\psi\rangle$$

$$\langle\phi|\psi\rangle = \overline{\langle\phi|\psi\rangle}$$

$$\psi \neq 0,\ \langle\psi|\psi\rangle > 0 \text{ anlamına gelir}$$

cebirsel özelliklerini sağlayan skaler bir $\langle\ |\ \rangle$ çarpım işlemine sahip karmaşık bir vektör uzayı oluşudur. Bu denklemler ayrıca $\langle\phi+\chi|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle + \langle\chi|\psi\rangle$ ve $\langle a\phi|\psi\rangle = \bar{a}\langle\phi|\psi\rangle$ olduğunu da ima eder.[22.5] Dahası norm bir kez bilindiğinde skaler çarpım onun aracılığıyla tanımlanabilir[22.6] ve böylece normu koruyan doğrusal dönüşümler skaler çarpımı da korumak zorundadır. Ek olarak bir Hilbert uzayı belirli çok temel süreklilik özelliklerini de sağlamalıdır.[5]

Üstteki notasyon, büyük 20. yüzyıl fizikçisi Paul Dirac tarafından sunulan kuantum mekaniğiyle ilgili değerli ve genişçe kullanılan notasyona ilişkin çerçevenin bir kısmını oluşturur. Bu genel düzenin bir parçası olarak bu,

$$|\psi\rangle, |\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle, |0\rangle, |7\rangle, |+\rangle, |X\rangle, |\text{ÖLÜ}\rangle \text{ ya da } |\text{KAPALI}\rangle$$

benzeri ifadeleri, $|\ldots\rangle$ içindeki sembolün söz konusu durumu belirten uygun (ve belki de akılda kalıcı) bir işaret olduğu, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayına ait çeşitli durum vektörlerini gösterir biçimde değerlendirmenin faydalı olduğunu kanıtlar. Bunlar bazen "ket"* vektörleri olarak adlandırılır. Böylesi her bir ket için $\mathbf{H}^*$ ikili uzayının (§12.3) ilgili "bra" vektörü olarak adlandırılan belirli bir üyesi söz konusu olacaktır. Bu, o duruma ilişkin sırasıyla

[22.3] Alıştırma [22.2]'den devamla normalleşebilir dalga fonksiyonlarının aslında bir vektör uzayı oluşturduğunu gösterin.

[22.4] Bunu, integral almaya ilişkin hangi özelliklerin kullanılmakta olduğunu dikkatlice belirterek doğrulayın.

[22.5] Bunu gösterin.

[22.6] $\langle\phi|\psi\rangle$'nin normdan nasıl tanımlanabildiğini gösterin. *İpucu*: $\phi+\psi$ ve $\phi+i\psi$ normları üzerine çalışın.

5 Bu tür uzaylarla çalışmaya sevimli bir başlangıç için *bkz.* Chen, 2002; Reed ve Simon, 1972.

* Parantez anlamına gelen İngilizce "bracket" sözcüğü kuantum mekaniğindeki böylesi bir ifadenin kullanımına sunulmuştur. $\langle\ |\ \rangle$ parantezli ifadesinin sağ tarafı, $|\ \rangle$, "ket" vektörü olarak adlandırılırken sol tarafı, $\langle\ |$, "bra" vektörü olarak adlandırılır, –çn.

$$\langle\psi|, \langle\uparrow|, \langle\rightarrow|, \langle\leftrightarrow|, \langle 0|, \langle 7|, \langle +|, \langle X|, \langle \text{ÖLÜ}| \text{ ve } \langle \text{KAPALI}|$$

biçiminde yazılan *Hermitsel eşlenik*tir. Bra vektörleri ket vektörlerinin ikiliği olduğundan, §12.3'teki nokta çarpımıyla aynı anlamdaki bir skaler çarpıma sahiptir. $|\phi\rangle$ ket vektörüne sahip bir $\langle\psi|$ bra vektörünün bu skaler çarpımı, kesin olarak üstte $\langle\psi|\phi\rangle$ biçiminde yazılmış Hermitsel skaler çarpımdır. Bu, $\langle\psi|\phi\rangle$'nin karmaşık eşleniği olarak $\langle\phi|\psi\rangle$ karmaşık sayısıyla uyumludur. İki $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ durumu, $\langle\phi|\phi\rangle = 0$'sa, diğer bir deyişle $\langle\psi|\phi\rangle = 0$'sa, *ortogonal*dir denir.

Doğrusal bir $\boldsymbol{L}$ işlemcisinin $|\psi\rangle$ üzerindeki eylemi $\boldsymbol{L}|\psi\rangle$ biçiminde yazılır ve $\langle\phi|$ ketinin $\boldsymbol{L}|\psi\rangle$'yle skaler çarpımı

$$\langle\phi|\boldsymbol{L}|\psi\rangle$$

şeklinde yazılır. Ayrıca bu belirli bir "$\langle\phi|\boldsymbol{L}$" brasının $|\psi\rangle$'yle skaler çarpımıdır. "$\langle\phi|\boldsymbol{L}$" brası nedir? O, belirli bir $\boldsymbol{L}^*|\phi\rangle$ketinin, $\boldsymbol{L}^*$, $\boldsymbol{L}$'nin *ilişiği*[6] olmak üzere, karmaşık eşleniğidir. Bir $\boldsymbol{L}$ doğrusal işlemcisine uygulanan "ilişik" işlemi §13.9'da sonlu boyutlu durumda ele alınmış olan $*$ Hermitsel eşlenik işleminin aynısıdır. Karmaşık $\langle\phi|\boldsymbol{L}|\psi\rangle$ sayısının karmaşık eşleniği karmaşık $\langle\psi|\boldsymbol{L}^*|\phi\rangle$ sayısıdır.

22.4 Üniter evrim: Schrödinger ve Heisenberg

Artık Schrödinger evriminin "üniter" doğasına bakmak üzere iyi bir konumdayız. §22.3'te bu evrimin çizgisel olduğunu görmüştük, öyleyse tüm yapmamız gereken onun, **H**'nin iki elemanı $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ arasındaki skaler $\langle\phi|\psi\rangle$ çarpımını korumasını sağlamaktır. Diğer bir deyişle $\langle\phi|\psi\rangle$ zamanda *sabit*tir: $\mathrm{d}\langle\phi|\psi\rangle/\mathrm{d}t = 0$. (Üstte söylenen normu korumakla skaler çarpımı korumanın eşdeğer gerekliliklerdir olduğudur.) Temel olarak $\mathcal{H}$ kuantum Hamiltonımızdan gerek duyduğumuz şey (i) onun bizi ve (ii) kendisine ait Hermitseli Hilbert uzayında tutmasıdır. Bunlar son derece asgari gerekliliklerdir ve bir Hamiltona ilişkin herhangi makul bir öneri tarafından sağlanır. Ona ilişkin Hermitsel doğa örneğin, öz değerlerinin, sistem enerjisiyle ilgili olası değerlerin, gerçel sayı olmasını garanti eden doğal bir gerekliliktir. Ayrıca $\mathcal{H}$'nin, bu durum evrimin üniter doğası için gerekli olmasa da $\mathcal{H}$'nin tüm öz değerleri (enerji değerleri) pozitifken sıfır olmayan tüm $|\psi\rangle$'ler için $\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle > 0$ anlamına gelmek üzere *pozitif belirli* olmasını talep etmek olağandır. Buradan (bir çarpımın türevine ilişkin Leibniz özelliğini, *bkz.* §6.5 ve üstteki özellikleri kullanarak) hemen skaler çarpım-

[6] Kuantum mekaniksel literatürde, konuyla en ilgili matematiksel yazındaki $\boldsymbol{Q}^*$ yerine sıklıkla $\boldsymbol{Q}^\dagger$ notasyonu kullanılır; *bkz.* §13.9.

ların aslında korunduğunu, diğer bir deyişle Schrödinger evriminin üniter olduğunu gösteren

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\phi|\psi\rangle &= \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\phi\middle|\psi\right\rangle + \left\langle\phi\middle|\frac{\partial}{\partial t}\psi\right\rangle \\ &= \langle -\mathrm{i}\hbar^{-1}\mathcal{H}\phi|\psi\rangle + \langle\phi|-\mathrm{i}\hbar^{-1}\mathcal{H}\psi\rangle \\ &= \mathrm{i}\hbar^{-1}\langle\phi|\mathcal{H}|\psi\rangle - \mathrm{i}\hbar^{-1}\langle\phi|\mathcal{H}|\psi\rangle = 0\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz.[22.7] Benzer argüman, örneğin uzamsal dönüşümler ya da döndürmelere ilişkin üreteçler gibi diğer Hermitsel işlemciler için de, bunların da ayrıca **H**'ye ilişkin üniter dönüşümlere karşılık geldiğini göstererek geçerli olur.

Üstteki denklem skaler bir $\langle\phi|\psi\rangle$ çarpımının değişim *oranının* sıfır olduğunu gösterir. Buradan, $\langle\phi|\psi\rangle$'nin, $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ aynı $\mathcal{H}$ uyarınca bireysel olarak Schrödinger evrimine uğramak üzere, *tüm* zaman boyunca değişmez biçimde kaldığı sonucu izler. $t = 0$ zamanında $|\phi\rangle$ ve $|\psi\rangle$ kuantum durumlarına sahip olduğumuzu ve onları Schrödinger reçetesi uyarınca sonraki bir T zamanına kadar sırasıyla $|\phi_T\rangle$ ve $|\psi_T\rangle$ haline gelecek şekilde evrimleşir kabul ettiğimizi varsayalım (§22.2'deki notasyonu kullanarak):

$$|\phi\rangle \rightsquigarrow |\phi_T\rangle \text{ ve } |\psi\rangle \rightsquigarrow |\psi_T\rangle.$$

Böylece

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi_T|\psi_T\rangle$$

olur. Bu bize **H** Hilbert uzayı üzerinde $t = 0$'dan belirli bir $t = T$ zamanına kadar alınan Schrödinger evrimine ilişkin doğrusal eylemin, bu dönüşümü

$$|\phi_T\rangle = \boldsymbol{U}_T|\phi\rangle,\ |\psi_T\rangle = \boldsymbol{U}_T|\psi\rangle, \text{ vb,}$$

olacak şekilde etkileyen bir $\boldsymbol{U}_T$ işlemcisinin bulunması anlamında *üniter* olduğunu söyler. Buradaki $\boldsymbol{U}_T$ işlemcisi §13.9'daki anlamıyla *üniter*dir, diğer bir deyişle tersi kendi ilişiğine eşittir:

$$\boldsymbol{U}_T^{-1} = \boldsymbol{U}_T^*, \text{ diğer bir deyişle } \boldsymbol{U}_T\boldsymbol{U}_T^* = \boldsymbol{U}_T^*\boldsymbol{U}_T = \boldsymbol{I}.$$

Buradaki $\boldsymbol{I}$, **H** üzerindeki birim işlemcidir. ($\boldsymbol{U}_T$'ye ilişkin bu özelliğin gösterimi için *bkz.* §13.9.)

§22.1'de belirtildiği üzere bir kuantum sistemine ilişkin evrimi göstermenin farklı yolları da mevcuttur; *Heisenberg tablosu* olarak adlandırılan, bunların en bilindik alternatifidir. Heisenberg tablosunda, sistemin "durumu", zaman evrimi daha çok dinamik biçimli değişkenler şeklinde kabul edilmek üzere, zamanda *sabit* olarak değerlendirilir. Okur, kuantum siste-

[22.7] Bu iddiayı biraz daha ayrıntılı olarak açıklayın. Leibniz özelliğinin bir Hilbert uzayı skaler çarpımı için neden geçerli olduğunu açıklayabilir misiniz?

minde gerçek bazı fiziki değişiklikler söz konusu olsa bile, kuantum durumunun nasıl "değişmez" biçimde değerlendirilebildiğini elbette sorgulayabilir! Aslında öyledir; fakat Schrödinger tablosundan Heisenberg tablosuna geçiş gerçekten sembollerimizi yalnızca bir yeniden tanımlama meselesidir.

İlk olarak şu ana kadar benimseyegeldiğimiz olağan Schrödinger tablosunu ele alın. $t = 0$ zamanında verili bir $\mathcal{H}$ kuantum Hamiltonı tarafından tanımlanır biçimdeki, Schrödinger reçetesi uyarınca evrimleştiğini kabul ettiğimiz bir $|\psi\rangle$ kuantum durumuna, T kadar bir süre sonra $|\psi\rangle$'nin

$$|\psi\rangle \rightsquigarrow |\psi_T\rangle = \boldsymbol{U}_T|\psi\rangle$$

olacağı şekilde sahibiz. $\boldsymbol{U}_T$ eyleminin $\mathbf{H}$ Hilbert uzayının tümünde gerçekten doğrusal biçimde geçerli olduğunu anımsayın. Böylece herhangi başka bir $|\phi\rangle$ durumu, daha önce $|\psi\rangle$ için kullanılmış olan aynı $\boldsymbol{U}_T$'yle birlikte ilgili bir $|\phi\rangle \Rightarrow |\phi_T\rangle = \boldsymbol{U}_T|\phi\rangle$ evrimine uğrar. Heisenberg tablosunda T zamanındaki durumu basit biçimde

$$|\psi\rangle_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}_T^{-1}|\psi\rangle = \boldsymbol{U}_T^{*}|\psi\rangle$$

olarak düşünürüz. $|\psi\rangle_T$ "Heisenberg durumu"nun zamanın ilerleyişiyle (temel olarak tanımda!) değişmediği açıktır. Öte taraftan cebirsel işlemlerin, öz değerlerin (ölçülmüş fiziki parametreler) Schrödinger tablosundakiyle aynı olacağı şekilde, önceden olduğu gibi devam etmesi için dinamik biçimli değişkenlerin de denkleştirici şekilde evrimleşmesine gerek duyarız. Bu nedenle ($\mathbf{H}$ üzerindeki) herhangi bir çizgisel $\boldsymbol{Q}$ işlemcisi kendi

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}_t^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{U}_t^{*}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}_t$$

Heisenberg versiyonuyla yer değiştirmek zorundadır. Buradan dolaysız biçimde, herhangi öz değere ya da herhangi skaler çarpıma ilişkin Heisenberg versiyonunun Schrödinger versiyonuyla aynı olduğu sonucu izler.[22.8] Artık Heisenberg evrimi (Schrödinger tablosunda sabit olduğu varsayılan) $\boldsymbol{Q}$ işlemcilerine ve özellikle dinamik biçimli değişkenlere uygulanır. Buradan

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{H}}\mathcal{H} - \mathcal{H}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{H}}$$

*Heisenberg hareket denklemleri*ne ulaşırız.[22.9] (Buna ilişkin belirgin bir sonucun $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{H}} = \mathcal{H}$ durumunda ortaya çıkan enerji korunumu olduğuna dikkat edin.)

[22.8] Tüm bunları ayrıntılı biçimde açıklayın.

[22.9] Bunu doğrulayabilecek misiniz görün.

Okur şeyleri bu şekilde açıklamakla ne kazandığımızı sorabilir. Heisenberg tablosunda, bazı bağlamlarda teknik avantajlar söz konusudur fakat bu tablo kuantum mekaniğinin yoruma dayalı bilmeceleriyle ilgili şeyler konusunda yardımcı olmaz. "Kuantum sıçramaları" sorunu ortadan kalkmadı fakat $|\psi\rangle_H$'nin **R** işleminde başka bir şeye "sıçrama"sına izin vererek suçu duruma yıkmak ya da "sıçrama"yı Heisenberg dinamik biçimli değişkenlerinin yaptığını kabul etmek seçeneklerine sahip olabiliriz. Kendi adıma bu "sıçrama" meselelerinin Heisenberg tablosunda, herhangi bir şey çözülmüş olmaksızın daha anlaşılmaz hale getirildiğini görüyorum.

Schrödinger tablosunda en azından, bize "kuantum gerçekliği"nin neye benzediğine küçücük bir bakış atma fırsatı sunan, evrimleşen bir durum vektörüne sahibiz! Heisenberg tablosu, kendi durum vektörü fiziki bir eylem gerçekleşmekte bile olsa hareketsiz biçimde yerinde durduğundan, pek de bunu yapma şansına sahip görünmez. Dahası, dinamik biçimli değişkenlerin evrimi herhangi özel bir fiziki sistemdeki değişimi göstermez çünkü onlar özel sistemleri pek de açıklamaz fakat bunun yerine bir sisteme sorulabilen, örneğin "konumun nedir", vb, gibi şeyleri sorgular.

Bu iki farklı tabloya sahip olunması, büyük oranda tarihi nedenlerledir. Kendi tablosunu Haziran 1925'te üreten Heisenberg ilkti ve Schrödinger kendi önermesini yarım yıl kadar sonra Ocak 1926'da ortaya koydu ve bundan kısa süre sonra iki düzen arasındaki özdeşliği fark etti. Schrödinger'in dalga fonksiyonunun $|\psi^2|$ modül karesine ilişkin olasılık yorumunu (§21.9) ilk ileri süren, Haziran 1926'da Max Born'du. Schrödinger'in kendisi de ψ'yle ilgili daha "klasik biçimli bir alan" tablosuna tutunmaya çalıştı. Kuantum mekaniğiyle ilgili genel işlemci çerçevesi Heisenberg, Born ve Pascual Jordan'ın çalışmalarından ortaya çıkıp Dirac tarafından tümüyle formüle edildi ve ilk olarak 1930'da basılmış olan son derece etkileyici *The Principles of Quantum Mechanics* [Kuantum Mekaniğinin İlkeleri] adlı kitabında ayrıntılı biçimde açıklandı.[7]

Elbette durum, sonuç olarak kuantum kuramına bir değişim sunulduğunda bir formalizmi diğerine tercih etmekle ilgili iyi sebepler söz konusu olabilir, ve ikisi arasındaki eşdeğerlik ortadan kalkabilir. Kuantum kuramı ve (özel) görelilik kuramını uyumlu bir düzen içinde bir araya getirmeye çalışan kuantum alan kuramıyla (*bkz.* bölüm 26) ilgili durum bile kibarca budur. Dirac bu durumda, Heisenberg tablosunu seçmekle ilgili[8] bazı gerekçeler ortaya koydu. Bununla birlikte görelilikle ilgili olarak ne He-

[7] En güncel basım için *bkz.* Dirac, 1982. Daha yakın bir uygulama için *bkz.* Shankar, 1994.

[8] Görelilikçi kuantum alan kuramında Schrödinger tablosunun yer almadığına ilişkin bir iddia için *bkz.* Dirac, 1966.

isenberg tablosu ne de Schrödinger tablosu değişmezdir. Bu bağlamda bazen melez "etkileşim tablosu" tercih edilir.[9]

22.5 Kuantum "gözlemlenebilirler"i

Şimdi, kuantum sistemi içindeki bir ölçümün formalizm içinde nasıl gösterilmesi gerektiğini görelim. §22.1'de belirtildiği üzere konum ve momentum ölçümlerine ilişkin 21. bölümde verilmiş olan örnekler bir kuantum ölçümü genel durumunda ne olduğunu açıklayıcı niteliktedir. Bir kuantum sistemine ait bir "ölçülebilir" nitelik, *gözlemlenebilir* olarak adlandırılan belirli türde bir $\boldsymbol{Q}$ işlemcisince gösterilir ve bu işlemci kuantum durumuna uygulanabilir. Dinamik biçimli değişkenler (konum ya da momentum diyelim), gözlemlenebilirlere ilişkin örneklerdir.[10] Kuram bir $\boldsymbol{Q}$ gözlemlenebilirinin, $\mathbf{H}$ uzayı üzerindeki eylemi $\mathbf{H}$'ye ilişkin doğrusal bir dönüşümü (§13.3), olasılıkla tekil olsa da, etkileyecek şekilde (konum ya da momentum işlemcileri benzeri) doğrusal bir işlemci olarak gösterilmesini talep eder. ψ, $\boldsymbol{Q}$'nun bir öz durumuysa ψ durumunun $\boldsymbol{Q}$ gözlemlenebilirine ilişkin olarak bir *belirli değere* sahip olduğunu söyleriz, bu durumda ilgili q öz değeri bu belirli değer olur.[11] Bu, daha önce §21.5, 10, 11'de konum ve momentumla ilgili olarak karşılaştığımız terminolojinin aynısıdır.

Geleneksel kuantum mekaniğinde genellikle tüm öz değerlerin gerçel sayılar olma zorunluluğu talep edilir. Bu, $\boldsymbol{Q}$'nun, kendi ilişiğine eşit olması anlamına gelecek şekilde bir Hermitsel olması sağlanarak garanti edilebilir:[22.10]

$$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}.$$

Bana göre, bir $\boldsymbol{Q}$ gözlemlenebiliri üzerindeki bu Hermitsel gereklilik, karmaşık sayılar klasik fizikte, örneğin gök küreye ilişkin Riemanncı küre gösterimi (§18.5), harmonik osilatöre ilişkin pek çok standart tartışmada (§20.3), vb'deki gibi sıklıkla kullanıldığından gerçekçi olmayan bir şekilde

---

[9] Etkileşim tablosu örneğin Hamiltonın zaman bağımlı olduğu "zaman bağımlı tedirgeme kuramı" hesaplamalarında sıklıkla kullanılır. *Bkz.* Shankar, 1994, bölüm 18; Dirac, 1966.

[10] Burada, konum ya da momentumu bazı denklemlerde *gerçek* "gözlemlenebilirler" olma yeterliliğinden alıkoyabilecek, öz durumların normalleşebilir olmadıklarına ilişkin gerçeği göz ardı ediyorum.

[11] Daha genel biçimde bir öz değer olsa da olmasa da, $q = \langle\psi|\boldsymbol{Q}|\psi\rangle$ ise q'nun, normalleştirilmiş $|\psi\rangle$ durumuyla ilgili $\boldsymbol{Q}$'ya ait *beklenti değeri* olduğunu söyleriz.

[22.10] Hermitsel bir $\boldsymbol{Q}$ işlemcisinin herhangi bir öz değerinin aslında *gerçel* bir sayı olduğunu gösterin.

şiddetli bir gerekliliktir.[12] Bir gözlemlenebilir üzerindeki temel bir gerekliliik kendisine ait ayrık öz değerlere karşılık gelen öz vektörlerin birbirine ortogonal olmasıdır. Bu "normal" olarak adlandırılan işlemcilerin karakteristik bir özelliğidir. Bir Q *normal* işlemcisi kendi ilişiğiyle değişmeli olan işlemcidir:

$$Q^*Q = QQ^*.$$

Ayrık öz değerlere karşılık gelen bu tür bir Q normaliyle ilgili öz vektörlerin herhangi bir çifti aslında ortogonal olmak zorundadır.[22.11] Bir ölçüm sonucu ortaya çıkabilecek alternatif durumlar arasındaki standart ortogonallik gerekliliğinde ısrar ederken ölçüm sonuçlarının (öz değerler) karmaşık sayılar oluşuyla ilgili memnuniyet duymam nedeniyle kuantum "gözlemlenebilirler"imin, Hermitsel olmalarına ilişkin daha kuvvetli gereklilik yerine yalnızca normal çizgisel işlemciler olmalarını isteyeceğim.

Burada, kuantum gözlemlenebilirlerine öz vektörlerin (**H**'ye ait herhangi bir elemanın bu öz vektörler biçiminde çizgisel olarak ifade edilebileceği şekilde) **H** Hilbert uzayının tümünü kapsamasıyla ilgili başka bir gerekliliği de yorumlayacağım. Bu özellik, sonlu boyutlu durumda Q'ya ilişkin Hermitsel (ya da normal) doğanın matematiksel bir sonucudur. Bununla birlikte sonsuz boyutlu bir **H**'yle ilgili olarak buna, bir kuantum gözlemlenebiliri biçiminde rol oynayacak herhangi bir Q'ya ilişkin ayrı bir varsayım olarak gerek duyarız. Bu özelliğe sahip bir Hermitsel *öz ilişik* biçiminde adlandırılır.

Bir kuantum gözlemlenebiliriyle ilgili ortogonallik gereksinimi kuantum ölçüm işlemi için önemlidir. Kuantum mekaniği kuralları uyarınca bir Q işlemcisiyle ilgili ölçüm sonucu her zaman kendisine ait öz değerlerden biri olacaktır; bu, kuantum durumunun **R** işlemiyle birlikte gerçekleşen "sıçrama"sıdır (*bkz.* §22.1). Ölçümden önce sistemin durumu ne olursa olsun o, tıpkı **R**'yle uyum içindeki durum ölçümünde olduğu gibi, Q'nun öz durumlarından birine sıçrar. Ölçüm sonrasında durum, Q gözlemlenebiliriyle ilgili belirli bir değer, diğer bir deyişle ilgili q öz değerini edinir. Bu nedenle, Q gözlemlenebilirine ilişkin olası farklı ölçüm sonuçlarından her biri için, diğer bir deyişle her bir $q_1, q_2, q_3, \ldots$ öz değeri için, tümü karşılıklı olarak ortogonal olan alternatif sonuç durumları kümelerinden birini elde ederiz.

Bu niçin önemlidir? Kısa süre içinde bu alternatif çıktıların her birine ilişkin olasılıkları hesaplamakta gerekli kuantum yasalarının ne olduğunu

---

[12] *Bkz.* Dirac, 1982. Karmaşık parametreler pek çok alanda kullanılır, *örn.* Fortney, 1997.

[22.11] Bunu kanıtlayabilecek misiniz bakın. *İpucu*: $\langle\psi|(Q^* - \bar{\lambda}I)(Q - \lambda I)|\psi\rangle$ ifadesini ele alarak ilk önce $Q|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ ise $Q^*|\psi\rangle = \bar{\lambda}|\psi\rangle$ olduğunu gösterin.

göreceğiz. Bu kuralların bir anlamı, bir durumun, bir ölçüm sonucu olarak ortogonal bir duruma sıçrama olasılığı her zaman sıfır olacaktır. Buradan hareketle bir Q gözlemlenebiliriyle tanımlanan bir ölçüm yinelenirse bu durumda ikinci ölçüm ilkinin verdiği aynı öz değeri, diğer bir deyişle ölçümle ilgili aynı sonucu verecektir. Farklı bir sonuç vermek onun, bir durumdan ortogonal bir duruma, olasılık kurallarının izin vermeyeceği bir sıçrama gerçekleştirmesine yol açar. Bununla birlikte bu mutlu son farklı öz değerle için Q'ya ait öz durumların ortogonalliğine bağlıdır; Q'nun normal bir işlemci olmasına gerek duymamızın sebebi budur.

Şimdi, "gözlemlenen" $|\psi\rangle$ durumuyla birlikte sunulduğunda Q gözlemlenebilirine ilişkin farklı alternatif öz durum olasılıkları görevine geri dönelim. Kuantum mekaniksel olasılığın, Q gözlemlenebilirine ilişkin her hangi başka (örneğin ölçülmüş olan öz değerin değeri gibi) bir görünüme değil de yalnızca ölçüm öncesi ve sonrasındaki kuantum durumlarına bağlı oluşu **R** kuantum işleminin dikkat çekici bir özelliğidir. Kural, Q'ya ait $|\psi\rangle$ durumunun $|\phi\rangle$ öz durumuna sıçrama olasılığının, $|\psi\rangle$ ve $|\phi\rangle$'nin normalleştirilmiş ($\|\psi\| = 1 = \|\phi\|$) olduğu varsayılarak,

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

ifadesiyle verilmesidir. Diğer türlü, üstteki ifadeyi olasılık elde edilmeden önce $\|\psi\|$ ve $\|\phi\|$'yle bölmemiz gerekir. Bu olasılığı, normalleştirilmemiş durumlarla ilgili olarak

$$\frac{\langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle}$$

zarif biçiminde yazmayı seçebiliriz. Bu her zaman 0'la 1 arasında bir değerdir ve 1 değerini yalnızca durumlar orantılı olduğunda alır.[22.12] Üstteki tartışmadan Schrödinger evriminin $\langle\phi|\psi\rangle$ skaler çarpımlarını koruduğunu anımsayın. Bu, **U** ve **R** işlemleri arasındaki önemli bir uyumluluk ilişkisidir ve uyumsuz olmalarına karşın **U** ve **R**'nin birbirleriyle düzenli biçimde "kaynaş"tığı gerçeğini ifade eder. Aslında bir ölçümdeki durumun, ortogonal bir duruma hiçbir zaman dolaysız biçimde sıçramadığını görürüz çünkü $\langle\phi|\psi\rangle = 0$ olması, bununla ilgili olasılığın sıfır olduğu anlamına gelir.

Normalleştirilmiş ψ ve ϕ ortogonal durumları arasındaki bir kuantum üst üste binmesinde, $w\psi + z\phi$ diyelim, ağırlıklandırma çarpanı karmaşık sayıları w ve z bazen *genlikler* ya da "olasılık genlikleri" olarak adlandırılır. Bu durumda, $w\psi + z\phi$ durumundaki ψ'yi ϕ'den ayırt etmek üzere kuru-

[22.12] Bunu, alıştırma [22.2]'deki yöntemler aracılığıyla $\langle\ |\ \rangle$ cebirsel özelliklerinden hareketle gösterin.

lan bir deney, ψ'ye ilişkin $\bar{w}w = |w|^2$ ve ϕ'ya ilişkin $\bar{z}z = |z|^2$ olasılığını getirir, diğer bir deyişle olasılıkları elde etmek üzere genlik modüllerinin karelerini alırız. Benzer bir yorum bu tür ikiden fazla durumun üst üste binmesinde de geçerlidir.

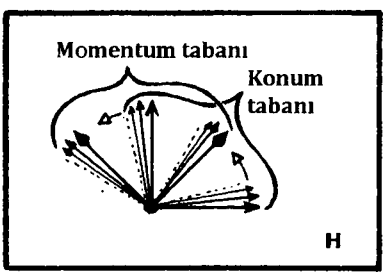
Normal bir $\boldsymbol{Q}$ işlemcisine ilişkin yararlı bir özellik (kendisine ait öz vektörlerin **H**'nin tümünü kapsadığını varsayarak), onun her zaman Hilbert uzayıyla ilgili ortonormal bir taban oluşturan bir öz değerler ailesine sahip oluşudur. Bir *ortonormal taban* (§13.9'la karşılaştırın)

$$\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} Kronecker deltası olmak üzere) olacak şekilde ve **H**'ye ait her ψ elemanı ($z_1, z_1, z_1, \ldots$ ψ'ye ilişkin karmaşık "kartezyen koordinatlar" olmak üzere)

$$\psi = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3 + \cdots$$

biçiminde ifade edilebilmek üzere **H**'nin bir $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots$ elemanlar kümesidir. Bu, yapısız tekil bir parçacıkla ilgili, (bir Fourier dönüşümü kullanılarak gerçekleştirildiği üzere) momentum ya da ($\psi(\boldsymbol{x}) = \int \psi(\boldsymbol{X})\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X})\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}$) konum (§21.11) durumlarının sürekli bir doğrusal birleşimi olarak genel bir dalga fonksiyonu ifadesine benzerdir çünkü momentum ve konum durumları sırasıyla **p** ve **x** momentum ve konum işlemcilerinin öz değerleridir. Konum gösteriminden momentum gösterimine geçiş **H** Hilbert uzayındaki bir taban değişimi anlamına gelir (*bkz.* Şekil 22.3). Bununla birlikte ne momentum durumları ne de konum durumları, teknik bir anlamda gerçekten bir taban oluşturur çünkü normalleşebilir değildirler ve gerçekten kesinlikle **H**'ye ait değildirler! (Kuantum mekaniği bu türde rahatsız edici konularla doludur. Bu durum doğası devam ettiğinden, bu tür matematiksel inceliklerle ilgili kararlı şekilde özensiz olunup hatta konum ve momentum durumları gerçek durumlarmış gibi davranılabilir ya da tüm zaman matematiği doğru biçime sokmakta ısrar etmeye harcanabilir fakat bu durumda bir "ölü katılığı"na hapsolmakla ilgili çelişkili bir tehlike söz



Şekil 22.3 Bir konum gösteriminden momentum gösterimine geçiş yalnızca (teknik olarak, normalleşebilir olmamak üzere, ne momentum ne de konum durumu **H***'ye gerçekten ait olmasa da)* **H** *Hilbert uzayındaki taban değişimidir.*

konusudur. Bir orta yol tutturmak için elimden geleni yapıyorum fakat konuyla ilgili gelişme sağlayacak doğru yanıtın ne olduğunu bildiğimden pek emin değilim!)

22.6 EVET/HAYIR ölçümleri; projektörler

Öz durumların normalleşebilir olmadığı örneğin konum ya da momentum işlemcileri durumunda bu tür bir durumda bir parçacık bulma olasılığını sıfır olarak elde ederiz. Bu gerçekten de "doğru" yanıttır çünkü herhangi belirli bir değere sahip konum ya da momentum olasılığı (konum ve momentum sürekli parametreler olmak üzere) aslında sıfırdır. Bu bize pek yardımcı olmaz, öyleyse örneğin "konum filanca bir değer aralığında mıdır?" sorusunu soran gibi başka türdeki gözlemlenebilirleri tercih edebiliriz. Bu tür bir soru momentumla (ya da başkaca sürekli herhangi bir gözlemlenebilirle) ilgili olarak da sorulabilir. Böylesi evet/hayır soruları kuantum mekaniğiyle, diyelim ki öz değere EVET yanıtı için 1 ve HAYIR yanıtı için 0'ı atayarak birleştirilebilir. Bu türdeki bir gözlemlenebilir *projektör* olarak adlandırılan şeyle açıklanır.

Bir $\boldsymbol{E}$ projektörü, öz ilişik olma ve kendi karesine eşit olma özelliklerine sahiptir:[22.13]

$$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^*.$$

Böylesi şeyler en ilkel türdeki ölçümü sunar ve kuantum mekaniğindeki "ölçüm" tarafından ortaya konulan konular, pek çok amaca yönelik olarak en iyi şekilde bu tür işlemciler biçiminde gerçekleştirilir. Bununla birlikte böylesi bir EVET/HAYIR ölçümü gerçekleştirildiğinde özellikle göze çarpar hale gelen bir konu mevcuttur çünkü (2'den daha yüksek boyuttaki) bu işlemciler (tümüyle) *bozuk*tur. Bir q öz değeriyle ilgili olarak, q'ya karşılık gelen öz vektör uzayı 1–boyutludan daha büyükse, diğer bir deyişle $\boldsymbol{Q}$'ya ait aynı q öz değerine karşılık gelen orantılı olmayan öz vektörler mevcutsa, $\boldsymbol{Q}$ bozuktur deriz (§13.5). Aynı q öz değerine karşılık gelen tüm öz vektörlerden oluşan $\mathbf{H}$ çizgisel alt uzayının tümü $\boldsymbol{Q}$'nun q'ya karşılık gelen *öz uzayı* olarak anılır. Böylesi durumlarda, ölçümün "sonucu"nun elde edilmesi (diğer bir deyişle öz değerin saptanması) bize kendiliğinden durum vektörünün hangi duruma "sıçrama"sı gerektiğini söylemez. Konu, ölçüme bağlı olan $|\psi\rangle$ durumunun, $\boldsymbol{Q}$'nun q'ya karşılık gelen öz uzayına[13] ortogonal olarak yansıtıldığını ileri süren *izdüşüm önermesi* tarafından çözülür.

[22.13] Bir $\boldsymbol{Q}$ gözlemlenebiliri polinom biçimli bir denklemi sağlıyorsa bu durumda ona ait her bir öz değerin aynı denklemi sağladığını gösterin.

[13] İzdüşüm ölçümlerine ilişkin mükemmel bir ele alış biçimi Kraus, 1983; Nielsen ve Chuang, 2000'de bulunabilir.

Aslında "izdüşüm önermesi" terimi basitçe sıklıkla §22.1'in, bir $\boldsymbol{Q}$ gözlemlenebilirinin ölçümünün bir sonucu olarak durumun, ölçümün sunduğu öz değere karşılık gelen $\boldsymbol{Q}$'ya ait bir öz duruma sıçradığı, (von Neumann tarafından açıklandığı üzere)[14] standart kuantum mekaniksel işlem için kullanılır. Bu ve sonraki bölümde bu önermeye ilişkin izdüşüm görünümünün bozuk öz değerler durumundaki önemini vurguluyorum.[15]

Bu izdüşümü ifade etmenin en iyi yollarından biri, uygun bir $\boldsymbol{E}$ projektörünü, diğer bir deyişle 1 EVET öz değerine karşılık gelen öz uzayı, $\boldsymbol{Q}$'nun q'ya karşılık gelen öz uzayına eşdeğer olan projektörü kullanarak yapılandır. (Bu her zaman yapılabilir; $\boldsymbol{E}$ basitçe $\boldsymbol{Q}$'nun sorduğundan daha basit bir soru sorar: "q, $\boldsymbol{Q}$ ölçümünün sonucu mudur?") Böylece izdüşüm önermesinin iddia ettiği şey ölçümün sonucunun (q sonucuna sahip $\boldsymbol{Q}$ ya da 1 sonucuna sahip $\boldsymbol{E}$'yle birlikte)

$$|\psi\rangle\text{'nin } \boldsymbol{E}|\psi\rangle\text{'ye}$$

sıçraması şek linde olduğudur. Bunda, normalleştirmeleri dert etmedim (ve istemezsek dert etmeye gerek de yoktur). Sonuçtaki durumu normalleştirmemiz istenirse $|\psi\rangle$'yi daha dağınık görünümlü $\boldsymbol{E}|\psi\rangle\langle\psi|\boldsymbol{E}|\psi\rangle^{-1/2}$'ye sıçrar biçimde kabul edebiliriz. Bununla birlikte buradaki açıklamalarımda durumlarımı normalleştirmek zorunluluğunda olmamayı daha uygun buluyorum. Bu denklemlerin pek çoğunu öbür türlüsünden daha basit görünümlü hale getirir.

Şekil 22.4'te izdüşüm önermesinin **H** Hilbert uzayı içindeki geometrik doğasını belirttim. $\boldsymbol{E}$ projektörünü (kendisi de bir projektör olan) $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}$'yle değiştirdiğimizde EVET ve HAYIR öz uzaylarının basit biçimde yer değiştirdiğini bulduğumuza dikkat edin. ($\boldsymbol{I}$ burada **H** üzerindeki birim işlemcidir.) Bu nedenle ölçüm $\boldsymbol{E}$ ölçümüyle ilgili olarak 0 elde ederse $|\psi\rangle$, $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E})|\psi\rangle(= |\psi\rangle - \boldsymbol{E}|\psi\rangle)$'ye sıçrar. $|\psi\rangle$'nin, birbirine ortogonal olan iki $\boldsymbol{E}|\psi\rangle$ ve $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E})|\psi\rangle$ durumunun[22.14] toplamı olduğuna dikkat edin. $\boldsymbol{E}$ ölçümü bu ikisi arasında karar verir; ilki için EVET, ikincisi için HAYIR:

$$|\psi\rangle = \boldsymbol{E}|\psi\rangle + \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E})|\psi\rangle.$$

Bu iki alternatife ilişkin olasılıkları, diğer bir deyişle kendisi aracılığıyla durum "norm"unun (uzunluk karesi) ilgili her bir izdüşümde indirgenmiş hale geldiği miktarı ifade etmenin dolaysız bir geometrik yolu mevcuttur.[22.15] Bu basit geometrik gerçek durumlarımızı normalleştirmekte ısrar edersek belirsizleşir!

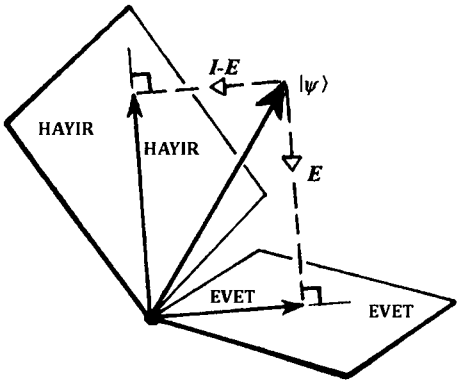
---

[14] *Bkz.* von Neumann, 1955.

[15] *Bkz.* Lüders, 1951, ayrıca *bkz.* Penrose, 1994.

[22.14] Bunu gösterin.

[22.15] Niçin?



Şekil 22.4 İzdüşüm önermesinin **H** içindeki geometrik doğası. Yatay düzlem 1 öz değerlerini (EVET) ve dikey düzlem 0 öz değerlerini (HAYIR) göstermek üzere E projektörüne ait öz uzaylar belirtiliyor. Resim, $|\psi\rangle$'ye ilişkin $|\psi\rangle = E|\psi\rangle + I - E)|\psi\rangle$'nin, $E|\psi\rangle$, $|\psi\rangle$'nin EVET uzayı (ölçümün EVET veren sonucu) içindeki izdüşümü ve $I - E)|\psi\rangle$, $|\psi\rangle$'nın HAYIR uzayı (HAYIR sonucu) içindeki izdüşümü olmak üzere iki ortogonal parçaya ayrıştırıyor. Her bir durumdaki olasılık, $|\psi\rangle$'ye ait (Hermitsel) uzunluk karesinin (durum vektörlerinin normalleştirilmediği) izdüşüm içinde kendisi aracılığıyla indirgendiği kesin bir orantılılık tarafından verilir.

22.7 Boş ölçümler; sarmallık

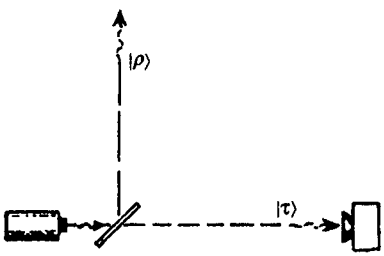
Bazı fizikçiler izdüşüm önermesiyle ilgili kuşkularını (ya da onun "gereksiz" ya da "gözlemlenemez" olduğunu) ifade ettiler. Zorluk, durumun ölçüm sonrası ne hale geldiğini belirlemeye ilişkin hiçbir araca sahip olamayabileceğimizdi çünkü belki de ölçüm işleminin kendisi, gözlemlenenin durumunun, kendi başına değerlendiremeyeceği şekilde ölçüm aletleriyle karışmış hale gelmesine neden olmuştu. Aslında bu bazen karmaşıklaşan bir konu olabilir fakat izdüşüm önermesinin (gerekirse bozuk) bir ölçümü belirgin biçimde açıkladığı koşullar kesinlikle mevcuttur. Buna ilişkin en açık durum, bir *boş* (ya da *etkileşim serbest*) ölçüm durumunda ortaya çıkar. Bu etkileyici türdeki durum kendi hesabına ilgi çekicidir ve kuantum mekaniksel davranışın en tuhaf görünümlerinden birini örnekler. Buradan hareketle, bir ya da iki örneğe göz atmamıza değecektir.

§21.7'de tartışılan, tekil bir fotonun bir huzme ayırıcıya gönderilip kendisine ait durumun bir kısmının yansıtılıp bir kısmının aktarıldığı türdeki bir durumu ele alalım. Karşılaşma sonrası durum bu iki ortogonal parçanın, aktarılan $|\tau\rangle$ parçası ve yansıtılan $|\rho\rangle$ parçasının bir toplamıdır (güzel bir kestirme toplama işlemi yapmak üzere ilgili her faz çarpanını $|\tau\rangle$ ve $|\rho\rangle$'nun tanımlarına çekip normalleştirmede ısrar etmeyiz) (*bkz.* Şekil 22.5):

$$|\psi\rangle = |\tau\rangle + |\rho\rangle.$$

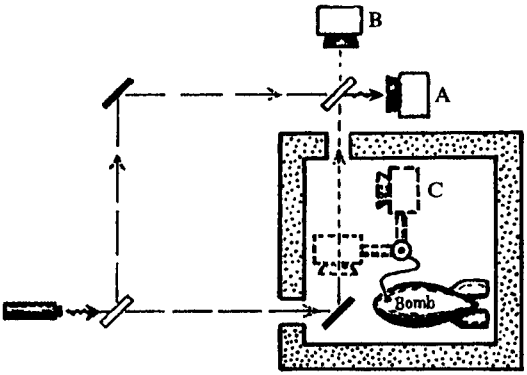
Aktarılan huzmeye, argümanla ilgili amaçlar için, %100 algılama verimine sahip olduğunu varsaydığımız bir algılayıcı yerleştirildiğini düşünün. Dahası, foton kaynağı, her foton yayınımı olayının %100 verimle (kaynakta) kaydedileceği biçimde olmalıdır. (Bunlar açık biçimde yapılmış olan idealleştirmelerdir; gerçek bir deneyde bu tür verimlere yaklaşmak zor olabilir. Yine de bunlar kuantum mekaniğinin nasıl işlediğini örneklemek üzere yapılması makul idealleştirmelerdir.) Bazı durumlarda kaynağın bir foton yaydığını fakat algılayıcının bunu saptamadığını görürsek, bu durumlarda fotonun "diğer yoldan gittiği"nden ve böylece ona ait durumun yansıtılan $|\rho\rangle$ olduğundan emin olabiliriz. Dikkat çekici olan şey, fotonun algılan*ma*masına ilişkin ölçümün fotonun durumunun bir kuantum sıçramasına ($|\psi\rangle$ üst üste binmesinden yansıyan $|\rho\rangle$ durumuna) uğrayışına, fotonun ölçüm aletleriyle hiç de etkileşmemiş olması gerçeğine karşın, sebep olmasıdır. Bu bir *boş* ölçüm örneğidir.

Bu türde etkileyici bir kullanım Avshalom Elitzur ve Lev Vaidman tarafından öne sürüldü.[16] Huzme ayırıcımızı Mach–Zehnder tipindeki bir girişimölçerin (§21.7'de açıklanmış olan astronomik düşünce deneyimin son kısmını anımsayın; *bkz.* Şekil 21.9) bir parçası olarak fakat ilk huzme ayırıcının aktarılmış olan huzmesine bir C algılayıcısının yerleştirilip yerleştirilmediğini bilmediğimiz bir şekilde düşünelim. C algılayıcısının bir bombayı, algılayıcı bir foton alırsa bombanın patlayacağı biçimde tetiklediğini düşünün. Sonda iki A ve B algılayıcısı mevcuttur ve C'nin bulunmadığı koşulda B'nin değil fakat yalnızca A'nın bir foton alındısı kayde-



Şekil 22.5 İzdüşüm önermesini gerektiren sıfır ölçümü. Tekil bir foton bir huzme ayırıcıya gönderilir. Sonuçtaki $|\psi\rangle$ durumu, kısmen yansıtılıp kısmen aktarılmış olarak, aktarılan $|\tau\rangle$ parçası ve yansıtılan $|\rho\rangle$ parçasının $|\psi\rangle = |\tau\rangle + |\rho\rangle$ toplamıdır (ilgili her faz çarpanını tanımlara çekip normalleştirmede ısrar ederek). Kaynağın bir foton yayımladığı fakat algılayıcının bunu saptamadığı görülürse bu durumda, foton algılayıcıyla hiç etkileşmemiş olsa bile onun $|\rho\rangle$ durumunda olduğunu biliriz.

[16] *Bkz.* Elitzur ve Vaidman, 1993.

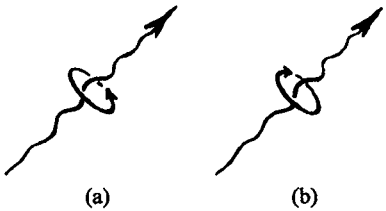


Şekil 22.6 Elitzur–Vaidman bomba testi. Bir bombaya iliştirilmiş C algılayıcısı, Mach–Zehnder tipindeki bir girişimölçere eklenmiş olabilir ya da olmayabilir (*bkz.* Şekil 21.9) (İnce beyaz dikdörtgenler huzme ayırıcıları, siyah olanlar aynaları göstermektedir.) Girişimölçer içindeki kol uzunlukları, C'nin eklenmediği her durumda kaynak tarafından yayılan bir fotonun A algılayıcısına ulaşmak zorunda olacağı şekilde eşittir. B algılayıcısının fotonu (bomba patlamaksızın) aldığı durumda fotonla karşılaşmasa bile C'nin, huzme içindeki yerinde olduğunu biliriz.

debileceğini (§21.7'den) biliyoruz. *Bkz.* Şekil 22.6. C'nin (ve bombanın) varlığını, onu gerçekten bir patlamada kaybetmediğimiz bir koşulda öğrenmek istiyoruz. Bu, B algılayıcısının fotonu gerçekten kaydettiği durumda gerçekleşir çünkü bu yalnızca C algılayıcısı fotonu al*ma*dığına ilişkin ölçümü yaptığında gerçekleşebilir! Foton aslında diğer yola girdiği için, C'nin yokluğunda fotonu yalnızca A alabilecekken artık, A ve B'den her birinin fotonu alma olasılığı $\frac{1}{2}$'dir (çünkü artık iki huzme arasında hiçbir girişim söz konusu değildir).[17]

Henüz verilmiş olan örneklerde hiçbir bozulma mevcut değildir, öyleyse üstte, ölçüme ilişkin tek sonucun sistemin "sıçra"dığı durumu saptamayabileceğine ilişkin olarak belirtilmiş olan konu gündeme gelmez. §22.6'dan, bozuk öz değerlerden kaynaklanan bu anlam belirsizliklerini çözümlemek üzere izdüşüm önermesinin uygun kullanımına gerek duyduğumuzu anımsayın. Buradan hareketle başka bir serbestlik derecesi sunalım. Bunu foton polarizasyonu olgusunu hesaba katarak yapmak uygun olur. Bu, daha önce kuantum mekaniksel spine ait olarak anılan fiziki niteliğe ilişkin bir örnektir. Spine ilişkin fikirlere daha ayrıntılı olarak

[17] Etkileşim serbest ölçümlere ilişkin orijinal fikir Robert Dicke'den kaynaklanmış görünüyor. Bu, küteleçekimle ilgili dalga algılanmasında olduğu gibi çok çarpıcı bazı uygulamalara sahiptir; *bkz.* Braginsky, 1977. Burada açıklanmış olan olağanüstü Elitzur–Vaidman "bomba testi" düşünce deneyi farkl türdeki uygulamalara yol açmış olabilir; ayrıca *bkz.* Penrose, 1994.



Şekil 22.7 Kütlesiz bir parçacık, örneğin bir foton, yalnızca kendi hareketi yönünde spin yapabilir. Verili bir kütlesiz türde parçacık için bu $|s|$ spininin miktarı her zaman aynıdır fakat s sarmallığı (bir fotona ilişkin durumdaki gibi) sıfır değilse spin (a) sağ–elli ($s > 0$: pozitif sarmallık) ya da (b) sol–elli ($s < 0$: negatif sarmallık) olabilir. Bir fotonla ilgili olarak, sağ–elli çembersel kutuplanmaya ilişkin $s = 1$ ve sol–elli çembersel kutuplan-maya ilişkin $s = -1$ iki durumunu verecek biçimde ($\hbar$ biriminden) $|s| = 1$'e sahibiz. Kuantum üst üste binme ilkesince bunlara ait, foton kutuplanmasına ilişkin olası diğer durumları veren karmaşık doğrusal birleşimleri, şekiller 21.12 ve 21.13'te gösterildiği üzere oluşturabiliriz.

§§22.8–11'de geleceğim. Şimdilik spine ilişkin yalnızca oldukça basit bir özelliğe, kütlesiz bir parçacık durumunda gerek duyacağız. Aslında fotonlar spine sahip parçacıklardır fakat kütlesiz olunca, spinleri kütleye sahip bir parçacığın (*örn.* elektron ya da proton) §§22.8–10'da geleceğimiz daha genel spininden bir miktar farklı biçimde davranır. Bir fotonu (ya da başka bir kütlesiz parçacığı) zorunlu biçimde kendi hareket yönünde spin yapar biçimde düşünmek zorundayız; *bkz.* Şekil 22.7.

Verili bir kütlesiz türde parçacık için bu $|s|$ spininin miktarı her zaman aynıdır fakat spin hareket yönünde sağ–elli ($s > 0$) ya da sol–elli ($s < 0$) olabilir. Ek olarak, kuantum mekaniğinin genel ilkeleriyle uyumlu biçimde, spin durumu ikisinin herhangi bir (kuantum) doğrusal birleşimi olabilir. s niceliğinin kendisi kütlesiz parçacığın *sarmallığı* olarak adlandırılır (§22.12) ve değeri her zaman bir tamsayı ya da tamsayının yarısı olmak zorundadır (ya da uygun birimleri dahil ederek sarmallığın, $\frac{1}{2}\hbar$'nin bir tamsayı katı olduğunu söylememiz gerekir). Kütlesiz bir parçacık, $|s| = j$'yse (ya da birimler dahil edilerek $|s| = j\hbar$), j *spinine* sahiptir denir. Bir foton 1 spinine (böylece sarmallığı ± 1'dir), bir graviton 2 spinine (sarmallık ± 2) sahiptir. Nötrinolar $\frac{1}{2}$ spinine sahiptir ve kütlesiz nötrinolar söz konusuysa,[18] bu tür bir nötrino $-\frac{1}{2}$ sarmallığa ve kendisine ait ilgili karşı–nötrino $\frac{1}{2}$ sarmallığa sahiptir.

[18] Artık çeşitli türdeki nötrinoların en azından çoğunun *kütleye sahip* olduğuna ilişkin sağlam deliller mevcuttur ve belki de *hepsi* böyledir. Böyle bile olsa, "kütlesiz" olduklarına ilişkin varsayım davranışlarıyla ilgili iyi bir yaklaşıklık tahmini sunar. Bu konuya §25.3'te yeniden döneceğim.

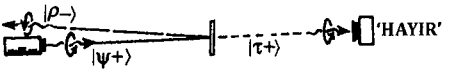
Bir foton durumunda sarmallık durumları (belirli sarmallık durumları) *çembersel kutuplanma* durumlarıdır ve sırasıyla $s = 1$ için sağ–elli, $s = -1$ için sol–ellidir. Bir fotona ilişkin, düzlem kutuplanması gibi olası başka kutuplanma durumları mevcuttur fakat bunlar basit olarak sağ ve sol–elli durumların çizgisel birleşimidir. Tüm bunlara ilişkin geometriye kısa süre içinde, §22.9'un sonunda geleceğim fakat bunlar şimdilik gerekli değil. Şu anki tek gereksinimimiz çembersel kutuplanmanın yansımaya bağlı olarak nasıl davrandığıyla ilgili belirli bir gerçektir. Çembersel biçimde kutuplanmış durumdaki bir fotonun huzme ayırıcı (ya da ne tür başka bir ayna kullanırsak) üzerine, yansıyan huzmenin doğruca fotonun geldiği yöne geri gideceği şekilde *dik olarak* çarptığını varsayıyorum. Gereksinim duyduğumuz gerçek, aktarılan parça, fotonunkiyle *aynı* kutuplanmaya sahipken[22.16] yansıyan fotonun kutuplanma durumunun kaynaktan yayılan fotonunkiyle *ters* olmasıdır. İstenirse, başlangıç huzmesi yönünde, yansıyan foton huzmesinin basitçe kaynağa yeniden girmeyeceği şekilde, çok küçük bir eğim bulunduğunu varsayabiliriz. Bu durum, değerlendirmelerimizi önemli biçimde etkilemeyecektir.

Şekil 22.5'teki orijinal "boş ölçüm" deneyimize fakat bu kez Şe kil 22.8'deki gibi dik biçimli olarak çarpan fotonla birlikte yeniden dönelim. Kaynağımızın, fotonlarını çembersel biçimde sağ–elli ya da sol–elli kutuplanmış bir durum olarak yayacağı şekilde ayarlanabildiğini varsayalım. Belirli bir durumda sağ–elli bir foton yayımlar (ve bu gerçeğe dikkat eder). Foton huzme ayırıcıyla karşılaştıktan sonra artık fotonun durumu, ket içindeki + ya da − sarmallığa ilişkin işareti göstermek üzere, doğrusal bir birleşimdir (önceden olduğu üzere faz çarpanlarıyla ilgili uygun uzlaşılara sahip bir *toplam*):

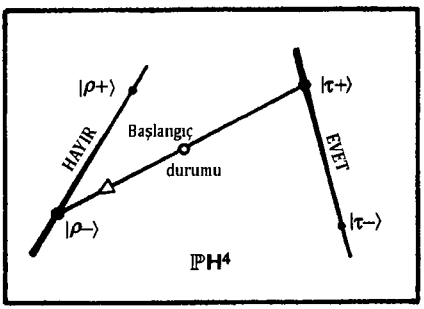
$$|\psi +\rangle = |\tau +\rangle + |\rho -\rangle.$$

Algılayıcımızı daha önce olduğu gibi aktarılan huzme içine yerleştirelim (ve kutuplanmaya duyarsız olduğunu varsayalım). Böylece önceki gibi, kaynak sağ–elli foton yayımladığını kaydeder fakat algılayıcı fotonu almadığı için bunu kaydetmekte başarısız olursa bu durumda durumun yansımış olan sol–elli $|\rho -\rangle$ durumuna (kaynak tarafından "algılanmamış" olmaya bağlı olarak) sıçradığı sonucu çıkarılmak zorundadır. Burada vurguladığım nokta, bu sonuç durumunun doğasını öğrenmek üzere tam izdüşüm önermesinin gerekli olduğudur; *bkz.* Şekil 22.9. Ölçüm tümüyle EVET/HAYIR'lı bir karakterdedir çünkü sonuç ya "algılamama" (HAYIR) ya da "algılama"dır (EVET). Bu alternatiflerin ikisiyle de ilgili bir bozuk-

[22.16] Buna ilişkin basit bir sebep düşünebiliyor musunuz?



Şekil 22.8 Şekil 22.5'teki deneye, bu kez fotonun neredeyse dik biçimli olarak çarptığı şekilde bir dönüş. Kaynak sağ–elli bir foton yayımlar. Foton huzme ayırıcıyla karşılaştıktan sonra artık durumu, ket içindeki "+" ya da "−" sarmallığa ilişkin işareti göstermek üzere $|\psi+\rangle = |\tau+\rangle + |\rho-\rangle$'dir. (Kutuplanmaya duyarsız) algılayıcı fotonu almayışı kaydederse, durumun yansımış olan sol–elli $|\rho-\rangle$ durumuna (algılamamaya bağlı olarak) sıçradığı sonucunu çıkarmak zorundayız. Bu, (Lüders noktasına; *bkz.* Şekil 22.9) tam izdüşüm önermesini gerektirir çünkü HAYIR durumu ($|\rho+\rangle$ ve $|\rho-\rangle$ tarafından kapsanan 2–uzay) ve ($|\tau+\rangle$ ve $|\tau-\rangle$ tarafından kapsanan) EVET durumunun ikisinde de bir bozukluk söz konusudur. Durumun ölçüme (burada bir algılanmama) bağlı olarak sıçradığı $|\tau+\rangle + |\rho-\rangle$ gerçek başlangıç durumunun saptanması gerekir.



Şekil 22.9 Şekil 22.8'deki foton kutuplanma durumları için, Şekil 22.4'ün izdüşüm önermesine ilişkin izdüşümsel $\mathbb{P}\mathbf{H}^4$ Hilbert uzayındaki (*bkz.* Şekil 15.15) bir açıklama. Başlangıç durumu, toplam uzay $|\tau+\rangle, |\tau-\rangle, |\rho+\rangle$ ve $|\rho-\rangle$ tarafından kapsanmak üzere, $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$ içinde belirtilen $|\tau+\rangle + |\rho-\rangle$'dir. Beyaz üçgen ok $|\rho-\rangle$'ye (Lüders noktasına), bu, EVET ve HAYIR doğrularına başlangıç noktasından ($|\tau+\rangle + |\rho-\rangle$) çapraz olan tek çizgi üzerinde olmak üzere, olan izdüşümü gösterir. Algıla(ma)manın kendisi bize yalnızca sonuç durumunun HAYIR çizgisi üzerinde yer aldığını söyler fakat başlangıç durumunun seçimi tam izdüşüm önermesi uyarınca bu bozukluğu yok eder.

luk söz konusudur çünkü HAYIR yanıtının öz uzayı $|\rho+\rangle$ ve $|\rho-\rangle$ tarafından kapsanan 2–uzaydır ve EVET yanıtının öz uzayı $|\tau+\rangle$ ve $|\tau-\rangle$ tarafından kapsanan 2–uzaydır. Bu durumda, başlangıç durumu $|\tau+\rangle + |\rho-\rangle$ olduğundan izdüşüm önermesi[19] bizi algılamama sonucuyla ilgili olarak $|\rho+\rangle + |\rho-\rangle$ (ya da $|\rho+\rangle$ ve $|\rho-\rangle$'ye ilişkin başkaca herhangi doğrusal bir birleşim) yerine doğru biçimde HAYIR durumundaki $|\rho-\rangle$'ye taşır.[20] [22.17]

---

[19] İzdüşüm önermesine ilişkin bu arıtım, Lüders'ten, 1951, kaynaklanmış görünmektedir ve bu durumda $\mathbb{P}\mathbf{H}^4$'teki $|\rho-\rangle$ noktası "Lüders noktası" olarak anılmaktadır.

[20] Daha ekonomik ve daha ilginç bir örnek için, geliş huzmesinin kutuplanmış olmaktan daha çok ortama ilişkin olarak *Bremster açısıyla* doğrultulduğu, huzme ayırıcısı yerine kırıcı bir ortam yüzeyinin kullanıldığı hafifçe farklı bir durumu ele alabiliriz. Böylece yansıyan huzme belirli bir çizgisel kutuplanmaya ve aktarılan huzmeyse ters çizgisel kutuplanmaya sahip olur. Analiz temel olarak üsttekiyle aynıdır fakat artık gelen fotonun kutuplanmış olma-

22.8 Spin ve spinörler

Bu deney pek de ilgi çekici değildir fakat bir noktayı örneklemektedir. Bazı daha kayda değer şeyleri 23. bölümde göreceğiz. Buna hazırlık olarak spin hakkında bir miktar daha konuşmak uygun olacak. Kütlesi olan bir parçacık durumunda bunun ilgili olduğu şey kütle merkezindeki açısal momentumdur.[21] §§21.1–5'te kütle enerji korunumu ve momentum korunumunun önemiyle kuantum yasalarımızın sırasıyla zaman öteleme simetrisi ve uzay öteleme simetrisi özellikleri şeklinde karşılaştık. Benzer bir şekilde dönel simetri *açısal* momentum korunumuna neden olur (ayrıca *bkz.* §18.7 ve §20.6). Kütle sahibi bir parçacıkla ilgili olarak parçacığa ait durağan çerçevede olduğumuzu hayal edebiliriz. Böylece ilgili döndürmeler, parçacığın o çerçevedeki konumu dolayında alınmış olan O(3) döndürme grubunu oluşturanlardır.

Kuantum mekaniğindeki bir momentum bileşeninin $i\hbar$'nin ilgili konum koordinatı yönünde sonsuz küçük ötelemeler üreten işlemciyle çarpımı biçiminde gösterilmesine (§§21.1, 2) karşılık olarak bir açısal momentum bileşeni de $i\hbar$'yle ilgili (Kartezyen uzamsal) eksen dolayındaki sonsuz küçük döndürmelerin üreteciyle çarpımı biçiminde gösterilir. Bu nedenle kuantum mekaniğindeki açısal momentum bileşenleri sonsuz küçük döndürmelere ilişkin *cebir* olarak (§§13.6, 10), diğer bir deyişle Lie cebiri ikisi arasında bir ayrım yapmadığından O(3) ta da eşdeğer biçimde SO(3) döndürme grubuna ilişkin Lie cebiri olarak anılır.

SO(3) Abelci olmadığından Lie cebiri elemanlarının tümü değişmeli değildir; aslında bu cebire ilişkin ℓ_1, ℓ_2 ve ℓ_3 üreteçleri, üç Kartezyen uzamsal eksen dolayındaki sonsuz küçük döndürmeler

$$\ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1 = \ell_3,\ \ell_2\ell_3 - \ell_3\ell_2 = \ell_1,\ \ell_3\ell_1 - \ell_1\ell_3 = \ell_2$$

ifadelerini sağlar.[22.18] Bunlar, kuantum mekaniği kurallarına göre üç eksen dolayındaki açısal momentuma ilişkin $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{L}_3$ bileşenleriyle

---

sını garanti etmemiz gerekmez. Onun, ortamın içi yerine (uygun bir açıyla) dışından gelmesine ilişkin gerçek, boş ölçümün istenilen kutuplanmış sonuç durumunu üretmeyi garanti etmesine tek başına yeterlidir. Elektromanyetizmayla ilgili iyi bir genel kaynak için *bkz.* Becker, 1982; Jackson, 1998.

[22.17] Doğru yanıtın niçin "izdüşüm" tarafından verildiğini daha ayrıntılı olarak açıklayın.

21 "Yapısız bir parçacık", $\mathbf{x} = 0$ olduğunda §18.6'nın $\mathbf{M} = 2\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$ ifadesi yok olduğundan, kendi kütle merkezi dolayında açısal momentuma sahip değildir. Bununla birlikte, not 18.11'de belirtildiği üzere, "içsel spin"i açıklayan bir niceliğin açısal momentuma, parçacığın spini tarafından tanımlanan "yapı"nın mevcut olduğu durumda eklenmesi gerekir. Bunu daha açık biçimde §22.11'de göreceğiz.

[22.18] Bunu kontrol etmek üzere dördeyleri kullanın.

$$L_1 = i\hbar\ell_1,\ L_2 = i\hbar\ell_2,\ L_3 = i\hbar\ell_3$$

ifadeleri uyarınca ilgilidir. Şu halde açısal momentum değişme kuralları-mız

$$L_1L_2 - L_2L_1 = i\hbar L_3,\ L_2L_3 - L_3L_2 = i\hbar L_1,\ L_3L_1 - L_1L_3 = i\hbar L_2$$

olur.[22] Pratik olarak kuantum mekaniğindeki diğer her şey gibi L_1, L_2, L_3 açısal momentum bileşenleri **H** Hilbert uzayı üzerindeki doğrusal işlemciler olarak davranmak zorundadır. Bu nedenle açısal momentuma sahip kuantum sistemleri, SO(3)'e ilişkin Lie cebirinin **H**'ye ait doğrusal dönüşümler biçimindeki bir gösterimini sunar (*bkz.* §13.6, 10, §14.6).

Bu, kuantum mekaniğinin en zarif ve açıklayıcı görünümlerinden birine yol açar ve ayrıntılı çalışmanın karşılığını fazlasıyla geri veren bir konudur. Bununla birlikte burası tüm ayrıntıların yeri değildir ve yalnızca belirli önemdeki birkaç noktayı sunmaya çalışacağım. İlk olarak ($\hbar/2$ olmaksızın) *Pauli matrisleri* olarak adlandırılan

$$L_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ L_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

açık matrislerin gerekli değişme özelliğini sağladığı gerçeğine dikkat ederiz.[22.19] Bunlar açısal momentuma ilişkin (önemsiz olmayan) en basit gösterimi sunar ve bu 2×2 matrislerin $\{\psi_0(x), \psi_1(x)\}$ iki bileşenine sahip (bir sütun vektörü olarak düşünülen) bir dalga fonksiyonu üzerine etkidiğini düşünürüz. Bu durumu döndürmeye başladığımızda $\psi_0(x)$ ve $\psi_1(x)$ bileşenleri Pauli matrislerinin ürettiği matris çarpma kuralları uyarınca karılmış hale gelir.

Bu 2-bileşenli ψ_A dalga fonksiyonunu (0 ve 1 değerlerini alan ya da §12.8'de anılan "soyut indis notasyonu" uyarınca soyut bir indis olarak düşünebileceğimiz) bir A alt indisi kullnarak işaretleyebiliriz. ψ_A'yla tanımlanan nicelik bir *spinör* olarak adlandırılır ve kendisine ait A indisi bir 2-*spinör* indisi olarak anılır. Aslında ψ_A'nın §11.3'te açıklanmış olan anlamda bir spinör nesne olduğu ortaya çıkar (2π'lik sürekli bir döndürme onu kendi negatifine götürür). Aslında Pauli matrislerinden birinin, 2π'lik tam bir döndürme elde edene kadar sürekli biçimde "üssünü alır"sak (*bkz.*

---

[22] Dikkatli okur burada içerilmiş, §21.5'te ele aldığımız türde, işarete ilişkin metrik imzasından kaynaklanan herhangi bir incelik olup olmadığını merak edebilir. Kuantum mekaniğindeki açısal momentumun, SO(3) Lie cebirinden ayrıntılı bir gelişimiyle ilgili olarak okur Jones'un, 2002 ve Elliot ve Dawber'in, 1984, anlaşılır açıklamalarına bakmalıdır. Açısal momentum cebirine ilişkin alternatif ve bir şekilde daha "fiziki" bir türetim Shankar'da, 1994, verilir; gerçi bence bu yaklaşımda bir miktar fazlaca çalışma içerilmiştir!

[22.19] Bunu kontrol edin. Bunlara ait çarpma kurallarının dördeylerinkilerle nasıl ilişkilendiğini açıklayın.

§14.6) ψ_A'yı $-\psi_A$'ya gönderen $-I$ işlemcisini elde ettiğimizi görürüz.[22.20]

Bu notasyon, "ψ_A" benzeri şeylerden oluşturulan "tensör benzeri" nicelikler kullanılarak tensör analizinin formalizmini tamamlamak "(ya da hatta değiştirmek)[23] üzere geliştirilebilen güçlü bir formalizmin parçasıdır. Burada tümüyle gerekli olmasa da, gerçek kuvveti bu formalizmin görelilikçi versiyonundan yararlandığımızda ortaya çıkar. Bunun için ayrıca $A', B', C', \ldots$ "apreli" indislere ek olarak $A, B, C, \ldots$ gibi "apresiz" olanlara da, apreli ve apresiz indisler uygun bir anlamda birbirinin *karmaşık eşlenikleri* olmak üzere, *bkz.* §13.9, gerek duyarız. Notasyon kuantum alan kuramı (belki de olması gerekenden çok daha az değerlendirilen bir gerçek olarak;[24] *bkz.* §25.2 ve §34.3) ve genel görelilikte[25] büyük değere sahiptir (ve burgaç kuramında temel bir rol oynar; *bkz.* §33.6). Şu anki aşamada benim için buna girişmek uygun olmaz (gerçi §25.2'de buna geri döneceğiz) fakat bu 2–spinör formalizminden bir miktar ödünç almak faydalı olacaktır. Burada ve §§22.9–11'de ona olan tüm gereksinimimiz genel spin durumlarını düzenli bir biçimde göstermekle ilgilidir. Burada yalnızca görelilikçi olmayan fizikle uğraştığımızdan apreli indislere (§§25.2, 3 ve §§33.6, 8'e dek) gerek duymayacağız.

Buna başlamadan önce notasyonda bir sadeleştirme yapmak isterim. Bu bölümün geri kalanı ve §22.11'in sonuna dek birimlerin $\hbar = 1$ olacağı şekildeki uygun varsayımı benimseyeceğim. Aslında bu her zaman olanaklıdır ve §27.10'da (ve §31.1) bundan daha ileri gidip şeyleri, ışık hızının ve kütleçekimle ilgili sabitlerin de bire eşitlendiği "Planck birimleri" olarak adlandırılan şey biçiminde açıklayabileceğimizi göreceğiz. Şimdilik bu kadar ileri gitmeye gerek yok. Her durumda, gerekirse $\hbar$'yi fiziki boyutlarla ilgili basit değerlendirmelerden hareketle yeniden eski haline getirmek zor değildir. (Örneğin, $\hbar$'nin bire eşitlendiği fiziki herhangi bir denklemde onu yeniden eski haline getirmek üzere, uzunluk ve zamanı göz ardı ederek, kütlenin q'uncu üssü biçiminde ölçeklenmiş her niceliği, $\hbar^{-q}$'yla o niceliğin çarpımıyla yer değiştiririz. Özellikle kütle, enerji, momentum ve açısal momentum $\hbar$'ye basitçe bölünür.)

Şimdi 2–spinör formalizmine dönerken, tek değerlikli bir ψ_A spinör niceliğinin $\frac{1}{2}$ spinli bir parçacığı açıklamak üzere kullanılabildiğini anımsarız. Aynı türdeki notasyon, SO(3) Lie cebirinin diğer gösterimleriyle ilgili olarak daha yüksek değerli spinler için benimsenebilir. Spinin değeri her

[22.20] Bunu açık biçimde yapın.

[23] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984.

[24] *Bkz.* Geroch, University of Chicago Lectures (Chicago Üniversitesi Dersleri), basılmamış.

[25] Witten, 1959; Geroch, 1968, 1970; Penrose ve Rindler, 1984, 1986.

zaman $\frac{1}{2}$'nin negatif olmayan bir tamsayı katıdır (ya da $\hbar$'yi eski haline getirerek spin/$\hbar$'nin bu değerleri aldığını söyleriz):

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots .$$

Dalga fonksiyonu, n indislerinde $\frac{n}{2}$ spin durumunda tümüyle simetrik olan bir $\psi_{AB\ldots F}$ nesnesiyle (bir "spin–tensörü") açıklanabilir (parantezler tüm n indisleri üzerindeki simetrilemeyi göstermek üzere, §12.7) :

$$\psi_{AB\ldots F} = \psi_{(AB\ldots F)}.$$

Aslında SO(3)'e ilişkin tüm gösterimler bu belirli olanlardan, *indirgenemez gösterimler*den *dolaysız toplamlar* biçiminde oluşturulabilir (*bkz.* §13.7). Bu, genel gösterimin, her biri kendi spinör indislerinde tümüyle simetrik olan

$$\{\psi_{AB\ldots F}, \phi_{GH\ldots K}, \chi_{LM\ldots R}, \cdots\}$$

dalga fonksiyonlarının (olasılıkla sonsuz) bir toplamı biçiminde ifade edilebileceğini söylemek anlamına gelir.

Tekil bir parçacığa ilişkin dalga fonksiyonu için, *örn.* $\psi_{AB\ldots F}$, bu tür yalnızca bir simetrik alan mevcuttur. (İki parçacık için bunlardan ayrı ayrı iki adet, üç parçacık için üç adet, vb, bulunduğunu düşünmek anlaşılabilir bir hata olur. Sonraki bölümde birden fazla parçacıklı sistemlerin gerçekte nasıl açıklandığını göreceğiz.) *Skaler* parçacık olarak adlandırılan 0 spinli bir parçacık için (bir π mezon gibi), dalga fonksiyonu 0 indise sahiptir ve bu 21. bölümde ele alınmış olan durumdur. En tanıdık parçacıklar, elektronlar, müonlar, nötrinolar, protonlar, nötronlar ve bunları oluşturan kuarkların tümü $\frac{1}{2}$ spinine sahiptir (yalnızca 1 indis). Döteryum (ağır hidrojen çekirdeği) ve W–bozonu (*bkz.* §25.4) 1 spinine sahiptir (2 simetrik spinör indisli). Pek çok ağır çekirdek ve hatta atomların bütünü çok daha yüksek spine sahip tekil parçacıklar olarak ele alınabilir. $\frac{1}{2}n$ spini için, n–indisli $\psi_{AB\ldots F}$ nesnesi bağımsız[26] $n+1$ karmaşık bileşene sahiptir.[22.21] $\psi_{AB\ldots F}$ spin tensörü sıklıkla n–indisli bir *spinör* olarak anılsa da o, yalnızca n'nin tek olduğu durumda spinör bir nesnedir (§11.3). Bunlar spinin tamsayı değil, yarı–tek tamsayı olduğu durumlardır. Ayrıca, spin değerinin, $j = \frac{1}{2}n$ (≥ 0), kendisinin

[26] "Bağımsız" sözcüğü, $\psi_{AB\ldots F}$'ye ait tüm bileşenlerin cebirsel olarak daha küçük bir kümeden değil fakat bu bağımsız kümeden elde edilebilmesi anlamında kullanılır. Burada bu basit olarak simetriden kaynaklanır, böylece 2^n adet bileşenin tümü $n+1$ adet bağımsıza düşer. *Örn.* $\psi_{001} = \psi_{010} = \psi_{100}$ olduğundan ψ_{001}, ψ_{010} ve ψ_{100} bileşenleri, önemsiz bir şekilde, bağımsız değildir.

[22.21] Bunu, verilen bilgiyle çözebilecek misiniz görün.

$$\mathbf{J}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

"toplam spin" işlemcisine[27], bu $\mathbf{J} = (L_1, L_2, L_3)$ 3–vektör işlemcisinin "göz ardı edilen uzunluğu" olmak üzere, ilişkin $j(j+1)$ öz değerini belirlediği (ve belirlendiği) belirtilmelidir.

$\mathbf{J}^2$ toplam spini açısal momentumun her bir L_1, L_2, L_3 bileşeniyle (bu bileşenlerin kendi aralarında değişmeli olmamaları gerçeğine karşın) *değişmeli*dir.[22.22], [22.23] Bu özellik $\mathbf{J}^2$'yi SO(3) için bir *Casimir işlemcisi* olarak niteler; *bkz.* §22.12. Kuantum durumlarını tümüyle betimlemek üzere genellikle *değişmeli işlemcilerin eksiksiz bir kümesi*ni (§22.12) oluşturur ve kümeye ait tüm işlemcilerin eşzamanlı olarak öz durumları olan durumları ararız. Açısal momentumla ilgili olarak bu, normalde L_3 açısal momentum işlemcisini $\mathbf{J}^2$'ye eşlik etmek üzere *yukarı* ("z") yönünde kabul ederek yapılır. j ve m'nin ikisi de yarı–tek tamsayı ya da ikisi de tamsayı olmak üzere $j \geq 0$ ve $-j \leq m \leq j$ olduğunu kabul ederiz. $\psi_{AB\ldots F}$'nin farklı bileşenlerine $2j+1$ $(= n+1)$ adet olası farklı m değeri karşılık gelir.

Spinör bileşenleri için yukarı yön seçimi (ve bu bir yukarı/aşağı, §22.9'daki $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ tabanı seçmeye karşılık gelir) elbette rasgeledir. "Yukarı" yerine eşdeğer biçimde herhangi başka bir uzamsal yön de seçilebilir. Buradan hareketle "m değeri"ne ara sıra verili bazı *başka* yönlerle atıf yapacağım.

22.9 İki–durumlu sistemlere ilişkin Riemann küresi

$\frac{1}{2}$ spinine ilişkin tekil spin durumlarının (*örn.* elektron, proton, nötron, kuark) dikkat çekici biçimdeki özlü kuantum geometrisini ele alalım. Ayrıca bu, genel olarak 2–durumlu kuantum sistemlerini anlamakta açıklayıcıdır. Bu tür bir sistem 2–boyutlu karmaşık bir $\mathbf{H}^2$ Hilbert uzayı tarafından açıklanır ve $\frac{1}{2}$ spin durumu ona ilişkin geometriyi hoş biçimde açıklar.

$\frac{1}{2}$ spinli parçacığımıza ilişkin olarak, parçacığın durağan çerçevesindeki *spin serbestlik derecesi*yle ilgileneceğiz. Bunu açık hale getirmek üzere

---

[27] Alışıldığı üzere geleneksel kaynağımıza başvuruyoruz; Shankar, 1994.

[22.22] Bu değişmeliliği dolaysız biçimde açısal momentum değişme kurallarından kontrol edin.

[22.23] $L^+ = L_1 + iL_2$ ve $L^- = L_1 - iL_2$ işlemcilerini ele alın ve bunların çeviricileri üzerine L_3'le birlikte çalışın. $\mathbf{J}^2$'yi $L^\pm$ ve L_3 biçiminden çözün. $|\psi\rangle$, L_3'e ait bir öz durumsa böylece, sıfır olmadığı her durumda $L^\pm|\psi\rangle$'nin her birinin de öyle olduğunu gösterin ve ona ait öz değeri $|\psi\rangle$'ninki biçiminde bulun. $|\psi\rangle$, bu tür öz durumlar tarafından kapsanan sonlu boyutlu bir indirgenemez gösterim uzayına sahipse boyutun, $j(j+1)$ uzaydaki tüm durumlar için $\mathbf{J}^2$'ye ait öz değer olmak üzere, bir $2j$ tamsayısı olduğunu gösterin.

parçacığın, sıfır momentum öz durumunda olması anlamında "durağan" olmasını düşünebiliriz, böylece ona ait durum x değişkenleri uzayında sabit[22.24] olmak zorundadır. Bu durumda ψ_0 ve ψ_1 yalnızca, diyelim ki $\psi_0 = w$ ve $\psi_1 = z$ biçimindeki karmaşık sayılardır ve durumu $\{w, z\}$ olarak yazarız. "Yukarı spin"i, $|\uparrow\rangle$ (düşeyde yukarı doğru sağ–elli), {1,0} spin durumu olarak ve buna uygun şekilde "aşağı spin"i, $|\downarrow\rangle$ (düşeyde aşağı doğru sağ–elli), {0,1} olarak yazabiliriz. Bu iki taban durumu ortogonaldir:

$$\langle\uparrow \mid \downarrow\rangle = 0.$$

Ayrıca normalleştiririz de:

$$\langle\uparrow \mid \uparrow\rangle = 1 = \langle\downarrow \mid \downarrow\rangle.$$

Genel $\frac{1}{2}$–spin durumu, $\psi_A = \{w, z\}$ ($\mathbf{H}^2$'nin genel elemanı), bu iki taban durumunun doğrusal birleşimidir:

$$\{w, z\} = w|\uparrow\rangle + z|\downarrow\rangle.$$

Başka bir genel $\{a, b\}$ durumunun $\{w, z\}$'yle skaler çarpımı

$$\langle\{a, b\}|\{w, z\}\rangle = \bar{a}w + \bar{b}z$$

ifadesince verilir.[22.25]

Artık her $\frac{1}{2}$–spin durumunun aslında uzaydaki *bir* yönde sağ–elli olan saf bir spin durumu olmak zorunda olduğu açığa çıkar ve "$\nearrow$" uzaydaki gerçek bir yön olmak üzere,

$$w|\uparrow\rangle + z|\downarrow\rangle = |\nearrow\rangle$$

ifadesini yazabiliriz (söyleyebiliriz).[22.26] bu bize $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$ izdüşüm uzayıyla (§15.6) uzaydaki yönlere ilişkin geometri arasında, bu yönler spin yönleri biçiminde düşünülmek üzere, dikkat çekici bir belirleme sunar. Fiziki olarak ayrık $\frac{1}{2}$–spin uzayları aslında, $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$'nin farklı noktaları

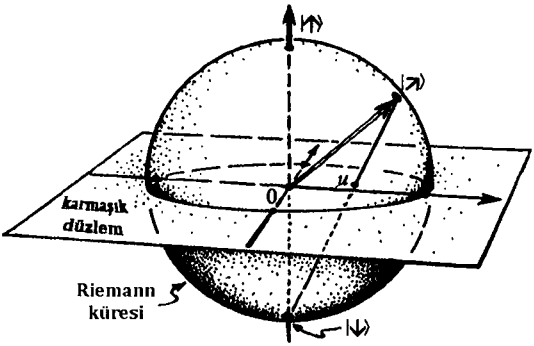
$$z : w$$

ayrık oranlarınca işaretlenmek üzere, bu izdüşüm uzayı tarafından sunulur (*bkz.* §21.9). Başka bir deyişle $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$, ilk kez §8.3'te tanıştığımız eski arkadaşımız *Riemann küresi*nin tam olarak bir kopyasıdır. Bu Riemann kü-

[22.24] Niçin?

[22.25] Bu ifadeyi elde edin.

[22.26] Bu gerçeği iki farklı biçimde türetebilir misiniz bakın: (i) $\{a, b\}$ durumu, b/a'yı Şekil 8.7a'nın karmaşık düzlemindeki bir nokta olarak tanımlamak üzere yönü uygun bir Kartezyen çerçevede açık biçimde bularak; (ii) doğrudan hesaplama olmaksızın, $\mathbf{H}^2$'nin SO(3)'e ilişkin bir gösterim olması nedeniyle spine ilişkin her yönün dahil edilmesi, yine de $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$'nin bundan daha fazla durum içermek üzere "yeterince büyük" olmaması gerçeğini kullanarak.



Şekil 22.10 2–durumlu sisteme ilişkin $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$ izdüşüm uzayı bir Riemann küresidir (*bkz.* Şekil 8.9). $\frac{1}{2}$–spinli kütle sahibi bir parçacığın spin durumları için $|\uparrow\rangle$ spin durumunu ("yukarı" spin) göstermek üzere kuzey kutbunu ve $|\downarrow\rangle$ durumu ("aşağı" spin) için güney kutbunu kullanabiliriz. Genel bir $|\nearrow\rangle$ spin durumu, merkezden çıkan yönü, çift saplı ok tarafından örneklendiği üzere, $|\nearrow\rangle$ durumunun yönü olan küre üzerindeki (diğer bir deyişle o yöndeki bir $\boldsymbol{E}_{\nearrow}$ spin ölçümü için *kesin* "EVET" sonucu veren) bir noktayla ($|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ için uygun fazlarla birlikte) gösterilir. Durumu bir $|\nearrow\rangle = \boldsymbol{w}|\uparrow\rangle + \boldsymbol{z}|\downarrow\rangle$ çizgisel birleşimi biçiminde ($\boldsymbol{z}$ ve $\boldsymbol{w}$ karmaşık sayılarını bir $\boldsymbol{\psi}_A$ 2–spinörünün $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\psi}_1$ bileşenleri olarak değerlendirebileceğimiz şekilde) ifade edebiliriz. Küre üzerindeki noktalar $\boldsymbol{z}:\boldsymbol{w}$ ayrık oranlarına karşılık gelir. Bunların her biri karmaşık düzlemdeki, bu düzlem kürenin ekvatoral düzlemi olarak kabul edilmek üzere, (∞'a izin vererek) bir $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z}/\boldsymbol{w}$ karmaşık sayısıyla gösterilir. $\boldsymbol{u}$ noktası stereografik olarak güney kutbundan küre üzerinde $|\nearrow\rangle$'yı gösteren noktaya yansır.

resinin her noktası ayrık bir $\frac{1}{2}$–spin durumunu, bu, kürenin merkezinden bu noktaya kadar yapılan belirli spin ölçümüne ilişkin "$m = \frac{1}{2}$" öz durumu olmak üzere, işaretler (Şekil 22.10).

Geometrik biçimli bu ilişkiyi, kürenin güney kutbundan §8.3'te açıklanmış olan ekvatoral düzlemine olan stereografik izdüşümünü kullandığımızda daha açık biçimde görürüz. Bu düzlem (§8.3'ün "z"si yerine) kuantum mekaniksel z ve w genliklerinin $u = z/w$ *oranı*na ilişkin karmaşık düzlem olarak değerlendirilmelidir. Bu durum, küre üzerinde uzamsal $\nearrow$ yönüne karşılık gelen belirli noktayı dolaysız biçimde z/w oranıyla ilişkilendirir.

Ölçümü göstermesi için, "spin $\nearrow$ yönünde midir?" sorusunu soran $\boldsymbol{E}_{\nearrow}$ projektörünü kullanalım; böylece spin durumunun $|\nearrow\rangle$ olduğu görülürse (ya da bu duruma yansıtılırsa) öz değer 1 (EVET), spin bu vasıtayla (Riemann küresi üzerindeki antipodal noktaya karşılık gelen) *ters* uzamsal yöndeki ortogonal $|\swarrow\rangle$ spin durumuna yansıtılırsa öz değer 0 (HAYIR) olur. (Hilbert uzayındaki "ortogonal"in uzaydaki "dik açıda"ya değil fakat bu örnekte "ters"e karşılık geldiğine dikkat edin.) $|\uparrow\rangle$ durumuyla başlarsak $\boldsymbol{E}_{\nearrow}$ ölçümü için EVET olasılığı $|w|^2/(|w|^2 + |z|^2)$ olur. $\nwarrow$ ve $\nearrow$ arasındaki olağan

Öklitçi 3–uzay açısı θ olmak üzere, spin başlangıçta bir $|\nwarrow\rangle$ durumundaysa ve durumun, onun üzerinde başka bir $|\nearrow\rangle$ yönünde olup olmadığını öğrenmek üzere bir ölçüm gerçekleştirilirse böylece EVET sonucu bulmaya ilişkin olasılık

$$\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

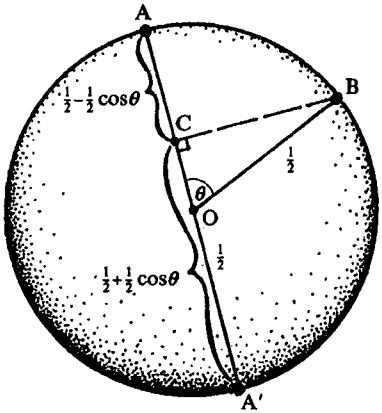
olur.[22.27] Ayrıca bu olasılığı kürenin geometrisi biçiminde de kavrayabiliriz; $\nwarrow$ ve $\nearrow$ sırasıyla A ve B noktalarıyla verilir ve B'yi çap üzerindeki bir C noktasına A üzerinden ortogonal biçimde yansıtırız (Şekil 22.11). A′ noktası A'ya antipodal olan noktaysa bu durumda EVET olasılığı A′B′nin kürenin çapı A′A'ya bölmünün uzunluğu olur.[22.28]

Burada kullanılan "Riemann küresi"nin §8.3'tekinden ya da §18.5'teki gökküresiden, "antipodal nokta" kavramı artık kürenin yapısının (hangi durumların Hilbert uzayı anlamında "ortogonal" olduğunu söyleyebileceğimiz biçimde) bir parçası olacak şekilde daha fazla yapıya sahip olduğuna dikkat edin. Küre artık bir "konformal küre"den daha çok "metrik küre"dir, böylece ona ilişkin simetriler olağan anlamdaki döndürmeler tarafından verilir ve gökküresi üzerindeki sapma etkilerinde gösterilmiş olan konformal hareketleri kaybederiz. Yine de burada var olan Riemann küresi kullanımımız kuantum mekaniğinde ortaya çıkan karmaşık sayı oranlarıyla uzaydaki olağan yönler arasında belirgin biçimde açık bir bağlantı gösterir. Kuantum durumu formalizminde görünen karmaşık sayıların tümüyle soyut şeyler olmadığını görürüz; onlar geometrik ve dinamik biçimli davranışla yakından ilişkilidir. (Ayrıca §21.6'da anlatılmış olan, karmaşık fazların bir momentum durumunun dinamiğini saptamaktaki rolünü anımsayın.)

Şekil 22.11'de bir kuantum ölçümünden kaynaklanan olasılıkları $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$'yle ilişkili olarak ifade eden geometrinin spin durumuyla sınırlı olmayıp 2–durumlu bir sistem için oldukça genel olduğu belirtilmelidir. $\frac{1}{2}$–spine ilişkin durum için özel olan şey olağan *uzamsal yönler*le $\mathbb{P}\mathbf{H}^2$ Riemann küresi arasındaki yakın ilişkidir. 2–durumlu bir sistem içinde klasik biçimli bir çift alternatifin "kuantum dağılımı"nı sağlayan Riemann küresi her zaman mevcuttur. Bununla birlikte pek çok fiziki durumda, bu kürenin ve temeldeki kuantum mekaniksel karmaşık sayıların (genlikler) geometrik rolü çok da dolaysız değildir ve fizikçilerde onları tümüyle "biçimsel" nicelikler olarak değerlendirmeye ilişkin bir eğilim söz konusudur. Bu tutum kısmen, bütünlüklü bir fiziki sisteme ilişkin durum vektö-

[22.27] Bunu gösterin.

[22.28] Bunu doğrulayın.



Şekil 22.11 2–durumlu bir sistemin (Şekil 22.10'dakine benzer) başlangıç durumunun Riemann küresi üzerindeki **B** *noktasınca gösterildiğini düşünün. Küre üzerindeki başka bir noktayla ilgili, EVET'in durumu* **A**'*da ve HAYIR'ın* **A**'*ya antipodal olan* **A**''*nde bulacağı bir EVET/HAYIR ölçümü gerçekleştirmek istiyoruz. Kürenin yarıçapını* $\frac{1}{2}$ *alarak ve* **B**'*yi* **A**'**A** *ekseni üzerindeki* **C**'*ye ortogonal biçimde yansıtarak,* **O** *kürenin merkezi olmak üzere* θ, **OB** *ve* **OA** *arasındaki açı olacak biçimde, EVET olasılığının* $\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$ *olan* **A**'**C** *uzunluğu ve HAYIR olasığının* $\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$ *olan* **CA** *uzunluğu olduğunu görürüz.*

rünün toplam fazının gözlemlenemez kabul edilmesinden kaynaklanır, bu nedenle insanlar iç karmaşık katsayıların geometrik zenginlik potansiyelini sıklıkla göz ardı ederler. Bir parçayla diğeri arasındaki *ilgili* fazlar kesinlikle gözlemlenebilir bir rol oynar. Bunu ifade etmenin bir yolu bir sisteme ilişkin tüm izdüşümsel $\mathbb{P}\mathbf{H}$ Hilbert uzayının karmaşık geometrisinin fiziki olarak anlamlı *olması* gerçeğindedir. Toplam faz $\mathbb{P}\mathbf{H}$'nin tanımından tümüyle çıkarılmış olsa da ilgili tüm fazlar ona ait geometride ön plana çıkar. Aslında $\mathbb{P}\mathbf{H}$'nin karmaşık izdüşümsel geometrisinden yararlanan zarif yaklaşımlar mevcuttur.[28]

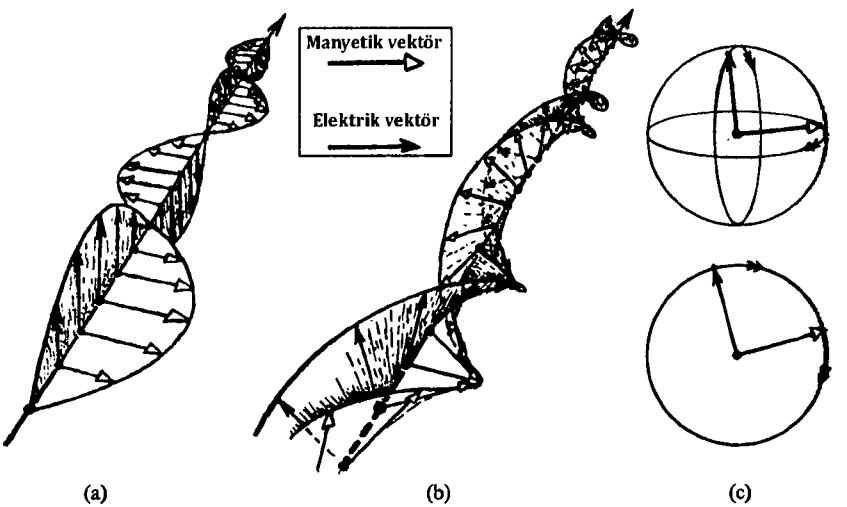
Ayrıca Riemann küresine ait geometrinin, kuantum mekaniğinin karmaşık sayılarını spinin uzamsal özellikleriyle dolaysız biçimde bağlantılandırdığı başka durumlar da söz konusudur. Bu durum en önemli biçimde, kısa süre içinde açıklanacağı üzere (§22.11'de), kütlesi olan yüksek spinli bir parçacığın genel spin durumlarında uygulanır. Bu bölümü bitirmek üzere şimdi, §22.7'de kısaca karşılaştığımız foton kutuplanmasına dönelim. Bir fotona ilişkin genel kutuplanma durumunun $|+\rangle$ pozitif sarmallığıyla $|-\rangle$ negatif sarmallığının karmaşık bir çizgisel birleşimi olduğunu anımsayın:

$$|\phi\rangle = w|+\rangle + z|-\rangle.$$

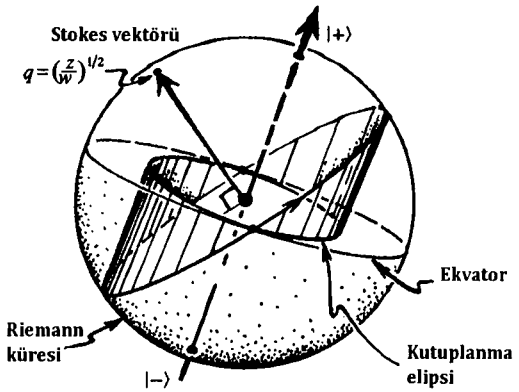
Bu tür bir durumun fiziki yorumlaması, düzlem kutuplanması ve çembersel kutuplanma belirli durumlarını genelleyen, *eliptik kutuplanma* olarak adlandırılan şey biçimindedir. Amacım bunu burada tüm ayrıntılarıyla

[28] *Bkz.* not 21.12; Nielsen ve Chuang, 2000, ayrıca benzer bir bakış açısından kuantum bilgi biliminin bazı görünümlerini tartışır.

anlatmak değil fakat klasik bir elektromanyetik düzlem dalgası biçiminde düşünürsek yeteri kadar iyi bir tablo elde edilir. "Düzlemler" hareket yönüne dik olan dalga paravanlarıdır. Uzaydaki her noktada bir **E** elektrik vektörü ve bir manyetik **B** vektörü mevcuttur ve bir düzlem dalgasıyla ilgili olarak bunlar her zaman dik olup dalga paravanları içinde bulunur. Uzaydaki bir noktayı sabit tutmayı hayal eder ve dalganın geçmesine izin verirsek elektrik vektörü, kendi ucunun dalga paravanı düzleminde bir elips tanımlayacağı şekilde salınım yapar. Manyetik vektör özdeş fakat dik bir açı boyunca döndürülmüş bir elips tanımlayarak onu izler. *Bkz.* Şekil 22.12. Elips belirli durumlarda, *düzlem* kutuplanması durumları, bir doğru parçası haline gelmek üzere ezilir. *Çizgisel* kutuplanma, elipsin bir çember haline geldiği durumlarda ortaya çıkar. Şeyleri, dalganın doğruca bize geleceği biçimde yönlendirirsek bu durumda vektörler pozitif sarmallık için saat yönünün tersinde, negatif sarmallık için saat yönünde salınır.



Şekil 22.12 Elektromanyetik düzlem dalgalarının bir özelliği olarak foton kutuplanması (*bkz.* Şekil 21.7). (a) Düzlemsel kutuplanmış bir dalga gözlemciden uzaklaşır. Elektrik vektörler (siyah uçlu oklar) ve manyetik vektörler (beyaz uçlu oklar) sabitlenmiş iki dik düzlemde ileri geri salınır. (b) Çembersel biçimde kutuplanmış bir düzlem dalgasında, elektrik ve manyetik vektörler daima dik ve sabit eşit uzaklıkta kalarak hareket yönünde döner. (c) Diyagramlar arkadan bakıldığında elektrik ve manyetik vektörlerin dalga boyunca nasıl döndüklerini gösterir (pozitif sarmallık durumu). Alttaki şekil çembersel kutuplanmayla ilgili durumu ve üstteki şekilse, iki okun ucu dik başat eksenlere sahip uyumlu elipsler çizerek, eliptik kutuplanmaya ilişkin genel durumu gösterir.



Şekil 22.13 Riemann küresi üzerinde gösterilen foton kutuplanma durumları. Kuzey kutbunun $|+\rangle$ pozitif sarmallık durumunu ve güney kutbunun $|-\rangle$ negatif sarmallık durumunu, foton momentumunun kuzey yönünde olduğunu düşünerek, gösterdiğini kabul edelim. Genel $w|+\rangle + z|-\rangle$ kutuplanma durumu Riemann küresi üzerindeki $q = (z/w)^{1/2}$ noktasınca gösterilir. "Stokes vektörü" olarak adlandırılan, q'dan dışarıya doğru çıkan yarım-çapı ele alın. Bu çemberi Stokes vektörü dolayında sağ-elli olarak yönlendirin. Daha sonra çemberi kürenin ekvator düzlemine ortogonal biçimde yansıtın. Bu bize gerekli kutuplanma elipsini ve doğru yönelimi verir.

Riemann küresinin tüm bunlara nasıl uyduğunu görelim. Kuzey kutbunun $|+\rangle$ pozitif sarmallık durumunu ve güney kutbunun $|-\rangle$ negatif sarmallık durumunu gösterdiğini kabul edelim. Fotonun $|+\rangle$ yönünde yukarıya doğru yolculuk ettiğini varsayarız. Şu halde, Riemann küresi üzerindeki z/w'yu işaretlemek yerine ona ait $q = (z/w)^{1/2}$ karekköküne (hangisi olduğu önemsizdir) bakacağız. Kürenin q'dan çıkan yarıçapını ("Stokes vektörü") ele alalım ve küre üzerinde bu çizgiye dik olan çapsal düzlemde bulunan büyük çemberi çizelim. Bu çemberi, q'yu işaret eden vektör dolayında sağ-elli bir anlamda yönlendirin. Daha sonra çemberi kürenin ekvator düzlemine ortogonal biçimde yansıtın. Böylece gerekli kutuplanma elipsini, doğru yönelimle birlikte elde ederiz. *Bkz.* Şekil 22.13.[22.29]

22.10 Yüksek spin: Majorana tablosu

Kuantum mekaniğindeki belirgin biçimdeki soyut karmaşık sayılarla uzay geometrisi arasındaki yakın ilişkiyi gösteren bir diğer örnek olarak $j = \frac{1}{2}n$ spinli kütleye sahip bir parçacığa, ya da atoma ilişkin spin durumlarını ele alın. Üstte (§22.8'de) iddia edildiği üzere bu, simetrik bir n-in-

[22.29] Tüm bunları doğrulayın. q'nun *işareti* hakkında niçin kaygılanmıyorum?

disli $\psi_{AB\ldots F}$ spin tensörünce tanımlanabilir. Şu halde, böylesi her spin tensörünün, onun aracılığıyla 1–indisli spinörlerin simetriklenmiş bir çarpımı olarak ifade edilebileceği, ölçek çarpanları ve düzenlemelerine eşsiz biçimde bağlı bir "kanonik ayrıştırma"ya sahip olabileceğini iddia eden bir teorem mevcuttur:[22.30]

$$\psi_{AB\ldots F} = \alpha_{(A}\beta_B \cdots \varphi_{F)}.$$

§12.7'den buradaki indislerde bulunan parantezlerin simetrilemeyi gösterdiğini anımsarız. Şekil 22.10'da tek indisli bir ψ_A spinörünün geometrik olarak Riemann küresi üzerindeki bir nokta (diğer bir deyişle uzaydaki bir yön) tarafından (toplam bir karmaşık çarpana bağlı olarak) gösterildiği resmi kullanarak $\psi_{AB\ldots F}$ spin tensörünün kendisinin Riemann küresi üzerinde, küre üzerindeki n noktanın düzenlenmemiş bir kümesi (diğer bir deyişle düzenlenmemiş n yön) biçiminde, toplam bir ölçek çarpanına bağlı şekilde gösterilebileceği sonucuna ulaşırız; *bkz.* Şekil 22.14. Genel bir n durumlu spine ilişkin bu gösterim *Majorana* tanımlaması olarak adlandırılır. Bu, orijinal olarak 1932 yılında parlak İtalyan fizikçi Ettore Majorana tarafından (fakat §22.11'de kısaca değineceğim farklı türde bir işlem[29] aracılığıyla) bulundu. (31 yaşındayken Napoli Körfezi'ndeki bir gemide, gizemli şekilde, belki de intihar ederek ortadan kayboldu.)

$j = \frac{1}{2}n$ spiniyle ilgili olarak standart bir durum tabanı mevcuttur. Majorana tanımlamasında bunlar, kendileri için Majorana tanımlamasındaki noktaların tümünün ya kuzey ya da güney kutbunda bulunduğu durumlardır:

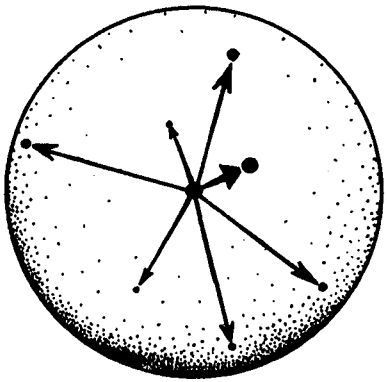
$$|\uparrow\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle, \ldots, |\downarrow\downarrow\downarrow\ldots\downarrow\rangle.$$

Bu $n+1$ adet durum L_3 gözlemlenebilirinin (x^3 ekseni "yukarı" yön olmak üzere) öz durumudur ve böylece tümü birbirine ortogonaldir. *m değerleri* olarak (§22.8) adlandırılıp sırasıyla $j, j-1, j-2, \ldots, -j$ olan farklı $n+1$ adet spin öz değeri tarafından ayırt edilebilirler. §22.11'de bununla ilgili biraz daha fazla şey göreceğiz.

Bir atomla ilgili bu "m değeri"ni ölçmekte kullanılan, Stern–Gerlach aygıtı olarak bilinen standart bir ölçüm aleti mevcuttur. Bunun çalışması için atomun manyetik bir momente (öyleyse bu minik bir mıknatıstır) sahip olmasına, manyetik moment vektörü spin vektörünün belirli bir katı olmak üzere, gerek duyarız. Atomlar kuvvetli biçimde homojen olmayan

[22.30] Not 4.2'de ifade edilmiş olan "kalkülüsün temel teoremi"ni kullanarak bunu kanıtlayabilir misiniz görün. *İpucu*: ζ^A'nın bileşenleri $\{1, z\}$ olmak üzere $\psi_{AB\ldots F}\zeta^A\zeta^B \cdots \zeta^F$ polinomunu ele alın.

[29] *Bkz.* Majorana, 1932.



Şekil 22.14 Riemann küresi üzerinde n adet düzenlenmemiş nokta tarafından verilen, $\frac{n}{2}$–spinli kütle sahibi bir parçacıkla ilgili genel (izdüşümsel) bir spin durumuna ilişkin Majorana tanımlaması. Merkezden her bir noktaya giden bu vektörleri Şekil 22.10'un reçetesiyle uyumlu biçimde $\frac{1}{2}$ spinini oluşturur olarak düşünebiliriz. Bu spinlerin simetrik çarpımları toplamı verir. (2–spinör notasyonunda, tüm spin durumu, $\alpha_A, \beta_A, \ldots, \varphi_A$'nın Şekil 22.10'daki gibi n adet noktayı belirlediği, $\psi_{AB\ldots F} = \alpha_{(A}\beta_B \cdots \varphi_{F)}$'yi çarpanlarına ayıran simetrik n–değerli spinördür.

Şekil 22.15 Bir atomun (spiniyle birleşmiş) manyetik momentine ilişkin "m–değeri"ni ölçmekte kullanılan Stern–Gerlach aygıtı. Atomlar yollarının her m değeri için hafifçe farklı biçimde sapacağı şekilde, kuvvetli biçimde homojen olmayan bir manyetik alan içinden geçer.

bir manyetik alan içinden geçirilir. Bu onların yollarını her m değeri için, her atoma ait manyetik moment vektörünün homojen olmayan manyetik alanla bağlantılı olarak nasıl yönlendirileceğini m belirlediğinden, hafifçe farklı biçimde saptırır; *bkz.* Şekil 22.15.

Farklı her m değeri için tüm durumlar birbirine ortogonal olmasına rağmen *genel* Majorana tanımlamasıyla ilgili ortogonallik koşulları karışıktır.[30] Bununla birlikte bir ↗ yönünün nitelediği bir Majorana durumunun $|\swarrow\swarrow\swarrow\ldots\swarrow\rangle$ durumuna, ↙ çap boyunca ↗'a ters olmak üzere, zorunlu biçimde ortogonal olduğu belirtilebilir. Dahası ↗ Majorana tanımlamasında r çok katlılığıyla nitelenirse, durum Majorana tanımlaması en azından $n - r + 1$ çok katlılığına ↙ ters yönünü içeren başka bir $\frac{1}{2}n$ spinine ortogonaldir.[22.31]

[30] Genel bir yineleme için *bkz.* Biedenharn ve Louck, 1981. İlginç ve modern bir uygulama için *bkz.* Swain, 2004.

[22.31] Tüm bunları §22.9'daki geometriyi kullanarak gösterebilir misiniz görün. Bu sonucu çeşitli L_3 öz durumlarının ortogonalliğine uygulayın.

Bu sonuçlar bize, Majorana yönlerini fiziki olarak dolaysız biçimde yorumlama olanağı sağlar. Majorana yönleri kesin biçimde, spinin bütünüyle ters yönde olduğunu bulmak üzere gerçekleştirilen o yöndeki bir Stern–Gerlach ölçümünün sıfır olasılığa sahip olduğu yönlerdir. r çok katlılığındaki bir Majorana yönüyle ilgili olarak, o yönde $-j$'den $-j+r-1$'e kadar herhangi bir şey olabilecek m değeri için olasılık sıfırdır.[31]

Kütleye sahip bir parçacıkla ilgili genel spin durumunu göstermek üzere üstte özetlenen işlemin pek çok fizikçiye çok da tanıdık gelmediği belirtilmelidir. Onlar bunun yerine, *harmonik analiz* olarak adlandırılan şeyi barındıran farklı bir işlemi benimserler. Bu, pek çok farklı sebep nedeniyle önemli bir konudur ve sonraki bölüm ilgili fikirlere ilişkin kısa bir tartışma sunmaktadır.

22.11 Küresel harmonikler

§20.3'te (küçük genlikli ve harcanımsız) titreşimlere ilişkin klasik kuramla karşılaşmıştık. Ana tartışmamız sonlu sayıda bir serbestlik derecesine sahip sistemlerle ilgiliydi. Bununla birlikte ayrıca (bir davul ya da bir hava sütunundaki titreşimlerde olduğu gibi) serbestlik derecesinin sonsuz olarak değerlendirildiği sistemleri de (kısaca) ele aldık. Bu titreşimler (her durumda da), her biri normal frekans olarak adlandırılan kendi titreşim frekansına sahip normal modlardan oluşur. Titreşen nesne *tıkız*sa (bu terimin anlamı için *bkz.* §12.6 ve şekiller 12–14), ona ait modlar farklı normal frekansların ayrık bir spektrumunu sunarak ayrık bir aileyi oluşturacaktır. Belirli bir S^2 küresi durumunda farklı (kafamızda bir sabun köpüğünün ya da küresel bir balonun titreşimsel modları olarak canlandırabileceğimiz) titreşim modları *küresel harmonikler* olarak adlandırılan şeylere tekabül eder. Bunun, açısal momentuma ilişkin kuantum mekaniğiyle ilgisi nedir? Kısa süre içinde görüyor olacağız.

Bu harmonikleri sınıflandırmak üzere, S^2 üzerinde tanımlanmış olan ∇^2 Laplace işlemcisine ilişkin öz durumları ararız. §10.5'te, Öklitçi düzlem üzerinde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$'yle tanımlanmış olan olağan 2–boyutlu Laplace işlemcisiyle karşılaşmıştık. Bu ifade S^2 birim küresi üzerinde, eğik metriği hesaba katacak şekilde değiştirilmek zorundadır. Bu metrik form, bir noktaya ilişkin (olağan 3–uzaydaki) Kartezyen koordinatların $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$ olduğu S^2 üzerindeki noktaların bir işaretlemesi olan alışılmış *küresel kutuplu* (θ, ϕ) koordinatlarındaki

[31] *Bkz.* Penrose, 1994, 2000; Zimba ve Penrose, 1993.

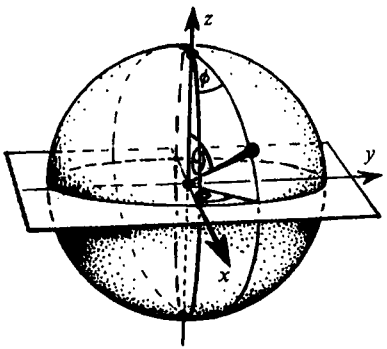
$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

ifadesidir (Şekil 22.16). Bu nedenle, ϕ esasen *boylam* ve $\frac{1}{2}\pi - \theta$ *enlem*dir (tümü radyan cinsinden). Laplace işlemcisi (kovaryant ∇_a türevli; *bkz.* §14.3)[22.32]

$$\nabla^2 = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

olur. ∇^2'ye ait olası öz değerlerin (j = 0,1,2,3,... için) $-j(j+1)$ olduğu açığa çıkar ve böylece Φ ilgili öz fonksiyon olmak üzere,

$$\nabla^2\Phi = -j(j+1)\Phi$$



Şekil 22.10 Küre üzerindeki standart küresel kutuplu θ ve ϕ koordinatları Kartezyen koordinatlarla $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$ aracılığıyla ilişkilenir. Bu nedenle temelde ϕ (burada hem kuzey kutbunda hem de ekvatorda işaretlenmiş) boylamın ve $\pi/2 - \theta$ enlemin bir ölçüsü-

olur.[32] Bu öz fonksiyonlar *küresel harmonikler*dir ve harmoniklerin ayrıca eşzamanlı biçimde (∇^2'yle değişmeli olan) $\partial/\partial\phi$ işlemcisinin de öz fonksiyonları olmasını talep etmek alışıldıktır. $\partial/\partial\phi$'ye ilişkin olası öz değerler, m tamsayısı $-j \le m \le j$ aralığında olmak üzere, im'lerdir:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = im\Phi.$$

Böylesi öz değer örnekleri $\Phi = 1$ ($j = m = 0$ için), $\Phi = \cos\theta$ ($j = 1$ ve $m = 0$ için), $\Phi = e^{\pm i}\sin\theta$ ($j = 1$ ve $m = \pm 1$ için), $\Phi = 3\cos^2\theta - 1$ ($j = 2$ ve $m = 0$ için), vb'dir.[33]

Okur, sırasıyla §22.8'in sonunda ve §22.10'da anılmış olan toplam açısal momentum işlemcisi $\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 + \mathbf{L}_3^2$'ye ilişkin $j(j+1)$ öz değerleriyle

[22.32] Bu küresel kutuplu ifadeyi türetebilir misiniz?

[32] Küresel harmonikler bağlamında burada kullandığım j yerine sıklıkla ℓ harfi kullanılır.

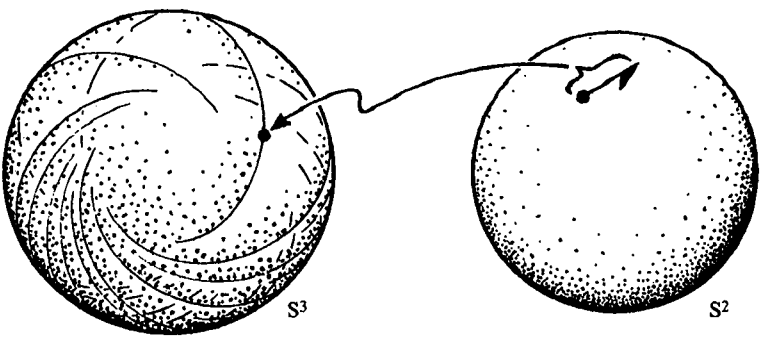
[33] Daha fazla ayrıntı için kuantum mekaniğiyle ilgili herhangi bir kitaba bakın, *örn.* Shankar, 1994 ya da Arfken ve Weber, 2000.

L_3 bileşenine ilişkin m arasındaki dikkat çekici benzerliği kaybetmemelidir. Aslında dalga fonksiyonunun j integral spinli bir parçacığa ilişkin açısal bağımlılığı zorunlu biçimde bir j–küresel harmoniktir. Dahası L_3'e ait öz durumlar $\partial\Phi/\partial\phi$'nin öz fonksiyonları olan harmoniklere tekabül eder. Aslında böylesi dalga fonksiyonlarının açısal davranışına ilişkin

$$\mathbf{J}^2 = -\nabla^2 \text{ ve } L_3 = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

ifadelerini "saptayabiliriz".[34]

Bu bize, j'nin bir yarı–tek tamsayı olduğu (buradan hareketle m'deki gibi) "spinör" durumları vermez. Bunun için "spin ağırlıklı küresel harmonikler" olarak anılan şeylere genelleme yapabiliriz.[35] Bunlar basit biçimde S^2 üzerindeki fonksiyonlar değildir fakat ayrıca S^2'nin her noktasındaki bir birim (spinör) tanjant vektörüne bağımlılıkları da vardır (Şekil 22.17). (Bunlar S^3 üzerinde, Clifford demetinin bize sunduğu, S^2'ye tanjant olan "spinör" birim vektörler demetini temsil eden fonksiyonlar olarak düşünülebilir.)[36] Burası bunun ayrıntılarına girilecek yer değildir ve okur yazına yönlendirilir.



Şekil 22.17 Spin ağırlıklı küresel harmonikler. S^2 küresi üzerindeki spin ağırlıklı fonksiyonlar basit biçimde (sağ tarafta çizilmiş) S^2 üzerindeki fonksiyonlar olmayıp aynı zamanda S^2'ye (burada kendisine ait spinör doğaya işaret etmek üzere "yarım ok" biçiminde gösterilen) söz konusu noktada tanjant olan (spinör) bir birim vektörüne bağlılığa da sahiptir. Bu tür fonksiyonlar, Şekil 15.10'daki Clifford spin vektör demeti olan sol taraftaki S^3 üzerinde daha uygun biçimde gösterilir. ("s spin ağırlığı"nın bir fonksiyonu, spin vektörünün S^2'ye tanjant olan kendi düzleminde, kendisi boyunca döndüğü χ açısına bir $e^{\mathrm{i}s\chi}$ bağlılığına sahiptir.)

[34] Shankar, 1994.

[35] *Bkz.* Newman ve Penrose, 1966; Penrose ve Rindler, 1984.

[36] *Bkz.* Goldberg, vd., 1967.

Aslında §22.8'de sunulup §22.10'daki Majorana tanımlaması için kullanıldığı üzere spin durumlarına iişkin 2–spinör tanımlaması küresel harmonikler ve spin ağırlıklı küresel harmonikler kuramıyla yakından ilişkilidir. Herhangi n–indisli $\psi_{AB\ldots F}$ simetrik spin tensörü açık biçimde $j = \frac{1}{2}n$'le ilgili (spin ağırlıklı) küresel harmoniklerin bir toplamına karşılık gelir. Onları bulmak üzere, S^2 üzerinde çapsal olarak ters noktaları gösterecek şekilde[22.33]

$$\{\xi^0, \xi^1\} = e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}, e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\{\eta^0, \eta^1\} = -e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}, e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}$$

bileşenlerine sahip ξ^A ve η^A 2–spinörlerini alırız. Her (spin ağırlıklı) harmoniği yazmak üzere (değişken bir spinör referans sistemi olarak kabul edilen) ξ^A ve η^A'yla ilgili olarak $\psi_{AB\ldots F}$'nin bileşenlerini alırız. Bu "bileşenler"

$$\psi_{A\ldots CD\ldots F}\xi^A \cdots \xi^C \eta^D \cdots \eta^F$$

nicelikleridir.

Bu ifadede ξ'lerin sayısı η'ların ($= j$) sayısına eşitse böylece (spin ağırlıklılar yerine) sıradan harmonikleri elde ederiz. (Genellikle ξ ve η'ların sayısı, s "spin ağırlığı" olmak üzere, sırasıyla $j + s$ ve $j - s$'dir. $\psi_{AB\ldots F}$'nin sırasıyla §22.10'da anılan *standart* taban durumlarının, $|\downarrow\ldots\downarrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle$, her biri olduğunu kabul edersek $\partial/\partial\phi$'nin öz durumları olan *standart* küresel harmonikleri (katlarını)[37] elde ederiz. (Bunlar için $\psi_{AB\ldots F}$'ye ilişkin $n + 1$ bağımsız bileşenden yalnızca bir adedi sıfır değildir.) Bu taban durumlarının *simetriklenmiş* olduklarını aklımızda tutmak zorundayız. Örneğin $|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ ifadesinin bir katıdır. Bu belirli durumda ψ_{ABC}'nin tüm bileşenleri tek bağımsız bileşen $\psi_{011} = \psi_{101} = \psi_{110}$ dışında yok olur. Bu konular üzerine olan açıklamamın özlüğü[38] nedeniyle görece yetersiz olsa da neyin dahil olduğuyla ilgili bir özet aktarır ve okur aslında küresel harmoniklere giden (alışılmadık olsa da) dikkat çekici biçimde etkileyici bir yol olan şeyi sunanın spinörler olduğunu değerlendirmeye başlayabilir.[22.34] §22.8'den (*krş.* §13.7) $\psi_{AB\ldots F}$ spin tensör niceliklerinin

---

[22.33] Noktaların niçin antipodal olduğunu açıklayın.

[37] Ayrıca küresel harmoniklere ilişkin, onları kullanmakta ve onlarla hesaplama yapmakta önemli olan ortogonallik ve (toplam ölçeği sabitlemek üzere) normalleştirme özellikleri de mevcuttur. Bununla birlikte bu konular bizi epeyce uzaklara götürür; okura küresel harmonikler kuramına ilişkin şu açıklamalar önerilir: Groemer, 1996; Byerly, 2003.

[38] Spinör cebiri ve geometrisini biraz daha ayrıntılı biçimde izlemek isteyen okur, spinör indislerinin $\xi_1 = \xi^0$, $\xi_0 = \xi^{-1}$ düzeni uyarınca "yükseltil"ebileceği ya da "alçaltıl"abileceği gerçeğine dikkat etmelidir. *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984; Zee, 2003, Ek.

[22.34] Sıradan küresel harmonikleri $j = 1,2,3$ için açık şekilde bu biçimde (bir toplam çarpa-

SO(3) döndürme grubuyla ilgili $(n+1)$–boyutlu indirgenemez bir gösterim uzayı sunduğunu anımsayın, böylece aynısı $j = 2n$ (spin ağırlıklı) küresel harmoniklerine ilişkin uzay için de geçerlidir.

Majorana tanımlaması, $\psi_{AB\ldots F} = \alpha_{(A}\beta_B \cdots \varphi_{F)}$ çözümlemesinde, yalnızca ξ'lerin görünüp hiçbir η'nın olmadığı üstteki tanımlamada ortaya çıkan (spin ağırlıklı) küresel harmoniklerin sıfırlarına karşılık gelen $\alpha_A, \beta_A, \ldots, \varphi_A$ spinörleri biçiminde elde edilebilir. Aslında bu, Majorana'nın tanımlamasını ilk kez bulmasına karşılık gelen değerlendirmeler üzerindendir. 2–spinör formalizmini kullanarak küresel harmoniklerle ilgili bazı değerli kavrayışlar elde etmek olasıdır. Spinör yaklaşımını kullanmak pek çok açıdan daha basittir fakat pek tanıdık değildir.

Küresel harmonikler, örneğin klasik fizikte olduğu gibi pek çok alanda önemlidir ve çoğu uygulamada açısal momentumla özel bir bağlantı söz konusu değildir. (Böylesi durumlarda j yerine ℓ harfini kullanmak, ilki açısal momentuma ilişkin çağrışımlara sahip göründüğü için, olağandır.) Bir sabun köpüğünün küçük titreşimleri bir örnek olabilir. Bir başkası, yüksek değerli ℓ'yle, 200 ve daha yüksek, özel olarak ilgilenildiği durumdaki, uzayın derinliklerinden gelen mikrodalga (2,7 K) ışınımının gökküresi üzerindeki sıcaklık dağılımının analizi olur. Bu analiz §§27.7, 10, 11 ve §28.4'te göreceğimiz üzere kozmoloji için büyük bir öneme sahiptir.

Küresel harmoniklerin kuantum ve klasik biçimde ortaya konuluşları arasındaki karşıtlık çarpıcıdır ve sezgisel değildir. θ ve ϕ koordinatlarının standart açısal uzamsal yoruma sahip olduğu bir kuantum sisteminde j değeri (ya da ℓ) her zaman açısal bir momentum biçimindeki yoruma sahiptir fakat bu klasik bir sistem için olandan uzaktır. Özellikle, kuantum mekaniğindeki sıfır açısal momentumlu bir sistem küresel olarak simetrik olmak zorundadır çünkü $j = 0$ olan bir dalga fonksiyonu yalnızca küre üzerindeki küresel harmonik sabitinden oluşur; fakat klasik fizikte sıfır açısal momentum (diğer bir deyişle "spin yapmayan") kesinlikle küresel simetri anlamına gelmez!

Ters yönde, *büyük* bir açısal momentuma (büyük j değeri) sahip rasgele seçilmiş bir kuantum sisteminin, az ya da çok rasgele biçimde S^2 küresine ekilmiş 2j noktadan oluşan bir Majorana tanımlamasınca tanımlanmış bir duruma sahip olduğunu görürüz. Bu, kendi kuantum sayılarıyla ilgili olarak büyük değerli bir kuantum sisteminin klasik bir sisteme yaklaşması gerektiğine ilişkin genel izlenime karşın,[39] büyük açısal momen-

na bağlı olarak) hesaplayın. Bunların aslında ∇^2 ve $\partial/\partial\phi$'nin öz durumları olduğunu kontrol edin.

[39] "Kuantum sayısı" terimi genellikle önemli bir kuantum gözlemlenebilirine ilişkin, örneğin

tumlu bir sistemin klasik açısal momentum durumuyla hiçbir benzerlik taşımaz. Klasik benzeri bir kuantum durumuyla ilgili olarak Majorana noktalarının temel olarak S^2 merkezinden çıkan belirli bir yönde, diğer bir deyişle klasik spinin (pozitif) ekseni olan yönde kümelenmelerine gerek duyarız. Bu iki tablo arasında niçin böylesi bir uyumsuzluk bulunur? Yanıt, "büyük" kuantum durumlarının neredeyse tümünün klasik olanlara benzeme*me*sidir. Bu tür örneklerin en ünlüsü Schrödinger'in canlı ve ölü olmaya ilişkin bir kuantum üst üste binmesi içinde bulunan kuramsal kedisidir (*bkz.* §29.7). Olayları niçin gerçekten böyle klasik bir düzeyde görmeyiz? Bu, 29 ve 30. bölümlerde tartışılacak olan *ölçüm paradoksu*nun bir görünümüdür.

Uzaylarla ilgili S^2'den daha genel olan harmonik analiz bilimsel araştırmanın çoğu alanı için önemli bir parçayı oluşturur. Bir sistemle ilgili küçük tedirgeme ya da salınımların ele alınması son derece değerlidir. Bununla birlikte bir uyarıda bulunmak uygun olacaktır. Tıkız–olmayan bir uzayda durum, üstte ele alınmış olan S^2 durumundan çok daha karışık bir hal alabilir. Buna benzer bir şeyi (tıkız çember üzerindeki) Fourier analizinden (tıkız–olmayan açık çizgi üzerindeki) Fourier dönüşümüne geçtiğimiz 9. bölümde gördük. İnsanlarda bazen, analizin tıkız bir biçimden tıkız–olmayana, diyelim ki küreden hiperbolik uzaya, yalnızca basit birkaç işaret değişikliğiyle (ve §18.4'teki "işaret çevirme" fikirleriyle uyumlu olarak, trigonometrik fonksiyonların yerlerinin hiperbolik benzerleriyle değiştirilmesiyle) devredilebileceğine inanmaya ilişkin bir eğilim bulunur. Ne yazık ki gerçek bundan çok daha fazla karışık olabilir. Bu tür tamamlanmamış bir "harmonik analiz", harmonikler sisteminin son derece eksik oluşu nedeniyle, hiperbolik uzay üzerindeki ilgili fonksiyonların yalnızca gözden kaybolacak derecede küçük bir miktarını ele geçirir.

22.12 Görelilikçi kuantum açısal momentumu

Şimdi görelilikçi açısal momentum konusuna yönelelim. §18.7'de açıklanmış olan klasik ifadeleri anımsayın. Bir p_a 4–vektörü içinde birleştirilen kütle/enerji ve momentuma benzer biçimde, bir nesneye ilişkin *açısal* momentum ve kütle–merkezi hareketini açıklayan ters simetrik bir M^{ab} 6–tensör niceliği mevcuttur. Bunlarla kuantum mekaniksel olarak nasıl ilgilenmeliyiz?[40]

bir parçacık ya da kuantum sistemini sınıflandırmakta kullanılan açısal momentum, yük, baryon sayısı, vb gibi olası ayrık öz değerlerle ilgilidir. *Bkz.* §3.5.

[40] Bölümler 24–26'da uygun biçimli bir (özel–) görelilikçi kuantum mekaniğinin bu bölümdeki

§§21.1–3'te enerji ve momentumla ilgili kuantum kavramlarının uzay-zamana ilişkin zaman ve uzay ötelemeli hareketlerinin üreteçlerini nasıl gizemli biçimde gösterdiğini, ya da (esasen) onlar *olduğunu*, gördük. Benzer biçimde M^{ab} 6–açısal momentumun bileşenleri, $\mathbb{M}$ Minkowski uzayının (Lorentz) dönel hareketlerine ilişkin üreteçleri gösterir; ya da onlardır. Ötelemeli p_a hareketleriyle birlikte bu dönel hareketler (yansımalı olmayan) Poincaré grubunun (§18.2), Öklitçi geometriye ilişkin katı hareketlerin Minkowskici benzeri, bütününe yol açar.

Daha açık biçimde ötelemeli Poincaré hareketlerine ilişkin üreteçler p_a 4–momentum vektörünün p_0, p_1, p_2, p_3 bileşenleridir. Burada $E = p_0 = i\hbar\partial/\partial x^0$ enerjisi zaman ötelemesi üretir ve benzer şekilde geri kalan üç bileşen (diğer bir deyişle momentum), $(-p_1, -p_2, -p_3)$'ün $\mathbf{p}$ 3–momentumunun bileşenleri olduğunu aklımızda tutmak üzere, *bkz.* §18.7, uzamsal yer değiştirmeler üretir: $p_1 = i\hbar\partial/\partial x^1$, $p_2 = i\hbar\partial/\partial x^2$, $p_3 = i\hbar\partial/\partial x^3$. Dönel Poincaré hareketleri 3–uzayı, §22.8'de ele aldığımız olağan açısal momentuma ilişkin kuantum kavramını tanımlayan $c^{-2}M^{23} = \boldsymbol{L}_1 = i\hbar\ell_1$, $c^{-2}M^{31} = \boldsymbol{L}_2 = i\hbar\ell_2$, $c^{-2}M^{12} = \boldsymbol{L}_3 = i\hbar\ell_3$ bileşenlerince üretilir. Bunlar M^{ab} 6–açısal momentumunun tümüyle uzamsal olan bileşenleridir ve Lorentz hız dönüşümlerini üreten geri kalan 3 bağımsız[41] $c^{-2}M^{01}$, $c^{-2}M^{02}$, $c^{-2}M^{03}$ bileşeni §18.7'yle uyumlu olarak kütle merkezinin düzenli hareketiyle ilgilidir (*bkz.* Şekil 18.16).

Poincaré grubu Abelci olmadığından, ona ait üreteçlerin hiçbiri değişmeli değildir. Onlara ilişkin değişme kuralları bize p_a ve M^{ab} kuantum işlemcilerimizle ilgili değişme kurallarını söyler:

$$[p_a, p_b] = 0$$

$$[p_a, M^{bc}] = i\hbar(g_a{}^b p^c - g_a{}^c p^b)$$

$$[M^{ab}, M^{cd}] = i\hbar(g^{bc}M^{ad} - g^{bd}M^{ac} + g^{ad}M^{bc} - g^{ac}M^{bd}).$$

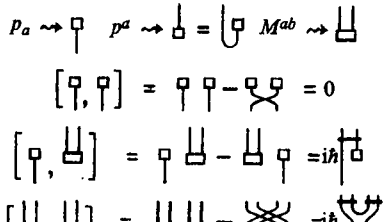
Bunlar biraz karışık görünebilir fakat Poincaré grubuna ilişkin Lie cebirini (§14.6) tanımladıklarından görelilikçi fizikte temel bir öneme sahiptirler. Şekil 22.18'de gösterildiği üzere diyagram biçimli notasyonda biraz daha basit görünürler.[22.35]

Görelilikçi olmayan açısal momentumla ilgili olarak, durumlara ilişkin bir tabanı $j(j+1)$ öz değerleri ve değişmeli $\mathbf{J}^2$ ve $\boldsymbol{L}_3$ gözlemlenebilirlerine

basit değerlendirmelerden çok daha fazlasına gerek duyacağını göreceğiz fakat bu durum var olan tartışmayı etkilemeyecektir.

[41] Not 22.6'yı anımsayın. Buradaki bağımsızlık M^{ab}'nin *ters* simetrikliğini hesaba katar.

[22.35] §22.8'de 3–boyutlu açısal momentumla ilgili olarak verilmiş çeviricilerin bunlarda içerildiğini gösterin.



Şekil 22.18 Görelilikçi 4–momentum ve 6–açısal momentum kuantum çevericilerinin diyagram biçimli hali: $[p_a, p_b] = 0$, $[p_a, M^{bc}] = i\hbar(g_a{}^b p^c - g_a{}^c p^b)$, $[M^{ab}, M^{cd}] = i\hbar(g^{bc}M^{ad} - g^{bd}M^{ac} + g^{ad}M^{bc} - g^{ac}M^{bd})$.

ilişkin m biçiminde açıklayabildiğimizi anımsayın; *bkz.* §§22.8, 11. Bu işlemciler *tam* bir değişme kümesini (L_1, L_2, L_3 üreteçlerinden oluşturulan ve $\mathbf{J}^2$ ve L_3'le değişmeli olan herhangi başka bir işlemcinin, bu ikisinin bir fonksiyonu olma zorunluluğu nedeniyle yeni hiçbir şey vermemesi anlamında) sunar. Ele alınan verili bir sistemle ilgili olarak böylesi tam bir değişme kümesi bulmak genellikle kuantum mekaniğinin önemli bir parçasıdır. Bunu özel olarak p_a ve M^{ab}'nin bileşenlerinden oluşturulmuş işlemcilerle ilgili olarak yapabilmemiz ve onlara ilişkin öz değerleri görelilikçi parçacıklar ya da sistemleri sınıflandırmada kullanabilmemiz gerekir.

Gözlemlenebilirlerin değişmesiyle niçin ilgilenmekteyiz? Sebep, $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ böylesi iki adediyse, böylece $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ olur, eşzamanlı olarak her ikisinin de öz durumu olan $|\psi_{rs}\rangle$ durumları bulabilmemiz ve ilgili (a_r, b_s) öz değerler çiftinin bu durumları işaretlemek üzere kullanılabilmesidir.[42] Değişmeli $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \ldots$ gözlemlenebilirlerinin tam bir kümesine sahipsek bu durumda $|\psi_{rstu\ldots}\rangle$ taban durumlarına ilişkin, ilgili $(a_r, b_s, c_t, d_u, \ldots)$ öz değerler ailesi bu durumları işaretlemekte kullanılabilmek üzere, bir aileye sahip oluruz.[22.36]

Tam bir değişme kümesini elde etmek üzere, ele alınan sistemin *tüm* işlemcileriyle (skaler) değişmeli olan *Casimir* işlemcilerini bularak başlamak olağandır. 3–boyutlu olağan açısal momentum (§22.8'i anımsayın) durumunda yalnızca bir (bağımsız)[43] Casimir işlemcisi, $\mathbf{J}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$,

---

[42] Bununla, genel bir $f(\theta, \phi)$ fonksiyonunun, $g_i(\theta)$ ve $h_j(\phi)$ sırasıyla uygun $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ (değişmeli) işlemcilerinin öz fonksiyonları olmak üzere, diyelim ki $f(\theta, \phi) = \sum \lambda_{ij}\, g_i(\theta) h_j(\phi)$ şeklindeki bir toplam olarak yazılabildiği durumda ortaya çıkan "değişken ayırma" olgusu arasında bir bağlantı söz konusudur. Küresel harmonikler bu özelliğe sahiptir. *Bkz.* Groemer, 1996; Byerley, 2003.

[22.36] Uygunluk adına öz değerlerin sürekli yerine ayrık bir sistem oluşturduğunu varsayabileceğiniz şekilde bu iddiaları ayrıntılı biçimde çözümleyin. İlk olarak bozuk hiçbir öz değer olmadığını varsayın ve bozulmalar söz konusu *olduğunda* argümanın nasıl gerçekleştirildiğini gösterin. *İpucu*: $\boldsymbol{A}$'ya ilişkin her bir öz değeri $\boldsymbol{B}$'ye ilişkin bir öz değer biçiminde ifade edin ve böylece devam edin.

[43] Buradaki "bağımsızlık" fonksiyonel bağımsızlığa atıftır; not 22.26'yla karşılaştırın. Bu nedenle, $2\mathbf{J}^2$, $(\mathbf{J}^2)^3$ ve $\cos\mathbf{J}^2$ aynı $\mathbf{J}^2$ Casimir işlemcisi değilken bunlar $\mathbf{J}^2$'den bağımsız değildir. Açıkçası bu, kısmi diferansiyel denklemlerin *yerel* çözümlerine uygulanan bir uzayın boyu-

mevcuttur. Önemli bir soru: p_a ve M^{ab} tarafından üretilmiş sistemle ilgili olarak üstteki değişme kurallarını sağlayan Casimir işlemcileri nelerdir?

Şimdi, kütle merkezi dolayındaki spin *Pauli–Lubanski spin vektörü* olarak adlandırılan

$$S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}M^{bc}p^d$$

niceliğince tanımlanır. Levi–Civita'nın ε_{abcd}'si §19.2'de tanımlanmıştı fakat burada $c = 1$ varsayımında bulunulmadığından $\varepsilon_{0123} = c^{-3}$'e sahip oluruz. ("Matematikçi notasyonunda $\boldsymbol{p}$'yi artık önceki 3–momentum yerine 4–momentumu gösterecek şe kilde, *krş.* §11.6, §12.7, §19.2, kullanarak $\boldsymbol{S} = {}^*(\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{p})$ yazabiliriz.) Tekil bir yapısız klasik parçacığın, x^a parçacığın dünya çizgisi üzerindeki bir noktanın konum vektörü olmak üzere, $M^{ab} = x^a p^b - x^b p^a$'ya sahip olduğunu görmüştük (§18.7'nin sonuna bakın). Kuantum durumunda da aynı ifadeyi kabul ederiz; buradan bu tür bir parçacıkla ilgili olarak $S^a = 0$ sonucu izler. Bununla birlikte S^a'nın bu tür iki ya da daha fazla parçacıklı toplam bir sistemle ilgili olarak yok olması gerekmez. Dahası spinli bir tekil parçacık için, M^{ab} açısal momentum bu basit biçime sahip olmaz. Burada $\mu \neq 0$ varsayımıyla ek bir $\mu^{-2}\varepsilon^{abcd}S_c p_d$ *spin* terimi mevcuttur (*bkz.* not 18.11). S^a'nın her zaman p_a'ya ortogonal olduğunu ($p_a S^a = 0$) ve onunla değişmeli (diğer bir deyişle $[S^a, p_a] = 0$) olduğunu buluruz. Böylece S^a, p_a gibi orijin bağımsızdır.[22.37]

μ tüm sistemin durağan kütlesi olmak üzere bağımsız iki Casimir işlemcisi (Poincaré grubu için Casimirler) mevcuttur:[22.38]

$$p_a p^a = c^4\mu^2 \text{ ve } S_a S^a = -\mu^2 \mathbf{J}^2.$$

Üstteki denklemlerin ikincisinde tanımlanan "$\mathbf{J}^2$"nin aslında, L_1, L_2, L_3 kendi durağan sisteminde kütle merkezi dolayındaki açısal momentum bileşenleri olmak üzere, $\mathbf{J}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ olduğunu görürüz. Değişmeli işlemciler kümesini tamamlamak üzere, $p_a p^a$ ve $S_a S^a$'yla birlikte bize toplamda altı adet veren, p_1, p_2, p_3'ü ve spin vektörünün bir bileşenini, diyelim ki S_3, seçebiliriz. (Ayrıntıda çok daha fazla sayıda başka seçim olası olsa da, toplam bağımsız işlemci sayısı her zaman[44] altıdır.) Bunun, §22.13 ve §31.10'daki tartışmalarla önemli bir ilişkisi mevcuttur.

---

tuyla ilgilidir. Kuantum mekaniksel problemlerde, izin verilmiş öz değerleri katı biçimde yasaklayıp serbestlik derecesinin sayımını karıştıran çözüm uzayı, *örn.* §22.11'nin S^2'si, üzerinde tıkızlık gereksinimleri bulunması olasıdır.

[22.37] Bu dört cümlede iddia edilen özellikleri oluşturun.

[22.38] Gösterilen bu iki işlemcinin p_a ve M^{ab}'yle niçin değişmeli olmak zorunda olduğuna ilişkin basit bir sebep sunun. *İpucu*: §22.13'e bir göz atın.

[44] "Değişmeli bağımsız işlemciler sayısı"nın değişmezliğiyle ilgili bir miktar dikkat gerekir.

Öyleyse durum, zaman ve uzaydaki ötelemeleri dahil etmek üzere E enerjisini $\mathbf{J}^2$ niceliğini ve L_3'e ek olarak üç momentum bileşenini tamamlamak için bir "Casimir işlemcisi" olarak seçebildiğimiz görelilikçi olmayan durumla oldukça benzerdir. Görelilikçi durumda $\mathbf{J}^2$'yi dolaysız biçimde elde edemeyip daha çok bize $p_a p^a \neq 0$ koşuluyla yemel olarak eşdeğer bir şey veren

$$\mathbf{J}^2 = -c^4 (p_a p^a)^{-1} S_a S^a$$

şeklinde elde ederiz. Aslında üstteki tartışmada, μ durağan kütlesinin yok olmadığını varsaydık. $\mu = 0$ olursa spinin büyüklüğünü bu şekilde ifade edemeyiz.

$\mu = 0$ kütlesiz durumuyla nasıl ilgileniriz? Daha çok *s sarmallığını*, §§22.7, 9'daki bir foton durumuyla ilgili olarak karşılaşmış olduğumuz bir nicelik, yeniden ediniriz. Bu, S^a Pauli–Lubanski vektörünün p_a 4–momentumuyla orantılı olmasına ilişkin fiziki gereklilik tarafından tanımlanır:[22.39]

$$S_a = s p_a.$$

$s = 0$'a da ayrıca izin verilirken sağ–elli sarmallık $s > 0$'la ve sol–elli sarmallık $s < 0$'la verilir. Şu halde, s, p_1, p_2, p_3 olarak kabul edebileceğimiz bağımsız dört değişmeli gözlemlenebilire sahibiz. Aslında kütlesiz durumu ele almaktaki en düzenli yolun *burgaç kuramına* başvurmak olduğu açığa çıkar. Buna (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3 "burgaç değişkenleri"nin ayrıca bağımsız dört değişmeli işlemci olarak da kullanılabildiğini göreceğimiz) §33.6'da geleceğiz.

22.13 Genel yalıtık kuantum nesnesi

Kuantum mekaniği bir atom ya da molekül gibi yalıtık bir nesneyi genel olarak nasıl tanımlar? Nesne üzerine etkiyen hiçbir dış kuvvet bulunmadığını ve onun yerel olarak kaldığını varsayıyorum fakat kendi içinde etkiyen iç kuvvetler bulunabilir. Bu tür bir nesnenin tanımlanmasına ilişkin önemli bir özellik olarak tanımı (i) nesnenin bir bütün olarak dışsal biçimde nitelenmesi ve (ii) ayrıntılı içsel işleyişi ve geometrik yapısına ayırırız.

Bu dışsal niteleme, (i), onun toplam kütle/enerjisi, momentumu, kütle merkezinin konum ve hareketi ve açısal momentumuyla ilgilidir. Bu nicelikleri görelilikçi anlamda kabul edelim ve dışsal parametreleri iletmek

[22.39] S^a ve p_a'nın ikisi de nasıl ortogonal ve orantılı olabilir?

üzere §22.12'nin p_a ve M^{ab}'sini kullanalım. İçsel işleyişler, (ii), oluşturucu parçacıklar, onların belirli doğası, aralarındaki kuvvetlerin doğası ve geometrik ilişkileriyle ilgilidir. Bu ilişkilerin tümüyle bağıl[45] bir doğadaki (*örn.* bir parçanın kütle merkezine göre uzaklığı ya da çeşitli parçaların birbiriyle oluşturduğu açılar ya da bunların birbirine göre uzaklıkları) genellenmiş q_r koordinatlarınca (§20.1) verildiği kabul edilecek. Bu nedenle bunlar, nesnenin tümü uzamsal ya da zamansal bir öteleme hareketiyle yer değiştirir ya da belirli bir açı boyunca döndürülür ya da bir yönde düzenli bir hızla hareket ettirilirse değiştirilmez.

Göreli doğaları nedeniyle içsel koordinatların hiçbiri Poincaré grubunun herhangi bir simetrisince değiştirilmez. Buradan p_a ve M^{ab}'yle değişmeli olma zorundalıkları sonucu izler. Niçin? Bir $\boldsymbol{S}$ simetri işlemcisinin bir kuantum sistemine

$$|\psi\rangle \longmapsto \boldsymbol{S}|\psi\rangle$$

uyarınca etki ettiğini ve $\boldsymbol{Q}$'nun bir kuantum işlemcisi olduğunu düşünün; böylece simetri işlemcisinin $\boldsymbol{Q}$ üzerindeki eylemi

$$\boldsymbol{Q} \longmapsto \boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-1}$$

olur.[22.40] $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{S}$ tarafından değiştirilmemişse böylece $\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{Q}$, ve buradan da

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$$

olur. Bu nedenle $\boldsymbol{S}$'yi sırasıyla p_a ve M^{ab} bileşenlerinden biri biçiminde kabul ederek her iç parametrenin aslında p_a ve M^{ab}'yle değişmeli olmak zorunda olduğunu görürürüz.

Var olan bağlamda bu, içsel serbestlik derecesine karşılık gelen dalga fonksiyonunun bir parçasını 4–momentum ve 6–açısal momentumun dışsal parametrelerine karşılık gelenden *ayır*abileceğimiz anlamına gelir. Olağan davranışta, sistemin dışsal gözlemlenebilirlere ilişkin uygun tüm sistemin bir öz durumu olduğunu varsayarız. Özellikle enerji ve momentumun belirli öz değerler tarafından verildiği kabul edilir ve şeyleri 3–momentumun sıfır olduğu (§21.5'in notasyonunda, $\mathbf{P} = 0$) referans sistemine atfetmek olağandır. Daha sonra açısal momentum §§22.8–11'in görelilikçi olmayan tartışmaları uyarınca ele alınabilir, böylece sistemin $\mathbf{J}^2$ toplam açısal momentumuna ve istenirse L_3'e ilişkin bir öz durum içinde olmasını isteyebiliriz.

---

[45] Genel göreliliğe ilişkin konular burada göz ardı edilmektedir, böylece "göreli", *özel* görelilik anlamında kabul edilir.

[22.40] Niçin açıklayın. *İpucu*: §22.4'e bir bakış yardım edebilir.

İçsel parametreler elbette, söz konusu belirli sistemin ayrıntılarına bağlıdır. Bazı koşullarda içsel serbestlik derecesini, denge civarındaki minik salınımlar tarafından tanımlanır biçimde değerlendirmek iyi bir yaklaşıklık tahmini olabilir. Bu durumda §20.3'teki klasik analiz anlamlı olur. §20.3'ten, Q_{ab} ve P^{ab} simetrik, pozitif belirli ve zamanda sabit olmak üzere,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} Q_{ab} q^a q^b + P^{ab} p_a p_b$$

biçimindeki bir Hamiltonı alırsak böylece klasik durumda, her $\omega/2\pi$ normal frekansı $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{PQ}$ matrisine (diğer bir deyişle $W^a{}_c = P^{ab} Q_{bc}$'ye) ait bir ω^2 öz değerinden kaynaklandığını anımsarız.

Peki o halde kuantum mekaniğinden ne haber? Planck'ın, ν frekans olmak üzere, $E = h\nu = 2\pi\hbar\nu$ bağıntısını anımsayarak, o belirli normal moddaki bir salınıma ilişkin $E = \hbar\omega$ gibi bir enerjiyi bekleyebiliriz. Ayrıca belki, klasik olarak salınımın genliğinin (yaklaşıklık tahminine ilişkin "küçük salınım" doğası rahatsız edilmediği sürece) dilediğimiz kadar büyük hale gelebilmesi nedeniyle enerjiye ilişkin daha yüksek değerler de bekleyebiliriz ve genlik ne kadar büyük olursa o kadar büyük enerji elde ederiz. "Daha yüksek harmoniklerin" içerildiğini varsayarsak, bunların $\omega/2\pi$ basit frekansının tamsayısı katları olan frekanslarla ortaya çıktığını §9.1'den anımsarız, böylece izin verilen kuantum enerjisi öz durumlarının

$$0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega, 4\hbar\omega, \ldots$$

olduğunu hayal edebiliriz.

Aslında bu, doğru kuantum mekaniksel yanıttan pek uzak değildir fakat enerjiye *sıfır noktası enerjisi* olarak adlandırılan ek bir $\frac{1}{2}\hbar\omega$ katkısı bulunduğu ortaya çıkar.[46] Böylece izin verilen enerji öz durumları şunlardır:

$$\frac{1}{2}\hbar\omega, \frac{3}{2}\hbar\omega, \frac{5}{2}\hbar\omega, \frac{7}{2}\hbar\omega, \frac{9}{2}\hbar\omega, \ldots .$$

Bu, kendisiyle ilgili Hamiltonın $\mathcal{H} = (m^2\omega^2 q^2 + p^2)/2\mathrm{m}$ 1–boyutlu harmonik osilatöre[47] ilişkin standart kuantum tartışmasından gelir. Ayrı ayrı her mod için, **W** matrisinin her ω öz değeriyle ilgili olarak bu değerlerin birinden gelen bir enerji katkısı bulunur.

---

[46] Bununla birlikte §20.3'te izin verildiği üzere, enerjiye ilişkin sıfırı basitçe yeniden tanımlayan, Hamiltona bir sabit ekleme özgürlüğü mevcuttur, *krş.* §24.3'teki alıştırma [24.2]. Böylece bu $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ekleme bazen fiziki olarak dolaysız hiçbir önemde olmamak biçiminde değerlendirilir.

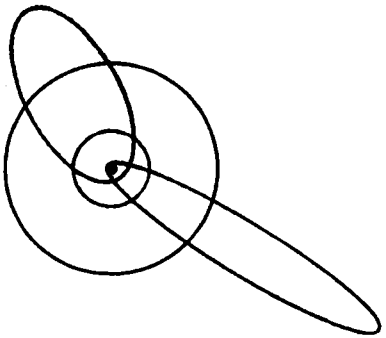
[47] Örneğin *The Principles of Quantum Mechanics*, Dirac, 1982, Dirac'ın klasik davranışına bakın.

Genel bir kuantum sistemiyle ilgili olarak, bu değerler yalnızca yaklaşıklık tahminleridir çünkü yüksek dereceli terimler önemli hale gelmeye başlayabilir. Bununla birlikte çeşitli sistemler için bu şekilde iyi biçimde yaklaşıklık tahmini yapılabilir. Dahası oldukça dikkat çekici biçimde, fotonlara, ya da bir "bozon" olarak anılan türdeki herhangi başka bir parçacığa (*bkz.* §23.7 ve §26.2), ilişkin kuantum alan kuramının, bozonlara ilişkin tüm sistem osilatörlerin bir toplamıymış gibi ele alınabileceği ortaya çıkar. Bu osilatörler, (Hamiltonda yüksek dereceli hiçbir terim olmamak üzere) bozonlar üstte, aralarında bir etkileşim olmaksızın durağan bir durumdayken ele alınmak üzere, tam olarak basit harmonik türdedir.[48] Buradan hareketle bu "harmonik osilatör" tablosu oldukça geniş şekilde uygulanabilir bir düzen sunar. Yine de daha tam biçimde ilerlemek üzere etkileşimlere ilişkin ayrıntılı bilgi gerekir.

Örneğin, bir hidrojen atomu (proton az hareket ettiğinden, elektrondan çok daha fazla, yaklaşık olarak 1836 kat, kütleli olmak üzere, iyi bir yaklaşıklık tahmini olarak genellikle sabit kabul edilen kendi proton çekirdeği etrafındaki yörüngede bulunan bir elektrondan oluşur. Yine de kuantum mekaniksel kurallar bize kuantum mekaniksel yörüngenin çekirdek etrafında yalnızca tek bir klasik yörünge içermediğini fakat temelde bu tür pek çoğuna ilişkin bir kuantum üst üste binmesi olduğunu söyler. Bu üst üste binmiş "kuantum yörüngeleri" Schrödinger denkleminin, temelde klasik durumdakiyle aynı fakat §§21.2, 3'ün (ve gerektiği yerde §23.8'in) kuralları uyarınca "kanonik olarak kuantize olmuş" bir Hamiltonla birlikte durağan çözümleri olacaktır. Açısal momentuma ilişkin bir öz durum olmak üzere, açısal bağımsızlıkları içindeki küresel harmonikler olan dalga fonksiyonlarını buluruz (§22.11). Genellikle, E enerji öz değeri ve (uygun olursa m'yle birlikte) j açısal momentum öz değerini çeşitli durumları işaretleyen kuantum sayıları biçiminde kullanabiliriz. Hidrojen atomu durumunda (elektron ve protonun spinlerini göz ardı eder ve Hamiltonın görelilikçi olmayan bir biçimini alırsak), E enerji öz değerinin j toplam açısal momentum öz değerince tanımlanmakta olduğunu görürüz fakat raslantı eseri j, E tarafından tanımlanmaz. Hidrojen atomuna (ve daha karışık atomlara) ilişkin daha tam bir kuramda E'nin genellikle j'yi belirlediğini görürüz, böylece farklı tüm durumlar aslında yalnızca enerji öz değeri tarafından nitelenir.

Heisenberg, Schrödinger ve Dirac'ın çok daha isabetli kuantum mekaniğinden bir on yıldan daha fazla süre önce 1913'te ortaya konan orijinal

[48] §22.4'ün Heisenberg tablosundaki $\eta = (2m\hbar\omega)^{-1/2}(p + imq)$ nicelikleri §26.2'nin yaratma işlemcileri rolünü oynar.



Şekil 22.19 Yörüngede dönen elektronların ilk olarak, ters kare elektrostatik etkileşim yasası uyarınca, klasik Kepler–Newton eliptik yörüngelerine sahip biçimde görüldüğü fakat enerji ve açısal momentumları, yörüngesel açısal momentumun ħ'nin bir tamsayı katı olmasına ilişkin "kuantum koşulu" tarafından sınırlandırılan "Bohr atomu". Fikir en başarılı biçimde hidrojenin tek elektronuna ait çembersel yörüngelere uygulanır.

Bohr atom kuramında hidrojenin izin verilen açısal momentum ve enerji değerleri, yörüngeler sanki, çekirdek ve yörüngede dolanan elektron arasındaki elektrostatik etkileşime ilişkin ters kare yasasınca verilen klasik Kepler–Newton eliptik yörüngeleriymiş gibi fakat elektronun yörüngesel açısal momentumunun ħ'nin bir integral katı olmasına ilişkin "kuantum koşuluyla" birlikte hesaplanır. Böylesi "kuantize olmuş yörüngeler" bazen *orbitaller* olarak anılır; *bkz.* Şekil 22.19. Bu işlem dikkat çekici biçimde iyi işlemiş[49] fakat daha sonra gelen kuantum mekaniğinin, kendileri çok daha büyük bir genellik ve tamlığa yönlendirmek üzere, sunduğu kuramsal alt destekler tarafından desteksiz bırakılmıştır. Daha karışık atomlar, basit moleküller, görelilikçi etkiler, elektron spini ve nükleer spinin varlığı, vb tümü, kesin matematiksel uygulamalar yerine yaklaşıklık tahmini teknikleri ve sayısal hesaplamaların beklenir olmasına rağmen kuantum formalizmince üstte özetlenen fikirler kullanılarak ele alınabilir.

Elektrostatiğin üstteki kullanımı da bir yaklaşıklık tahminidir ve elektronların yayınımı/soğurumu yoluyla durağan bir durumdan bir başkasına geçişe izin verilmek zorundadır. Bunlar Maxwell kuramını, kesin konuşmak gerekirse (26. bölümde özetlenecek olan) *kuantum alan kuramının* formalizmine gerek duyan kuantize biçimi halinde gerektirir. Tam kesinlik için Dirac'ın 24. bölümdeki görelilikçi elektronuna da gerek duyulur. *Taban durumu* olarak adlandırılan en düşük enerjili öz durumdaki bir atom (çevresel etkilerden tamamen yalıtık olduğu varsayılarak) o durumda kalacaktır fakat daha enerjili, *uyarılmış durum* olarak adlandırılan bir durumdaysa onun bir ya da daha çok foton yayınımıyla taban durumuna düşmesine ilişkin sonlu bir olasılık bulunması olasıdır.[50] Bu ne-

[49] Özellikle, hidrojenin spektral çizgi frekanslarına ilişkin daha önce anlaşılmaz olan Balmer denklemidenklemini sağladı: $\nu = R(N^{-2} - M^{-2})$; R, Rydberg–Ritz sabiti olarak bilinen bir sabittir ve M ve N tamsayılar olmak üzere $M > N > 0$'dır.

[50] Korunum yasalarından kaynaklanıp bu geçişlerin bazılarını yasaklayan "seçim kuralları" bulunabilir.

denle, serbest atom ya da moleküllerin taban durumunda ya da buna yakın durumda bulunması beklenir. Bir atom ya da molekül bir durumdan bir diğerine düştüğünde yayılan tekil bir fotonun ν *frekansı* iki durum arasındaki E enerji *farkı* tarafından Planck'ın $E = 2\pi\hbar\nu$'si (*bkz.* § 21.4) ve enerji korunumu yoluyla sabitlenir.

Açıklaması uzun erimli bilimsel bir bilmeceye dönmüş olan böylesi frekanslar *spektral çizgiler*de uzun süre gözlendi. Bu incelenmiş spektral çizgi örüntüsündeki olağanüstü bilgi zenginliği kuantum kuramı tarafından üstteki biçimde açıklandı. Bu, 20. yüzyıl fiziğinin en yüce zaferlerinden birini sundu! Klasik fiziğe ilişkin (pozitif ve negatif yükler arasındaki Coulomb ters kare etkileşim yasası ve ivmelenen elektronların elektromanyetik enerji yayınımını nasıl yapmak zorunda olduğunu söyleyen Maxwell denklemlerini de içeren) beklentiler daha önce, yörüngede dolanan elektronların *tekil* bir durum vermek üzere kısa süre içinde sarmal bir hareketle felaketle sonuçlanacak biçimde çekirdeğe gitmek zorunda olduğuna ilişkin belirgin bir öngörü sunmuştu. Bu sonuç gözlenen gerçeklerle açık bir çelişki içindeydi. Kuantum mekaniği yalnızca bu paradoksu ortadan kaldırmakla kalmadı, aynı zamanda bilimin adli tıp biliminden nükleer fizik ve kozmolojiye kadar sıralanan pek çok alanında olağanüstü güçlü bir araç sunan spektral çizgilere ilişkin ayrıntılı bir kuram sağladı.

Dikkate değer önemde son bir genel yorum olarak, j ve m açısal momentumu ya da harmonik osilatöre ilişkin enerji öz durumları ya da hidrojen atomu, vb gibi *ayrık* kuantum sayılarının varlığının sonuç olarak bir uzaya ilişkin *tıkızlık*tan kaynaklandığı belirtilebilir.[51] Açısal momentum durumunda bu, kendisine §22.11'in harmonik analizinin uygulandığı S^2 olan *uzamsal yönler küresi*nin tıkızlığından gelir. Tıkızlık (ya da periyodiklik) benzeri bir şey olmaksızın yalnızca, k öz değerinin sınırlanmadığı $\nabla^2\Phi = -k\Phi$ benzeri denklem çözümlerine sahip olurduk. Bu tür tıkızlık *yokluğu*nda kuantum mekaniğine ilişkin genel formalizmin, konuyu baştan başlatan ve "kuantum" ismi orijinal olarak kendisinden kaynaklanan çarpıcı *ayrıklığı* sunmaması ironiktir!

[51] Not 22.44'le karşılaştırın.

23

DOLANIK KUANTUM DÜNYASI

23.1 Çok parçacıklı sistemlerin kuantum mekaniği

Önceki iki bölümde spinli ya da spinsiz tekil kuantum parçacıklarının davranışlarının nasıl gizemli olduğunu ve bu davranışla başa çıkmak için nasıl tuhaf ve harika bir matematiksel formalizmin geliştiğini gördük. Formalizmimiz bize tekil parçacıklar ya da diğer yalıtık kavramların kuantum davranışlarını açıkladığından, onun ayrıca, belki birbiriyle çeşitli şekillerde etkileşim içinde olan birçok ayrı parçacık içeren sistemlerin nasıl açıklandığını da anlatmış olmasını beklemek anlamsız olmaz. Bu bir anlamda, §21.2'nin genel formalizmi bunun için yeterince geniş olduğundan bir noktaya kadar doğrudur fakat bir sistemde birden fazla parçacık bulunduğunda yeni bazı belirgin özellikler ortaya çıkar. Temelde yatan yeni nicelik, kendisi aracılığıyla birden fazla parçacıklı bir sistemin yine de tek bir holistik birim gibi ele alınmak zorunda olduğu *kuantum dolanıklığı* olgusudur. Bu olgunun farklı açıklamaları bize kuantum davranışıyla ilgili şimdiye kadar karşılaştığımızdan daha fazla gizem sunar. Dahası özdeş olan parçacıklar birbirleriyle, bunun parçacık doğasına bağlı olarak oldukça ayrık iki şekilde ortaya çıkabildiğini bulacak olsak da, her zaman *otomatik olarak* karışır.

Önceki iki bölümde bir kuantum sisteminin matematiğine ilişkin oluşturulan şeye dönelim. Bize kuantum durum vektörünün evrimiyle ilgili Schrödinger denklemini sunan kuantum Hamilton yaklaşımı, olasılıkla etkileşen, olasılıkla spin halindeki çok parçacık söz konusu olduğunda da tıpkı spinsiz tek bir parçacık durumundaki gibi hâlâ geçerlidir. Tüm gereksinimimiz bu özelliklerin hepsini birleştirmek üzere uygun bir Hamiltondır. Her parçacık için ayrı bir dalga fonksiyonuna sahip değiliz; daha çok, tüm sistemi açıklayan *bir* durum vektörüne sahibiz. Bir konum uzayı gösteriminde bu tek durum vektörü hâlâ bir Ψ dalga fonksiyonu olarak düşünülebilir fakat o *tüm* parçacıkların tüm konum koordinatlarına ilişkin bir fonksiyon olur; öyleyse o gerçekten parçacıklar sisteminin *düzen-*

leme uzayı üzerindeki bir fonksiyondur (*bkz.* §12.1) ve ayrıca spin durumlarını işaretlemek üzere bazı ayrık parametrelere bağlı olabilir (*örn.* spin halindeki bir parçacığı tanımlamak üzere §22.8'deki gibi bir $\Psi_{AB\ldots F}$ 2–spinör tanımlamasını kullanırsak böylece "ayrık parametreler" farklı tekil bileşenleri işaretliyor olur.) Schrödinger denklemi bize Ψ'nin zaman içinde nasıl evrildiğini söyleyecektir, öyleyse Ψ'nin ayrıca t zaman değişkenine de bağlı olması gerekecektir.

Standart kuantum kuramına ilişkin dikkate değer bir özellik, çok parçacıklı bir sistemle ilgili olarak, kuantum sistemi içinde içerilmiş olan tekil parçacıkların her biri kendi bağımsız konum koordinatları kümesine sahipken, yalnızca bir adet zaman koordinatının olmasıdır. Görelilikçi olmayan kuantum mekaniğini "daha tam" bir *görelilikçi* kurama yapılan bir tür sınırlayıcı yaklaşıklık tahmini olarak düşündüğümüzde bu durum ona ilişkin ilginç bir özellik olur. Çünkü, görelilikçi bir düzende, uzayı ele alış biçimimiz esasen zamanı da ele almamız gereken biçimdir. Her parçacık kendi uzay koordinatına sahip olduğundan kendi zaman koordinatına da sahip olmalıdır. Bu, olağan kuantum mekaniğinin çalışma biçimi değildir. Tüm parçacıklar için tek bir zaman mevcuttur.

Fiziği olağan "görelilikçi olmayan" bir biçimde düşündüğümüzde aslında bu, görelilikçi olmayan fizikte zaman dışsal ve mutlak olduğundan, evrenin herhangi bir zamandaki belirli bileşiminden bağımsız olarak ardalanda basitçe "aktığı"ndan, akla yatkın görülebilir. Bununla birlikte göreliliğin sunumundan böylesi bir tablonun yalnızca bir yaklaşıklık tahmini olabileceğini biliriz. Bir gözlemci için "zaman"ın ne olduğu bir diğeri için uzay ve zamanın bir karışımıdır ve bu karşılıklıdır. Olağan kuantum kuramı, bireysel olarak her parçacığın kendi uzay koordinatını taşıma zorunluluğunu talep eder. Buradan hareketle uygun biçimdeki bir görelilikçi kuantum kuramında her parçacığın bireysel olarak ayrıca kendi zaman koordinatını da taşıması gerekir. Aslında bu bakış açısı 1920'lerin sonlarından bu yana zaman zaman çeşitli yazarlar tarafından benimsenmiştir[1] fakat tam gelişmiş görelilikçi bir kuram haline gelmiş görünmemektedir. Her parçacığın kendi ayrı zamanına sahip olmasına olanak sağlamaktaki temel bir zorluk, bu durumda her parçacığın ayrı bir zaman boyutuna giden kendine ait neşeli yola girer görünmesi ve böylece bizi gerçekliğe geri getirecek daha fazla bileşene gerek duyulmasıdır.

§26.6'da görelilikçi kuantum kuramına ilişkin, Hamilton formalizmi yerine görelilikçi bir Lagrange denklemine dayanan ve "tek zaman/çok uzay" sorununun alt edildiği "yol integral" yaklaşımını sunacağım; bunun-

[1] *Bkz.* Eddington, 1929b; Mott, 1929; Dirac, 1932.

la birlikte daha sonra göreceğimiz üzere, ne tür (bilinen) işlem kullanılırsa kullanılsın her zaman görüldüğü gibi ciddi yeni sorunlar devreye girer. Dahası kısa süre içinde olağan Schrödinger denkleminin kendisinin de "gerçekliğe geri dönme" zorluklarından bağışık olmadığını göreceğiz. Bana göre Schrödinger yaklaşımına ilişkin bu basit uzayzaman asimetrisi şeylere ilişkin kuantum tablomuzda hâlâ derin bir şeyi gizlemektedir fakat şu anda bu bizi ilgilendirmemeli. Şimdilik bu konuları görmezden geleceğim ve şeyleri yalnızca, evrensel bir dış zamanın uygulanır olarak değerlendirilebildiği görelilikçi olmayan kuantum kuramı bakış açısıyla sunacağım. Bununla birlikte görelilik konusu ortadan kaybolmayacak ve bu bölümün sonunda, §23.10'da ona yeniden dönmeye gerek duyacağız.

Öyleyse çok parçacıklı sistemleri görelilikçi olmayan standart Schrödinger tablosu uyarınca nasıl ele almalıyız? §21.2'de açıklandığı üzere içinde *tüm* momentum değişkenlerinin sistemdeki tüm parçacıklar için görünmek zorunda olduğu tek bir Hamiltona sahip olacağız. Bu momentumların her birinin yeri, konum uzay gösterimindeki (Schrödinger) kuantizasyon reçetesinde, o belirli parçacığın ilgili konum koordinatıyla ilgili olan bir kısmi türev alma işlemcisi tarafından değiştirilir. Tüm bu işlemciler bir şey üzerinde etkimek zorundadır ve yorumlanmalarına ilişkin uygunluk adına hepsi aynı şey üzerine etkimek zorundadır. Bu dalga fonksiyonudur. Üstte belirtildiği üzere aslında tüm sistemle ilgili olarak *bir* Ψ dalga fonksiyonuna sahip olmak zorundayız ve bu dalga fonksiyonu aslında *tüm* ayrı parçacıkların farklı konum koordinatlarına ilişkin bir fonksiyon olmak zorundadır.

23.2 Çok parçacıklı durum uzayının büyüklüğü

Kulağa yeterince zararsız geliyor fakat aslında öyle mi? Belirgin biçimde basit olan bu son gerekliliğe ilişkin iriliği hazmetmek üzere bir mola verelim. Durum, her parçacığın kendi ayrı dalga fonksiyonuna sahip olması olsaydı, n adet skaler (diğer bir deyişle spin yapmayan) parçacıkla ilgili olarak n adet farklı karmaşık konum fonksiyonuna sahip olmamız gerekirdi. Bu, n küçük parçacıkla ilgili görsel hayal gücümüzün bir miktar esnetilmesi olsa da belki tam da başa çıkabileceğimiz bir şeydir. (Bu değerlendirmelerde zamanı göz ardı ediyorum; her şeyin tam olarak bir anda olduğunu kabul edin.) Görselleştirme amaçlarıyla ilgili olarak, n farklı bileşene sahip, her bileşenin ayrı bir "alan"ı tanımlar biçimde düşünülebildiği uzaydaki bir *alan*ınkinden o kadar da farklı olmayan bir tabloya sahip olabiliriz. (Böylesi ayrı her alan tekil bir parçacığın dalga fonksiyo-

nunu gösterebilir.) Gerçel bileşenlerden söz ediyorsak belki de bunu $2n$ bileşen olarak ele almalıyız çünkü dalga fonksiyonları karmaşıktır. Elektromanyetik bir alan sonuç olarak gerçel 6 bileşene, diğer bir deyişle (üç karmaşık skaler dalga fonksiyonuna benzer) 3 değişkenli 6 fonksiyona sahiptir ve elektrik ya da manyetik vektörlerle ilgili bir alan imgelemde o kadar da korkunç bir zorlama değildir!

Karmaşık bir skaler alandaki, örneğin 3–uzaydaki skaler bir parçacığa ilişkin dalga fonksiyonuyla ilgili "serbestliği" nasıl hesaba katmalıyız? Bu tür olası farklı alan "sayı"sı nedir? §16.7'deki notasyon uyarınca $\infty^{a\infty^b}$ ifadesinin b gerçel boyuttaki bir uzaydaki a gerçel bileşenli, serbestçe seçilmiş (pürüzsüz) bir alan için olanaklı olan bir serbestliği gösterdiğini anımsayın. Böylece, karmaşık bir skaler alan için, serbestlik $\infty^{2\infty^3}$ olacak şekilde $a = 2$ olur (çünkü karmaşık bir sayı iki gerçel sayı sayılır). Bu, alanı yalnızca bir zamanda, diğer bir deyişle t'yi sabit kabul etmektir, böylece ($b = 4$ uzayzaman değerinden daha çok) $b = 3$ kabul ederek olağan 3–uzayı ele alırız. Uzayzamanı da ele alabiliriz fakat o durumda serbestliği kısıtlayan alan denklemlerine sahip oluruz. Dalga fonksiyonu durumunda bu kısıtlama, serbestliği başlangıç verisi olarak bir başlangıç 3–uzayı üzerinde özgürce belirtilebilen şeye dek indirgeyen Schrödinger denklemidir. Böylece elimizde alandaki serbestlik olarak hâlâ $\infty^{2\infty^3}$ bulunur.

Raslantısal bir değerlendirme olarak kaygı duyacak herhangi bir kaynak (yük) olmaksızın serbest bir Maxwell alanı durumunu inceleyebiliriz. Burada, olağan 3–uzayda 6 gerçel bileşene sahibiz, böylece alanın yalnızca sabit bir t'de olduğunu kabul eder ve Maxwell denklemlerini göz ardı edersek $\infty^{6\infty^3}$ serbestliğini elde ederiz. Bununla birlikte Maxwell denklemleri herhangi başlangıç verisi olan 3–uzay üzerinde iki kısıtlamanın geçerli olma zorunluluğunu ima eder: elektrik ve manyetik alan vektörleriyle ilgili ıraksamanın yok olması.[23.1] Bu, başlangıç verisi 3–uzay üzerindeki serbest bileşenlerin etkin sayısını 2 azaltır, böylece serbestlik gerçekte $\infty^{4\infty^3}$ olur.

Şimdi n skaler parçacığa ilişkin kuantum mekaniksel açıklamayı ele alalım. Açıklama yalnızca n farklı dalga fonksiyonu olsaydı serbestlik $\infty^{2n\infty^3}$ olurdu çünkü bu, 3–uzaydaki nokta başına n karmaşık sayı seçmekteki serbestliktir. Bununla birlikte n skaler parçacığı açıklayan gerçek bir kuantum dalga fonksiyonu durumunda $3n$ gerçel değişkenli bir adet karmaşık fonksiyona sahip oluruz. Bu, $3n$ boyutlu bir uzaydaki karmaşık bir

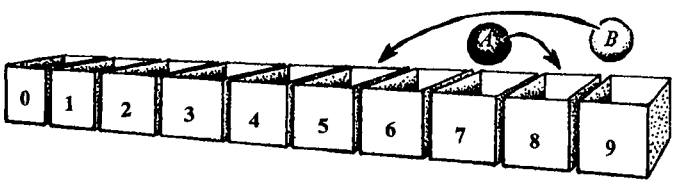
[23.1] Bu yok olmayı açıklayabilir misiniz? §19.3'te açıklanmış olan 4–boyutlu "ıraksaklık" kavramını anımsayın; burada 3–uzay versiyonuna gerek duyarız. *İpucu*: *Bkz.* alıştırma [19.2].

skaler alana benzer, böylece serbestlik üstteki yerine muazzam biçimde daha büyük olan $\infty^{2\infty^{2n}}$ olur.

Bu artışın devasa büyüklüğünü değerlendirmek, her şey tüm bu ∞'larda gizlendiğinde pek de kolay olmasa gerek. Öyleyse kendi içinde yalnızca 10 noktaya sahip "oyuncak" bir evreni ele almama izin verin. Bu noktaları $\mathbf{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}$ biçiminde işaretleyebiliriz. Bu evrendeki skaler bir parçacığa ilişkin dalga fonksiyonu bu noktaların her birinde bulunan karmaşık bir sayıdan oluşur, diğer bir deyişle $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_9$. Tüm bu dalga fonksiyonlarına ilişkin uzay 10–karmaşık–boyutlu (20–gerçel–boyutlu) $\mathbf{H}^{10}$ Hilbert uzayı olur. Dalga fonksiyonunu, bu z'lere ilişkin modüllerin kareleri toplamının bire eşit olacağı şekilde normalleştirirsek böylece $|z_6|^2$, parçacığı $\mathbf{6}$'da bulmaya ilişkin bir konum ölçümü olasılığını gösterir ve böyle devam eder.

Bu gerçekten saçma değildir. Gerçek fiziki durumlarda aslında 10 kutudan oluşan bir diziye, bu kutulardan birinde olabilecek bir elektronla birlikte sahip olunabilir. *Bkz.* Şekil 23.1. Deney yapan kimseler *kuantum noktaları* olarak adlandırılan bu doğaya sahip şeyleri oluşturabilirler ve bunlar ele almak üzere olduğum türdeki dalga fonksiyonları uzayının boyutlarının büyüklüğünden yararlanan *kuantum bilgisayarları* yapmaya ilişkin kuramsal olasılıkla ilişkilidir.

Şu halde evrenimizde *iki* parçacık bulunduğunu varsayın. Her ikisinin de aynı türdeki parçacık olmaması, daha sonra geleceğim bir sebep nedeniyle daha iyidir. Öyleyse bunlardan birine A diğerineyse B parçacığı diyelim. Her bir parçacık 10 farklı yerde bulunabilir, öyleyse bu çift için olası (aynı kutuda olmalarına da izin vererek) yüz farklı yer mevcuttur. Şu halde dalga fonksiyonunu tanımlamak üzere, karmaşık sayılardan her biri bir yerleştirmeye atanmak üzere 100 farklı karmaşık sayıya, $z_{00}, z_{01}, \ldots, z_{09}, z_{10}, z_{11}, \ldots, z_{19}, z_{20}, \ldots, z_{99}$, gerek duyarız. Tüm bu z'lerin modül kareleri toplamı bir olacak biçimde normalleştirirsek böylece örneğin $|z_{38}|^2$ A parçacığının $\mathbf{3}$ ve B parçacığının $\mathbf{8}$'de olduğunu bulmaya ilişkin



Şekil 23.1 Parçacıklarla ilgili olarak yalnızca 10 olası konuma sahip, burada 10 kutuyla gösterilen, bir "oyuncak evren" hayal ederiz. Her biri, birbirinden bağımsız biçimde herhangi bir kutuyu doldurabilecek, ayırt edilebilir A ve B parçacıkları gösterilmektedir.

olasılığı gösterir. Artık $\mathbf{H}^{100}$'le ilgileniyoruz. Farklı *üç* parçacığa sahip olsaydık bu durumda, dalga fonksiyonu 1000 adet karmaşık sayıdan, $z_{000}, z_{001}, \ldots, z_{999}$, oluşurdu ve durum uzayımız $\mathbf{H}^{1000}$ olurdu. Kurallar yalnızca bireysel üç dalga fonksiyonuna sahip olunacak biçimde olsaydı, durum uzayı yalnızca $\mathbf{H}^{30}$ olmuş olurdu. Farklı *dört* parçacık için $\mathbf{H}^{10000}$'e sahipken bireysel dört dalga fonksiyonu için yalnızca $\mathbf{H}^{40}$'a sahibiz ve bu durum böylece devam eder.

Üstte kullandığım "$\infty^{a\infty^{3n}}$" notasyonuna geri dönerek, üst "∞^3"ün Öklitçi $\mathbb{E}^3$ 3–uzayındaki "nokta sayısı"na karşılık geldiğini belirtelim. O sayının yeri artık *oyuncak* evrenimizdeki gerçek nokta sayısı olan 10'la değiştirilir, ve böylece $\infty^{a\infty^{3n}}$,($(a\times 10^n)$–gerçel–boyutlu uzaydaki "nokta sayısı"nı gösteren) $\infty^{a\infty^{10n}}$ haline gelir. Böylece, $\mathbb{E}^3$'teki n–parçacıklı bir skaler dalga fonksiyonunda bulunan serbestlik için $\infty^{2\infty^{3n}}$ yerine artık oyuncak evrenimizle ilgili bir n–parçacıklı dalga fonksiyonundaki serbestlik için $\infty^{2\times 10^n}$'ye sahibiz. n adet ayrı 1–parçacıklı karmaşık dalga fonksiyonuyla ilgili olarak $\mathbf{H}^{10n}$'yle karşılaştırıldığında, oyuncak evrenimizle ilgili n–parçacıklı dalga fonksiyonuyla ilgili karmaşık Hilbert uzayı artık $\mathbf{H}^{10^n}$'dir. Bu nedenle n–parçacıklı dalga fonksiyonumuz n adet ayrı dalga fonksiyonuna ilişkin yalnızca $20n$–boyutlu bir uzay yerine 2×10^n–boyutlu bir uzay (bu 10^n–karmaşık–boyutlu Hilbert uzayı) üzerinde tanımlanır. Örneğin yalnızca 8 parçacık için bu, 160 yerine 200000000 boyutludur.

23.3 Kuantum dolanıklığı; Bell eşitsizlikleri

Tüm bu fazladan bilgi ne işe yarıyor? O, parçacıklar arasındaki "dolanıklık" ilişkileri olarak bilinen şeyi ifade eder. Bunları nasıl anlamalıyız? İlk olarak Schrödinger tarafından (1935b) görünür hale getirilen parçacıklar arası dolanıklıklar, son derece kafa karıştırıcı fakat *Einstein–Podolski–Rosen* (EPR) etkileri olarak bilinen gerçekten gözlemlenmiş olgulara yol açan şeylerdir.[2] Bununla birlikte bunlar kuantum dünyasının, deneysel olarak ikna edici bir biçimde gösterilmeleri oldukça zor olan epeyce incelikli özellikleridir. Çok parçacıklı sistemlerle ilgili olarak, dalga fonksiyonundaki "bilgi"nin neredeyse *tümü* bu tür konularla ilgilendiğinde böylesine özel ve görüşten gizlenmiş bir şeye dönmek zorunda görünmemiz kayda değerdir! Bu, kısa süre içinde (§23.6) yeniden döneceğim bir bilmecedir. Bana göre bu bilmece bize günümüz kuantum formalizminin ne tür yeni yönlerde hareket etmesi gerektiğine ilişkin bir şeyler söylemeye çalı-

[2] *Bkz.* Einstein vd., 1935; Schrödinger, 1935b; ayrıca Afriat, 1999.

şıyor. Yine de öyle olsa bile, bize kesinlikle *kuantum hesaplamasının*[3], bu dolanıklık ilişkilerinde gizlenmiş bulunan devasa "bilgi" kaynaklarından faydalanmayı amaçlayan yürürlükteki oldukça etkin bir araştırma konusu, gücüne ilişkin bir şeyler söylüyor.

Öyleyse kuantum dolanıklığı nedir? EPR etkileri nedir? Yalnızca spin durumları üzerine yoğunlaştığımızda yapabileceğimiz sonlu boyutlu bir durumu ele almak en açığı olacaktır. En basit EPR durumu David Bohm tarafından (1951) ele alınmış olandır. Bunda, birlikte birleşik bir 0 spin durumunda başlayıp birbirinden sağ ve sola, aralarında büyük bir uzaklık bulunan sırasıyla L ve R algılayıcılarına doğru uzaklaşan bir çift $\frac{1}{2}$ spinli parçacığı, diyelim ki P_L parçacığı ve P_R parçacığını göz önüne alırız (*bkz.* Şekil 23.2). Her bir algılayıcının, yalnızca iki parçacığın birbirinden yeterince ayrılmış olmasına bağlı olarak karar verilen bir yönde yaklaşan parçacığın spinini ölçebildiğini varsayalım. Sorun, kuantum mekaniğinin beklentilerini, birbirlerinden ayrıldıktan sonra her biri bir diğeriyle iletişim kurmakta yetersiz olan parçacıkların bağlantılı olmayan bağımsız klasik benzeri kavramlar olduğu bir model kullanarak yeniden üretmenin olası olup olmadığını görmektir.

Kuzey İrlandalı fizikçi John S. Bell'e atfedilen kayda değer bir teorem nedeniyle kuantum kuramının tahminlerini bu biçimde yeniden üretmenin olası olmadığı açığa çıkar. Bell, kuantum mekaniğinin beklentilerince ihlal edilen, yine de iki parçacığın fiziki olarak ayrı hale geldikten sonra bağımsız olarak davrandığı herhangi bir model tarafından zorunlu biçimde sağlanan, fiziki olarak ayrı iki ölçümün sonuçlarına ilişkin bağlı olasılıkları ilgilendiren eşitsizlikler[4] türetti. Böylece Bell eşitsizlik ihlali, kendisi uyarınca parçacıkların bağlantısız ve bağımsız gerçek şey ler olarak ele alındığı herhangi bir model tarafından açıklanamayan, esasen kuantum kuramsal etkilerin, bunlar fiziki olarak ayrılmış parçacıklar arasındaki kuantum *dolanıklıklarına* ilişkin etkiler olmak üzere, varlığını gösterdi.

Yazında bu tür Bell eşitsizlik ihlaline ilişkin belirli pek çok çarpıcı örnek bulunur.[5] Bunlardan "olasılıklar olmaksızın Bell eşitsizlikleri"[6] olarak

---

[3] Bununla birlikte ayrıntıda kuantum hesaplamayla ilgili bize söylediği şey incelikli bir konudur; *bkz.* Jozsa, 1998.

[4] Bu eşitsizliğe ilişkin belki de en düzenli ve en geniş ölçüde alıntılama yapılan versiyon Clauser vd., 1969'dakidir. O, $E(x,y)$, EPR çiftine ilişkin bir bileşenle ilgili A, C ve diğeriyle ilgili B, D alternatif ölçümlerinin sonuçları arasındaki uyuma ait beklenti değeri olmak üzere, tam uyum için $E = 1$ ve tam uyumsuzluk için $E = -1$ olur, $|E(A,B) - E(A,D)| + |E(C,B) + E(C,D)| \leq 2$ biçimini alır.

[5] En hayret verici olanlarından biri Tittel vd., 1998'de bulunur.

[6] *Bkz.* Stapp, 1971, 1979; Hardy, 1992, 1993.

Şekil 23.2 EPR–Bohm düşünce deneyi. Bir çift $\frac{1}{2}$ spinli P_L ve P_R parçacığı başlangıçta birleşik bir 0 spin durumundadır ve sonra ters yönlerde sol ve sağa, sırasıyla adamakıllı ayrı L ve R algılayıcılarına doğru yolculuk ederler. Her algılayıcı yaklaşan parçacığın spinini fakat yalnızca parçacıklar tam uçuşa geçtikten sonra karar verilen bir yönde ölçmek üzere ayarlanmıştır. Bell teoremi bize, içinde ikisinin ayrılmaya başladıktan sonra iletişim kuramayan klasik benzeri bağımsız nesneler olarak davranabildikleri bir modele sahip kuantum mekaniğine ilişkin beklentileri yeniden üretmenin hiçbir yolu olmadığını söyler.

anılan bazıları yalnızca evet/hayır meseleleri içermeleri anlamında özellikle dikkat çekicidir ve olasılıklar hakkında kaygılanmamız gerekmez ya da daha çok yalnızca aşırı *belirli* 0 ("hiç") ve 1 ("hep") olasılıkları hakkında kaygılanırız. Burada, kuantum parçacıklarıyla tekil parçacıklar arasındaki Bell eşitsizliği türündeki çelişkinin yalnızca iki açık versiyonunu ortaya koyacağım. Bunların ikisi de ayrı ayrı sol taraftaki bir L algılayıcısıyla sağ taraftaki bir diğer R algılayıcısına doğru giden bir çift $\frac{1}{2}$–spinli parçacık içerir. İlki Henry Stapp'e (1971), (1979) atfedilen bir argümanı izleyen ve içerisindeki gerçek olasılık değerlerini araştırmamız gereken, üstte değinildiği üzere EPR'yle ilgili orijinal Bohm versiyonunun dolaysız bir örneğidir. Lucien Hardy'e (1992), (1993) atfedilen ikincisi "neredeyse" olasılıksız bir versiyondur fakat ona doğru hafifçe ek bir büküme sahiptir.

Bunları ayrıntılı biçimde sunmadan önce küçük bir (Dirac) notasyona daha gerek duyuyorum. Birbirinden bağımsız olarak kabul edilebilecek iki parçadan, $|\psi\rangle$ ve $|\phi\rangle$, iki parçadan oluşan bir kuantum sistemine sahip olduğumuzu düşünelim. Böylece kuantum sisteminin bu ikisinden oluşur biçimde değerlendirmek istersek bunu

$$|\psi\rangle|\phi\rangle$$

şeklinde yazarız. Bu hâlâ tekil bir durumdur ve bu gerçeği ifade eden $|\chi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle$ gibi bir eşitlik yazmak yasal olur. Burada işe koşulan çarpım türü cebirciler tarafından *tensör çarpımı* olarak adlandırılan şeydir ve bu $(z\,|\psi\rangle)|\phi\rangle = z(\,|\psi\rangle|\phi\rangle) = |\psi\rangle(z|\phi\rangle)$, $(|\theta\rangle + |\psi\rangle)|\phi\rangle = (|\theta\rangle|\phi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle$, $|\psi\rangle((|\theta\rangle + |\phi\rangle) = |\psi\rangle(|\theta\rangle + |\psi\rangle|\psi\rangle$ kurallarını sağlar. Matematiksel yazında tensör çarpım işlemi genellikle $\otimes$ ile gösterilir (ayrıca *bkz.* §13.7) ve böylece $|\psi\rangle|\phi\rangle$ çarpımı $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ ile gösterilebilir.

Her durumda, $\otimes$ sembolünü bu tür çarpımların ait olduğu (Hilbert) uzaylarıyla bağlantılı olarak kullanmak faydalıdır. Böylece $|\psi\rangle$, $\mathbf{H}^p$'ye ve

$|\phi\rangle$, $\mathbf{H}^q$'ya aitse bu durumda $|\psi\rangle|\phi\rangle$, $\mathbf{H}^p \otimes \mathbf{H}^q$'ya aittir. $\mathbf{H}^p \otimes \mathbf{H}^q$'nun boyutu kendi iki çarpanının boyutları çarpımıdır, böylece kurallara uygun olarak $\mathbf{H}^p \otimes \mathbf{H}^q = \mathbf{H}^{pq}$ yazabiliriz. Çarpımın ayrıca ∞ olduğunu kabul ettiğimiz koşulda p ve q'dan herhangi biri ya da ikisinin de ∞ olmasına izin veriyorum. $\mathbf{H}^p \otimes \mathbf{H}^q$'nun yalnızca çok küçük bir parçası ($p, q > 1$ varsayımıyla), $|\psi\rangle$, $\mathbf{H}^p$'ye ve $|\phi\rangle$, $\mathbf{H}^q$'ya ait olmak üzere, $|\psi\rangle|\phi\rangle$ biçimindeki elemanlardan oluşur. Bunlar *dolanmamış* durumlardır. $\mathbf{H}^p \otimes \mathbf{H}^q$'nun *genel* bir elemanı (olasılıkla, p ve q'nun her ikisi de sonsuzsa, sonsuz bir toplam ya da integral içeren) bu dolanmamış durumların çizgisel bir birleşimi olur.[7] Bununla birlikte dolanıklıkla ilgili kavram, $\mathbf{H}^{pq}$ Hilbert uzayımızın tümünün $\mathbf{H}^p \otimes \mathbf{H}^q$ biçimindeki bir şeye *özel olarak* bölünmesine bağlı olduğunu aklımızda tutmalıyız. (Genel bir $\mathbf{H}^{pq}$ Hilbert uzayının herhangi bir diğeri üzerinden bu tür hiçbir bölünmesi tercih edilmez. Cebirsel olarak, n'nin bileşik bir sayı olduğu her durumda, $\mathbf{H}^n$'yi bir tensör çarpımı biçiminde ifade etmenin her zaman pek çok yolu olacaktır.) "Dolanıklık" kavramıyla ilgilenilen durumlarda fiziki ilginin özel olarak bölünmesi, özellikle, EPR'nin tüm ilgilendiği şey olan, uzun bir mesafeyle ayrılmış "bireysel" parçacıkların bulunduğu durumda, makul biçimde açık bir şeydir.

Bu gibi işlemlerde bir soyut indis formülasyonu kullanmak bazen faydalıdır (*bkz.* §12.8). $|\psi\rangle$ ket vektörü soyut bir üst indisle birlikte ψ^α biçiminde ve ona ilişkin (karmaşık eşlenik) $\langle\psi|$ bra vektörü soyut bir alt indisle birlikte $\bar{\psi}_\alpha$ biçiminde yazılabilir. Tüm $\langle\psi|\phi\rangle$ parantezi $\bar{\psi}_\alpha\phi^\alpha$, ve bir $\langle\psi|\boldsymbol{Q}|\phi\rangle$ ifadesi $\bar{\psi}_\alpha Q^\alpha{}_\beta\phi^\beta$ olur. ψ^α'nın ϕ^β'yla $|\psi\rangle|\phi\rangle$ tensör çarpımıysa $\psi^\alpha\phi^\beta$ biçiminde yazılabilir. Dolanıklaştırılmamış durumlar her zaman bu biçimde ayrılır. Genel bir durumsa (olasılıkla dolanık), basit çe $\phi^{\alpha\beta}$ biçiminde bir işlemdir. Bu türdeki notasyonla ilgili belirli bir kullanımı bu bölümde daha sonra göreceğiz.

23.4 Bohm tipi EPR deneyleri

Şimdi yeniden EPR'ye ilişkin Bohm versiyonuna dönelim. Üzerinde bir ölçüm gerçekleştirilmeden hemen önceki başlangıç durumunu ele alın. Bir araya getirilen $\frac{1}{2}$-spinli ayrı iki parçacık 0 spini oluşturmak zorundadır. Bunun nedeni açısal momentumun korunmasıdır ve parçacıklar birleşik bir 0 spinli durumla yola çıkar. Öyleyse her bir parçacığın spini için taban durumlarına ilişkin toplam spinin sıfır olacağı bir birleşime gerek duyarız. Bu, 0 spininin

[7] Dolanıklıktaki bu tür konulara ilişkin genel bir tartışma için *bkz.* Nielsen ve Chuang, 2000.

$$|\Omega\rangle = |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$$

ifadesince verilen $|\Omega\rangle$ durumu tarafından gerçekleştirilir (durumlarımı normalleştirmekle ilgili hâlâ kaygılanmıyorum).[23.2], [23.3] Yazında, bu tür bir şeyin sıklıkla $|\uparrow \mathrm{L}\rangle|\downarrow \mathrm{R}\rangle - |\downarrow \mathrm{L}\rangle|\uparrow \mathrm{R}\rangle$ gibi bir biçimde, notasyonda hangi durumun sol taraftaki parçacıkla hangisinin sağ taraftakiyle ilgili olduğu belirgin hale getirilerek, yazıldığı görülür. Bana göre bu gerekli değildir çünkü (i) notasyon parçacığın konumu, momentumu ya da her neyse onu değil her durumda yalnızca dalga fonksiyonunun spin kısmını ayırıp seçer, böylece spinin yönü ilgilendiğimiz şey her neyse onu sabitler ve (ii) tensör çarpımları değişmeli olmadığı için çarpımın hangi "taraf"ının hangisi olduğunu açıkça anlaşılır biçimde söyleyebiliriz. Benim kabulüm, çarpımın sol tarafındaki teriminin sol taraftaki parçacığa, sağ tarafındaki terimininse sağ taraftaki parçacığa ait olduğu şeklindedir. Bunu kafa karıştırıcı bulan okuyucular, isterlerse L ve R'yi tartışma boyunca ketler içindeki eski durumlarına geri getirebilirler.

L'de yerelleşmiş $|\alpha\rangle$ ve R'de yerelleşmiş $|\beta\rangle$'yla birlikte $|\alpha\rangle|\beta\rangle$ biçiminde yeniden yazılamadığı için bu, dolanık bir duruma ilişkin açık bir örnektir.[23.4] Bu dolanık durumun ne gibi anlatımlara sahip olduğunu görmeye çalışalım. Şimdi, sol tarafta, L'de oturmakta olduğumu düşünecek ve sol taraftaki $\mathrm{P_L}$ parçacığının spinine ilişkin "yukarı" yönde, $\uparrow$, bir ölçüm gerçekleştireceğim ($\uparrow$ ise EVET; $\downarrow$ ise HAYIR). EVET yanıtı alırsam bu, $|\Omega\rangle$ durumunun tümünü $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$'a ve HAYIR yanıtı alırsam $(-)|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$'e yansıtır. Artık sonuç, standart U–evriminin bize artık $\mathrm{P_L}$'nin kendi L ölçüm aygıtımla umutsuz biçimde karıştırılmış olmasının olası olduğunu söylemesi dışında, dolanmamış olur. Açık biçimde ifade edilebilecek olan şey, EVET yanıtı aldığımda sağ taraftaki R algılayıcısında bulunan meslektaşım $|\downarrow\rangle$ spin durumuna sahip $\mathrm{P_R}$'yle karşılaşacakken, HAYIR yanıtını aldığımdaysa meslektaşımın $|\uparrow\rangle$'le karşılaşacak olmasıdır. $\mathrm{P_R}$ üzerinde art arda gerçekleştirilen bir "yukarı" ölçümüne bağlı olarak meslektaşım zorunlu olarak benimkinin tersi sonucu elde edecektir.

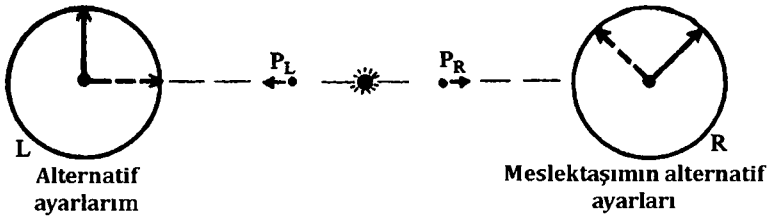
Tüm bunlarda, yukarı/aşağı seçimiyle ilgili özel bir şey söz konusu değildir; çünkü ölçmek üzere hangi yönü seçersem seçeyim, $\swarrow$ diyelim, meslektaşım aynı yönü seçtiğinde sonuç benimkinin tersi olacaktır. Bu, 0 spi-

---

[23.2] $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ normalleştirilirse, $|\Omega\rangle$, normalleştirilmek üzere hangi katsayıya gerek duyar? ($\||\alpha\rangle|\beta\rangle\| = \|\alpha\|\|\beta\|$ olduğunu varsayabilirsiniz.)

[23.3] Bunun niçin 0 spinine sahip olduğunu çabucak görebilir misiniz? *İpucu*: Bir yöntem, bu tür ters simetrik bir birleşimin esasen bir skaler olduğunu göstermek üzere indis notasyonunu, spin uzayının 2–boyutlu olduğunu akılda tutarak kullanmaktır.

[23.4] Neden olmasın? Yine de, $|\alpha\rangle$ ve $|\beta\rangle$ böylesine yerelleşmiş değilse, bunu yapmanın bir yolunu bulun.



Şekil 23.3 EPR–Bohm'un Stapp versiyonuna ilişkin kutuplanma düzenlemesi; Bell eşitsizliklerinin bir örneği. Başlangıçta iki taraftaki spin ölçümlerini katı şaftlı oklar tarafından verilen yönlerde olarak kabul ederiz fakat bir fikir değişikliğiyle herhangi biri ya da her ikisi birden kesik şaftlı oklar yönünde olacak biçimde döndürülebilir. Bağlı kuantum olasılıkları, tasarlanmış spin ölçümlerinin yönlerine ilişkin bir önbilgiye sahip olmayan ve iletişimsiz bağımsız varlıklar olarak davranan parçacık çiftlerine sahip herhangi bir klasik benzeri düzen tarafından modellenemez.

nine ilişkin dönel değişmezlik aracılığıyla açık olmalıdır fakat ↗ yönü ↙ yönünün tersi olmak üzere,

$$|\Omega\rangle \propto |\swarrow\rangle|\nearrow\rangle - |\nearrow\rangle|\swarrow\rangle$$

ifadesini doğrulamak üzere dolaysız bir cebir hesaplaması gerçekleşetirmek öğreticidir. (Not: $|\swarrow\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ ise bu durumda $|\nearrow\rangle \propto \bar{b}|\uparrow\rangle - \bar{a}|\downarrow\rangle$ olur.)[23.5]

Ayrıca tüm bunlardan, meslektaşım ve ben spini ölçmek üzere *farklı* yönler seçersek EE, EH, HE, HH (E EVET'in ve H HAYIR'ın kısaltması olmak üzere) bağlı olasılıklarının ne olduğu sonucuna da ulaşırız. ↖ ve ↗ arasındaki açı θ olmak üzere benim ↖ seçtiğimi ve meslektaşımınsa ↗ seçtiğini düşünün. Böylece, §22.9'da verilen (*bkz.* Şekil 22.11) olasılık değerinin kullanarak bağlı olasılıkların ("uyumlu" EE ya da HH ve "uyumsuz" EH ya da HY anlamına gelmek üzere)

$$\text{uyumlu: } \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta), \qquad \text{uyumsuz: } \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

olduğunu görürüz.

Şimdi Stapp'in örneğini ele alalım. Şeyler, bana ait aygıtın spini düşey olarak yukarıya doğru kabul edilen ↑ yönünde ya da (↑'ya dik) yatay bir yön olan → yönünde ölçmek üzere yönlendirilebileceği biçimde düzenlenir. Meslektaşımın aygıtı spini ↑ ve ↓ yönlerinin düzleminde her birine 45°'lik açıda bulunan ↗ yönünde ya da aynı düzlemde fakat ↑'e 45° ve →'a 135°'de bulunan ↖ yönünde ölçmek üzere yönlendirilir (Şekil 23.3). Ölçüm yönümün meslektaşımınkiyle 45°'lik bir açıda bulunmasına ilişkin üç ola-

[23.5] Parantez içindeki bu yorumu doğrulayın ve üstteki ifadeyle ilgili olarak, $|\Omega\rangle$ için hesaplamaya dayalı dolaysız bir doğrulama sunun. *İpucu*: *Bkz.* alıştırma [22.26].

sılık ve aralarındaki açının 135° olmasına ilişkin yalnızca bir olasılık söz konusudur. 45°'lik durumlarda uyumlu olmaya ilişkin %15'ten biraz daha az bir olasılık elde ederken 135°'lik için %85'in hemen üstünde bir olasılığa sahip oluruz.

Olası iki ölçümden hangisini gerçekleştirebileceğimle ilgili kararın verilmesinin, parçacıklar tam uçuş halinde olana dek gerekli olmamasına izin verelim ve aynısını meslektaşım için de kabul edelim. Pekâlâ, meslektaşımı Titan'a (Satürn'ün uydularından biri) koyalım ve parçacık kaynağını, ışık hızıyla bile, karar vermek üzere üç çeyrek saat gibi bir şeye sahip olabileceğimiz şekilde, ikimizin arasında bir yerlere yerleştirelim. *Bkz.* Şekil 23.4. Parçacıkların, meslektaşımla ikimizin, ölçüm aygıtlarımızı (bağımsızca) hangi biçimde yönlendireceğimizi "bilmeleri"nin hiçbir yolu yoktur.

Her birimiz görünüşte rasgele biçimde yönlendirilmiş parçacıkların bir dalgasını aldığımızda, benim ↑ seçtiğimi ve meslektaşımın ↗ seçtiğini düşünelim. Bunlar, her biri bir EPR–Bohm çiftinin üyesi olmak üzere, yol ortasındaki kaynaktan gönderilerek biri bana biri meslaktaşıma her seferinde bir kez gelir. Notlarımızı karşılaştırdığımızda ilgili sonuçlarımız arasında, üsttekiyle uyumlu biçimde yalnızca, %15'ten biraz daha az bir uyum bulunduğunu görürüz.

Parçacıklar, ölçüm aygıtlarımızı nasıl yönlendireceğimize ilişkin hiçbir başlangıç bilgisine sahip değilse ve iletişim kurmayan ayrı ayrı bireyler (klasik benzeri) olarak davranıyorsa, son dakikada aniden kararımı değiştirip → yönünü ölçseydim bunun, meslektaşımın gerçek ölçümlerinde herhangi bir değişiklik yapmaması gerekirdi. Böyle yapsaydım, şu anda elde ettiğim ölçümlerle meslektaşımın orijinal ölçümleri arasında hâlâ %15'lik bir uyum söz konusu olurdu çünkü yönler arasındaki açı hâlâ 45°'dir. Öte taraftan son dakika fikir değişikliğiyle ↗ yerine ↖ ölçümü yapanın *meslektaşım* olduğunu, benimse kararımı değiştirmediğimi düşünün. Bu durum-

Şekil 23.4 Dünya üzerinde konumlanan bir yazar kendisini, ardışık bir EPR parçacık çiftinin bir bileşeninin alıcısı olarak düşünür; diğeriyse Titan'daki bir meslektaş olmak üzere, parçacık kaynağı iki alıcıdan kabaca eşit uzaklıkta bulunur. Parçacıklar ışık hızıyla bile yolculuk etse, algılayıcı yönlendirmeleri üzerine karar vermek için yaklaşık 45 dakikalık bir zaman mevcut olur.

da meslektaşımın değişikliğinin de benzer biçimde benim orijinal ↑ ölçümlerimi etkilememesi gerekirdi. Yine, meslektaşımın yeni ↖ ölçümleri benim orijinal ↑ ölçümlerimle %15'in hemen altındaki oranda bir uyuma sahip olmak zorundadır.

Bununla birlikte *ikimizin de* yönlendirmelerimizi son dakikada, benim ölçümüm → ve meslektaşımın ölçümü ↖ olacak biçimde, değiştirmeye karar verdiğimizi düşünün. Artık aralarındaki açı 135° civarına geldi. Böylece kuantum mekaniğinin beklentileri bize, uyumun %85'ten daha fazla olması gerektiğini söyler. Bu, henüz ele alınmış olan algılayıcı yönlendirmelerine ilişkin olası her çiftle ilgili doğru bağlı olasılıkları sunan parçacık çiftleriyle tutarlılık içinde midir? İyisi mi bakalım. Parçacık çiftleri algılayıcı ayarlarına ilişkin olası dört olasılıktan herhangi biriyle karşılaşmak ve her durumda doğru kuantum mekaniksel olasılığı vermek üzere hazırlıklı olmak zorundadır. Bunların neler olduğunu anımsayalım. Değiştirilmiş → aygıt ayarıma ilişkin sonuçların, meslektaşımın orijinal ↗ ayarının sonuçlarıyla %15'ten fazla bir uyuma sahip olması beklenmez. Bunun, sırasıyla kendi orijinal ↑ ayarımla ve meslektaşımın değiştirilmiş ↖ ayarıyla %15'ten fazla bir uyuma sahip olmaması gerekir. Belirli bir parçacık çifti →,↖ durumunda uyum verecekse o, →,↗ ve ↑,↗ ve ↑,↖ durumlarının tümünde uyum*suz* olamaz. (Üç uyumsuzluk, uyum değil uyumsuzluk verir.) Öyleyse bu olası üç çiftin en azından birinde bir uyum bulunmak zorundadır. Bununla birlikte bu, olası her ayar çiftiyle ilgili durumların %15'inden daha azında ortaya çıkar. Bunlardan yalnızca üç adet mevcuttur, öyleyse bu, →,↖ durumuna zaman ayırdığımızda %15 + %15 + %15 = %45'ten fazla oranda bir uyuma izin vermez. (Gerçekte uyum yüzdesi bundan biraz daha düşüktür çünkü üç ayar çiftinin tümünde uyum bulunan durumu hesaba etkin biçimde üç kez kattım.) Yine de %45 hiç de %85'in yakınlarında değildir, öyleyse parçacık çiftlerine ilişkin "klasik benzeri" varsayımlarımızla apaçık bir çelişkiye sahibiz!

Bazıları bu argümanın "gerçekleşebilecekken gerçekleşmeyen" (filozofun "karşı olgusalları") kurgusal ölçümler biçiminde ifade edilmiş görünmesinden kaygı duyabilir fakat bu önemli değildir. Kilit konu, parçacıkların, kaynaktan ayrıldıktan sonra birbirinden bağımsız biçimde davrandığının ve onları ne tür algılayıcı ayar birleşimi karşılarsa karşılasın doğru bağlı kuantum olasılıklarını verdiğinin varsayılmış olmasıdır. Konu, parçacıkların kuantum mekaniğinin beklentilerini taklit etmek zorunda olmasıdır. Bunların, iki parçacık için bireysel olarak ayrı beklentilere ayrılamayacağını gördük. Parçacıkların, doğru kuantum mekaniksel yanıtları tutarlı biçimde sunabilmelerinin tek yolu, birbirine bir biçimde, tam olarak biri ya da diğeri gerçekten ölçülene dek "bağlanma"sıdır. Aralarındaki bu gizemi "bağlantı" kuantum dolanıklığıdır.

Elbette bu doğaya sahip hiçbir deney bu uzaklıklarla gerçekleştirilmedi. Yine de esasen benzer türdeki pek çok EPR tipi deney (genellikle $\frac{1}{2}$–spinli parçacıkların spin yönleri olmaksızın foton kutuplanması kullanılarak fakat ayrımlar önemli değil) aslında gerçekleştirildi. Kuantum mekaniğinin (sağ duyunun kilerden ziyade) beklentileri tutarlı biçimde aklandı! Bu doğadaki kuantum dolanıklıkları henüz dünya Satürn benzeri uzaklıklar üzerinden kesinlikle gözlemlenmemiş olsa da bazı güncel deneyler Bell eşitsizliği ihlallerini 15km'den fazla uzunluklar üzerinde doğruladı.[8]

23.5 Hardy'nin EPR örneği: neredeyse olasılık–serbest

Şimdi Lucien Hardy'nin güzel örneğine gelelim.[9] Meslektaşım ve ben spin ölçümleri yapmak üzere yine harekete hazırız. Ben seçimimi önceki gibi (düşey biçimde üst ve yatay olarak sağ yönlerinde) ↑ ve → seçimleri arasında yapıyorum fakat artık meslektaşım da benim seçimimden oldukça bağımsız biçimde ↑ ve → arasında seçim yapıyor. Kritik önemdeki yeni özellik parçacık çiftleri kaynağının artık onları birleşik bir 0 spin durumunda değil fakat belirli bir 1 spin durumunda yaymasıdır. Bu başlangıç durumunu, ↗ yönü dik ↑ ve → yönleri tarafından kapsanan çeyrek düzlemde yer almak ve yukarı doğru bir $\frac{4}{3}$ eğimine (böylece → ve ↗ arasındaki θ açısı $\cos\theta = \frac{3}{5}$'i sağlar) sahip olmak üzere, ve ←, → yönünün tersi olmak üzere, $|\leftarrow \nearrow\rangle$ Majorana tanımlamasına (§22.10, Şekil 22.14) sahip olan bir durum olarak kabul ediyorum; *bkz.* Şekil 23.5. Bu durumu bir toplam çarpanı göz ardı ederek

$$|\leftarrow \nearrow\rangle = |\leftarrow\rangle|\nearrow\rangle + |\nearrow\rangle|\leftarrow\rangle$$

biçiminde ifade edebiliriz[23.6] ve bu (↓'ın,↑'e ters olmasıyla birlikte)

$$|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$$

durumuna ortogonal değilken

$$|\downarrow\rangle|\leftarrow\rangle,\ |\leftarrow\rangle|\downarrow\rangle,\ |\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle$$

durumlarının her birine ortogonal *olma*[23.7] önemli özelliğine sahiptir. Bu ortogonallik ilişkileri sırasıyla şu (0), (1), (2) ve (3) kilit "EVET/HAYIR" özelliklerinden sorumludur:

---

[8] *Bkz.* not 23.5.

[9] *Bkz.* Hardy, 1992, 1993.

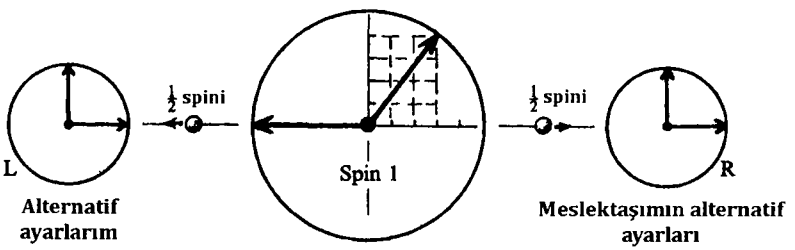
[23.6] Niçin?

[23.7] Bunu kanıtlayabilir misiniz görün. *İpucu*: §22.9'un koordinatlarını ve/ya da geometrik açıklamalarını kullanın.

(0) bazen meslektaşım bir ↑ ölçümüyle ilgili HAYIR elde ettiğinde bir ↑ ölçümüyle ilgili ben HAYIR elde ederim;
(1) bir ↑ ölçümüyle ilgili olarak HAYIR elde edersem meslektaşım bir → ölçümüyle ilgili EVET elde etmek zorundadır;
(2)bir ↑ ölçümüyle ilgili olarak meslektaşım HAYIR elde ederse bir → ölçümüyle ilgili ben EVET elde etmek zorundayım;
(3) Meslektaşım bir → ölçümüyle ilgili olarak EVET elde ettiğinde ben bir → ölçümüyle ilgili asla EVET elde edemem.

(0)'la bağlantılı olarak, ikimizin de ↑ ölçümünü gerçekleştirdiğimiz kabul edildiğinde, her ikimiz için de HAYIR yanıtı elde etmeye ilişkin gerçek kuantum mekaniksel olasılık bu deneyde tam olarak $\frac{1}{12}$'dir.[23.8] Hardy'nin en uygun değeri hafif bazı ayarlamalarla %9,017'ye çok yakınken,[10] $\frac{1}{12}$ = %8,33 olduğuna dikkat edin.

Kendileri üzerinde gerçekleştirilecek deneylere ilişkin önbilgi sahibi olmayan, iletişimsiz ayrı varlıklar olan iki parçacığa ilişkin (0), ..., (3) sonuçlarını bulmanın niçin hiçbir yolu olmadığını son derece belirgin hale getirmeliyim. (0) nedeniyle, (artık iletişim içinde olmayıp önbilgiye sahip olmadıkları varsayılan) iki parçacığın her biri ortaklaşa biçimde, meslektaşım ve benim, her ikimizin eşzamanlı biçimde ↑ ölçümleri gerçekleştirebilmemize ilişkin olasılığa, zaman zaman (gerçekte zamanın 12'de 1'inde) bir HAYIR yanıtı vermeye hazırlıklı olmak zorundadır. Dahası parçacıkların hazırlıkları, bunu (diğer bir deyişle eşzamanlı ↑ ölçümlerimize eşzamanlı HAYIR yanıtını vermek) yapabildikleri durumlarda, (1) ya da (2)'yi



Şekil 23.5 Hardy'nin "neredeyse" olasılıksız EPR versiyonu. 1 spininin başlangıç durumu, ↗ yönü dik ↑ ve → yönleri tarafından kapsanan çeyrek düzlemde yukarı doğru $\frac{4}{3}$'lük bir eğimle yer almak üzere, $|\leftarrow\nearrow\rangle = |\leftarrow\rangle|\nearrow\rangle + |\nearrow\rangle|\leftarrow\rangle$ olur. Her algılayıcı yaklaşan parçacığın spinini ya düşey ya da yatay biçimde ölçer.

[23.8] Bunu gösterin.

[10] *Bkz.* Hardy, 1993.

ihlal etmemek üzere herhangi birimiz tarafından gerçekleştirilmiş olan bir → ölçümüne, o durumlarda, *kesinlikle* EVET yanıtını da vermek zorunda olmalarıyla ilgili olarak, (bir arada olduklarında) ön düzenlenmiş olmaya ilişkin dikkatli olmak zorundadır. Yine de bu karar onları (3)'e ilişkin korkunç tehlikeye sokar çünkü böylesi bir durumda meslektaşım ve ben, her ikizimiz de aynı → ölçümünü gerçekleştirmiş olabiliriz ve böylelikle EVET, yasak EVET sonucunu elde ederiz.

23.6 Kuantum dolanıklığının iki gizemi

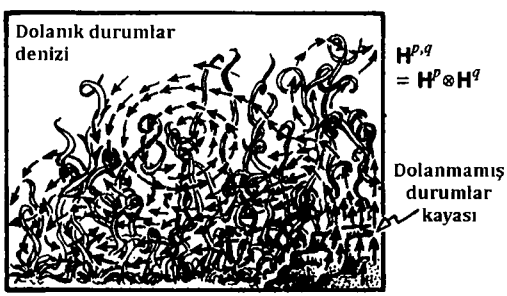
Bana kuantum dolanıklığınca sunulan oldukça ayrık iki gizem varmış gibi görünüyor ve bunların her birinin yanıtının (ilişkili olsalar da) tümüyle farklı karakterde bir şey olduğuna inanıyorum. İlk gizem olgunun kendisidir. Kuantum dolanıklığını nasıl kabullenmeli ve onu, gerçek evrenimizin işleyişine ilişkin önemli bir parçayı oluşturan bir şey olarak kabul etmeyi becerebileceğimiz şekilde algılayabileceğimiz fikirler biçiminde nasıl anlamlandırmalıyız? İkinci gizem bir şekilde ilkinin tamamlayıcısıdır. Kuantum mekaniği uyarınca dolanıklık bu tür her an her yerde bulunabilen bir olgu olduğundan, ve kuantum durumlarının muazzam bir çoğunluğunun aslında dolanmış olanlar olduğunu anımsarız, niçin bu dünyaya ilişkin dolaysız deneyimimizde hemen hemen hiç fark etmediğimiz bir şeydir? karışıklığa ilişkin bu her yerde bulunan etkiler her seferinde niçin bizimle yüz yüze gelmez? Bu ikinci gizemin, insanların şaşkınlıkları neredeyse tümüyle ilki üzerine yoğunlaştığından hak ettiği ilginin yakın bir kısmını bile elde ettiğine inanmıyorum.

Bu ikinci gizeme yönelerek başlamama izin verin. Elbette ilkine de döneceğim. Yüzleşilmesi gereken muamma, dolanıklıkların yayılma eğiliminde olması gerçeğidir. Sonuçta evrendeki her parçacık bir diğeriyle dolanmış hale gelme zorunluluğunda görünür. Ya da zaten tümü birbiriyle dolanmış mıdır? Niçin yalnızca, gerçekte algıladığımız (neredeyse) klasik dünya her neyse onunla hiçbir benzerliğe sahip olmayan dolanmış bir dolanıklığı deneyimlemiyoruz? Bir sisteme ilişkin Schrödinger evrimi bu konuda yardım etmez. O zaman ilerledikçe işleri, başladığımız her tür sistemin evrenin daha da fazla parçasıyla dolanmış hale geleceği şekilde, daha da beter yapma eğilimindedir. **H** Hilbert uzayı biçiminde, Schrödinger denkleminin (**U** işlemi), kendi başına, bizi zorluklarımızdan kurtaramayacağının genel olarak kabul gördüğünü düşünüyorum. Güvenli biçimde **H**'nin görece karışmamış bir parçasıyla başlarsak bu durumda Schrödinger evrimi bizi (genellikle) neredeyse hemen dolanıklığın derinlerine batı-

racak ve bize kendiliğinden, dolanık durumlara ilişkin bu devasa dağınık yosun okyanusundan çıkmakta herhangi bir yol ya da hatta rehberlik sunmayacaktır (*bkz.* Şekil 23.6).

Yine de günlük hayatta bu dolanıklıkların farkına bile varmaksızın oldukça iyi devam eder görünüyoruz. Bunun nedeni nedir? Kuantum kuramının **U** işleminden hiçbir yardım almayacaksak bu durumda ona ilişkin diğer temel bileşene dönmeliyiz: **R** işlemi. Aslında bunun bize EPR etkileri üzerine değerlendirmelerimizde yardımcı olabileceği yola ilişkin bir şey gördük bile. Diğer üyesi Titan gezegeninde bulunan meslektaşıma yaklaşmakta olan bir EPR çifti üzerinde bir ölçüm gerçekleştirmeyi canlandırdığımı anımsayın. Önce kendi ölçümümü yaparsam, bu durumda bu ölçümü gerçekleştirmiş olmama bağlı olarak bu eylem, meslektaşımın parçacığının benimkiyle olan dolanıklığını kesip serbest bırakır ve sonrasında ona ne yaparsam yapayım parçacık bu andan itibaren (meslektaşım tarafından ölçülmüş hale gelene dek) ortağına olan sorumluluklarından muaf bırakılarak kendine ait bir durum vektörüne sahip olur. Böylece bu dolanıklığı boydan boya yaranın *ölçümler* olduğu görülür. Bu doğru olabilir mi? Kuantum dolanıklığına ilişkin olgu tarafından sunulan ikinci muammaya yanıt **R** midir?

Bunun, en azından kuantum mekaniğinin pratikte kullanıldığı yöntem biçiminde düşünürsek doğru olmak zorunda olduğunu düşünüyorum. Bu, herhangi bir kuantum deneyini, örneğin az önce değerlendirmekte olduğumuz (düşünce) deneyleri gibi, nasıl kurduğumuzla ilgilidir. EPR değerlendirmelerimizde, belirli bir kuantum durumunda, Stapp örneğinde 0 spinli ve Hardy örneğinde 1 spinli, olmak üzere ayarlanmış olan bir miktar parçacık çiftine gerek duyduğumuzu anımsayın. Yalnızca **U** işleminin etkilerini kullanarak parçacıklarımızın etraftaki diğer her şeyle çoktan korkunç bir biçimde dolanmamış olduğunu nasıl garanti edebiliriz? Bir "ölçüm"



Şekil 23.6 Dolanık olmayan (sağ alttaki kaya tarafından gösterilen) bir başlangıç durumundan uzak bir Schrödinger evrimi neredeyse her zaman (dağınık yosun denizi tarafından gösterilen) artan dolanıklıklara yol açar. Öyleyse deneyimlerimize ilişkin sıradan nesneler niçin bağımsız ayrı şeyler gibi görünür?

doğasındaki bir şey bana her zaman, bir kuantum deneyinin, durumun bu istenilmeyen dolanık yığınca kirletilmemiş kalmasını garanti etmek üzere *kurulum*una ilişkin önemli bir parça gibi görünür. Bunu söylerken, deneyi yapan kimsenin bunu gerçekleştirme üzere kasıtlı biçimde bir "ölçüm" kurduğunu ima etmek istemiyorum. Benim görüşüm, Doğanın kendisi **R** işleminin etkilerini, deney gerçekleştiren bir kimse tarafından herhangi kasıtlı bir niyet ve "bilinçli bir gözlemci"nin herhangi bir araya girmesi olmaksızın, sürekli biçimde yasalaştırdığı yönündedir.

Burada anlaşmazlığa neden olan sulara giriyorum ve bu konularla ilgili kendi konumum, daha sonra (§§30.9–13'te) yeniden dönülmeye gerek duyacak. Öyleyse "geleneksel" kuantum mekaniği konuyla nasıl ilgilenir? Fizikçilerin "pratikte", dış dünyayla olduğu farz edilen bu dolanıklıkların her zaman göz ardı edilebileceğini varsaydıkları görülmektedir. Diğer türlü ne klasik mekaniğe ne de kuantum mekaniğine güvenilebilirdi. Bakışın, dolanıklıkların tümünün, herhangi gerçek bir durumda pratik içinde değerlendirilmelerine gerek olmayacak şekilde, bir biçimde "dengeleneceği" görülür. Yine de, durumun olasılıkla bu olduğuna ilişkin herhangi küçük bir ikna edici gösterimin bile farkında değilim. Durumun, dengelemek yerine, evrenin başka bir yerindeki pek çok diğer olay üzerinde koşullu olmayan yaklaşık olarak bile tanımlanmamış konumlara sahip nesnelerle birlikte bildiğimiz evren gibi git gide azalmak olduğu görülmektedir. Onu, kuantum mekaniğine ilişkin yorumlamanın merkezinde bulunan **U/R** paradoksundan soyutlanmış bir sorun olarak göreceksek bu muammadan herhangi bir çıkış yolu görmüyorum.

Bununla birlikte evrenin geri kalanıyla bu yaygın dolanıklık konusuna bakarız, bir taraftan onu, **U** işlemlerinin yeterince basit sistemler için neden bu kadar mükemmel biçimde iyi işlediğine ilişkin daha geniş konudan ayıramazken öte taraftan **U**'dan vazgeçip aniden fakat yine de gizli biçimde an be an **R** işlemini araya sokmak zorundayız. Niçin fakat ayrıca ne zaman ve nasıl? Bu, (bence daha doğru biçimde) *ölçüm sorunu* ya da Nobel Ödüllü Tony Leggett'in sözleriyle ölçüm *paradoksu*dur. Konuya 29. bölümde yeniden döneceğim.

Bize dolanıklık tarafından sunulan diğer bilmecelerle işimi henüz bitirmedim. Bunların bazıları, dolanık bir sisteme ilişkin ölçümün, dolanmış bir çiftin bir kısmına ilişkin bir ölçüm, 17. bölümde gördüğümüz üzere göreliliğe ilişkin kurallara sadık kalacaksak teşvik etmemiz gerekmeyen bir kavram olarak, *eşzamanlı biçimde* diğerini etkilemek zorunda görünmesi nedeniyle göreliliğin gerekliliklerinden son derece rahatsız olmasıyla ilgilidir. Bu sorunla yüzleşmeye girişmeden önce dolanıklığa ilişkin bir diğer görünüme yönelmeliyim. Bu, önceki birkaç paragrafta yöneldikleri-

mizden bile daha fazla aynı anda her yerde bulunan bir görünümdür. Öylesine her yerde bulunur ki, ölçüm paradoksuna hangi biçimde bakmayı seçersek seçelim, ölçümler bile kendisini kestirip anlayamaz. Dahası o kuantum mekaniğinin, şimdiye kadar yöneldiğimiz diğer özelliklerinden bağımsız görünen karakteristik bir özelliğidir. Kuantum mekaniğinin *özdeş parçacıklı* sistemlere davrandığı dikkat çekici yola başvuracağım.

23.7 Bozonlar ve fermiyonlar

İçerisinde bir parçacığa uygun olan, **0, 1, 2, ..., 9** olarak işaretlenmiş yalnızca ayrık 10 konumun bulunduğu "oyuncak evren"i ağırlayışımızı anımsayın. Bu evrende birden fazla parçacığın bulunabileceğini göz önüne aldığımda, parçacıkların "aynı tür parçacık" olarak düşünülmeme gerekliliği konusunda dikkatliydim ve onları diyelim ki "iki elektron" ya da böyle bir şey yerine "*A* parçacığı" ve "*B* parçacığı" olarak adlandırdım. Bunun nedeni kuantum mekaniğinin, Doğanın gerçek parçacıklarını önceki tartışmalarımızdakinden niteliksel olarak farklı işlemlerle ele almasıdır. Aslında bu noktada niteliksel olarak oldukça *farklı* böylesi iki işlem arasında bir ayrım yapmak zorundayız! Bu işlemlerden biri *bozon* olarak bilinen parçacığa ve diğeriyse *fermiyon* olarak bilinen parçacığa uygulanır. Bozonların *tamsayılı spine* sahip (diğer bir deyişle spinin $\hbar$ biriminden 0, 1, 2, 3, ... değerlerini aldığı) parçacıklar ve fermiyonların yar–tek tamsayılı spine sahip parçacıklar olduğu açığa çıkar; $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ (Bu ilişki kuantum alan kuramı bağlamındaki, *spin istatistikleri teoremi* olarak bilinen ünlü bir matematiksel teoremin sonucudur; *bkz.* §26.2.) Örneğin çekirdek ya da tüm atomlar ya da esasen (kuarklardan oluştukları kabul edilen) proton ya da nötronlar gibi tekil hadronlar türü bileşik parçacıklar uygun bir yaklaşıklık tahmini derecesine kadar tekil bozon ya da fermiyonlar gibi ele alınabilirler. Böylece fotonlar ve de mezonlar (pion, kaon, vb) ve de zayıf etkileşimlerden sorumlu parçacıklarla (W ve Z parçacıkları) yeğin etkileşimlerden sorumlu parçacıklar (gluonlar) da bozondur. Açık olarak bileşik α parçacıkları (2 proton, 2 nötron), döteryonlar (1 proton, 1 nötron), vb de ayrıca bozon davranışına yakın biçimde davranır. Öte taraftan elektronlar, protonlar, nötronlar, onları oluşturan kuarklar, nötrinolar, müonlar ve pek çok başkaca parçacık fermiyondur. Fermiyonlara ilişkin dalga fonksiyonlarının §11.3'teki terminolojiyle (§22.8'le karşılaştırın), bozonlara ilişkin olanlar değilken, *spinör nesneler* oldukları gerçeğine belirtebiliriz.

Bozonları fermiyonlardan gerçekten ayırt eden şeyin ne olduğunu görmek için gelin içinde içinde **0, 1, 2, ..., 9** olarak işaretlenmiş yalnızca 10

nokta bulunan oyuncak evrenimize geri dönelim. Bir dalga fonksiyonunun uygun benzerinin basit olarak, tekil bir parçacıkla ilgili $z_0, z_1, \ldots, z_9$, ayırt edilebilir bir parçacık çiftiyle ilgili $z_{00}, z_{01}, \ldots z_{99}$ ve böylesi üç parçacıkla ilgili $z_{000}, z_{001}, \ldots, z_{999}$,vb karmaşık sayılarının bir derlemesi olduğunu anımsayın. Bununla birlikte bir çift bozonla ilgili gereklilik z_{ij} karmaşık sayı derlemesinin, indislerinde örneğin $z_{38} = z_{83}$ olacağı şekilde *simetrik* olmasıdır:

$$z_{ij} = z_{ji}.$$

Böylece bu "dalga fonksiyonu"yla ilgilenildiği sürece, hangi parçacığın 3'teki hangisinin 8'deki olduğunun bir farkı yoktur. Yalnızca 3 ve 8 noktalarını işgal eden bir *parçacık çifti* söz konusudur. Bozon çiftinin her ikisine de aynı yerde mükemmel biçimde sahip olabileceğine dikkat edin; örneğin z_{33} her iki bozon için de 3 noktasını eşzamanlı işgal etmeye ilişkin karmaşık ağırlıklandırma katsayısıdır. (Düzensiz) parçacık çiftini 10 noktaya yerleştirmenin yalnızca $\frac{1}{2}(10\times11) = 55$ ayırt edilebilir biçimi olduğunu görürüz ve yalnızca *bu* sayıda (diğer bir deyişle $\mathbf{H}^{100}$ yerine $\mathbf{H}^{55}$) karmaşık sayı gereklidir. Özdeş üç bozon için üç argümanda da simetriye sahip oluruz:

$$z_{ijk} = z_{jik} = z_{jki} = z_{kji} = z_{kij} = z_{ikj}.$$

Böylece durumu tanımlamak üzere artık $\frac{1}{6}(10\times11\times12) = 220$ karmaşık sayıya sahip oluruz: $\mathbf{H}^{1000}$ yerine bir $\mathbf{H}^{220}$ elemanı. Özdeş n adet bozon için sayı, bu sayı bağımsız $z_{ij\ldots m}$ karmaşık sayılarına ilişkin sayı olmak üzere, $(9+n)!/9!\,n!$ olur. $z_{ij\ldots m}$, indislerinde tümüyle simetrik olmalıdır (notasyonla ilgili olarak §§12.4,7 ve §14.7'ye bakın):

$$z_{ij\ldots m} = z_{(ij\ldots m)}.$$

Şimdi fermiyonları ele alalım. Bozonlardan farklı olarak fermiyonlarda dalga fonksiyonunun argümanlarında *ters* simetrik olması gerekir:

$$z_{ij} = -z_{ji},$$
$$z_{ijk} = -z_{jik} = z_{jki} = -z_{kji} = z_{kij} = -z_{ikj},$$
$$z_{ij\ldots m} = z_{[ij\ldots m]}.$$

Böylece özdeş iki fermiyon için $\frac{1}{2}(10\times9) = 45$, özdeş üç fermiyon için $\frac{1}{6}(10\times9\times8) = 120$ ve özdeş n fermiyon için $10!/n!\,(10-n)!$ adet karmaşık sayıya sahip oluruz.[23.9] Hesaplamadaki farklılık artık aynı noktada iki fermiyona sahip olma olanağına sahip olmamamızdan kaynaklanır çünkü

[23.9] Bu sayıların tümünü hem bozon hem de fermiyon durumlarında açıklayın.

ters simetri $z_{\ldots}$ karmaşık ağırlıklandırmalarının, bu meydana geldiğinde, yok olmak zorunda olması anlamına gelir: $z_{33} = 0, z_{474} = 0$, vb.

Oyuncak evrenimizde 5'ten fazla özdeş fermiyona sahip olduğumuzda sayıların yeniden düşmeye başladığına dikkat edin. 10 fermiyona ulaştığımızda olası yalnızca tek bir durum söz konusudur ve oyuncak evrenimizde 10 özdeş fermiyondan *fazla*sına sahip olamayız. Bu modelde kuantum fiziğindeki, *Pauli dışarlama ilkesi* olarak adlandırılan önemli bir ilkenin ortaya konuşunun bulunduğunu görürüz. Bu bize özdeş iki fermiyonun (basit olarak fermiyonik dalga fonksiyonuna ait ters simetrini bir özelliği olarak) aynı durumda bulunamayacağını söyler. Katı maddelerin kendi üzerlerine çökmemesi gerçeği nihai olarak bu ilkeye bağlıdır. Olağan katı madde temel olarak fermiyonlardan oluşur; elektronlar, protonlar, nötronlar. Bunlar Pauli ilkesi nedeniyle "birbirinin yollarına yaklaşmamak" zorundadır.

Bozonlar durumunda işler başka türlüdür. Bozonlar aynı durumda olmayı "tercih etme"ye ilişkin hafif bir eğilim içindedir. (Bu, farklı bozon durumlarını hesaplamayı ilgili farklı klasik durumlarla karşılaştırdığımızda, tümüyle istatistiksel bir etki olarak ortaya çıkar.) Sıcaklık çok düşük olduğunda bu etki önemli hale gelebilir ve ilgili parçacıkların çoğu aynı durumda bir araya toplandığında *Bose–Einstein yoğunlaşması* olarak bilinen olgu ortaya çıkabilir. Süper akışkanlar bu tür bir şeye örnektir ve lazerler bile bundan faydalanır. Bir süper iletkende elektronlar bir "çift oluşturma" biçimine sahiptir ve bu *Cooper çiftleri* sanki tekil bozonlarmışçasına davranma yeteneğindedir. Kuantum mekaniğine ilişkin en etkileyici ve karşı sezgici pratik kullanımlarından bazıları bu tür "kolektif" olgu nedeniyle ortaya çıkar.

23.8 Bozon ve fermiyonların kuantum durumları

Bozonlar ve fermiyonlara ilişkin simetri ve ters simetri gereksinimlerini yalnızca "oyuncak evren"imizle ilgili olarak belirtmiş olsam da olağan uzaydaki gerçek bozon ve fermiyonların bir toplamıyla ilgili bozon/fermiyon simetri gereksinimleri temelde aynıdır. Dalga fonksiyonu, her parçacığın (spinör ya da tensör) indis grubunu grubunu kuşatmak üzere, uzayda $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{y}$ olarak işaretlenmiş bir miktar noktanın yanı sıra sırasıyla $u, v, \ldots, y$ tarafından işaretlenen birçok ayrık parametrenin bir fonksiyonu olacaktır. İlk olarak özdeş bozonlara ilişkin bir *çift*le ilgili bir dalga fonksiyonunun nasıl göründüğünü sorarız. Gereklilik, $\psi = \psi(\mathbf{u}, u; \mathbf{v}, v)$ fonksiyonunun parçacık değiş tokuşuyla ilgili olarak *simetrik* olmasıdır:

$$\psi(\mathbf{u}, u; \mathbf{v}, v) = \psi(\mathbf{v}, v; \mathbf{u}, u).$$

Özdeş üç bozonla ilgili dalga fonksiyonumuz üç parçacığın tümüne ilişkin permütasyonlarla ilgili olarak simetrik olmalıdır:

$$\psi(\mathbf{u}, u; \mathbf{v}, v; \mathbf{w}, w) = \psi(\mathbf{v}, v; \mathbf{u}, u; \mathbf{w}, w) = \psi(\mathbf{v}, v; \mathbf{w}, w; \mathbf{u}, u) = \ldots,$$

ve bu şekilde devam eder.

Fermiyonlar durumuna ilişkin bu bağıntılar, parçacık değiş tokuşuyla ilgili olarak *ters* simetriyle yer değiştirir:

$$\psi(\mathbf{u}, u; \mathbf{v}, v) = -\psi(\mathbf{v}, v; \mathbf{u}, u).$$

$$\psi(\mathbf{u}, u; \mathbf{v}, v; \mathbf{w}, w) = -\psi(\mathbf{v}, v; \mathbf{u}, u; \mathbf{w}, w) = \psi(\mathbf{v}, v; \mathbf{w}, w; \mathbf{u}, u) = \ldots,$$

ve bu şekilde devam eder. Her durumda, (ayrık $u, v, \ldots$ değişkenleriyle nitelendiği üzere) spin durumunun bu değiş tokuşlarda parçacıkla birlikte taşınmak zorunda olduğuna dikkat edin. Bu, Pauli dışarlama ilkesini uygularken durumları, yalnızca konumlarının özdeşliğine ek olarak spin durumları da özdeşse özdeş olarak değerlendireceğimiz imasına sahiptir. Bu, örneğin, iki elektronun, durumlarının zıt olması koşuluyla aynı orbitali paylaşabildiği kimyada önemlidir (*bkz.* Şekil 24.2).

Burası §23.3'te değinilmiş olan durumlarla ilgili (soyut) indis notasyonunun kullanışlı olduğu yerdir (ve §12.8'de açıklandığı üzere Şekil 26.1'de gösterilen bir diyagram biçimli notasyon da kullanılabilir). Buradan hareketle kendisine α işaretinin atandığı belirli bir parçacığın dalga fonksiyonu için ψ^α, ve kendisine β işaretinin atandığı ikinci bir parçacığın dalga fonksiyonu için ϕ^β'yı kullanabiliriz ve bu durum bu şekilde sürer gider. Parçacıklar özdeş değilse onların çiftleriyle ilgili dalga fonksiyonu

$$\psi^\alpha \phi^\beta$$

(tensör) çarpım durumu olurken, bunlar özdeş bozonlarsa durum (normalleştirme katsayıları üzerine kaygılanmaksızın)

$$\psi^\alpha \phi^\beta + \phi^\alpha \psi^\beta$$

olur. (Soyut indis notasyonuna ilişkin bir nokta: değişmeli çarpıma sahibiz, *örn.* $\phi^\alpha \psi^\beta = \psi^\beta \phi^\alpha$. Tensör çarpımına ilişkin değişmeli olmayışla, $|\phi\rangle|\psi\rangle \neq |\psi\rangle|\phi\rangle$'nin $\phi^\alpha \psi^\beta \neq \psi^\alpha \phi^\beta$ olarak ifade edileceği şekilde indis düzenlemesi ilgilenir.) Bu simetriklenmiş durumu (2 çarpanını göz ardı ederek) simetrilemeyle ilgili parantez notasyonumuzu (§12.7, §22.8) kullanarak

$$\psi^{(\alpha} \phi^{\beta)}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu, n özdeş bozonla ilgili olarak, bireysel durumları $\psi^\alpha, \phi^\beta, \ldots, \chi^\kappa$ olan kuantum durumlarını hemen simetriklenmiş

$$\psi^{(\alpha}\phi^{\beta}\ldots\chi^{\kappa)}$$

çarpımı olarak yazabilmemiz avantajına sahiptir. Fermiyonlarla ilgili olarak da tam olarak aynı şeyi yapabiliriz. Bireysel $\psi^{\alpha}, \phi^{\beta}, \ldots, \chi^{\kappa}$ durumlarıyla ilgili, özdeş n adet fermiyonun tümüne ilişkin bir derleme ters simetriklenmiş

$$\psi^{[\alpha}\phi^{\beta}\ldots\chi^{\kappa]}$$

durumunda olur (§12.4).

Bu çok parçacıklı durumların tümünün (özellikle özdeş fermiyonların bir çiftinin $\psi^{\alpha}\phi^{\beta} - \phi^{\alpha}\psi^{\beta}$ birleşimi olarak açıklamasına ilişkin gördüğümüz üzere) teknik olarak *dolanık* olduğuna dikkat edin. Bununla birlikte bu, hafif türde bir dolanıklıktır çünkü üst üste binme yalnızca özdeş parçacıklara uygulanan, "fiziki olarak ayırt edilemez" durumlar arasındadır. Sırasıyla bozonlar ve fermiyonlarla ilgili $\psi^{(\alpha}\phi^{\beta}\ldots\chi^{\kappa)}$ ve $\psi^{[\alpha}\phi^{\beta}\ldots\chi^{\kappa]}$ durumları "dolanmamış" durumlara ulaşabileceğimiz en yakın olanlarıdır ve bu tür durumları "dolanmamış" olarak adlandırmakla ilgili alternatif konumu kabul edebiliriz. (Bu notasyondaki genel n–parçacıklı bozon durumu bu biçimde bölünmeyen bir $\psi^{\alpha\beta\ldots\kappa} = \psi^{(\alpha\beta\ldots\kappa)}$ ifadesi olur. Benzer biçimde genel bir n–parçacıklı fermiyon durumu "bölünmeyen" bir $\phi^{\alpha\beta\ldots\kappa} = \phi^{[\alpha\beta\ldots\kappa]}$ olur.) Ket notasyonu biçiminde bu simetri ve ters simetri gerekliliklerivle[11] ilgilenmek üzere bir $|\psi\rangle \wedge |\phi\rangle \wedge \ldots \wedge |\chi\rangle$ "kama çarpımı" notasyonunu, terimlerin değişmesi ya da değişmemesinin bireysel çarpanların "dereceler"ine bağlı olduğunu aklımızda tutarak (*bkz.* §11.6), göz önüne alabiliriz.

Özdeş bozon ya da fermiyonlarda ortaya çıkan "dolanıklık" türü görece "zararsız" olsa da (ve aslında bir kuantum sisteminde olanaklı olan çok sayıda alternatifi arttırmak yerine azaltmaya hizmet etse de), en azından büyük fiziki uzaklıklar üzerinde bir gerilme etkisiyle ilgili belirgin bir imaya sahiptir. Oldukça yakın bir yıldızın ters taraflarından dünyaya ulaşan fotonların bozonlara ilişkin "dolanık" doğası, Hanbury Brown ve Twiss'e (1954, 1956) atfedilen bir yöntem aracılığıyla bu tür yıldızların çaplarını ölçmekte kullanılır. Yöntemleri ilk olarak ileri sürüldüğünde, "fotonların diğer fotonlarla değil yalnızca kendileriyle girişim içinde olabilecekleri" itirazında bulunan pek çok (hatta seçkin) kuantum fizikçisi tarafından büyük bir karşı koyuşla karşılaştı; fakat "diğer fotonlar"ın bozon–dolanık bir bütünün parçası olduğu gerçeğini gözden kaçırmışlardı.

[11] Bu doğaya ilişkin bir şema, "kamalar"ı açık biçimde kullanmaksızın Shadows of the Mind (Zihnin Gölgeleri) adlı kitabımda, §5.15, etkin biçimde benimsendi.

23.9 Kuantum Işınlama

Bu bölümü bitirmek üzere EPR etkilerinin yorumunda içkin olan bilmecelere yeniden dönelim. Özellikle özel görelilikle, Einstein'ın ışıktan daha hızlı sinyallemenin olanaklı olmamasına ilişkin kendi koşullarına saygı duymaz görünen EPR çiftleri arasındaki "iletişim"e ilişkin görünüşteki çelişkiyi anımsayalım. Bu meseleleri aydınlatmak üzere kuantum dolanıklığına ilişkin *kuantum ışınlama* olarak bilinen oldukça gizemli bir anlam daha sunacağım. Bana göre bu ima, EPR etkilerini genel olarak kabul edeceksek bizi, araştırmak zorunda kalacağımız bir yöne sevk eder. Yine de bu yönün, pek çok insanın kuşkusuz ve göreceğimiz üzere haklı olarak girmekte en gönülsüz oldukları bir alana yönlendirdiğini bulacağız!

"Işınlama" terimiyle ne kastedilir? Bu, Kaptan Kirk ve mürettebatından bazılarının keşfedilmemiş bir gezegen yüzeyine ışınlandıkları "Uzay Yolu" nu çağrıştırır. Bir kişinin "kimliği"nin başarılı biçimde ışınlanmasıyla ilgili olarak gezegen yüzeyine yalnızca klasik bazı parçacık konumları dizisinin, vb değil gerçek bir *kuantum durumu*nun doğru dürüst biçimde yansıtılmasının gerektiği bir bakış benimsenir. Böylesi bir bakış açısı, ışınlama işleminin, ikisinden hangisinin bireyin "bilinç akışı"nın sürekliliğini temsil edeceğiyle ilgili hassas muammalara yol açabilecek olan, bir bireyi *kopyalama* biçiminde kullanılamayacağını söyleyen felsefi avantaja sahiptir.[12] Bilinmeyen bir kuantum durumunu kopyalamak niçin olanaklı değildir? Soru yazında ikna edici biçimde işaretlenmiştir[13] fakat temel değerlendirmeler vasıtasıyla böylesi bir olasılığın standart **U/R** kuantum mekaniğinin ilkeleriyle bir çelişkiye yol açacağını görebiliriz. Orijinal olanı yok etmeye hazırlanılmadıkça tam bir kopya yapılamaz ve bilinmeyen bir kuantum durumunun tam olarak aynı iki kopyası yapılamaz.

Neden olmasın? Yapılabilirse böylece işlem yinelenerek 4, daha sonra 8 ve sonra 16, vb kopyaya sahip olunabilir. Durumun yalnızca, kütle sahibi $\frac{1}{2}$-spinli bir parçacığa ilişkin $|\nearrow\rangle$ basit spin durumu olduğunu düşünün. Böylece bunu pek çok kez kopyaladıktan sonra, yeterince büyük açısal momentumlar için klasik bir biçimde ölçülebilen ve $\nearrow$ uzamsal yönünün kendisi yoluyla elde edildiği $|\nearrow\rangle|\nearrow\rangle\ldots|\nearrow\rangle = |\nearrow\nearrow\ldots\nearrow\rangle$ ifadesine sahip olmamız gerekir. Bu yolla durumun (bir orantılılık katsayısına bağlı olarak) gerçekten ne olduğuna ilişkin bir ölçüm elde etmemiz gerekir fakat kuantum mekaniğinin standart **U/R** işlemleri bunu yapmamıza izin vermez. **R**'nin bir $|\nearrow\rangle$ durumu üzerinde gerçekleştirmemize izin verdiği tek ölçüm bir Hermitsel (ya da normal) işlemci tarafından verilir ve bu basit biçimde

[12] *Bkz.* Penrose, 1989a.

[13] Wooters ve Zurek, 1982.

şu soruları sunar: "Spin bir ↘ yönünde midir? Yanıt EVET ya da HAYIR." Ölçüm sonrası durum ya sorudaki ↘ yönünde (EVET) ya da ters ↖ yönünde (HAYIR) olacaktır. Spin durumunu diğer şeylerle karışmış biçimde değerlendirirsek aslında gerçekleştirebileceğimiz başkaca ölçümler de söz konusu olur (ve bu tür bir şeyin değerini kısa süre içinde göreceğiz). Bununla birlikte incelenmekte olan durum dış dünyayla dolanmamış biçimde değerlendirilirse onun üzerinde dolaysız bir ölçüm gerçekleştirmekten daha iyisini yapamayız. Durumdan elde edebileceğimizin tümü basit bir EVET/HAYIR yanıtıdır; diğer bir deyişle yalnızca bir *bit* (0 veya 1 şeklinde ikili sayı) bilgi. Ölçüm aygıtını dilediğimiz açıyla çevirebiliriz fakat sistem bize durumun gerçekte işaret ettiği ↗ yönünü söylemeyecektir. Doğru, bu yön, yalnızca kendisi için kesin biçimde EVET yanıtının verilmesi (1 olasılığı) gerçeğiyle ayırt edilir fakat bunun önceden hangi yön olduğunu bilemeyiz. (Kuantum durumunu ayarlamış olan kişi bize yönün ↗ olduğunu söylesydi bu durumda onu kopyalayabilirdik fakat sorunun sorulma biçimi bu değil; incelemekte olduğumuz şey önceden *bilinmeyen* ve kopyalamaya niyetlendiğimiz bir kuantum durumu.)

Kuantum ışınlamanın başarmayı amaçladığı şey bir kuantum durumunu bir yerden başka bir yere, Kirk'ün gemisi Atılgan'dan keşfedilmemiş gezegen yüzeyine, *göndermek*tir. Kuantum mekaniği bunu gerçekleştirmeyi engellemek üzere kesinlikle hiçbir engel çıkarmaz; aslında kuantum nesnesini tek vücut halinde bir yerden diğerine olağan bir şekilde nakledebiliriz. Bununla birlikte canlandırdığımız belirli durumda koşulların, bir kuantum nesnesi ya da herhangi türdeki bir kuantum sinyaline ilişkin güvenilir bir naklin oldukça aşırı biçimde "rahatsız edici" hale geldiğini düşünüyoruz. Sıradan klasik bilginin aktarılması tümüyle koşulların elverdiği ölçüde olmalıdır. Bununla birlikte bir kuantum durumunu yalnızca klasik sinyalleme kullanarak aktarmak olası değildir. Bunun nedeni açık olmalı çünkü klasik sinyaller doğaları gereği kopyalanabilir. Bir kuantum durumunu aktarmak üzere kullanılabilselerdi böylece kuantum durumları da kopyalanabilirdi; yukarıda bunun olası olmaması gerektiğini görmüştük. İlk olarak yapmamız gereken "zemini hazırlamak"tır. "Keşfedilmemiş gezegen" görüntüsü bunun için biraz uygunsuz olduğundan bunun yerine Titan'daki meslektaşımı yardım etmek üzere göreve çağırayım. $\frac{1}{2}$–spinli bilinmeyen bir kuantum durumunu aktarmaya niyetlendiğim kişi işte bu meslektaşımdır.

Gerekli "zemin hazırlığı", halihazırda her birimizin $\frac{1}{2}$–spinli bir EPR parçacık çiftinin bir üyesine sahip olma zorunluluğudur. Parçacıkların birlikte, tıpkı orijinal EPR Bohm versiyonundaki gibi 0–spinli bir durumda olduğunu düşünebiliriz. Varsayımımız kuantum durumlarını dünya ve Titan arasındaki uzayın menzili boyunca göndermenin artık güvenilmez

olmasıydı. Bununla birlikte beş yıl önce, meslektaşım Titan'a doğru yola çıkmadan önce, her birimizin yanına adı geçen çifte ilişkin ilgili parçacığı aldığını ve her parçacığın dış etkilerden mükemmel biçimde yalıtık tutulduğunu varsayalım. Parçacıklar, meslektaşım geri döndüğünde hâlâ rahatsız edilmemiş durumdalarsa böylece ikisi bir araya getirildiğinde 0–spinli duruma yeniden kavuşulur.

Şimdi, bir arkadaşın bana yine dış etkilerden yalıtık tutulmuş $\frac{1}{2}$–spinli başka bir parçacık sunduğunu düşünelim. O parçacığın spin durumunu hemen, sağlam biçimde Titan'daki meslektaşıma aktarmam isteniyor. Artık koşulların, bir kuantum durumunun burası ve Titan arasındaki uzay menzilinde güvenilebilirliğine izin vermesinin gerekmediğini akılda tutarak yalnızca klasik bir radyo sinyali göndermeme izin verilir. Bunu yapmadan önce arkadaşımın parçacığını kendi EPR parçacığımı sakladığım yere alıp bu ikisini bir araya getiririm. Her parçacık $\frac{1}{2}$–spinlidir, böylece durumları birlikte 4–boyutlu bir sistem (benim parçacığım ve meslektaşımın Titan'daki parçacığı arasındaki dolanıklıkla ilgili değilse yalnızca $\mathbf{H}^4$) oluşturur. Şimdi onların çiftleri üzerinde birlikte (arkadaşımın ve benimkinin), dört (*Bell* durumları denen) ortogonal durumu ayıran bir ölçüm gerçekleştiririm

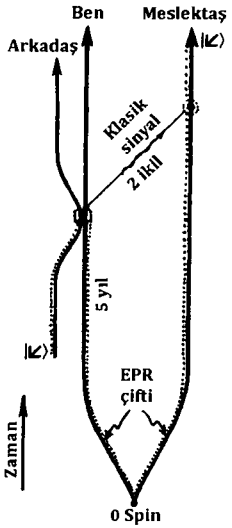
$$(0)\ |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle,$$
$$(1)\ |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle,$$
$$(2)\ |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle,$$
$$(3)\ |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle.$$

Bu ölçümün sonuçlarını Titan'daki meslektaşıma, üstteki ölçümlerimin ortaya koyduğu dört durumdan birine sırasıyla karşılık gelen 0, 1, 2, 3 sayıları tarafından kodlanmış olağan bir klasik sinyal aracılığıyla aktarırım. Mesajımı alması üzerine meslektaşım, o ana dek dış etkilerden dikkatli biçimde korunmuş olan, EPR çiftinin diğer üyesini alır ve üzerinde şu döndürmeyi gerçekleştirir:

(0) kendi haline bırak,
(1) x ekseni etrafında 180°,
(2) y ekseni etrafında 180°,
(3) z ekseni etrafında 180°.

Arkadaşımın kuantum durumunu Titan üzerindeki meslektaşıma başarılı biçimde "ışınlama"nın gerçekleşmesi dolaysız olarak kontrol edilebilir.[23.10]

[23.10] Bunu, koordinat eksenleri, vb'yle ilgili uygun uzlaşılarla birlikte doğrulayın.



Şekil 23.7 Kudolanıklığın nedensel olmayan yayılımını gösteren "Kuantum ışınlama". Bir uzayzaman diyagramı, kendisi yoluyla, bana arkadaşım tarafından verilen $\frac{1}{2}$-spinli bilinmeyen kuantum durumunun (|↙⟩) Titan'daki meslektaşıma, meslektaşım ve benim halihazırda bir EPR çiftini paylaşıyor olmamız koşuluyla yalnızca 2 ikil klasik bilgi aktarımı yoluyla aktarılabildiği işlemi örnekler. Nedensel olmayan kudolanıklık bağlantısı noktalı bir yol olarak gösteriliyor.

Kuantum ışınlamayla ilgili olarak özellikle çarpıcı olan şey, meslektaşıma klasik biçimli yalnızca 2 bit bilgi (00, 01, 10, 11 biçiminde kodlanmış olan 0, 1, 2, 3 sayılarından biri) göndermekle bir noktaya ilişkin "bilgi"yi Riemann küresinin tümü üzerinde aktardım. (Şekil 22.14'ü anımsayın.) Olağan klasik terimlerle bu, bir süreklilik içindeki bir noktaya ilişkin sınırsız seçimde içerilen bilgiye gerek duyardı: mükemmel tamlık için kesinlikle $\aleph_0$ bit! (*Bkz.* §§16.3, 4.) Bu başarıyı nasıl yakaladık? Bu noktada, kuantum mekaniksel ışınlamaya ilişkin beklentileri doğrulayan gerçek deneyler yapılmış olduğunu (elbette dünya Satürn aralığında değil metre cinsinden uzaklıklar üzerinde)[14] belirtmeliyim, öyleyse tüm bunları ciddiye almak zorundayız. Yalnızca bu değil, aynı zamanda gelişmekte olan kuantum kriptografi konusu da, kuantum hesaplamaya ilişkin pek çok fikir gibi, bu genel doğadaki şeylere bağlıdır.

Şekil 23.7'ye bir göz atın. Bu, içerisinde benim, arkadaşımın ve meslektaşımın ve daha önemlisi Titan'daki meslektaşıma gönderdiğim klasik sinyalle birlikte hikayeyle ilgisi bulunan tüm parçacıkların dünya çizgilerinin belirtildiği bir uzayzaman diyagramıdır. Bir biçimde, arkadaşımın (|↙⟩'la belirtilen) parçacığının spin yönüne ilişkin "bilgi" kendisini Titan'a, aslında yalnızca 2 bit bilginin aktarılmış olması gerçeğine karşın taşımıştır. Tüm diğer $\aleph_0$ bit bilgi, meslektaşıma nasıl iletildi?

Bazı insanlar, kuantum durumlarının "ölçülmeyen" ya da başka bir şey

[14] *Bkz.* Jennewein vd., 2002.

olarak "gerçek şeyler olma"dığına ilişkin bakış açısına sığınabilirler. Kendi adıma ben, dünya üzerine bu belirli tür perspektifi kabullenmeyi zor buluyorum. Çünkü $\frac{1}{2}$–spinli bir durumun yönü dünya hakkında oldukça kesin bir şey söyler. Der ki, spinin o belirli yönde, ancak *yalnızca* o belirli yönde ölçümü seçilerse bu durumda kesinlikle EVET yanıtı elde edilecektir. Dahası, arkadaşım ya da arkadaşımın bir arkadaşı orijinal parçacığı önden atanmış bir yöndeki bir spine sahip olacak şekilde *hazırlamış* da olabilir ve Titan üzerinde o aynı (ya da ters) yönde gerçekleştirilecek bir ölçümün sonucunu kesin biçimde bilir. (Ve örneklerimin bir miktar tuhaf oluşu gerçeği canınızı sıkmasın; ana nokta kuraldır!)

Öyleyse yeniden Şekil 23.7'ye bakalım. Gerçek bir şey kendisini arkadaşımdan meslektaşıma aktardı fakat (yalnızca 2 bitlik) klasik kanal geri kalan $\aleph_0$ bit bilginin aktarılmasıyla ilgili son derece dar bir alan sunar. Bu, arkadaşımdan bana küçük bir germe, benden EPR çiftinin başlangıç noktasına, zamanda geri giden uzun bir germe ve o başlangıç noktasından Titan'daki meslektaşıma doğru bir diğer uzun germeden oluşur. Aslında bu, aramızdaki, gerekli "bilgi" miktarını destekleme yeteneğine sahip *tek* bağlantı halkasıdır. Bundaki tehlike elbette, geçmişe doğru 5 yıl esneyen bir germe içermesidir!

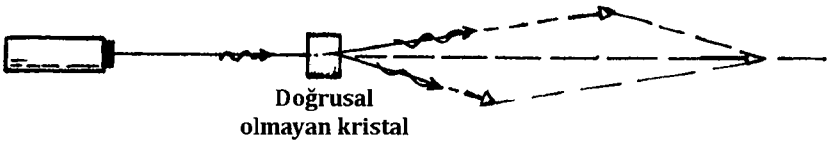
23.10 Kudolanıklık

Sıradan bilginin zamanda geriye doğru yayılabileceği (ya da EPR etkilerinin klasik bilgiyi ışıktan hızlı göndermekte kullanılabileceği; daha ileriye bakın) fikrini desteklemeye çalışmadığımı son derece belirgin hale getirmek zorundayım. Bu tür şeyler kesinlikle hiçbir bağlantıya sahip olmamamız gereken paradoks biçimlerinin tümüne yol açar (böylesi bir konuya §30.6'da döneceğim). Bilgi, olağan anlamda, zamanda geriye doğru yolculuk edemez. Bazen *kuantum bilgisi* olarak anılan tümüyle farklı bir şey hakkında konuşuyorum. Şimdi, bu terimle, diğer bir deyişle "bilgi" sözcüğünün görünümüyle ilgili bir zorluk söz konusudur. Bana göre "kuantum" öneki sıradan bilgiyle olan ilişkiyi yumuşatmakta yetersiz kalır, böylece buna ilişkin yeni bir terim[15] benimsemeyi öneriyorum:

KUDOLANIKLIK.

En azından bu kitapta, genellikle "kuantum bilgisi" olarak anılan şeye *kudolanıklık* biçiminde atıfta bulunacağım. Terim "kuantum mekaniği"ni ve

[15] *Bkz.* Penrose, 2002a.



Şekil 23.8 Parametrik aşağı dönüşüm. Bir lazerden ortaya çıkıp uygun bir "çizgisel olmayan kristal" üzerine çarpan bir foton dolanık bir foton çifti üretir. Bu dolanıklık kendisini, ikincil fotonların ilişkilendirilmiş kutuplanma durumlarına ait EPR doğasında fakat aynı zamanda kendilerine ait 3–momentum durumlarının toplamının olay konusu fotonunkine eşit olma zorunluluğu gerçeğiyle ortaya koyar.

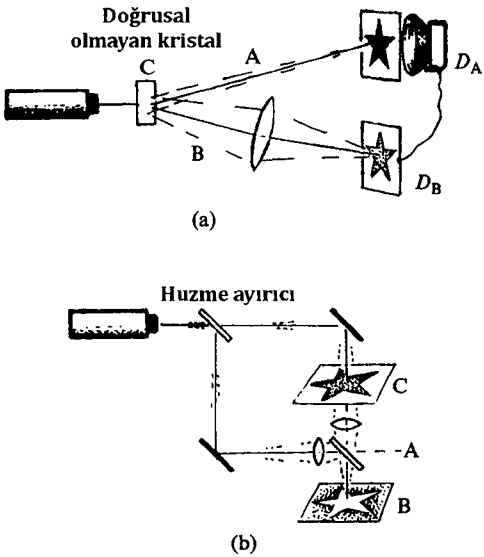
bu da "dolanıklığı" akla getirir. Bu oldukça uygundur. Bu, kudolanıklığın ilgili olduğu şeydir. Ayrıca kudolanıklık bilgiyle oldukça ilgilidir fakat bilginin kendisi değildir. Bu kadarı, kudolanıklığa ilişkin geçmiş yönlü kanalların tıpkı gelecek yönlü kanallar gibi kullanılabilmesi gerçeği nedeniyle açıktır. Kudolanıklık aktarılabilir bilgi olsaydı bu durumda geçmişe mesaj aktarmak olası olabilirdi fakat değil. Bununla birlikte kudolanıklık, olağan bilgi kanallarıyla bağlantılı olarak, bunların olağan sinyallemenin tek başına gerçekleştiremediği şeyleri gerçekleştirmesine olanak sağlamak üzere kullanılabilir. Bu çok hassas bir şeydir. Bir anlamda kuantum hesaplama ve kuantum kriptografi ve de kesinlikle kuantum ışınlama yaşamsal biçimde kudolanıklığın özellikleri ve onun olağan bilgiyle iç ilişkisine bağlıdır.

Anlayabildiğim kadarıyla kudolanık bağlantıları tıpkı olağan bilgi bağlantılarındaki gibi her zaman ışık konilerince sınırlanır fakat etkili bir "uzaysal yayılım" gerçekleştirmek üzere zamanda geriye ve ileriye doğru zikzak yapabilme yeni özelliğine sahiptir.[16] Kudolanık bilgi olmadığından bu, gerçek sinyallerin ışıktan hızlı gönderilmesine izin vermez. Ayrıca kudolanıklık ve olağan uzamsal geometri arasında (Riemann küresi ve spin arasında şekiller 22.10, 22.14, 22.16'da resmedilen bağlantılar yoluyla) bir ilişki de, bu ilişki zaman yönünün ilginç sonuçlar doğuran uzamsal biçimde bir ters çevrilmesi olmak üzere, söz konusudur.[17] Bunları tüm ayrıntılarıyla incelemek bizi yolumuzdan oldukça saptırır.

Kudolanıklık fikrinin en dolaysız kullanımlarından biri, *parametrik aşağı dönüşüm* olarak anılan işlem uyarınca bir çift dolanık fotonun üretildiği belirli deneylerdir (*bkz.* Şekil 23.8). Bu, bir lazer tarafından üretilmiş olan bir foton, kendisini bir çift fotona dönüştüren belirli türde ("doğrusal olmayan") bir kristale girdiğinde ortaya çıkar. Yayılan bu fotonlar

[16] *Bkz.* Jozsa, 1998.

[17] *Bkz.* Penrose, 1998.



Şekil 23.9 Bir görüntünün kuantum etkileri yoluyla aktarımı. (a) Dolanık A, B fotonları C'deki parametrik aşağı dönüştürücü tarafından üretilir. A fotonu D_A algılayıcısına erişmek üzere özel biçimli bir delikten geçmek zorundayken B kendisini D_B algılayıcısında odaklayacak biçimde konumlanmış bir mercekten geçer. Algılayıcı konumları uygun biçimde bağlantılı olarak derece derece hareket ettirilir ve her ikisi de kaydettiğinde D_B'nin konumu not edilir. Pek çok kez yinelenir, D_A kayıt yaparken yalnızca B'ye ait konumlar hesaba katılmak üzere, D_B tarafından gitgide delikle ilgili bir görüntü oluşturulur. (Şematik olarak burada bu daha çok, D_B'ye yalnızca D_A kayıt yaptığında aktif hale gelen sabit fotografik bir levha şeklinde sahip olunan biçimde gösterilir.) Kudolanıklık, C'de, fotonu yön olarak olduğu kadar zamanda da geriye doğru yansıtan bir aynaymışçasına saptanarak konumlandırılan mercek tarafından gösterilir. (b) Şekil 22.6'daki Elitzur–Vaidman bomba testinin (yatay bir çizgide yansıtılması gereken) bir uyarlamasının kullanıldığı alternatif bir şema. B'deki fotografik levha fotonu yalnızca, foton C'deki kalıp tarafından "durdurulmuş olup" aslında alttaki yolu izlediğinde elde eder.

çeşitli yollarla dolanık hale getirilir. Momentumları toplamı olay konusu fotonun momentumuna eşit olmak zorundadır ve ayrıca kutuplanmaları daha önce üstte verilmiş olan örneklerdeki gibi birbirleriyle bir EPR biçiminde ilişkilidir.

Özellikle çarpıcı bir deneyde, fotonlardan biri (A fotonu), kendisiyle ilgili D_A algılayıcısına doğru hızlanırken belirli biçimdeki bir delikten geçer. Diğer foton (B fotonu), kendisini uygun biçimde D_B algılayıcısına odaklayacak şekilde konumlandırılmış bir mercekten geçer. D_B algılayıcısının konumu her foton çifti yayıldığında hafif biçimde hareket ettirilir. Olay şematik olarak Şekil 23.9a'da gösterilmektedir. D_A A fotonunun ve ayrıca D_B B fotonunun ulaştığını kaydettiğinde D_B'nin konumu kaydedilir.

Bu, pek çok kez yinelenir ve D_B algılayıcısı tarafından git gide bir görüntü oluşturulur. D_A eşzamanlı biçimde kayıt yaparken yalnızca B'ye ait konumlar hesaba katılır. A'nın karşılaştığı delikle ilgili biçim, B fotonu delikle hiçbir zaman dolaysız biçimde karşılaşmamasına rağmen, derece derece D_B'de oluşturulur! D_B sanki deliğin biçimini, zamanda geriye doğru kristaldeki C yayınım noktasına ve sonra zamanda ileriye doğru A fotonu kılığında bakarak "görür". Bunu yapabilir çünkü bu olaydaki "görme" işlemi kudolanıklık tarafından gerçekleştirilir. Zamandaki bu geriye ve ileriye doğru uçuş tam olarak kudolanıklığın yapmasına izin verilen türde bir şeydir. Merceğin kuvveti ve konumlanışı dahi kudolanık biçiminde anlaşılabilir. Mercek konumunu elde etmek üzere C yayınım noktasına yerletirilmiş bir ayna düşünün. Mercek (pozitif bir mercek) deliğe ilişkin, bu aynada C'de yansıtılan görüntünün D_B algılayıcısına odaklanacağı biçimde yerleştirilir. Elbette C'de gerçek bir ayna yoktur fakat kudolanık bağlantıları bir aynada yansıtılmış gibi davranır fakat uzayda olduğu kadar zamanda da yansıtılır.[23.11]

Okurun bu deneyi zorlama bulması durumu söz konusuysa bunun gerçek bir etki olduğunu açık şekilde belirtmeliyim. Bu durum, Maryland'deki Baltimore Üniversitesi'nde gerçekleştirilen deneylerle[18] başarılı biçimde doğrulanmıştır. En iyi şekilde kudolanık biçiminde anlaşılabilecek parametrik aşağı dönüşümü de içeren ilgili başkaca pek çok deney de gerçekleştirildi.[19]

Öte taraftan Şekil 23.9a'da gösterilen genel biçimli durum "esasen kuantum mekaniksel" olarak değerlendirilebilir. C'de klasik parçacıkları uygun yönlerde çiftler halinde, kırmaktan ayrı olarak basitçe fırlatan bir aygıt düşünülebileceği için benzer sonuçlar elde edilebilir. Bunu, Şekil 22.6'da gösterilmiş olan Elitzur–Vaidman düzeneğinin (yatay biçimde yansıtılan) geliştirilmiş bir biçimini kullanarak iyileştirebiliriz; *bkz.* Şekil 23.9b. Artık bir seferde yalnızca bir foton söz konusudur. O, fotografik B levhasında yalnızca, girişim fotonla ilgili alternatif rota C'deki deliği kaçırdığı zaman yok olduğunda kaydedilebilir.

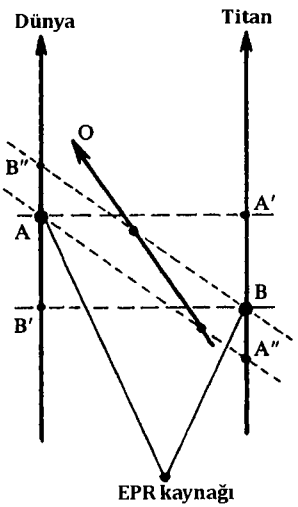
Şimdi, daha önce ele alınan Stapp ve Hardy örneklerindekine benzer olağan bir EPR etkisine yeniden bakalım. Kuantum **R** işleminin olağan uygulamasında, içerisinde her biri uzayzaman boyunca belirli bir t değerine karşılık gelip paralel zaman dilimleri sağlayan t zaman koordinatlarının

[23.11] Kudolanıklık ya da bunun dışındaki fikirleri kullanarak bunun daha tam bir açıklamasını verebilir misiniz bakın.

[18] *Bkz.* Shih vd., 1995.

[19] Bu önemli alana ilişkin bir tadımlık olarak örneğin *bkz.* Gisin vd., 2003.

bulunduğu belirli bir referans sistemi düşünülebilir. Normal yöntem, bir EPR çiftinin bir üyesi ölçüldüğünde diğerinin durumunun, daha sonraki bir ölçümün dolanık bir durum yerine (dolanmamış) indirgenmiş bir durumda görüleceği şekilde indirgendiğiyle ilgili (görelilikçi olmayan) bakış açısını benimsemektir. Bu tür bir açıklama örneğin, bana ait belirli EPR örneklerinde kullanılabilir. Güneşe göre durağan bir referans çerçevesindeki bakış açısından, ölçümü ilk olarak gerçekleşenin, Titan'daki *meslektaşım* olduğunu ve onun benim burada, dünyadaki ölçümümden bir 15 dakika kadar önce ölçüm yaptığını varsayalım. Öyleyse bu tabloda durum indirgeyen meslektaşımın ölçümüdür ve bunun ardından ben, dolanmamış durumdaki bir parçacık üzerinde ölçüm gerçekleştiririm. Bunun yerine fakat tüm durumun, Titan'daki meslektaşımdan bana doğru olan genel yönde büyük bir hızla (diyelim ki $\frac{2}{3}c$) yol almakta olan bir O gözlemcisinin perspektifinden açıklandığını düşünebiliriz. O'nun bakış açısından EPR çifti üzerinde, bu yolla durumu indirgeyerek ölçüm yapan ilk kişi ben olurken indirgenmiş dolanmamış durumu ölçen kişi meslektaşım olur (Şekil 23.10) (*bkz.* §18.3, Şekil 18.5b). Bağlı olasılıklar her biçimde aynıdır fakat O, "gerçekliğe" ilişkin ben ve meslektaşımın daha önceden sahip olduğumuz tablodan farklı bir tabloya sahip olur. **R**'yi *gerçel* bir işlem olarak düşünürsek özel görelilik ilkesiyle çelişki içinde görünürüz çünkü durumun indirgenmesini etkileyenin hangimiz olduğu ve indirgenme sonrası indirgenmiş durumu hangimizin gözlemlediğiyle ilgili olarak uyuşmayan iki bakış söz konusudur.



Şekil 23.10 Görelilik ve durum indirgemenin nesnelliği arasında çelişki? Dünya ve Titan'daki algılayıcılar ve Titan'a dünyadan daha yakın bir kaynağın bulunduğu bir EPR olayına ilişkin uzayzaman diyagramı. Güneşe göre durağan olan eylemsiz bir çerçevedeki perspektiften ilk olarak Titan'daki algılayıcı (B'de) kaydeder ve bu eşzamanlı biçimde dünyadaki (B') durumu indirger. Yalnızca bundan sonra dünya üzerinde (A'da) artık karıştırılmamış olan bir durumun algılanışı (Titan'daki A'ile eşzamanlı olarak) söz konusu olur. Bununla birlikte Titan'dan dünyaya doğru oldukça yüksek hızda yolculuk eden bir O gözlemcisine göre algılama ilk olarak dünyada (A'da, O'nun "eğimli" eşzaman çizgileri uyarınca Titan'daki A''ile eşzamanlı olarak) ortaya çıkar ve Titan indirgenmiş dolanmamış durumu (B'de dünya üzerindeki B''ile eşzamanlı olarak) elde eder.

Buradan EPR etkilerinin, görünüşteki nedensel olmayan doğalarına karşın, bir alıcının vericiden uzaysal ayrılmasındaki davranışını etkileyebileceği düşünülebilen sıradan bilgiyi, nedensel olmayan bir biçimde aktarmak üzere dolaysız olarak kullanılamadığı sonucunu çıkarabiliriz. İçerisinde ilk olarak "alma olayı"nın ortaya çıktığı bir referans çerçevesi her zaman seçilebilir ve sonrasında "verici" incelemek üzere yalnızca indirgenmiş duruma sahip olur. Bundan sonrası, dolanıklığın bir sinyalle ilgili olarak kullanılması için "çok geç" olur çünkü o zaten durum indirgenmesi tarafından yok edilmiştir.

Bu konular hakkındaki kudolanık perspektif nedir?[20] *Bkz.* §30.3. Bu tabloda, ölçümlerden birisini (benim ya da meslektaşımın) indirgemeyi etkiler ve diğeriniyse (meşlektaşımın ya da benim) indirgenmiş durumu ölçer biçimde düşünmek doğru değildir. İki ölçüm olayı da birbirine göre eşit konumdadır ve kudolanıklığı, ikisini birbiriyle ilişkilendirerek bu iki olay arasında bir bağlantı sağlar biçimde düşünürüz. Hangi olayın diğerinin öncesinde olarak görüldüğü fark etmez çünkü kudolanıklık geçmişe yayılır biçimde düşünüldüğü gibi eşit olarak geleceğe yayılır biçimde de düşünülür. Bilgiyi dolaysız biçimde taşıma yetisinden yoksun olarak kudolanıklık görelilikçi nedenselliğin normal kısıtlamalarına saygı duymaz. O yalnızca farklı ölçüm sonuçlarının bağlı olasılıkları üzerindeki sınırlılıkları etkiler.

Kudolanıklık, bu tür kafa karıştırıcı kuantum deneyleriyle ilgili "anlam oluşturmak"ta kullanışlı bir fikir olsa da ne bu görüşlerin ne kadar ileri taşınabileceğinden ne de kudolanıklık etkilerinin ne isabetle betimlenebileceğinden eminim. Kudolanıklık fikri kuantum ölçümü konusunu kesinlikle çözümlemez fakat bize küçücük de olsa bir şey söylüyorsa bu, **R**'nin **U**'dan devralacağı koşullar üzerinedir. Bu konu 29 ve 30. bölümlerde, özellikle §30.12'de daha ayrıntılı olarak incelenecek fakat zihnimde kudolanıklığın bundaki tam rolü hâlâ yeterince açık değil. Daha umut verici bir bağlantı burgaç kuramına ilişkin fikirlerin bazılarıyla olan bağlantıdır. Bunlar §33.2'de kısaca incelenecek.

[20] *Krş.* Aharonov ve Vaidman, 2001; Cramer, 1988; Costa de Beauregard, 1995; ve Werbos ve Dolmatova, 2000.

24

DIRAC ELEKTRONU VE KARŞI–PARÇACIKLAR

24.1 Kuantum kuramı ve görelilik arasındaki gerilim

§23.10'daki değerlendirmeler henüz yalnızca kuantum mekaniğinin ilkeleri ve göreliliğinkiler arasındaki ilişkiyle ilgili derin konulardan bazılarına değinmeye başladı. Aslında önceki üç bölümde kuantum kuramının işlediği ayrıntılı yöntemi sunarken, Einstein ve Minkowski'nin bize zaman ve uzayın karşılıklı bağlılığı üzerine öğrettiği (17. bölümde açıklandığı üzere) önemli dersleri göz ardı eder görünen son derece görelilikçi olmayan bir bakış açısı benimsedim. Standart yaklaşım zamanın uzaydan farklı biçimde ele alındığı bir "gerçeklik tablosu"nu benimser. 22. bölümün başlarında belirtildiği üzere tek bir dışsal zaman koordinatı mevcuttur fakat her parçacığın kendine ait kümeyi gerektirdiği pek çok uzamsal koordinat söz konusudur. Bu asimetri genellikle, yalnızca daha tam bir görelilikçi düzene yapılan bir yaklaşıklık tahmini olan görelilikçi olmayan kuantum kuramının "geçici" bir özelliği olarak değerlendirilir. Bu ve bunu izleyen iki bölümde kuantum kuramının ilkelerini özel göreliliğinkilerle ciddi biçimde bir araya getirmeye çalıştığımızda ortaya çıkan derin konulara tanıklık etmeye başlayacağız. (Einstein'ın, kütleçekim ve uzayzaman eğriliklerinin de tabloya dahil edildiği *genel* göreliliğiyle olan daha hırslı birlik epeyce daha fazla bir şey gerektirir ve henüz arayışa ilişkin en umut verici çizgiler üzerine bir fikir birliği söz konusu değildir. Bu çizgilerin bazılarına 28. bölümde ve 30 ile 33. bölümler arasında yöneleceğim.)

Kuantum kuramıyla özel göreliliğin birleşmesi sonucu ortaya çıkan kuramın yalnızca kuantum parçacıklarına ilişkin bir kuram olmayıp aynı zamanda kuantum *alanlarına* ilişkin bir kuram oluşu, bu birleşmenin belirli bir özelliğidir. Buna ilişkin neden, göreliliğin gündeme getirilmesinin, tekil parçacıkların daha fazla korunmayıp kendi *karşı–parçacıklarıyla* bağlantılı olarak yaratılıp yok edilebilmesini ima etmesi gerçeğiyle özetlenebilir. Bu yorum bir miktar açıklama gerektirir. Görelilikçi bir kuantum kuramında "karşı–parçacıklara" niçin gerek duyulur? Karşı–parçacıkların

varlığı bizi niçin parçacıklara ilişkin bir kuantum kuramından alanlara ilişkin bir kuantum kuramına yöneltir? Bu bölüm büyük oranda bu iki soruyu fakat özellikle ilkini Dirac'ın elektronlara ilişkin matematiksel tanımlamaya dair müthiş öngörülerine özel atıfta bulunarak yanıtlamayı amaçlar.

Kuantum alan kuramının kendisi 26. bölümde tartışılacak ve özel görelilik ve kuantum kuramı arasındaki, parçacık fiziği konusunu git gide daha ayrıntılı matematiksel düzene yönlendiren yaygın gerilimin bir kısmına göz atacağız. Kendimizi uzun ve etkileyici bir yolculuk için ayartılmış olarak bulacağız. Gerilim 25. bölümde tartışılan parçacık fiziğine ilişkin standart modelle birlikte uygun biçimde çözümlenebildiğinde sonuçtaki kuramın gözleme dayalı gerçekle son derece dikkat çekici bir uyuma sahip olduğu görülür.

Yine de pek çok bakımdan bu gerilim olduğu gibi kaldı ve hiçbir zaman tam olarak çözümlenmedi. Açıkçası kuantum alan kuramı (en azından bu kurama ilişkin bildiğimiz önemsiz olmayan tam olarak anlamlı örneklerin çoğunda) *matematiksel olarak tutarsız*dır ve hesaba dayalı anlamlı işlemler sunmak için çeşitli "hileler" gerekir. Bu hilelerin yalnızca, bize belki de derin bir seviyede temelden çatlamış olabilen matematiksel bir yapı içinde ileriye doğru ağır aksak ilerleme olanağı sunan açık kapatıcı işlemler mi olduğu yoksa aslında Doğanın kendisine ilişkin hakiki anlamlara sahip derin gerçekleri mi yansıttığını bilmek oldukça hassas bir değerlendirme konusudur. Temel fizikteki güncel ilerleme girişimlerinin çoğu aslında bu "hileler"in pek çoğunun temel olduğunu kabul eder. Bu bölümde ve sonrakilerde bu tür zekice düzenlerle ilgili çeşitli örnekler göreceğiz. Bunların bazıları gerçekten Doğanın bazı sırlarını aydınlatır görünür. Öte taraftan elbette Doğanın, diğer bazılarına oldukça az sempati duyduğu açığa çıkabilir!

24.2 Karşı–parçacıklar niçin kuantum alanlarını ima eder?

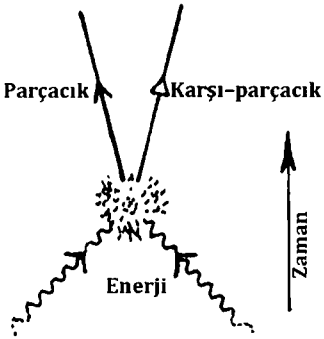
Görelilikçi bir kuantum kuramındaki karşı–parçacıklara ilişkin kuramsal beklenti Doğanın artık gözlemleme yoluyla iyice desteklenen gerçek gizemlerinden birisini aydınlatmış görünür. Karşı–parçacıklar için kuramsal nedenlere ilişkin bir şeyi daha sonra bu bölümde özellikle §24.8'de göreceğiz. Şimdilik bu konuya yönelmek yerine ilgiyi üstte ortaya konmuş olan iki sorudan ikincisiyle sınırlayalım: karşı–parçacıkların varlığı bizi niçin parçacıklara ilişkin bir kuantum kuramından uzaklaştırıp alanlara ilişkin bir kuantum kuramına yöneltir? Şimdilik yalnızca her tipteki par-

çacığa ilişkin bir karşı–parçacık bulunduğunu kabul edelim ve bu kayda değer gerçeğin sonuçlarını kabullenmeye çalışalım.

Bir karşı–parçacığın kilit özelliği (en azından kütleye sahip bir parçacığın karşı–parçacığı), parçacık ve karşı–parçacığın bir araya gelebilmesi ve birleşik kütleleri Einstein'ın $E = mc^2$'si uyarınca enerjiye çevrilmiş olmak üzere birbirlerini yok edebilmesidir; diğer taraftan uygun biçimdeki küçük bir alanda yerelleşmiş bir sistem içine yeterli enerji sunulursa bu durumda bu enerjinin kendi karşı–parçacığıyla birlikte bir parçacık yaratmaya hizmet edebilmesine ilişkin büyük bir olasılık ortaya çıkar. Bu nedenle karşı–parçacıkların üretimine ilişkin bu potansiyelle birlikte her zaman git gide daha fazla parçacığın, her parçacık kendi karşı–parçacığıyla birlikte görünmek üzere, tabloya girme olasılığı söz konusudur. Böylece görelilikçi kuramımız kesinlikle ne yalnızca tekil parçacıklara ilişkin ne de herhangi sabit sayıdaki parçacıklara ilişkin bir kuram olabilir. (Kuantum kuramında, özellikle 25 ve 26. bölümlerde göreceğimiz üzere, bir şeyin olmasına ilişkin potansiyel söz konusuysa, *örn.* sayısız parçacık/karşı–parçacık çiftinin üretimi, bu durumda bu potansiyel olasılık aslında kuantum durumuna kendi katkısını yapar.) Bu yüzden görelilikçi parçacıklara ilişkin bir kuramla ortaya çıkma girişiminde kişi, sınırsız sayıda parçacık yaratmakla ilgili potansiyel bulunan bir kuram sunmaya zorlanır.

Bu bizi bölümler 21–24'e ilişkin çerçevenin dışına çıkarır fakat 26. bölümde alanlara ilişkin kuantum kuramının bu tür davranışa nasıl olanak sağladığını göreceğiz. Aslında genel bir bakış açısı uyarınca böylesi bir kuramdaki öncüller kuantum alanları olarak kabul edilir, parçacıkların kendileri yalnızca "alan uyarımları" olarak ortaya çıkar. Yine de bunun kuantum alan kuramını gözden geçirmenin tek yolu olmadığını bulacağız. 25 ve 26. bölümlerde yöneleceğimiz Feynman grafik yaklaşımında, aslında sınırsız sayıda parçacığın yaratılabildiği ya da yok edilebildiği kuantum alan kuramını oluşturmaya yönelen temel işlemlerle ilgili güçlü bir "parçacık benzeri" perspektif bulunur.

Hassas bir görelilikçi kuantum kuramının bir özelliği olarak parçacık yaratımının temelinde yatan nedenleri bir miktar ayrıntılandırmak açıklayıcı olur. Şimdilik hâlâ karşı–parçacıkların var olduğunu varsayıyorum. Esasen parçacık yaratımı beklentisinin nedeni Einstein'ın ünlü $E = mc^2$'sine dayanır. Temelde enerji (c^2 kullanılmakta olan enerji ve madde birimleri arasında yalnızca bir "dönüşüm sabiti" olmak üzere) maddeyle değiştirilebilirdir. Yeterli enerji bulunduğunda bir parçacığın kütlesi bu enerjiden yaratılabilir.



Şekil 24.1 Bir parçacık ve ona ait karşı-parçacık enerjiden yaratılabilir. Parçacığın korunmuş olan toplamsal kuantum sayılarının tümü, bu niceliklerin yaratım işleminde korunduğunu garanti etmek üzere karşı-parçacık için işaret değiştirir.

Bununla birlikte parçacık kütlesi üretme araçlarına sahip olmak kendiliğinden parçacığın kendisini canlandırmaya yeterli değildir. Elektrik yükü (ya da başka şeyler, *örn.* baryon sayısı) gibi, fiziki bir işlemde değişme yetisine sahip olarak görülmeyen *korunan* (toplamsal) çeşitli kuantum sayıları olasılıkla mevcuttur. Örneğin yüklü bir parçacığı saf enerjiden basit biçimde canlandırmak yük korunumunun (ve aynısı korunan diğer nicelikler için de geçerlidir, örn baryon sayısı, vb) bir ihlalini gösterir. Bununla birlikte her tür parçacık için ona karşılık gelen, kendisiyle ilgili olarak toplamsal her kuantum sayısının işaretinin ters çevrildiği bir karşı-parçacığın bulunduğu varsayımıyla birlikte, bir parçacık kendi karşı-parçacığıyla birlikte saf enerjiden yaratılabilir (*bkz.* Şekil 24.1). Bu işlemdeki tüm toplamsal kuantum sayıları korunur.

Karşı-parçacığın durağan kütlesi öte taraftan (durağan kütle toplamsal olmamak üzere) orijinal parçacığınkiyle aynıdır. Bu işlemde hem parçacığı hem de ona ait karşı-parçacığı yaratmak üzere yeterli enerjiye, en azından parçacığın kendisine ilişkin durağan kütle/enerjininkinin iki katına gerek duyarız. Diğer taraftan verili tipte bir parçacık kendi karşı-parçacığı tipindeki diğer bir parçacığa rastlarsa bu durumda bunların birbirlerini enerji açığa çıkararak yok etmeleri olasıdır. Yine, enerji tekil parçacığın durağan kütle/enerjisinin en az iki katı olmak zorundadır. Yaratma ya yok etme işlemlerinin her ikisinde de enerji bu değerden fazla olabilir çünkü parçacık ve karşı-parçacığın göreli hareket içinde olmaları olasıdır ve bu harekette toplama eklenecek bir enerji, kinetik enerji, bulunacaktır. Her iki olayda da karşı-parçacıkların varlığının aslında bizi, bölümler 21-23'te açıklandığı üzere, tekil parçacıklara ilişkin kuantum kuramından uzaklaşmaya zorladığını görürüz.

24.3 Kuantum mekaniğinde enerji pozitifliği

Şimdi sonuç olarak bizi, görelilikçi bir kuantum kuramındaki karşı-parçacıklara ilişkin gerekliliğe yönlendiren yola dönelim. Kuantum kuramına ilişkin çerçeveyi öncekine göre bir şekilde daha derin bir perspektifle incelemeye gerek duyacağız. İlk olarak Schrödinger denkleminin temel biçimini anımsayalım:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi.$$

Kuantum sistemimizin enerjisiyle ilgili olarak belirli bir E değerine sahip olmasına gerek duyduğumuzu düşünelim; böylece ψ, E öz değereiyle birlikte bir *enerji öz durumu* olur, diğer bir deyişle ($\mathcal{H}$ sistemin toplam enerjisini tanımlayan işlemci olmak üzere)

$$\mathcal{H}\psi = E\psi$$

ifadesine gerek duyarız. Kuantum mekaniksel **R** işlemi uyarınca (§§22.1, 5) bu tür bir ψ durumu, bir sistem üzerinde ona, karşılığında "E" belirli yanıtını aldığımız, "enerjin nedir?" sorusunu soran bir ölçüm gerçekleştirmiş olmamız sonucu ortaya çıkar. Böylece Schrödinger denklemi bize

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi$$

ifadesini verir. Bu denklemin çözümleri, C t'den *bağımsız* olmak üzere (diğer bir deyişle yalnızca uzamsal değişkenlerin karmaşık bir fonksiyonu),

$$\psi = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$$

biçimine sahiptir.[24.1]

Şu halde, E enerji değerinin pozitif bir sayı olması önemlidir. Negatif enerji durumları kuantum mekaniğinde pek çok sebep nedeniyle "kötü haber"dir (varlıkları felaket doğuran kararsızlıklara[1] yol açar).[24.2] Aslında E enerjisi pozitif olduğunda t'ye ilişkin üsteki ($\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$'deki) $-\mathrm{i}E/\hbar$ katsayısı i'nin *negatif* bir katıdır. §9.5'ten bu doğadaki $\psi(t)$ fonksiyonları ya da bu

[24.1] Bunun gerçekten bir çözüm olduğunu sınayın.

[1] Felaketten teknik olarak, enerji negatif olabilen sabit bir E_0 değerinden büyük anlamına gelen "alttan sınırlı" denen şey olduğunda kaçınılır. Böylesi bir durumda enerjiyi, Hamiltona E_0 ekleyerek "yeniden normalleştir"ebiliriz. Böylece sonuçtaki enerji öz değerlerinin tümü artık pozitif olacaktır.

[24.2] Hamiltona bir K sabiti eklemenin niçin basit olarak, Schrödinger denklemine ait tüm çözümlerin aynı katsayıyla çarpılması etkisine sahip olduğunu açıklayın. Bu katsayıyı bulun. Bu, kuantum dinamiğini büyük ölçüde etkiler mi? Bir kuantum sistemine ilişkin kütleçekimsel etkiyle ilgilendiğimizi düşünün. Bu koşullarda, niçin enerjiyi bu yolla basitçe "yeniden normalleştir"emeyiz?

tür fonksiyonlara ilişkin çizgisel birleşimler (bir miktar kafa karıştırıcı biçimde) *pozitif frekans*tadır denir.

Ayrıca §9.3'te, bir $f(x)$ fonksiyonunu açık olarak tümüyle farklı bir biçimde, diğer bir deyişle Riemann küresine ilişkin geometri biçiminde, kendi pozitif ve negatif frekans kısımlarına böldüğümüzü anımsayın.[2] Orada bunu saf matematiğin zarif bir parçası olarak ele almıştık. Gerçel çizgi Riemann küresinin ekvatoru etrafında bir kez dolanmış biçimde düşünülebilir. f fonksiyonunun pozitif frekanslı kısmı, holomorfik olarak (*bkz.* §7.1), güney yarıküreye uzatılan kısım olarak anlaşılırken benzer şekilde negatif frekanslı kısım kuzey yarıküreye uzatılan kısım olarak anlaşılmaktaydı. Şimdiyse bu kavramın büyük önemine ilişkin dikkat çekici bir *fiziki* nedene ulaşmış olduk. Herhangi özgüvenli bir dalga fonksiyonu, kendisinin enerjiye ait bir öz durum olması gerekmese de, enerji öz durumlarının doğrusal bir birleşimi biçiminde ifade edilebilir olmak zorundadır ve her enerji öz değeri pozitif olmak durumundadır. Bu nedenle güvenli herhangi bir dalga fonksiyonunun zaman bağımlılığı aslında bu yaşamsal önemdeki pozitif frekans özelliğine sahip olmak zorundadır. Bana öyle geliyor ki, bir taraftaki temel bir fiziki gereklilikle diğer taraftaki şık bir matematiksel özellik arasındaki bu dikkat çekici ilişki, çok yönlü matematiksel fikirlerle gerçek evrenimizin iç işleyişi arasındaki derin, incelikli ve aslında gizemli ilişkinin müthiş bir örneğidir.

Görelilikçi olmayan kuantum mekaniğinde pozitif frekanslı olmaya ilişkin bu gereklilik, Hamiltonın klasik enerjilerin pozitif olduğu makul bir fiziki problemden kaynaklanması koşuluyla, kuramın doğal bir özelliği olarak otomatik biçimde ortaya çıkma eğilimindedir. Örneğin, görelilikçi olmayan μ (pozitif) kütleli tekil bir serbest (spinsiz) parçacık durumunda $\mathcal{H} = p^2/2\mu$ Hamiltonına (§20.2, §21.2'yi anımsayın) sahip oluruz. p^2 ifadesi ve buradan hareketle $\mathcal{H}$ Hamiltonının kendisi "pozitif belirli"[3] olarak adlandırılan şeydir (§§13.8, 9). Klasik olarak bu, p^2 bir kareler toplamı olduğu için ortaya çıkar ve bu negatif olamaz: $p^2 = \mathbf{p} \bullet \mathbf{p} = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2$. Kuantum mekaniksel olarak, $\nabla = (\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$ olmak üzere, $\mathbf{p}$'nin yerini $-i\hbar\nabla$'yla değiştirmek zorundayız ve artık "pozitif belirli" savı (normalleşebilir durumlarla ilgili olarak, diğer bir deyişle uygun bir $\mathbf{H}$ Hilbert uzayının elemanları için) $-\nabla^2$ işlemcisine ilişkin *öz değerler*e ait olur ve bunlar yine esas olarak klasik durumdaki aynı sebepten kaynaklı negatif olamaz.[24.3], 4

---

[2] Orada f'nin tekil olması olası olduğundan, ∞ noktasının ele alınışıyla ilgili bir incelik söz konusudur. §9.7'deki hiperfonksiyonel ele alış uygundur; *bkz.* Bailey,1982.

[3] Açıkçası, sürekli öz değer spektrumu sıfıra gidip onu içerdiğinden, pozitif yarı belirli demeliyiz.

[24.3] Burada Schrödinger denklemi $\partial\psi/\partial t = (i\hbar/2\mu)\nabla^2\psi$'dir. İlk olarak E enerjili bir enerji öz

24.4 Görelilikçi enerji denklemindeki zorluklar

Şimdi *görelilikçi* bir kuantum parçacığını ele alalım. Bu durumda Hamilton enerjiyle ilgili $p^2/2\mu$ değil fakat görelilikçi

$$[(c^2\mu)^2 + c^2p^2]^{\frac{1}{2}}$$

ifadesinden elde edilir. Bu ifade, μ artık parçacığın durağan kütlesi olmak üzere, dolaysız biçimde §18.7'deki $(c^2\mu)^2 = E^2 - c^2p^2$ ifadesinden gelir. Bu ifadenin pek de $p^2/2\mu$ gibi görünmediği kaygısını taşıyan okuyucu alıştırma [18.20]'ye başvurmalıdır. O bize görelilikçi ifademizin, $[(c^2\mu)^2 + c^2p^2]^{1/2}$'nin bir üslü seri açılımından, Einstein'ın ünlü $E = mc^2$'sini bir ilk terim olarak gündeme aldığını söyler. Bu terim parçacığın durağan kütlesinden gelen enerji katkısıdır ve parçacığın hareketine ilişkin kinetik enerjiye ektir. İkinci terim bize aslında Newtoncı $p^2/2\mu$ (kinetik enerji) Hamiltonını verir.

Bu yolla okurun görelilikçi Hamilton seçimimize ilişkin güveni tazelenir! Yine de Hamiltonımızla ilgili olarak bu gerçek üslü seri ifadesini kullanma girişimi, özellikle $p^2 \geq \mu^2$ olduğunda klasik serinin yakınsamaması nedeniyle şüphesiz kullanışsız olur. Buna rağmen $[(c^2\mu)^2 + c^2p^2]^{1/2}$ ifadesindeki karekökün (yarım üs) kendisine ait derin zorlukları pozitif frekans gerekliliğini korumakla ilişkili olarak getirdiğini göreceğiz. Bununla ilgili önemli bir şeyi anlamaya çalışalım.

İfadelerimizi gereksiz şekilde doldurmaktan kaçınmak üzere ışık hızının bir olduğu,

$$c = 1,$$

olduğu birime döneceğim ve böylece artık görelilikçi Hamiltonımız (durağan enerjiyi içererek)

$$\mathcal{H} = (\mu^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$$

olacak. Kuantum mekaniğinde p^2'nin gerçekten ikinci derece kısmi türev işlemcisi $-\hbar^2\nabla^2$ olduğunu aklımızda tutmak zorundayız, böylece bir kısmi türev işlemcisinin karekökü olan $(\mu^2 - \hbar^2\nabla^2)^{1/2}$ ifadesine gerçekten tutarlı

---

durumuna ilişkin, $A = 2\mu\hbar^{-2}E$ olmak üzere, $-\nabla^2\psi = A\psi$'ye sahip olduğumuzu doğrulayarak, A'nın normalleşebilir bir durum için pozitif olması gerektiğini göstermek üzere $\int \bar{\psi}\nabla^2\psi \mathrm{d}^3x = -\int \nabla\bar{\psi}\cdot\nabla\psi \mathrm{d}^3x$ *Green teoremini* kullanın. (Diğer taraftan pozitif A için $-\nabla^2\psi = A\psi$'ye ilişkin, $\|\psi\|$ normunun sonlu kalacağı ve dilersek $\|\psi\| = 1$ biçiminde normalleştirebileceğimiz şekilde sonsuza doğru uygun biçimde azalarak kaybolan pek çok çözüm bulunduğu aslında doğrudur.) Dışsal kalkülüsün temel teoreminden, Green teoreminin nasıl türetildiğini gösterin.

[4] Kuantum mekaniği uygulamalarıyla ilgili *bkz.* Shankar, 1994. Genel bir tartışma için *bkz.* Arfken ve Weber, 2000.

bir anlam atamamız gerekirse dikkate değer bir matematiksel gelişkinliğe gerek duyacağız. (Zorluğun farkına varmak üzere örneğin, $\sqrt{(1-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2)}$ gibi bir şeye bir anlam yüklemeye çalışın.)[24.4]

Bu kareköklü ifadede çok daha ciddi bir zorluk mevcuttur çünkü o açık bir *işaret bulanıklığı* içerir. Klasik fizikte bu tür şeyler bizi kaygılandırmaz çünkü ele alınan nicelikler gerçel değerli olağan fonksiyonlardır ve pozitif değerleri negatif olanlardan ayrı tutabileceğimizi düşünebiliriz. Buna karşın bu, kuantum mekaniğinde o kadar da kolay değildir. Bunun nedeninin bir parçası kuantum dalga fonksiyonlarının karmaşık olması ve karmaşık sayılı bir ifadeye ilişkin iki karekökün, evrensel olarak uygun bir biçimde derli toplu şekilde "pozitif" ve "negatif"e ayrılma eğiliminde olmamasıdır (§5.4). Bu, kuantum mekaniğinin karmaşık fonksiyonlar üzerine etkiyen işlemcilerle ilgilenmesi gerçeğiyle bağlantılı olarak ele alınmalıdır ve karekök benzeri ifadeler basit şekilde yalnızca "pozitif kökünü alın" demekle çözülemeyen temel anlam bulanıklıklarına yol açabilir.

Bu zorluğu ifade etmenin başka bir yolu daha mevcuttur. Kuantum mekaniğinde, fiziki bir durumda "olabilecek" pek çok olası şeyin hepsinin kuantum durumuna katkıda bulunabileceği ve böylece bu alternatiflerin tümünün olan şey her neyse onun üzerinde bir etkiye sahip olacağı göz önünde bulundurulmalıdır. Karekök benzeri bir şey söz konusu olduğunda iki kökün her biri bir "olasılık" olarak hesaba katılmalıdır, böylece "fiziki olmayan negatif bir enerji" bile "fiziki bir olasılık" olarak göz önüne alınmak zorunda olur. Bu tür bir negatif enerji durumuna ilişkin potansiyel mevcut olur olmaz pozitif enerjiden negatife, felaket getiren bir kararsızlığa yol açabilen kendiliğinden bir geçişe ilişkin olabilirlik açığa çıkar. Görelilikçi olmayan serbest bir parçacık durumunda negatif enerji olasılığıyla ilgili bu soruna sahip olmayız çünkü pozitif belirli $p^2/2\mu$ niceliği bu kullanışsız kareköke sahip değildir. Bununla birlikte $(\mu^2+p^2)^{1/2}$ görelilikçi ifadesi, normalde negatif kareköklerden kurtulmak üzere açık bir işleme sahip olmamamız anlamında daha sorunludur.

Tekil bir serbest parçacık (ya da etkileşimli olmayan böylesi bir parçacık sistemi) durumunda bunun aslında gerçek bir zorluğa neden olmadığı açığa çıkar çünkü ilgiyi, tam da §21.5'te ele alınmış olan serbest Schrödinger denkleminin pozitif enerji düzlem dalga sonuçlarına ilişkin üst üste binmelere sınırlayabiliriz ve negatif enerji durumlarına hiçbir geçiş söz konusu olmaz. Bununla birlikte *etkileşimler*in varlığında artık durum bu değildir. Sabit bir elektromanyetik ardalan alanındaki tekil bir görelilikçi

[24.4] Fourier dönüşümlerini (§9.4) ya da üslü serileri ya da kontür integralleri ya da başka her neyse kullanarak bazı önerilerde bulunun.

yüklü parçacık için bile dalga fonksiyonu, genelde, pozitif frekanslı olmaya ilişkin koşulu sürdüremez. Burada, kuantum mekaniği ilkeleriyle göreliliğinkiler arasındaki gerilimi algılamaya başlarız.

§24.8'de göreceğimiz üzere büyük fizikçi Paul Dirac bu belirli gerilimi çözümlemek üzere bir yol buldu. Bir ilk adım olarak, belalı karekökün üstesinden müthiş ve beklenmedik bir biçimde gelen ustaca yapılmış ve derinlemesine kavrayışlı bir önermeyi, elektronla ilgili şu anki ünlü denklemini, ortaya koydu. Sonrasında bu, negatif enerjilerin elenip etkilerinin korkutucu bir öngörü, *karşı–parçacıkların* varlığı, tarafından üstlenildiği son derece orijinal bir bakış açısına yol açtı. Tüm bunları anlamak üzere, karekökün kendisinden kaynaklandığı görelilik kuramına ilişkin temel özelliğe geri dönelim.

24.5 $\partial/\partial t$'nin değişmez olmayışı

Görelilikçi durumdaki $(\mu^2 + p^2)^{1/2}$ Hamiltonını benimsemeye ilişkin belirgin gereksinimimizin altında yatan nedeni anımsayalım. Sonuç olarak bu, görelilikte $\partial/\partial t$, zaman ve uzayın ayrı ayrı değil fakat birleşik bir "uzayzaman"a ilişkin belirli görünümler biçiminde ele alınması nedeniyle değişmez bir şey değilken Schrödinger denkleminin $\partial/\partial t$ işlemcisinden (diğer bir deyişle "zamana göre değişim oranı") yararlanması gerçeğinden kaynaklanır. Bu nedenle $\partial/\partial t$'yi temel bir şey olarak değerlendirmek "görelilikle ilgili olarak değişmez" değildir. Şu halde §21.3'te gördüğümüz üzere Schrödinger denklemindeki $\partial/\partial t$, standart p_a uzayzaman 4–momentumlarınm (diğer bir deyişle E enerjisi ve $-\mathbf{p}$ 3–momentumunun) yerinin kendisi aracılığıyla $i\hbar\partial/\partial x^a$ türev işlemcileriyle (diğer bir deyişle E enerjisi $i\hbar\partial/\partial t$'yle ve $-\mathbf{p}$ $i\hbar\nabla$'yla) değiştirildiği genel "kuantizasyon hilesi"nden gelir. Böylece $\partial/\partial t$'ye ilişkin "görelilikçi değişmez olmayış" enerjinin değişmez olmayışıyla yakından ilgilidir. Uzay ve zamanın görelilik kuramıyla karışmış hale gelmesine benzer biçimde enerji ve momentum da (§18.7'de gördüğümüz üzere) karışmış hale gelir.

Ayrıca Einstein'ın $E = mc^2$'sinin ($c = 1$ uzlaşısıyla birlikte) bize enerjinin kütle ve kütlenin enerji olduğunu söylediğini anımsayın; böylece kütle de "değişmez değil"dir. Bununla birlikte bu, bir parçacığın kendisine içkin olmayan fakat o parçacığın hızını paylaşması gerekmeyen bir referans çerçevesinde ölçülmüş kütle olan m toplamsal kütle kavramıyla (enerji momentum 4–vektörüne ilişkin zaman bileşeni) ilgilidir. Parçacık hızı ne kadar büyükse "algılanan" bu kütle o kadar büyüktür (aslında bu m'nin değişmez bir nicelik oluşunun nedenidir). Bir parçacığa ilişkin μ durağan

kütlesi değişmezdir fakat durağan kütleye ilişkin tehlike, toplamsal olmayışı ve parçacık dönüşümlerinde korunmayışı nedeniyle bir Hamiltona eşitlenecek bir şeyle ilgili zayıf bir seçim yapmasıdır. Dahası μ, enerji ve momentumlu bir ifadenin karekökü olarak, diğer bir deyişle ($c = 1$ alarak) daha önce sahip olduğumuz kütle/enerjiye, $m = E(= \mathcal{H})$, ilişkin karekök ifadesini, $m = (\mu^2 + p^2)^{1/2}$, yeniden ifade eden

$$\mu^2 = p_a p^a = m^2 - p^2, \text{ diğer bir deyişle } \mu = (m^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$$

ile verilir.

Yine de bir Schrödinger tipli denklemde değişmez olmayan m enerji bileşeni yerine bu değişmez μ durağan enerjisini ya da μ^2 karesini kullanma fikriyle oynayabiliriz. Kareli durağan enerjiye uygulanan kuantizasyon hilesi, $\mu^2 = m^2 - p^2$, bize Minkowskici (t, x, y, z) koordinatlarında

$$\begin{aligned}\Box &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \nabla^2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\end{aligned}$$

işlemcisiyle[5] $(i\hbar)^2$ çarpımını sunar. Buna *dalga işlemcisi* ya da *D'Alembert işlemcisi* denir ve aslında değişmez bir anlama sahiptir. ($(\partial/\partial x)^2$'nin ikinci türev işlemcisi $\partial^2/\partial x^2$ anlamına geldiğini anımsayın.) Geleneksel Schrödinger denklemi bu işlemciyi dolaysız biçimde işe koşmamıza (Schrödinger denkleminin $(\partial/\partial t)^2$ ikinci dereceye değil $\partial/\partial t$ birinci dereceye gerek duymasına ilişkin üstte belirtilen nedenlerden kaynaklı) izin vermemesine rağmen yine de $(i\hbar)^2\Box\psi = \mu^2\psi$ ikinci derece denkleminin ($(i\hbar)^2\Box$ kuantizasyon hilesi yoluyla μ^2'den elde edilmek ve denklemdeki μ aslında durağan kütle *ol*mak üzere) görelilikçi bir parçacığa ilişkin bir dalga denklemi olarak anlama sahip olması gerektiğini bekleyebiliriz. Bu denklem, $M = \mu/\hbar$ olmak üzere

$$(\Box + M^2)\psi = 0$$

biçiminde yeniden yazılabilir ve aslında o görelilikçi kuantum kuramında öneme sahiptir. Şimdilerde bu denklem sıklıkla, bu görelilikle ilgili olarak değişmez denklemi şu anda daha ünlü olan "Schrödinger denklemi"ni (§21.3'te açıklandığı üzere)[6] bile ortaya koymadan önce ilk olarak Schrödinger'in kendisinin ileri sürdüğü görülmesine rağmen, "Klein–Gordon denklemi" olarak anılır.

---

[5] Bazı insanlar bu işlemciyi ters işaretle tanımlarlar çünkü genellikle burada kullandığım $+---$ yerine $+++-$ imzasını benimserler.

[6] *Bkz.* Pais, 1986; Miller, 2003; Dirac, 1983. Schrödinger'in güdüleri hem estetik hem de erotik olmuş olabilir!

Modern kuantum alan kuramı bağlamında, kütleye sahip spinsiz parçacıkları, özellikle *mezonlar* (pionlar ya da kaonlar türündeki ara kütle parçacıkları) olarak adlandırılan parçacıkları açıklamak üzere uygun biçimde yorumlandığı taktirde Klein–Gordon denklemi kullanılabilir. Bununla birlikte bu yorum kuantum alan kuramına ilişkin, Dirac 1928'de elektronla ilgili oldukça farklı görünüşteki denklemini ileri sürdüğünde ilkel bir forma sahip bulunan tüm yapıya gerek duyar. Dirac, $\Box$ dalga işlemcisinde sahip olduğu zaman türevinin, (Schrödinger denkleminde göründüğü gibi) $(\partial/\partial t)^2$ ikinci derece biçimi yerine $\partial/\partial t$ birinci derece biçiminde göründüğü bir denklem yararına tartışmıştı. Nedenleri üstte belirtilenlerle ilgiliydi fakat o daha belirgin olarak, bir parçacığın dalga fonksiyonunun, parçacığı seçili herhangi bir yerde bulmaya ilişkin olasılık yoğunluğuyla ilgili bir ifade sağlamak zorunda olması gerekliliğinden yola çıkarak temellendi. Bu, nitel olarak bu olasılığın asla negatif hale gelemeyeceği şekilde pozitif belirli olması gereken görelilikçi olmayan standart kuantum mekaniğine (§21.9) ilişkin $\overline{\Psi}\Psi$'ye benzer. Enerjinin pozitif belirli olmasına ilişkin gereklilikle pek de aynı değildir fakat temel olarak eşit önemdeki bütünleyici bir gerekliliktir.[7]

24.6 Dalga işlemcisinin Clifford–Dirac karekökü

Göreliliğin talepleriyle kendisinin birinci dereceden bir $\partial/\partial t$'ye olan anlaşılır gereksinimi arasındaki görünüşte çözümsüz karşıtlığa ilişkin usta işi ve olağanüstü kavrayışlı çözüm yoluyla Dirac, $\Box$ dalga işlemcisinin karekökünü görelilikçi olarak değişmez, kurnazca bir yolla açık biçimde alarak $\partial/\partial t$ bakımından birince dereceli bir denklem bulmayı başardı. Bunu değişmeli olmayan belirli ek niceliklerin ileri sürülmesine izin vererek yaptı. Böylesi nicelikler kuantum mekaniğinde meşrudur çünkü bunlar dalga fonksiyonu üzerine etkiyen, orijinal olarak §21.2'de karşılaştığımız değişmeli olmayan konum ve momentum işlemcileri biçimindeki çizgisel işlemciler olarak ele alınmalıdır. Kısa süre içinde göreceğimiz üzere dikkat çekici olan şey, Dirac'ın kendini ileri sürmeye zorlanır hissettiği değişmeli olmayan bu işlemcilerin doğanın çoğu temel fermiyonlarının, diğer bir deyişle Dirac zamanında bilinen elektronlar ve protonların ve şimdi bilinen nötronlar, müonlar, kuarklar ve diğer pek çok $\frac{1}{2}$–spinli parçacıkların, fiziki *spin* serbestlik derecesini açıklamasıdır.

[7] Bu iki gereklilik birbiriyle, §25.4'te göreceğimiz CPT teoremine ilişkin kanıtların temel bileşenleri biçiminde birleşir.

Gerçekte değişmeli olmayan "spin" niceliklerini bulurken Dirac §11.5'te karşılaştığımız *Clifford cebirini* (bir örneğini) yeniden keşfetti. Ne William Kingdon Clifford'un ilk çalışmalarından ne de Clifford'un (1877) ve hatta ondan önce Hamilton'un bu cebire ait elemanların, $\Box$ dalga işlemcisi boyutun 4 ve imzanın $+---$ olduğu genellenmiş Laplace işlemcisinin belirli bir türü olmak üzere, Laplace işlemcilerinin "karekökünü almak" için kullanılabildiklerini çoktan fark ettiklerinden haberdar görünür. Aslında Clifford'un kendisinin de bildiği gibi William Rowan Hamilton 1840 dolaylarında olağan 3–boyutlu bir Laplace işlemcisine ait karekökün, *dördeyler*in kullanılmasıyla elde edilebildiğini göstermişti (*bkz.* §11.1):[8]

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2=-\nabla^2.$$

Clifford'un işlemi bunu yüksek boyutlara genelledi.[9] Belki de Dirac'ın, Clifford'un yarım yüzyıldan fazla zaman önceki keşiflerinden habersiz olması şaşırtıcı değildir çünkü bu çalışma 1920'lerde pek çok cebir uzmanı tarafından bile bilinir değildi. Dirac Clifford cebirini daha önceden biliyor olsaydı bile bu, böylesi kavramların spin halindeki bir elektronun kuantum mekaniği için önemini, bu fiziki kavrayışta başat ve beklenmedik bir gelişimi oluşturmak üzere, gerçek kılmaya ilişkin görkemi karartmazdı.

Dirac'ın durumunda, aslında karekökü alınması gereken şey, Minkowskici geometriyle ilgili 4–boyutlu (Lorentzci) Laplace işlemcisi olan

$$\Box=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\nabla^2$$

dalga işlemcisidir. Öyleyse

$$\gamma_0^2=1,\gamma_1^2=-1,\gamma_2^2=-1,\gamma_3^2=-1$$

ifadelerini sağlayan "Lorentzci" $\gamma_0,\ldots,\gamma_3$ Clifford cebiri elemanlarını kullanırız. Standart bir ($++\ldots+$ imzalı) Clifford cebirinde bu karelerin her biri -1 olur. Burada işaretlerle ilgili olarak, uzamsal γ'ların kendisi yoluyla orijinal negatif Clifford karelerini elinde bulundurduğu, standart fizikçinin uzlaşısı olarak görünen şeyi izliyorum.[10] Bununla birlikte zamansal γ_0 pozitif bir kareye sahiptir. Dirac'ın Clifford cebirinin "Lorentzci" olması

---

[8] Bu "karekök" fikirleriyle ilgili bir kaynak olarak *bkz.* Trautman, 1997.

[9] Clifford, 1882, s. 778–815; genel bir uygulama için ayrıca *bkz.* Lounesto, 2001.

[10] Bu uzlaşı olağan matematikçi uzlaşısıyla değişiklik gösterir; *bkz.* Harvey, 1990; Budinich ve Trautman, 1988; Lounesto, 2001; Lawson ve Michelson, 1990; Penrose ve Rindler, 1986, Ek. Uzayzaman için buradaki gibi $+---$ imzası benimsenirse genel bir Clifford cebirine ilişkin tanımlayıcı denklem $\gamma_i\gamma_j-\gamma_j\gamma_i=-2g_{ij}$ olur.

bu anlamdadır. Farklı γ'lar için Clifford'un karşı-değişmeliliği hâlâ geçerlidir (§11.5):

$$\gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i \; (i \neq j).$$

Dirac'ın yararlandığı kilit gerçek, dalga işlemcisinin bu Clifford elemanlarının yardımıyla tanımlanan birinci dereceden bir işlemcinin karesi olmasıdır:[24.5]

$$\Box = (\gamma_0\partial/\partial t - \gamma_1\partial/\partial x - \gamma_2\partial/\partial y - \gamma_3\partial/\partial z)^2.$$

Bunu daha özlü biçimde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$'le birlikte vektör notasyonunda

$$\Box = (\gamma_0\partial/\partial t - \boldsymbol{\gamma} \bullet \boldsymbol{\nabla})^2$$

olarak ya da hâlâ daha kısaca,

$$\begin{aligned} \eth &= \gamma_0\partial/\partial t - \boldsymbol{\gamma} \bullet \boldsymbol{\nabla} \\ &= \gamma^a\partial/\partial x_a \end{aligned}$$

niceliği ($\gamma^a = g^{ab}\gamma_b$'yle birlikte) *Dirac işlemcisi* olarak adlandırmak üzere,

$$\Box = \eth^2$$

olarak yazabiliriz. Bu kullanışlı "eğik çizgi" notasyonu Richard Feynman tarafından ileri sürüldü. Daha genel olarak bir A^a vektörü

$$\not{A} = \gamma_a A^a$$

Clifford–Dirac cebir elemanı tarafından gösterilebilir.

24.7 Dirac denklemi

Şimdi $(\Box + M^2)\psi = 0$ "dalga denklemi"mize dönelim. $\eth$ Dirac işlemcisini kullanarak bu denklemde görünen $\Box + M^2$ niceliğini artık çarpanlarına, $M = \mu/\hbar$ olmak üzere, ayırabiliriz:

$$\begin{aligned} \Box + M^2 &= \eth^2 + M^2 \\ &= (\eth + \mathrm{i}M)(\eth - \mathrm{i}M). \end{aligned}$$

Elektronla ilgili Dirac denklemi öyleyse $(\eth + \mathrm{i}M)\psi = -0$, diğer bir deyişle

$$\eth\psi = -\mathrm{i}M\psi$$

ya da $\hbar$'yi μ durağan kütlesi biçiminde yazıp yeniden işe koşarak

$$\hbar\eth\psi = -\mathrm{i}\mu\psi$$

[24.5] Sınayın.

biçiminde yazılır. Üstteki çarpanlara ayırmadan açıktır ki bu denklem geçerli olduğunda $(\Box + M^2)\psi = 0$ dalga denklemi de geçerlidir. (Ayrıca bu $(\eth - \mathrm{i}M)\psi = 0$ "karşı–Dirac denklemi" için de fakat negatif $-\hbar M$ kütleli bir parçacıkla ilgili standart uzlaşıyla, geçerlidir.) Bu nedenle üstteki Dirac denklemini sağlayan dalga fonksiyonları ayrıca $\hbar M$ durağan kütleli görelilikçi parçacıklara hükmeden "dalga denklemi"ni de sağlamak zorundadır.

Dirac denklemi dalga denklemi üzerinden $\partial/\partial t$ bakımından birinci dereceli olmaya ilişkin bir avantaja sahiptir. Aslında Dirac denklemi bir Schrödinger denklemi biçiminde, $\mathrm{i}\hbar\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \gamma_0\mu$ bir Hamilton işlemcisi rolü oynamak üzere,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\mathrm{i}\hbar\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \gamma_0\mu)\psi$$

olarak yeniden yazılabilir.[24.6] $\partial/\partial t$ işlemcisinin seçilip ayrılması elbette görelilikçi olarak değişmez değildir fakat tüm $\eth\psi = -\mathrm{i}M\psi$ Dirac denklemi görelilikçi olarak değişmezdir. (Bunu görmek üzere Clifford cebiriyle Lorentz dönüşümleri arasındaki etkileşimin dikkatli bir incelemesine gerek duyulur.)[24.7] Bundan, vektör/tensör analizinin (12 ve 14. bölümler) standart yapısı dışında bulunan görelilikçi olarak değişmez kavramların var olduğunu öğrenmek zamanın fizikçilerinde önemli bir sarsıntı yarattı. Dirac'ın etkin biçimde önayak olduğu şey şimdi *spinör analizi*,[11] zamanın geleneksel vektör/tensör analizinin çok ötesine giden bir kalkülüs olarak bilinen yeni bir güçlü formalizmdi.

Görelilikçi değişmezliği elimizde tutarken bu kullanışsız kareköke ilişkin dikkat çekici elemeyle ilgili ödemek zorunda göründüğümüz "bedel" değişmeli olmayan bu tuhaf γ_0 Clifford cebir elemanlarının ortaya çıkışıdır. Bunların anlamı nedir? Bu şeyleri dalga fonksiyonu üzerine etkiyen işlemciler olarak düşünmek zorundayız. Bir parçacıkla ilgili daha önce ele almış olduğumuz (değişmeli olmayan) konum ve momentum kuantum değişkenlerinden dolaysız biçimde kaynaklanmayan bu belirli işlemciler yeni şeyler olduğundan, parçacığımızla ilgili yeni bir serbestlik derecesine karşılık gelmek (ve ona bağlı olarak davranmak) zorundadır. Bu yeni serbestlik derecesinin ne gibi bir amaca hizmet edebileceğini sormamız gerekir. Günümüz terminolojisinin bize sağladığı kavrayışla yanıtı "spinör" isminde görürüz; yeni serbestlik derecesi elektronun *spin*inin açıklar.[12]

[24.6] Bunu gösterin.

[24.7] Bunu açıklayın. *İpucu*: alıştırma [22.18]'i genelleyin.

[11] *Bkz.* Clifford, 1878; Cartan, 1966; van der Waerden, 1929; Infield ve van der Waerden, 1933. §22.8'in 2-spinör notasyonunda bu bizi §25.2'de verilecek olan Dirac denkleminin "zik-zak" biçimine yöneltir.

[12] "Spinör" terimi açıktır ki Bartel van der Waerden'e bir mektubunda Paul Ehrenfest tarafından ileri sürülmüştür.

§11.5'te ne dendiğini anımsayalım: "Bir spinör, üzerine Clifford cebiri elemanlarının işlemciler olarak etkidiği bir nesne biçiminde düşünülebilir." Dirac denkleminde Clifford elemanları ψ dalga fonksiyonu üzerine etkir. Bu nedenle, ψ'nin kendisi bir spinör olmak zorundadır. Olağan skaler bir dalga fonksiyonuna ilişkin tekil bağlılığa ek olarak (doğasını kısa süre içinde inceleyeceğimiz) fazladan serbestlik derecesine sahiptir ve bu fazladan serbestlik derecesi aslında elektronun spinini açıklar!

Dalga işlemcisini Clifford elemanlarının kullanımı yoluyla çarpanlarına ayırabilmemizle ilgili olarak ödemek zorunda kaldığımız bedelin bize neredeyse inanılmaz bir anlaşma satın aldığını artık görmeye başlıyoruz! Bu bize elektronun spinini tam olarak vermekle kalmaz, aynı zamanda standart terimi, elektrodinamiği §19.4 ve §21.9'un "ayar reçeteleri"yle[13] uyumlu biçimde isabetli bir şekilde sunan terim, ardalan elektromanyetik alanla bir etkileşim sağlayan Hamiltona eklediğimizde Dirac elektronunun electromanyetik alana, elektronun görelilikçi hareketinden kaynaklanan bazı incelikli terimler de içererek, yüklü elektronun yapması gerektiği gibi doğru biçimde tepki verdiğini görürüz.

Bununla birlikte elektronun yüklü parçacık davranışı yalnızca doğru biçimde açıklanmaz; ek olarak Dirac elektronu, çok belirli bir miktarda *manyetik momente*, diğer bir deyişle $-e$ elektronun yükü ve μ kütlesi olmak üzere,

$$\hbar^2 e/4\mu c$$

ifadesine, sahip oluşuyla uyumlu olarak tepki verir. Bu, Dirac elektronunun elektriksel olarak yüklü olması yanı sıra aynı zamanda kuvveti üstteki değerle verilen minik bir mıknatıs olarak davrandığını söylemektir. Dirac'ın elektronun manyetik momentine ilişkin belirgin değeri dikkat çekici biçimde gözlemlenen gerçek değere yaklaşık binde bir dolayında oldukça yakın bir yaklaşıklık tahminidir. Elektronun manyetik momentine ilişkin en iyi çağdaş saptama, üstte verilen Dirac'ın orijinal değerinden

$$1{,}0011596521188...$$

çarpımsal katsayısı kadar farklıdır. Üstteki isabete ilişkin bu küçük farklılık bile artık, Dirac denklemini temel bir bileşen olarak kullanan kuantum elektrodinamiğinden gelen düzeltme etkileri yoluyla açıklanır. Dirac'ın incelikli küçük $\eth\psi = -iM\mu$ denkleminde Doğayla açığa çıkan uyum aslında olağanüstüdür!

---

[13] Eklenen terim, $\not{A} = g^{ab}A_a\gamma_b$ ve A_a elektromanyetik potansiyel olmak üzere, $ie\not{A}$'dır. Bu, $\eth$ işlemcisini $\eth - ie\not{A}$'yla değiştirmeye karşılık gelir.

[24.10] dipnot 13'e bağlı alıştırma: Bunun niçin standart "ayar reçetesi" olduğunu açıklayın.

24.8 Dirac'ın pozitrona giden yolu

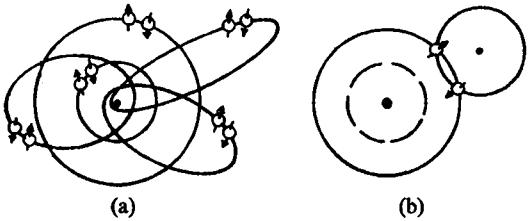
Henüz hiçbir şekilde bu hikâyenin sonuna gelmedik; daha yalnızca ona ilişkin en yalın girişi açıkladım. Öyleyse Dirac denkleminin elektron spiniyle ilgili matematiğinde bulunan görünüşteki bir bozuklukla devam edelim. Bu belirgin bozukluk Dirac ψ spinöründe bulunması gereken belli sayıda bağımsız bileşenle ilgilidir. $\frac{1}{2}$–spinli bir parçacık yalnızca bağımsız iki spin durumuna sahip olduğundan yüzeysel biçimde *iki* bekleyebilecekken (*bkz.* §22.8) Dirac ψ'sinin bağımsız *dört* bileşene sahip olduğu açığa çıkar. Bu sorunu biraz daha ayrıntılı olarak anlamaya çalışalım.

Dirac'ın kendi denklemini yayımlamasından (1928'de) üç yıldan daha az zaman önce George Uhlenbeck ve Samuel Goudsmit elektronun temel iki spin durumundan oluşmuş olan kuantum mekaniksel bir spine sahip olması gerektiği sonucuna ulaşmışlardı. Wolfgang Pauli 1927'de, döndürme etkisi altındaki bu spinlere ilişkin dönüşümlerin şimdilerde "Pauli matrisleri" olarak adlandırdığımız şey kullanılarak nasıl temsil edildiğini gösterdi (*bkz.* §22.8 ve ayrıca Şekil 22.6'da açıklanmış olan $\frac{1}{2}$–spinli durumlarla ilgili Riemann küresi tablosu). Pauli matrisleri de (temelde bir i katsayılı dördeyler), 3–boyutlu döndürme grubuyla ilgili Clifford cebir elemanlarıdır.[24.8]

Gerçekte elektrona ilişkin iki spin durumuyla ilgili büyük bir fiziki gereksinim mevcuttur. Aslında kimyanın asıl konusu, bildiğimiz kadarıyla, buna bağlıdır. Bir atomda, çekirdeği çevreleyen elektronlar, çekirdek etrafında "orbitaller" olarak bilinen belirli durumlarda dönmeye zorlanır (*bkz.* §22.13). Pauli dışarlama ilkesince, hiçbir elektron orbitali *bir* elektrondan fazlası tarafından doldurulamaz görünür fakat yine de orbitallerden her birinde ikinci bir elektrona izin verildiğini görürüz. Onların çiftleri bir arada bulunabilir ve hâlâ dışarlama ilkesini sağlar çünkü durumları özdeş *değil*dir fakat ters spinlere sahiptir. Bununla birlikte herhangi bir orbitalde ikiden fazla elektron olamaz çünkü elektrona ilişkin olarak yalnızca iki adet bağımsız spin durumu mevcutttur. "Kovalent bağ" kimyasal kavramı aynı olguya bağlıdır; paylaşılmış iki elektron aynı durum içinde bir arada bulunur görünür çünkü spinleri terstir, *bkz.* 24.2.

Pauli'nin elektron tanımı, Pauli matrislerinin 2×2 olması gerçeğiyle ilgili olarak iki bileşenli bir $\psi_A = (\psi_0, \psi_1)$ denklemidir. Bununla birlikte Dirac'ın $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ Clifford elemanlarının Clifford çarpım yasalarını

[24.8] Bu yorumu dördeyler ve §11.5'te açıklanan Clifford elemanları arasındaki bağlantıyla ilişkili olarak açıklayın.



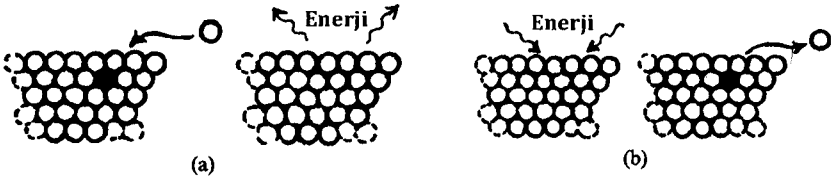
Şekil 24.2 Elektronun $\frac{1}{2}$ spininin kanıtı. (a) Bir atomda aynı orbitali iki elektron, daha fazla değil, doldurabilir. Bu, spin durumlarının ters olmasıyla gerçekleşir, böylece Pauli dışarlama ilkesi çiğnenmemiş olur. (b) Kimyanın "kovalent bağ"ı, iki ayrı atomun orbitallerini paylaşan ters spinli bir çift elektron içerir.

göstermek üzere 4×4 matrislere gerek duyduğunu görürüz.[24.9] Bu nedenle Dirac elektronu bir "Pauli spinörü"nün yalnızca iki bileşenine sahip olmak yerine, § 22.8'de açıklandığı üzere, görelilikçi olmayan $\frac{1}{2}$–spinli parçacığın sahip olduğu 2 bağımsız spin durumunu tanımlayan 4–bileşenli bir parçacıktır. Aslında dalga fonksiyonuyla ilgili 4 bileşen olmasına karşın Dirac denkleminde açıklanan bir parçacıkla ilgili olarak spine ait yalnızca 2 bileşen mevcuttur. Bunun nedeni *matematiksel olarak*, $\eth\psi = \mathrm{i}M\psi$ Dirac denkleminin birinci dereceden bir denklem olması ve ona ait çözüm uzaylarının ikinci dereceden $(\Box + M^2)\psi = 0$ dalga denklemindeki durumun yalnızca yarısı kadarlık çözüm tarafından kapsanması gerçeğiyle yakından ilişkilidir. (Bu denklem ayrıca $-M$ negatif durağan kütlesiyle ilgili Dirac denklemi olan $\eth\psi = +\mathrm{i}M\mu$ "karşı–Dirac" denklemince de sağlanır. *Fiziki olarak* Dirac denkleminin çözümlerinin bu "sayımı"[14] elektronun karşı–parçacığının, diğer bir deyişle pozitronun serbestlik derecesinin de Dirac denkleminin çözümlerinde gizlendiğini hesaba katmak zorundadır. Bununla birlikte Dirac denkleminin bileşenlerinden ikisinin elektron ve diğer ikisinin de pozitronla ilgili olduğunu düşünmek yanıltıcı olur. Göreceğimiz üzere işler bundan çok daha inceliklidir.

Temel görevlerimizden birisinin, Dirac denklemini değerlendirmemizden söz edersek, Schrödinger denklemine negatif frekanslı (diğer bir deyişle negatif enerji) istenmeyen çözümlerle ilgili ne yapmak gerektiğini görmekti. Yine de Hamiltondaki kare kökü elemek üzere tüm kurnazlık ve çalışkanlığımıza (ya da Dirac'ın) karşın Dirac denklemine ilişkin çözümlerin pozitif frekanslı olmakla sınırlan*ma*dığı ortaya çıkar. Daha önce açık-

[24.9] 2×2 matrislerin niçin tüm koşulları sağlamadığını gösterin; bunu yapan 4×4 matrislerinin bir kümesini bulun.

[14] Görelilikçi denklemlerle ilgili çözümlerin sayılması en kolay biçimde 2–spinörlerin analizindeki "tam kümeler" yöntemiyle gerçekleştirilir. *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984, s.



Şekil 24.3 Dirac'ın negatif enerji elektron durumu "denizi"ndeki "delikler" olarak pozitronlar. Dirac elektronun negatif enerji durumlarının neredeyse tümünün, Pauli ilkesi bir elektronu bu tür bir duruma düşmekten koruyarak, dolu olduğunu ileri sürdü. Ara sıra dolu olmayan bu tür durum, bu negatif enerji denizindeki bir "delik", böylece pozitif enerjiye sahip olan bir karşı–elektron (pozitron) olarak görünür. (a) Böylesi bir deliğe düşen bir elektron, elektron ve pozitronun –elektron ve pozitrondan gelen pozitif katkıların toplamı olan enerjinin açığa çıkmasıyla– yok olması biçiminde yorumlanır. (b) Tersten, Dirac denizine yeterli enerji sağlanması bir elektron pozitron çifti üretebilir. (Resimler yalnızca şematiktir; gösterilen kafes yapısı Dirac deniziyle herhangi gerçek bir ilişkiye sahip değildir.)

lanan önceki girişimlerde olduğu üzere, ardalan elektromanyetik alan türündeki etkileşimlerin varlığı negatif frekanslı parçaları toparlamak üzere başlangıç olarak pozitif frekanslı bir dalgaya sebep olacaktır.

Bununla birlikte Dirac'ın ustalığı bu aşamada reddedilmeyecekti. Negatif frekanslı çözümlerin matematiksel olarak yok edilemeyeceğine en sonunda ikna olduğunda Dirac temelde şöyle tartıştı. Sonuçta negatif frekanslı çözümlerdeki tehlike nedir? Sorun, negatif enerji durumu var olduğunda bir elektronun enerji yayınımıyla böylesi bir duruma düşebilmesi ve bu tür sayısız durum mevcutsa böylece, tüm elektronların herhangi bir sınır olmaksızın giderek daha fazla enerji yayınımıyla git gide daha büyük negatif enerjideki negatif enerjili durumlara düştükleri felaket doğuran bir kararsızlığın söz konusu olmasıdır. Yine de Dirac'ın gerekçelendirdiği üzere elektronlar Pauli ilkesini sağlar ve bu tür bir parçacığın bir durumu doldurması, o durum zaten doldurulmuşsa olanaklı değildir. Böylece Dirac, negatif enerji durumlarının tümünün zaten dolu olması gerektiğine ilişkin şaşırtıcı önerisini sundu! Bu dolu negatif enerjili durum denizi artık "Dirac denizi" olarak anılıyor. Böylece Dirac'ın "çılgın fikri" uyarınca kafamızda negatif enerji durumlarının aslında dopdolu olduğunu canlandırırız; Pauli ilkesi uyarınca bir elektron için artık böylesi bir durum içine düşebileceği hiçbir yer söz konusu değildir.

Bununla birlikte Dirac'ın daha ileriki sonuçlarınca bazen, dolu olmayan birkaç negatif enerji durumu var olabilir. Şu halde ne olur? Dirac'ın negatif enerji durumları denizindeki böylesi bir "delik" tıpkı, elektrik yükü elektron üzerindeki yükün tersi olan pozitif enerjili (ve buradan hareketle pozitif kütleli) bir parçacık gibi görünür. Böylesi boş bir negatif enerji du-

rumu artık sıradan bir elektron tarafından doldurulabilir; böylece elektron o duruma enerji yayınımı (normalde elektromanyetik ışıma biçiminde, diğer bir deyişle fotonlar) yoluyla "düş"ebilir. Bu, şimdilerde bir parçacıkla onun karşı–parçacığının karşılıklı yok olmaya uğradığını anladığımız biçimde elektronların birbirini yok etmesiyle "delik"te sonuçlanır (Şekil 24.3a). Öte taraftan başlangıçta bir delik var olmasa fakat sisteme yeterli enerji girse (fotonlar biçiminde diyelim) böylece bir elektron deliği terk etmek üzere negatif enerji durumlarının birinden kovulabilir (Şekil 23.4b). Dirac "deliği" aslında elektronun artık *pozitron* olarak anılan karşı–parçacığıdır.

Dirac başlarda, "deliğin", zamanında pozitif bir yüke sahip kütleli tek parçacık olarak bilinen proton olabileceğini düşünerek (1929'da) kuramının elektronlara ilişkin karşı–parçacıkların varlığını öngördüğü iddiasında bulunmakta dikkatliydi. Bununla birlikte her bir deliğin kütlesinin bir proton kütlesi yerine ondan yaklaşık 1836 kat daha küçük olan elektron kütlesine eşit olmak zorunda oluşunun açığa çıkması uzun sürmedi.[15] 1931 yılında Dirac deliklerin "karşı–elektronlar", artık pozitron dediğimiz daha önce bilinmeyen parçacıklar, olmak zorunda olduğu sonucuna ulaştı. Dirac'ın kuramsal öngörüsünün ertesi yılı Carl Anderson gerçekten de Dirac'ın öngördüğü özelliklere sahip bir parçacığın keşfini duyurdu: ilk karşı–parçacık bulunmuştu!

[15] Bu çalışma Igor Tamm, Hermann Weyl ve J. Robert Oppenheimer tarafından gerçekleştirildi; bunun gerekçesi arkasındaki bir örnekle ilgili *bkz.* Oppenheimer, 1930. Pozitrona giden yolda bizi oldukça saptıran bazı incelikler söz konusudur; tüm bunlara ilişkin bütünlüklü, hassas ve sevimli bir uygulama için *bkz.* Zee, 2003.

25

PARÇACIK FİZİĞİNİN STANDART MODELİ

25.1 Modern parçacık fiziğinin kökenleri

Elektronla ilgili Dirac denklemi fizikte pek çok şekilde bir dönüm noktası oluşturdu. Dirac 1928'de denklemini ileri sürdüğünde bilimin bildiği parçacıklar yalnızca elektron, proton ve fotonlardı. Serbest Maxwell denklemleri fotonu, 1905'te Einstein tarafından etkin biçimde öngörüldüğü üzere tanımlar. Bu ilk çalışma, Jordan ve Pauli 1927'de serbest fotonları kuantize olmuş serbest alanlı Maxwell kuramı şeklinde açıklamak üzere bütünlüklü bir matematiksel düzen sunana kadar Einstein, Bose ve diğerleri tarafından adım adım geliştirildi. Dahası proton ve aynı zamanda elektron Dirac denklemi tarafından yeterince iyi biçimde açıklanmış göründü. Elektron ve protonların fotonlar tarafından nasıl etkilendiğini açıklayan elektromanyetik etkileşim Dirac'ın reçetesince, diğer bir deyişle *ayar* fikrince (temel olarak 1918'de Weyl tarafından sunulan; *bkz.* §19.4) mükemmel şekilde ele alındı. Fotonlarla etkileşen elektronlara (ya da protonlar) ilişkin bütünlüklü bir kuram formülasyonuna (diğer bir deyişle kuantum elektrodinamiği) giriş 1927'de Dirac tarafından çoktan yapılmıştı.[1] Böylece temel araçlar, Doğanın bilinen tüm parçacıklarının açıklamasıyla ilgili olarak, en belirgin etkileşimleriyle az ya da çok birbiriyle uyumlu görünüyordu.

Yine de zamanın çoğu fizikçisi bunun kısa yoldan "her şeyin kuramı"na yol açacağını düşünecek kadar aptal değildi. Çünkü onlar, ne çekirdeği bir arada tutmaya gerekli, şimdi *güçlü* kuvvetler dediğimiz, kuvvetlerin ne de radyoaktif bozunumdan sorumlu, *zayıf* kuvvetler dediğimiz, mekanizmaların daha başka temel gelişmeler olmaksızın bağdaştırılabileceğinin farkındalardı. Yalnızca elektromanyetik olarak etkileşen Dirac tarzındaki proton ve elektronlar atomların çekirdeği de kapsayarak tek bileşenleri olsaydı, bu durumda (hidrojen çekirdeğini oluşturan tekil proton dışındaki)

---

[1] *Bkz.* Pais, 1986, s. 334 ve 356, dipnotlar 25, 26.

sıradan tüm çekirdekler pozitif yüklerin elektrostatik itmesinin büyüklüğü nedeniyle birdenbire dağılırdı. Öyleyse aslında çekirdekte yürürlükte çok büyük bir çekim etkisine karşılık gelen bilinmeyen başka bir şey olmak zorundadır! 1932'de Chadwick nötronu keşfetti ve sonuçta, daha önceleri çekirdeğe ilişkin popüler olan proton/elektron modelinin, hem proton hem de nötronların var olduğu ve çekirdeği yeğin bir proton nötron etkileşiminin bir arada tuttuğu bir modelle değiştirilmek zorunda olduğu anlaşıldı. Yine de hâlâ zamanın anlayışında eksik olan şeyin tümü bu güçlü kuvvet değildi. Uranyum radyoaktivitesi Henri Becquerel'in 1896'daki gözlemlerinden beri biliniyordu ve hatta bunun güçlü ve elektromanyetik etkileşimden farklı olarak, *zayıf* kuvvet, sonucu olduğu kanıtlandı. Bir nötron bile kendi haline bırakıldığında yaklaşık bir on dakikalık bir zaman diliminde radyoaktif parçalanmaya boyun eğer. Radyoaktivitenin gizemli ürünlerinden biri, Pauli tarafından 1929 dolaylarında deneme niteliğinde bir hipotez olarak ileri sürülen fakat 1956'ya dek doğrudan gözlemlenmeyen, ele geçmez nötrinoydu. Sonuç olarak fizikçileri İkinci Dünya Savaşının sonlarına doğru ve onun sonuçları üzerinden alışılmadık bir kötü ün ve etkiye kavuşturan şey radyoaktivite çalışmasıydı... .

Parçacık fiziğine ilişkin bu başlangıç niteliğindeki kavrayışla ilgili şeyler 20. yüzyılın üçte birlik diliminde olduğundan epeyce ileriye gitti. 21. yüzyıla geldiğimizde parçacık fiziğinin *standart modeli* olarak bilinen çok daha tam bir tablo elde edildi. Bu model bilinen parçacıkların çok geniş bir dizisiyle ilgili gözlemlenen davranışların neredeyse tümüyle uyum içinde görünür. Foton, elektron, proton, pozitron, nötron ve nötrino pek çok diğer nötrino, müon, (1934'te Yukawa tarafından etkin biçimde öngörülmüş) pion, kaon, lambda ve sigma parçacıkları ve mükemmel biçimde öngörülmüş omega eksi parçacığıyla birleşmiştir. Karşı–proton 1955'te ve karşı–nötron 1956'da doğrudan gözlemlendi. Kuarklar, gluonlar ve W ve Z bozonları olarak bilinen yeni türde parçacıklar mevcuttur; varlıkları çabucak kaybolduğu için asla gözlemlenmeyip yalnızca "rezonanslar" olarak anılma eğiliminde olan bir yığın parçacık söz konusudur. Çağdaş kuramın formalizmi ayrıca "sanal" parçacıklar olarak adlandırılan geçici varlıklar ve ayrıca dolaysız gözlemlenebilirliğe daha da uzak olup "hayaletler" olarak bilinen nicelikler talep eder. Belirli kuramsal modeller tarafından önerilen, henüz gözlenmemiş fakat hiçbir şekilde kabul edilmiş parçacık fiziğinin genel yapısma ilişkin anlatımlar olmayan şaşırtıcı sayıda parçacık mevcuttur; "X–bozonlar", "aksiyonlar", "fotinolar", "skuarklar", "gluinolar", "manyetik tek kutuplar", "dilatonlar", vb. Ayrıca varlığı o veya bu biçimde (belki de tekil bir parçacık olarak değil) günümüz parçacık fiziği için temel olan, kendisiyle ilgili Higgs alanı her parçacığın kütlesinden so-

rumlu tutulan, yazma anında hâlâ gözlemlenmemiş olan, buğulu Higgs parçacığı söz konusudur.

25.2 Elektrona ilişkin zikzak tablo

Bu bölümde günümüz parçacık fiziğinin standart modeline ilişkin, ona ilişkin kendi belirli yaklaşımım yer yer bir miktar "standart dışı" olarak değerlendirilse de, kısa bir kılavuz sunacağım. Dirac denklemini §22.8'de kısaca sunulmuş olan "2–spinör notasyonu" biçiminde yeniden inceleyerek hafifçe standart olmayan bir yolla başlayalım. Yukarıda, §24.8'de belirtildiği üzere, $\frac{1}{2}$–spinli bir parçacığa ilişkin "Pauli spinörü" açıklaması 2–bileşenli bir ψ_A niceliğidir. (Bileşenler ψ_0 ve ψ_1'dir.) §22.8 uyarınca görelilik ele alırken ayrıca *apre* indisli $A', B', C', \ldots$, ifadelere de, apreli indisler apreli olmayan indislere karmaşık eşleme uygulanarak elde edilmek üzere, gerek duyarız. ψ Dirac spinörünün,[2] üstte ifade edildiği üzere, kendisine ait 4 karmaşık bileşenle, biri apreli ve diğeri apresiz indisli bir α_A ve $\beta_{A'}$ 2–spinör çifti olarak gösterilebildiği ortaya çıkar:[3]

$$\psi = (\alpha_A, \beta_{A'}).$$

Böylece Dirac denklemi, her biri diğeri için, ikisi arasındaki etkileşimin kuvvetini tanımlayan bir $2^{-1/2}M$ "bağlaşım sabiti"yle birlikte, bir "kaynak" şeklinde davranan bu iki 2–spinörü eşleştiren bir denklem biçiminde yazılabilir:

$$\nabla^A_{B'}\alpha_A = 2^{-1/2}\, M\beta_{B'}, \quad \nabla^{B'}_A\beta_{B'} = 2^{-1/2}M\alpha_{A'}.$$

$\nabla^A_{B'}$ ve $\nabla^{B'}_A$ işlemcileri yalnızca sıradan ∇ gradyan işlemcisine ilişkin 2–spinör ötelemesidir. Tüm bu indisler, $2^{-1/2}$'ler ve bu denklemlerin kesin biçimleriyle ilgili kaygılanmayın. Onları burada, Dirac denkleminin 2–spinör analizinin genel yapısı içine yalnızca nasıl getirilebileceğini belirtmek için sunuyorum. Bu gerçekleştiğinde Dirac denkleminin doğasına ilişkin bazı yeni kavrayışlar açığa çıkar.[4]

Bu denklemlerin biçiminden Dirac elektronunun α_A ve $\beta_{B'}$ iki bileşeninden oluşur biçimde düşünülebildiğini görürüz. Bu bileşenlerle ilgili bir

---

[2] §24.7'de açıklanan Dirac denkleminin burada verilmiş olan 2–spinör biçimine nasıl uyarlandığıyla ilgili ayrıntılara girmedim. İlgili okura Zee, 2003, Ek önerilir. Weyl 2–spinörleri Weyl, 1929'da sundu. *Bkz.* van der Waerden, 1929; Infeld ve van der Waerden, 1933; Penrose ve Rindler, 1984, s. 221–223 ve Zee, 2003.

[3] Bunlar §11.5'te değinilmiş olan *indirgenmiş spinörler*dir (ya da yarı spinörler).

[4] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984, 1986; van de Waerden, 1933; Laporte ve Uhlenbeck, 1931.

tür fiziki yorum elde etmek olanaklıdır. Her biri kütlesiz olup[25.1] birisi α_A ve diğeri β_B,'yle tanımlanan ve her biri kendisini sürekli biçimde diğerine çeviren iki parçacığın olduğu bir tablo oluştururuz. Bunları "zik" parçacığı ve "zak" parçacığı olarak, α_A zik'i ve β_B, zak'ı tanımlamak üzere, adlandıralım. Kütlesiz olarak bunların her biri ışık hızıyla yolculuk etmelidir fakat onları daha çok, zik ileri hareketinin sürekli biçimde zak geri hareketine ve karşılıklı olarak tam tersine, çevrilerek ileri geri "hafifçe sallanır" biçimde düşünebiliriz. Aslında bu, kendisi uyarınca elektronun anlık hareketinin, ortalama toplam hareketi ışık hızından az olsa bile elektronun hafifçe sallanma hareketi nedeniyle, her zaman ışık hızına eşit olarak ölçüldüğü "zitterbewegung (titreme hareketi)" olarak adlandırılan olgunun gerçekleşmesidir.[5] Her bileşen, zik durumunda sol ve zak durumunda sağ–elli olmak üzere, kendi hareket yönünde, $\frac{1}{2}\hbar$ büyüklüğünde bir *spine* sahiptir. (Bu, zik'in α_A'sı negatif sarmallıkla bağlantılı olarak apresiz bir indise sahipken zak'ın β_B,'ünün pozitif sarmallığı belirten apreli bir indise sahip olması gerçeğiyle ilgilidir. Tüm bunlar §§33.6–8'deki tartışmayla ilgilidir fakat şimdilik ayrıntısına girmek uygun olmaz.) Hız sürekli ters çevrilir bir haldeyse de spin yönünün elektronun durağan yapısında sabit kaldığını belirtelim (Şekil 25.1). Bu yorumlamada, bağlaşım kuvveti M tarafından belirlenmek üzere, zik parçacığı zak parçacığının kaynağı olarak ve zak parçacığıysa zik parçacığının kaynağı olarak davranır.

Şekil 25.2'de bu işlemin, daha ayrıntılı olarak sonraki bölümde geleceğimiz

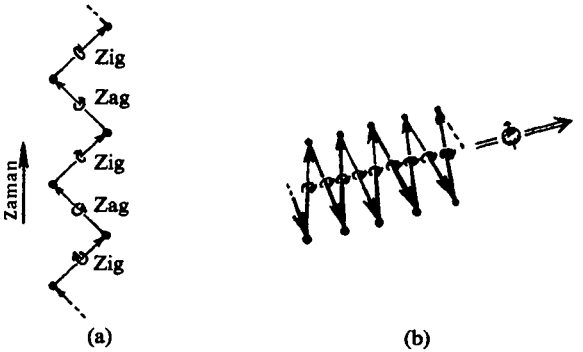
Feynman grafikleri[6] şeklinde, nasıl tam "Feynman yayıcısı"na (*bkz.* §26.7) karşılık gelmesi gerektiğini diyagram biçimli bir gösterimle verdim. Oluşturucu her zikzak işlemi sonlu uzunluktadır fakat bunların toplamı, daha da artan uzunlukta zikzaklar içererek, Şekil 25.2'de gösterilen 2×2 matris uyarınca elektronun tüm yayılımına katkıda bulunur. Tipik olarak bir zik parçacığı bir zak haline gelir, sonra zak yeniden zik olur ve bu sonlu bir genişleme süresince böylece devam eder. Toplam işlemde, bunun gerçekleştiği ortalama oranın M kütle bağlaşım parametresiyle (doğru

---

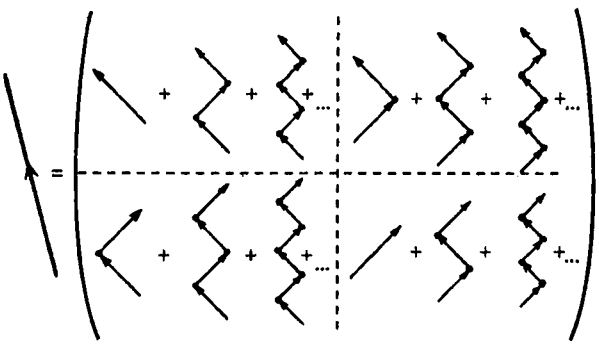
[25.1] §25.3'te verilen Weyl nötrino denklemine başvurarak, α_A ve β_A 'nün her birinin, birini diğerine çeviren bir etkileşimce eşleştirilen kütlesiz parçacıkları tanımladığı görüşü kabul etmenin niçin makul olduğunu açıklayın.

[5] *Bkz.* Schrödinger, 1930; Huang, 1949 ya da ilginç bir çağdaş bakış açısı için Hestenes, 1990.

[6] Halihazırda Feynman grafikleriyle tanışık olan okurlar benim düşey zamansal düzenlememi kafa karıştırıcı bulabilirler. QFT camiasında artan zamanı sağa doğru gider biçimde göstermek daha olağandır. Artan zamanı yukarı doğru göstermeye ilişkin kendi tercihim, bu, uzayzaman diyagramlarının çoğuyla uyumlu olduğundan görelilikçi camianın çoğunun notasyonuyla uyumludur; *bkz.* özellikle bölüm 17.



Şekil 25.1 Elektronun zikzak tablosu. (a) Elektron (ya da $\frac{1}{2}$–spinli kütleli başka parçacık) uzayzamanda sol–elli kütlesiz bir zik parçacığıyla (apresiz α_A 2–spinörü ya da daha genel fizikçi notasyonundaki $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ tarafından yansıtılan kısımca tanımlandığı üzere sarmallık $-\frac{1}{2}$) sağ–elli kütlesiz bir zak parçacığı (apreli β_B, 2–spinörü ya da $\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ tarafından yansıtılan kısımca tanımlandığı üzere sarmallık $+\frac{1}{2}$) arasında salınım yapar biçimde görülebilir. Her biri diğerinin, durağan kütle bağlaşım sabiti olmak üzere, kaynağıdır. (b) Elektronun "durağan yapı"sındaki bir 3–uzay perspektifinden hızın (her zaman ışık hızı) sürekli bir ters çevrilmesi söz konusudur fakat spin yönü sabit kalır. (Açıklık gerekleri nedeniyle şekil elektron durağan yapıdayken değil, hafifçe sağa doğru sürüklenir biçimde çizildi.)



Şekil 25.2 Her zikzak işlemi ayrı ayrı, sonsuz bir kuantum çakışmasının parçası olarak, bir Feynman grafiği biçimindeki toplam "yayıcı"ya katkıda bulunur. Geleneksek tek çizgili Feynman yayıcısı solda çizilmiştir ve o, sağ tarafta çizilmiş olan sonlu zikzakların sonsuz toplamına ilişkin tüm matrise karşılık gelir.

orantılı biçimde) ilgili olduğunu görürüz; aslında bu oran esasen elektronun *de Broglie frekansı*dır (*bkz.* §21.4).

Bununla birlikte Feynman–grafik diyagramlarını nasıl yorumlamamız gerektiğiyle ilgili bir uyarıda bulunmak zorundayım. Gösterilmiş olan işlemi meşru biçimde ne olduğuna ilişkin bir uzayzaman tanımlaması ola-

rak düşünebiliriz fakat kuantum düzeyinde, tekil bir parçacık için bile, aynı anda devam etmekte olan bu tür pek çok işlem bulunduğuna ilişkin bakışı kabul etmek zorundayız. Bu işlemlerin bireysel olarak her biri, çok büyük sayıda farklı işlemin devasa bir kuantum üst üste binmesinde rol alır şekilde görülmelidir. Sisteme ilişkin gerçek kuantum durumu üst üste binmenin bütününden oluşur. Bireysel bir Feynman grafiği bunun yalnızca bir bileşenini gösterir.

Buradan hareketle, elektron hareketinin, bir zik sürekli biçimde bir zak'a ve yeniden zik'e çevrilmek üzere, bu hafifçe ileri geri sallanmadan oluştuğu biçimindeki açıklamam uygun olarak bu anlamda kabul edilmek zorundadır. Gerçek hareket bu tür tümü üst üste binmiş çok sayıda tekil işlemden oluşur ve elektronun algılanan hareketini bunların bir tür "ortalama"sı olarak (katı biçimde bir kuantum üst üste binmesi olsa da) düşünebiliriz. Gerçek bir elektron sürekli olarak diğer (fotonlar, elektromanyetik alan kuantası) parçacıklarla etkileşime girecektir. Böylesi tüm etkileşim işlemleri ayrıca toplam üst üste binmede içerilmek durumundadır.

Bunu akılda tutarak bu zik ve zak parçacıklarının "gerçek" olup olmadıkları sorusunu soralım. Ya da belki bunlar, burada elektrona ilişkin Dirac denkleminin tanımlamasıyla ilgili benimsediğim belirli matematiksel formalizme ait aletler midir? Bu daha genel bir soruyu gündeme getirir: kendini matematiksel bir açıklamanın zarafetine kaptırmaya olanak tanıyıp daha sonra bu açıklamayı bir "gerçekliği" tanımlar şekilde değerlendirmeye çalışmaktaki fiziki gerekçelendirme nedir? Var olan durumda 2–spinör formalizminin kendisine ilişkin önemi (ve aslında zarafeti) yalnızca matematiksel bir teknik biçiminde sorgulayarak başlamalıyız. Okuyucuyu, Dirac denklemi ve ona ilişkin, kuantum alan kuramlarının en başarılısı olan kuantum elektrodinamiğinde (QED) olduğu gibi uygulamalarla ilgilenen fizikçiler tarafından en çok kullanılan formalizmin aslında bu olmadığı konusunda uyarmalıyım.[7]

Çoğu fizikçi, spinör indislerinden kaçınılan "Dirac spinör" indisleri (ya da 4–spinör) formalizmi olarak adlandırılan şeyi kullanır. "$\alpha_{\boxtimes}$" 2–spinörü yerine $(1-\gamma_5)\psi$ 4–spinörünü (benim "zik parçacığı"mı kullanmak yerine onu "Dirac elektronunun sol–elli sarmallık kısmı" ya da benzeri bir şey olarak adlandırarak) işe koşarlar.[8] Burada γ_5 niceliği

---

[7] Aslında bazı fizikçilerin hayatları QED'deki 2–spinör formalizminin kullanımı yoluyla önemli biçimde basit hale getirilebilirdi! *Bkz.* Geroch, Chicago Üniversitesi yayımlanmamış ders notları ve ayrıca §34.3.

[8] Buradaki kendi uzlaşım, $(1 \pm \gamma_5)\psi$ yerine bazı başka yazarlar gibi $(1 \pm i\tilde{a}_5)\psi$ yazmış olmaktır, *bkz.* Penrose ve Rindler, 1984, 1986, Ek. Burada kendimi fizik camiasında standart görülen şeye uyduruyorum.

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

çarpımıdır ve Clifford cebirinin her elemanıyla karşı–değişme özelliğine sahiptir ve $(\gamma_5)^2 = 1$ olur.[25.2] Benzer şekilde β_B, yerine $(1-\gamma_5)\psi$ kullanırlar (sağ–elli sarmallık kısmı). Bunun yalnızca notasyonla ilgili bir konu olduğu ve aslında 2–spinör ve 4–spinör formalizmleri arasında ileri geri çevrim yapmanın olanaklı olduğu söylenebilir. Burada sunduğum "zikzak" tablo kesinlikle her iki formalizme ilişkin olarak da geçerli bir tanımlamadır fakat bu durum 2–spinörle 4–spinördekinden daha dolaysız biçimde önerilir.

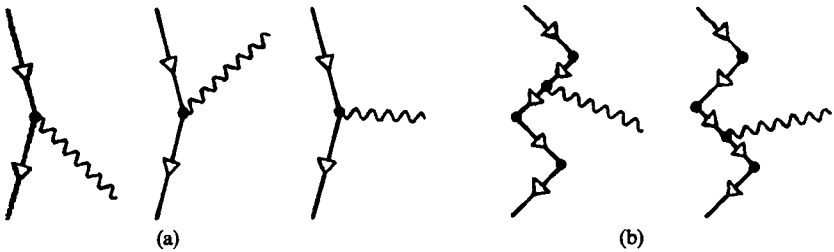
Öyleyse bu zik ve zak'lar gerçek midir? Kendi adıma öyle olduğunu söyleyebilirim; evrenin en temel bileşenlerinden birine ilişkin son derece uygun biçimde idealize edilmiş matematiksel bir tanımlama olarak "Dirac elektronu"nun kendisinin gerçek olduğu kadar gerçektirler. Fakat bu *gerçek* "gerçeklik" midir? §§1.3, 4'te matematiksel ve fiziki gerçekliğe ve bu ikisi arasındaki ilişkiyle ilgili bu genel soruya değindim. Kitabın sonunda, §34.6'da, yine bu soruyla ilgileneceğim.

25.3 Elektrozayıf etkileşimler; yansıma asimetrisi

Zik ve zak parçacıklarının her biri, yükün korunması nedeniyle olması gerektiği gibi aynı elektrik yüküne sahiptir ve her parçacık kendisini sürekli olarak diğerine çevirir. Feynman grafik tablosunda, yüklü parçacıkların boyun eğdiği elektromanyetik alanla olan etkileşim bir fotonu temsil eden bir çizginin eklenmesi yoluyla gösterilir. Bu, elektron yörüngesinin tekil bir Dirac 4–spinör çizgisiyle olağan yoldan gösterildiği geleneksel işlemler uyarınca Şekil 25.3a'da ve (bir şekilde geleneksel olmayan) "zikzak" tanımı kullanılarak Şekil 25.3b'de gösterilir.

Hem sol–elli (zik) hem de sağ–ellinin (zak) elektromanyetik etkileşime eşit biçimde boyun eğdiğine dikkat edin. Bununla birlikte, kendisi uyarınca bu şeylerin, bu zayıf etkileşimlere yalnızca elektronun zik'inin katılıp zak'ının pek de katılmaması anlamında, tümüyle eşit*siz* olduğu başka bir fiziki etkileşimin, *zayıf* etkileşim, mevcut olduğu açığa çıkar (*bkz.* Şekil 25.4). Zayıf etkileşimlere W ve Z bozonları olarak adlandırılan foton benzerleri tarafından aracılık edilir. Daha önce belirtildiği üzere bu etkileşimler kendileri aracılığıyla, örneğin bir U^{238} uranyum çekirdeğinin ortalama 5×10^9 yılda kendiliğinden bir toryum ve bir helyum çekirdeğine (α parçacığı) parçalanacağı ya da serbest bir nötronun yaklaşık ortalama 15

[25.2] Bu iki şeyi de gösterin.

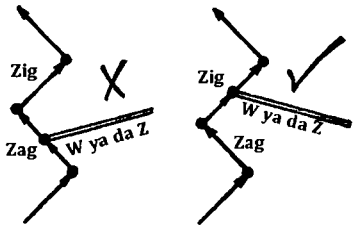


Şekil 25.3 (a) Elektromanyetik alana ait bir kuantum ya da fotonla etkileşim içindeki bir fotonun (geleneksel biçimde zikzak'sız) Feynman grafiği. Sol taraftaki şekli bir foton soğurumu olarak görüyorken, ortadakini birinin yayınımı ve sağ taraftaki şekli de elektrostatik bir etki olarak görebiliriz. Bu işlemlerin hepsinin aynı olduğu düşünülmelidir ve bunlar "sanal" (kabuk–dışı) bir fotonla etkileşim olarak adlandırılır. (b) Aynısı zikzak'larla gösteriliyor. Foton (sanal) zak ve zik'le eşit biçimde etkileşir. Şekillerin tümünde elektrik yükünün yayılımı beyaz üçgen benzeri okla gösterilir. Gösterilenlerin tümü geçmişe işaret eder çünkü negatif biçimde yüklenmiş elektronlarla ilgilenmekteyiz.

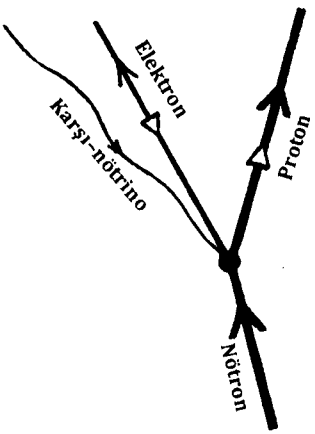
dakikada bir proton, bir elektron ve bir karşı–nötrona bozunacağı radyoaktif bozunumdan sorumludur; *bkz.* Şekil 25.5. Bu işlemler, elektron bu bağlamda bir "β parçacığı" olarak anılmak üzere, (tarihi nedenlerle) "β bozunumu" olarak anılır.

Yıllardan beri zayıf etkileşimler, seçkin İtalyan fizikçi Enrico Fermi tarafından ileri sürülmüş olan 1933'e dek uzanan bir düzen uyarınca tekil nokta işlemleri biçiminde, Şekil 25.5'te tekil nokta bozunumu biçiminde gösterildiği üzere, ele alınageldi. Bununla birlikte daha sonra bu, sonuç olarak Weinberg, Salam, Ward ve Glashow'un, §25.5'te bir kısmına göz atacağımız, elektrozayıf kuramlarında çözülen kuramsal zorluklarla karşı karşıya gelmeye başladı. Bu yeni fikirlerin bir kısmı olarak, nokta benzeri Fermi etkileşimi yerine, Şekil 25.5'in β–bozunumu kendisi uyarınca artık Şekil 25.6'da gösterildiği gibi yorumlanan, zayıf etkileşim işlemine aracılık eden bir ara, henüz W ya da Z parçacıkları olarak değinilmiş olan, "ayar bozonu" nun var olduğu fark edildi. Peki zik/zak'ın anlamı asimetri midir? 1956 yılında Tsung Dao Lee ve Chen Ning Yang β–bozunumuyla, ve genel olarak zayıf etkileşimlerle, ilgili olarak onların yansıma değişmez olmamaları gerektiğine ilişkin hayret verici önermelerini[9] ortaya koyduklarında fizikçiler büyük bir şok yaşadılar. Bu önerme kısa süre sonra Ocak 1957'de Chien–Shiung Wu ve arkadaşları tarafından deneysel olarak da

[9] Bu, Martin Block tarafından yapılmış olan ve Richard Feynman'ın aktardığı bir önerme tarafından kısmen etkilenmiş olabilir; Martin Gardner'ın *The New Ambidextrous Universe*'deki (İki Elini de Kullanabilen Yeni Evren) etkileyici açıklamasına bakın, W. H. Freeman, 1990, bölüm 22.



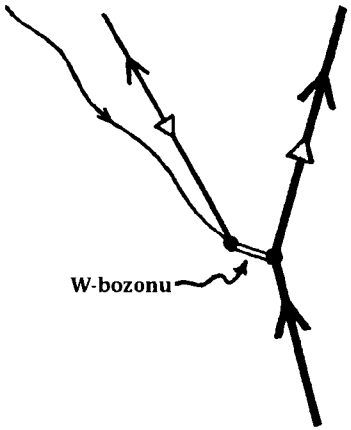
Şekil 25.4 Öte taraftan zayıf etkileşimler durumunda zayıf biçimde etkileşen bir parçacığın yalnızca zik'i W ya da Z bozonuyla etkileşir. (Bununla birlikte "karşı–parçacık" olarak sınıflandırılan şey için zayıf biçimde etkileşen zak olur.)



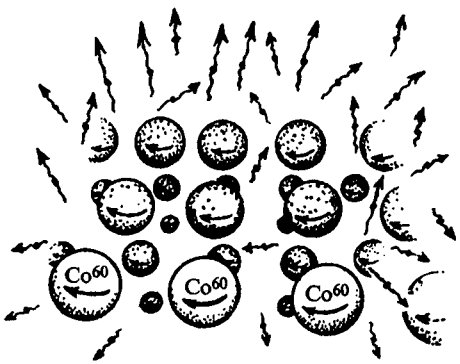
Şekil 25.5 Serbest bir nötron için kabaca (ortalama) 15 dakika süren bir proton, elektron ve karşı–nötrinonaya β–bozunumu. Karşı–nötrino üzerindeki ters ok onun lepton sınıflandırma düzeninde bir "karşı–parçacık" olduğunu belirtir. Şekil 25.4'te gibi, elektron ve proton çizgileri üzerindeki beyaz oklar elektrik yükünü belirtir.

doğrulandı. Buna göre, zayıf bir etkileşim işleminin *ayna yansıması* şaşırtıcı biçimde genellikle izin verilen bir zayıf etkileşim işlemi ol*maz*, öyleyse zayıf etkileşimler *aynallık* gösterir. Özel olarak Wu deneyi elektronların radyoaktif kobalt 60'tan yayınım örüntülerini inceledi ve yayılmış elektronların dağılımı ile kobalt çekirdeğinin spin yönleri arasında açık biçimli bir ayna asimetrik ilişki buldu (*bkz.* Şekil 25.7). Bu, son derece şaşırtıcıydı çünkü temel fiziki bir işlemde daha önce asla yansıma asimetrik bir olgu gözlemlenmemişti!

Zikler ve zaklar anlamında aynal asimetri bir zik'in aynada bir zak ve zak'ın zik biçiminde görünmesi gerçeğinden kaynaklanır. Zik sol–elli bir sarmallığa sahipken zak'ın sağ–elli asimetriye sahip olduğunu anımsayın. Bunların her biri aslında aynı yansımasıyla bir diğerine çevrilir. (Daha geleneksel bir terminolojiyle, γ_5 yansıma etkisi altında işaret değiştirir, böylece elektrona ait dalga fonksiyonlarının sağ ve sol sarmallık parçalarının, $(1-\gamma_5)\psi$ ve $(1+\gamma_5)\psi$ rolleri değişir.) Bu nedenle yansıma simetrisi altında zayıf etkileşimlere ilişkin değişimsiz olmayış, elektronun yalnızca zik kısmının zayıf etkileşimlere boyun eğmesi gerçeğiyle anlaşılır. Nötrona ilişkin olarak aynı şey, o kendiliğinden β–bozunumuna uğrayıp ayrıca



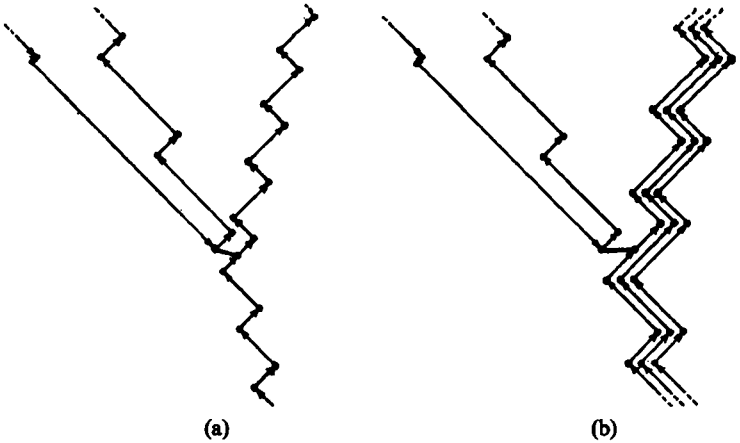
Şekil 25.6 Zayıf etkileşimler, Şekil 25.5 (orijinal Fermi teoremi) tarafından önerildiği üzere, "nokta benzeri" değildir, fakat bir "vektör bozonu" ($W^{\pm}$ ya da Z^0), burada bir W parçacığı, aracılığıyla ortaya çıkar.



Şekil 25.7 Wu deneyi elektronların radyoaktif kobalt 60'tan yayınım örüntülerini inceledi ve yayılmış elektronların dağılımı ve kobalt çekirdeğinin spin yönleri arasında açık biçimli bir ayna asimetrik ilişki buldu. Burada resmin üstünde altındakinden daha fazla elektron açığa çıkar.

protonla sonuçlandığında söylenebilir. Bir nötron ve bir proton ayrıca, makul derecede bir yaklaşıklık tahminiyle, zikzak tanımının her biri için uygun hale geldiği yerden, Dirac denklemince de tanımlanabilir. Yine, zayıf bozunum işleminde tutulan nötron ve protonun yalnızca zik kısmıdır ve bu Şekil 25.8a'da gösterilir. Çağdaş tabloyla uyumlu olarak daha uygunu nötron ve protonu, her biri üç kuarktan oluşmak üzere, birleşik parçacıklar olarak değerlendirmektir. Kuarkların kendilerinin bireysel olarak Dirac denklemince tanımlandığı kabul edilir, böylece zikzak tablosu bunların da her biri için uygun hale gelir. Şekil 25.8b'de nötronun β–bozunumu bu terimlerle gösterilir.

Nötrino da ayrıca bu anlamda özel bir ilgi çeker. En azından oldukça iyi bir yaklaşıklık tahmini biçiminde *kütlesiz* bir parçacık olarak ele alınabilir. (Her durumda kütlesi bir elektron kütlesine oranla son derece küçüktür ve kesinlikle elektron kütlesinin 6×10^{-6} katından büyük değildir.)



Şekil 25.8 Şekil 25.5'in β–bozunum işleminin zikzaklar biçiminde ifade edilmiş hali. (a) Bir nötron ve bir proton, makul derecede bir yaklaşıklık tahminiyle bir Dirac parçacığı olarak tanımlanabilir, böylece zikzaklar uygunsuz olmaz. Şekil 25.4'teki gibi, nötron ve protonun yalnızca zik kısmı, sol üstte küçük bir zik varlığı tarafından olanak sağlanan küçük bir kütle olan karşı–nötrinoda bu zak (sol–elli) olsa da, zayıf bozunum sürecine bağlanır. (b) Bununla birlikte nötron ve proton, her biri 3 kuarktan oluşmak üzere ve bu kuarkların kendileri bireysel olarak Dirac parçacığı kabul edilmek üzere, birleşik olarak değerlendirilir, böylece zikzak tablosu onlara uygundur. (Yük okları ve kuarkları bağlayan gluonlar gösterilmiyor.)

Dirac denkleminin 2–spinör versiyonunda $M = 0$ olarak kabul edersek denklemler

$$\nabla^A_{B'}\alpha_A = 0, \nabla^{B'}_A\beta_{B'} = 0$$

haline gelmek üzere *ayrışır*. Her biri diğerinin yokluğunda var olabilir (bunların her biri kendiliğinden nötrinoyla ilgili "Weyl denklemi"[10] olarak anılır). Bununla birlikte yalnızca ($\nabla^A_{B'}\alpha_{\boxtimes} = 0$'a bağlı olarak *apresiz* α_A tarafından verilen) zik versiyonu zayıf etkileşimlere boyun eğer ya da zayıf etkileşim süreçlerinde yaratılabilir. Bu nedenle nötrinolar sol–elli bir sarmallıktaki parçacıklardır.

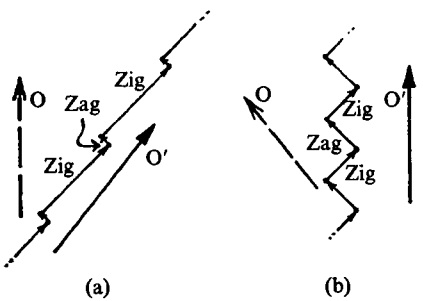
Nötrinolar gerçekten kütleye sahip midir? Artık en azından üç nötrino türünden ikisinin aslında kütle sahibi olduğuna ilişkin iyi deneysel kanıtın var olduğu görülmektedir. Bu üç tip nötrino, (karşı–parçacığı nötron

[10] Bu denklem 1929'da Weyl tarafından önerildi ve ayrıca Dirac tarafından da kendisine ait "elektronla ilgili Dirac denklemi"ne rastlamadan önce ele alındı; Dirac, 1928; Dirac, 1982. Pauli, Weyl denklemine, uzamsal yansıma altında değişimsizlik eksikliği nedeniyle hararetli biçimde itiraz etti. Yazık ki Weyl, kendi önermesini savunan zayıf etkileşimlerdeki yansımanın değişimsiz olmayışı ileri sürülmeden bir yıl önce öldü. Zee, 2003, her iki denklemi de tartışır.

bozunumunda yayılan $\bar{\nu}_e$ olmak üzere olağan β–bozunumunda içerilen, *bkz.* Şekil 25.5) ν_e "elektron nötrino", ν_μ "müon nötrino" ve ν_τ "tau nötrino"dur. Japon algılayıcı Superkamiokande'deki gözlemler bu üç nötrino tipinin kütlelerindeki farklılığın, çok küçük olsa da (toplamda, bir elektron kütlesinin 10^{-7} katı), sıfır kütleyle olamayacak birbirlerine çevrilme ("nötrino salınımları") eğilimine sahip olmaları nedeniyle, sıfır olamayacağını açık biçimde saptar. Ben hâlâ ν_e'nin (ya da bu üçünün makul biçimde uygun bir kuantum "doğrusal birleşim"inin) sıfır kütleye sahip olabileceği sonucunu çıkarmaktayım fakat bu konularla ilgili kesin kanıt hâlâ eksiktir. Kütlesiz bir nötrino tümüyle zik olabilir fakat küçük bir kütleyle tablo, zik'in nadiren anlık olarak zak'a çevrilip yeniden geriye geldiği, Şekil 25.9a'da gösterilene daha çok benzer. Bununla birlikte nötrinoyla birlikte hareket eden durağan bir çerçeveden bakıldığında zik ve zak görünümleri eşit olarak onun toplam hareketine katılır görünür (Şekil 25.9b).

Burada bir miktar açıklama gerekli. Yukarıda zayıf etkileşimlere boyun eğenin zak değil de zik (diğer bir deyişle sol–elli) parçacıkları olduğunu söylediğimde önsel olarak, bir "parçacığın" bir "karşı–parçacık"tan nasıl ayırt edildiğini bildiğimizi varsaydım. Karşı–parçacıkla işler tam ters biçimde olur. Elektronun karşı–parçacığı *pozitron* durumunda yine zik'in sol–elli ve zak'ın sağ–elli olduğu bir "zikzak" tanımlaması sunabiliriz fakat pozitronun zik'i elektronun zak'ının karşı–parçacığıdır ve tersi. Bu nedenle bir pozitron durumunda zayıf etkileşimlere boyun eğen zik yerine sağ–elli (elektronun zikinin karşı–parçacığı) *zak*'dır. Benzer bir uyarı karşı–proton, karşı–nötron ve aslında karşı–kuark için de geçerlidir. Bu ayrıca, kütlesiz olsa tümüyle zik olacak olan karşı–nötrino için de geçerlidir.

Şimdi bu, biraz karışıklığa neden olabilir çünkü, zayıf etkileşimlere boyun eğenin kendisine ait zik mi yoksa zak mı olduğunu bilebilmemiz için, bir ($\frac{1}{2}$–spinli) parçacık benzeri nesnenin bir "parçacık" olarak mı yoksa "karşı–parçacık" olarak mı düşünülmesi gerektiğine karar vermek üzere



Şekil 25.9 (a) Kütlesiz bir nötrino tümüyle zik olabilir fakat küçük bir kütleyle zihnimizde ara sıra bir zak'a ve yine zik'e anlık bir "çevrim" canlandırmak zorundayız. Resim laboratuvara ait O durağan çerçevesinden görüntülenmektedir. (b) Nötrinoyla birlikte hareket eden ikinci bir O' durağan çerçevesinden bakıldığında zik ve zak görünümleri toplam harekete eşit biçimde katılıyor görünürler.

hiçbir kıstas sunmadım. Önceki bölümde, karşı–parçacık kavramını yalnızca Dirac'ın "negatif enerji durumları denizi"ndeki bir "delik"le ilgili orijinal kavramı biçiminde vermiş olsam da, bir karşı–parçacık, gerçekte bir parçacıktan tümüyle ayrı bir tür varlık olarak düşünülmemelidir. Çağdaş kuantum alan kuramı bağlamında, şeyleri Dirac'a özgü orijinal (görünüşe göre asimetrik) biçimde sunmak gerekli değidir. Karşı–parçacıklar tıpkı "karşı"ları oldukları parçacıklar kadar "parçacık"tır. Dahası karşı–parçacık kavramı, yalnızca fermiyonlar Pauli ilkesine tabiyken (*bkz.* §§23.7, 8), fermiyonların yanı sıra bozonlara (tamsayı spinli parçacıklar) da aittir, böylece karşı–parçacıklarla ilgili "Dirac denizi" perspektifi bozonlar için geçerli olamaz. Bir bozon olan pozitif biçimde yüklenmiş pion (π^+mezon) örneğin, negatif biçimde yüklenmiş pion (π^- mezon) olan bir karşı–parçacığa sahiptir. Aslında pek çok bozon kendi karşı–parçacıklarıdır. Bunun bir örneği fotondur; ve ayrıca yüksüz pion (π^0 mezon). Bilindiği kadarıyla (ve kesinlikle standart kuram uyarınca) doğadaki her parçacık bir karşı–parçacığa sahiptir.

25.4 Yük eşlemesi, dönüşüm çarpanı ve zaman tersinimi

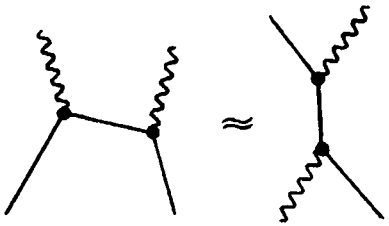
Her parçacığı kendi karşı–parçacığıyla değiştiren işlem (*Yük eşlemesi* yerine kullanılan) C'dir. Parçacıkların kendi karşı–parçacıklarıyla yer değişimi (ve tersi) altında değişmez olan fiziki bir etkileşim C–değişmezi olarak adlandırılır. Bu uzamsal yansıma (parite) işlemi (*dönüşüm çarpanı*na karşılık gelen) P olarak anılır. Yukarıda §25.3'teki tartışmayla uyumlu olarak olağan zayıf etkileşimler ayrı ayrı P ya da C altında değişmez değildir fakat birleşik CP (= PC) işlemi altında değişmez oldukları ortaya çıkar. CP'yi alışılmadık bir aynada gerçekleşen, her parçacığın kendi karşı–parçacığı olarak yansıtıldığı işlem biçiminde değerlendirebiliriz. CP'nin bir parçacığın zik'ini kendi karşı–parçacığı zak'a gönderdiğini, ve tersini görürüz. Zamanı simgelemek üzere T olarak anılan bir diğer işlem daha bulunur. T altındaki bir etkileşim, onu normalin tersi olan bir zaman yönü perspektifinden gördüğümüzde değişmemiş kalırsa değişmezdir. Kuantum alan kuramında *CPT teoremi* olarak anılan ve fiziki her etkileşimin, C, P ve T işlemlerinin üçü birden kendisine bir seferde uygulanırsa değişmez olduğunu ileri süren ünlü bir teorem bulunur. Elbette bir teorem "yalnızca bir parça matematik"tir, bu durumda onun fiziki geçerliliği varsayımlarının fiziki geçerliliğine bağlıdır. Bu konu bizim için daha sonra (§30.2), bizi CPT teoreminin sonuçlarını, ve böylece varsayımlarını, sorgulamaya yöneltebilecek yaşamsal bir konuyu ortaya koyduğumda öneme sahip ola-

cak. Bununla birlikte olağan zayıf etkileşimlerle ilgili olarak bu türden herhangi bir zorluk beklemek için hiçbir sebep yoktur. Buradan hareketle olağan zayıf etkileşimlerin CP değişimsizliği ayrıca onların T (zaman tersinme simetrisi) altındaki değişimsizliği anlamına gelir.

Yazım anında, CP altında değişmez olmadığı bilinen kesin olarak bir fiziki işlemin (ilk olarak 1964'te Fitch ve Cronin tarafından gözlemlenen "olağan olmayan" zayıf bir işlem) var olduğu belirtilmelidir. Ayrıca T altında da değişmez değildir (fakat söylenebileceği kadarıyla CPT teoremiyle uyumlu olarak CPT altında değişmezdir). Bu, K^0 mezonunun (K^0'ın kendi karşı–parçacığı $\overline{K}^0$'a bu ikisi arasında gerçekleşen bir salınımla birlikte çevrimiyle ilgili karışık bir konunun bulunduğu, 2 ya da 3 piona bozunabildiği) bozunum modudur.

CPT teoremi bize karşı–parçacıklar üzerine Dirac "denizi"ni kullanmaktan farklı alternatif bir bakış açısı sağlar ve bu ayrıca bozonlara da uygulanabildiğinden daha tatmin edicidir. CPT'yi varsaydığımızda, C'yi PT'ye eşdeğer, parçacıkların kendi karşı–parçacıklarıyla değişimi, olarak değerlendirebiliriz, böylece bir parçacığa ait karşı–parçacığı, o parçacığa ilişkin "uzayzaman yansıması" (PT) olarak değerlendirebiliriz. Bundaki uzay yansıması görünümünü göz ardı ederek bir karşı–parçacığa ilişkin yorumu *zamanda geriye doğru* yolculuk eden parçacık olarak elde ederiz. Aslında bu, Richard Feynman'ın karşı–parçacıkları yorumlamayı seçtiği biçimdi. Bu, karşı–parçacıkları Feynman grafikleri bağlamında ele almak üzere oldukça uygun ve tutarlı bir yol sunar. (Fikir Feynman'a John A. Wheeler tarafından önerilmişti ve daha önceden bağımsız biçimde Stückelberg (1942) tarafından ileri sürülmüştü.) Bu farklı biçimdeki fikir Dirac denizinde olduğu kadar "çılgın" bir fikirdi!

Bir Feynman grafiğinde kendi karşı–parçacıkları olmayan parçacıklar diyagramlarda herhangi bir yere yöneltilmiş, örneğin her çizgi üzerine uygun türde bir ok eklemek yoluyla, çizgilere sahip olmak zorundadır. Bu oku, çizgi parçacığın kendisini gösterdiğinde, geleceği işaret eder biçimde düşünebiliriz fakat geçmişe işaret ettiği durumda o parçacığın karşı–parçacığını elde ederiz. Karşı–parçacıklarla ilgili bu perspektif, oldukça farklı görünümdeki parçacık işlemlerinin temelde aynı fakat uzayzamanda farklı "açılar"da görünen işlem olarak açığa çıkmasına ilişkin büyük avantaja sahiptir. Bir örnek olarak Şekil 25.10'da (fakat zikzaklara takılmadan), elektron pozitronun bir çift fotona yok oluşunu, bu işlemin, bir elektronun bir foton tarafından Compton saçılımına uğramasıyla esasen aynı (diğer bir deyişle yeniden düzenlenmiş uzayzaman) işlem olduğunu göstererek çizdim. (Kısa süre içinde parçacık çizgilerinin ayrıca uzayzaman yönlerini işaret edebilmesine, "sanal parçacık" olarak anılan şeyi açıklayarak, izin



Şekil 25.10 Çapraz simetri. Çeşitli yerlerde yalnızca zaman düzenlemelerine göre fakat topoloji diyagramları etkilenmiş olmaksızın değişim gösteren işlemler temelde matematiksel olarak (analitik sürdürme yoluyla, §7.4) eşdeğerdir. Bu, parçacık–karşı–parçacık çiftinin iki fotona yok oluşu arasındaki bu tür bir eşdeğerlik tarafından sol taraftaki gibi gösterilir. Compton saçılımı (zikzaksız çizim) sağda gösterilmektedir.

vermeye gerek duyacağımızı göreceğiz fakat şimdilik bu kadar karışıklık yeter!)

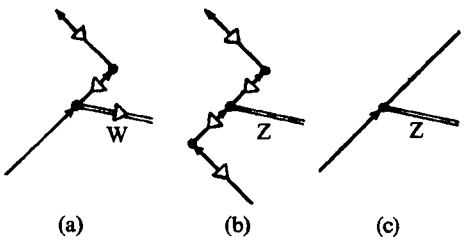
Şimdi $\frac{1}{2}$–spinli bir parçacıkla ilgili olarak zayıf etkileşimlerde rol alanın ona ait zik mi yoksa zak mı olduğuna karar vermeye ilişkin probleme geri dönelim. Bize onun bir "parçacık" olarak mı yoksa bir "karşı–parçacık" olarak mı sayılacağını söyleyen açık bir kurala gerek duyarız. Kullanılan kural "leptonlar" olarak anılan (elektronlar, ağır kardeş parçacıkları müonlar ve tauonlar ve onların ilgili ν_e, ν_μ, ν_τ nötrinoları) parçacıklar ve ayrıca proton ve nötronlardan (ve diğer hadronlar) oluşan kuarklar "parçacıklar" olarak sayılmalıdır. Bunlar zayıf etkileşimlere uğrayan zik'lere sahiptir. Tüm bunların "karşılar"ı karşı–parçacıklar olarak sayılır ve bu durumda zayıf etkileşime uğrayan onların zak'larıdır. Ayrıca zayıf etkileşimlerde içerilmiş 1 spinli (kütleli) parçacıklar, diğer bir deyişle W ve Z bozonları,[11] bulunması gerçeği nedeniyle durum karışıktır. Bunlar zayıf etkileşimlerle ilgili, elektromanyetik etkileşimlere aracılık eden fotonlara (fotonlar elektromanyetik alanın kuantası olmak üzere) benzer roller oynayan aracılardır. Böylesi parçacıklar bazen, nedenlerine daha sonra geleceğimiz üzere, "ayar kuantası" olarak adlandırılır. Yüksüz tek bir Z^0 (kendi karşı–parçacığı) bulunurken, sırasıyla 1 ve –1 (pozitron üzerindeki yükle verilen birimlerde) elektrik yüklerine sahip, W^+ ve W^-'yle (birbirlerinin karşı–parçacıkları) işaretlenen farklı *iki* W bozonu mevcuttur. Bunların her biri zayıf etkileşimlerde, kendini ya bir lepton ya da kuarkın zik kısmının herhangi bir ucuna bağlayan ya da bir karşı–lepton ya da karşı–kuarkın zak kısmına bağlayan bir Feynman grafik çizgisine sahip olarak rol alır (*bkz.* Şekil 25.11). Her zayıf etkileşim işlemi süresince elektron yükü ve de lepton sayısı korunur. Gerçekte, W'larm lepton sayısı korunmak ve Z^0 sıfır olarak sayılmak üzere, her biri (elektron, müon ve tauon sayısı) za-

[11] 1 spinli kütleli parçacıklar *üç* bileşene sahip olarak tanımlanabilir; diyelim ki sol–elli 1 sarmallıktaki zik, sağ–elli –1 sarmallıktaki zak ve spin yapmayan 0 sarmallıktaki "zog". Zik 2–spinörü ve zak 2–spinörü sırasıyla iki apresiz ve iki apreli indise sahipken zog 2–spinörü her birinden bir adede sahiptir. Zayıf etkileşimlere aracılık edenin yalnızca zog parçacığı olduğuna ilişkin bakışı benimseyebiliriz.

yıf etkileşimlere ilişkin standart modelde ayrı ayrı korunan üç farklı tür lepton sayısı mevcuttur. Bir Feynman grafiğinde bu dört korunum yasasını kontrol etmek üzere tüm gereksinimimiz, çizgiler üzerindeki dört tür okun her birinin diyagramı sürekli ve tutarlı biçimde düzenli bir yoldan izlemesini garanti etmektir.

25.5 Elektrozayıf simetri grubu

Şüphesiz tüm bunlar temel bir kuram için bir şekilde karışık görünmektedir. Temelde bulunan henüz açıklamadığım bir düzen var olsa da evet, karışık*tır*; bununla birlikte parçacık fiziğine ilişkin günümüz anlayışının, "standart model" olarak adlandırılan şeyin yarısından daha azı uyarınca ne olduğunu anlatmaya ve oldukça nitel terimlerle anlatmaya daha yeni başladım. Dahası, zayıf (ve elektromanyetik) etkileşimlerde içerilen farklı parçacıklarla ilgili şimdiye kadarki uyarılarım görece "botanik" karakterli olageldi. Aslında standart modelde zayıf ve elektromanyetik etkileşimler, W^+, W^-, Z^0'ı ve γ *fotonu*yla ilgili özel bir simetri bulunan *elektrozayıf* kuram denen şeyde, SU(2) × U(1) grubu ya da daha doğru biçimde[12] U(2) uyarınca birleştirilir. (Bu grupların ne olduğunu anımsama gereği duyuyorsanız §13.9'a bakın.) Yukarıda anılmış olan temelde yatan düzeni sağlayan bu (gizli) simetridir.



Şekil 25.11 Bir zik parçacığıyla zayıf etkileşimli bir ayar bozonu arasındaki etkileşim gösterimleri. (a) Yüklü $\mathbf{W^+}$ ve $\mathbf{W^-}$ (birbirlerinin karşı–parçacıkları) zik'in elektrik yükünde (elektrik yükü korunumu sağlamak için) bir değişimi harekete geçirirken (b) yüksüz $\mathbf{Z^0}$ (kendisinin karşı–parçacığı) yapmaz. (c) Nötrinonun zik'i yüksüz $\mathbf{Z^0}$'la etkileşebilir.

[12] Grup, "$/Z_2$" bir Z_2 alt grubu yoluyla çarpanlara ayır" anlamına gelen $SU(2)\times U(1)/Z_2$ biçiminde ifade edilebilir. Bununla birlikte böylesi bir alt gruptan birden fazlası mevcuttur böylece notasyon tümüyle açık değildir. U(2) notasyonu otomatik olarak doğru olanı seçer. Bu gözlemi için Florence Tsou'ya minnettarım. Elektrozayıf simetri grubunun geleneksel olarak "U(2)" biçiminde anılmamasının nedeni bunun, tüm grup $SU(3)\times SU(2)\times U(1)/Z_6$'nın bir versiyonu olmak üzere, ayrıca $SU(3)/Z_3$ kuvvetli simetri grubunu da devreye sokan toplam standart modelin simetrisine kolayca genişlememesi olarak görünür; *bkz.* §25.7.

Bu simetrinin rolünü bu bölümde daha sonra biraz daha ayrıntılı biçimde açıklayacağım. Bu simetri ayrıca çeşitli lepton ve kuarkların zik kısımlarını ilişkilendirir. Daha ilkel bir bakış açısından fikir, W^+, W^-, Z^0 ve γ'nın tümünün belirli bir anlamda, bu parçacıkların (kuantum) *doğrusal birleşimler*ine ilişkin çeşitli kümelerin, tekil parçacıkların kendileriyle aynı konumda olacakları şekilde, sürekli biçimde "birbirlerine döndürülme"leri sonucuna sahiptir!

Üstte açıkladığım üzere bu "simetri", özellikle saf elektromanyetizmanın, zayıf etkileşimler parçacıkların yalnızca zik kısımlarını içererek yansıma altında olabilecekleri kadar değişmez *değil*ken, kaynakların zik ve zak kısımları eşit biçimde içerilmek üzere, yansıma değişmez olması nedeniyle oldukça tuhaf ve incelikli görünür. Dahası *kütlesiz* bir parçacık olarak foton, kuramdaki tüm bozonlar arasından belirgin biçimde seçilip ayrılmış görünür. Aslında foton kütlesi, sıfır değilse, deneye dayalı sağlam gerekçeler nedeniyle elektron kütlesinin 10^{-20} katından küçük olmak zorundadır ve böylece W ve Z bozonlarının ölçülmüş kütlelerinin yaklaşık 5×10^{-26} katından küçüktür. Dahası W bozonları elektriksel olarak yüklüyken foton değildir, aksine zayıf bir yük taşır.

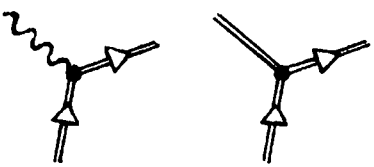
Şekil 25.12'de yalnızca ayar bozonlarını (diğer bir deyişle W^+, W^-, Z^0 ya da γ) içeren 3–çatallı olası tüm Feynman köşelerini sıraladım. Bunlardan yalnızca iki adet mevcuttur. Bununla birlikte var olmaları gerçeği, serbest ayar alanında, ayar grubunun Abelci olmayışından kaynaklanan, *doğrusal olmayışın* bir ifadesidir ve bu aslında U(2)'de geçerlidir. (Saf elektrodinamik *Abelci* U(1) ayar grubundan gelir ve bu nedenle yalnızca fotonları içeren benzer 3–çatallı hiçbir Feynman diyagramı mevcut değildir. Bunlar kaynak serbest Maxwell alanında doğrusal olmayış durumlarına neden olurdu. Benzer bir ifade $n > 2$ için n–çatallı köşelerde de geçerlidir.) *Bkz.* §15.8, §19.2. Şekil 25.12'deki diyagram kümesinin sınırlı doğasından, ayar bozonlarının tümü arasında tam bir simetri olamayacağı görülür.

Bu, simetriden görünüşteki apaçık sapmaları istenilen birleşik biçimli bir kuram amacıyla nasıl bağdaştırırız? Fark edilmesi gereken ilk nokta, Feynman diyagramlarında gerçekte hemen görünenden daha fazla gizli simetri bulunduğudur ve bunlar aslında uygun biçimde bakıldığında U(2) simetrisi gösterir. İlk olarak Şekil 25.12'deki iki diyagramı ele alın. Burada temeldeki simetriye ilişkin daha iyi bir fikir elde etmek üzere 2×2'lik bir Hermitsel matris düşünün (*bkz.* §13.9). Ona ilişkin iki *gerçel* köşegen elemanının Z^0 ve γ'yla benzer olduğunu ve kalan iki köşegen dışı, birbirinin *karmaşık eşleniği* olan, elemanının W^+ ve W^-'yle benzer olduğunu düşünebiliriz. Z^0 ve γ'ya karşılık gelen köşegen elemanlarının gerçel sayı doğası kendileriyle ilgili karşı–parçacıklarla (Şekil 25.12'deki oksuz çizgiler)

aynıyken, köşegen dışı elemanların karmaşık eşlenik doğası W^+ ve W^-'nin birbirlerinin karşı–parçacıkları olması gerçeğine (birinden diğerine geçerken okların ters çevrilmesi) karşılık gelir. Bu Hermitsel matrisine ilişkin (hem U(2) matrisiyle ön çarpma hem de o matrisin tersiyle sonradan çarpma içerdiğini aklımızda tutmak zorunda olduğumuz) genel bir U(2) dönüşümü Hermitsel matrisinin elemanlarını oldukça özel biçimlerde "çalkalar" fakat Hermitsel karakteri her zaman korunur. Aslında bu benzerlik, U(1)'in elektrozayıf kuramdaki davranış biçimine (tek karışıklık köşegen elemanlarının, bu belirlemede §25.7'de geleceğimiz "Weinberg açısı"yla ilgili olan izle doğrusal bir birleşimine izin verme zorunluluğumuz olmak üzere) oldukça yakındır. Gerçek dünyada bu parçacıklarla ilgili olarak görür göründüğümüz *a*simetrinin elektrozayıf kuramda ortaya çıkmasının tek nedeni Doğanın belirli bazı birleşimleri, diğer bir deyişle bu elemanların belirli kuantum üst üste binmelerini, gerçek serbest parçacıklar olarak fark edilmek üzere seçmesidir.

Peki Feynman diyagramlarımızda, Z^0 ve $W^\pm$ parçacıkların yalnızca zik çizgilerine eklenebilirken γ'nın ayrım gözetmeden zik ya da zaka eklenmesiyle ilgili görünüşteki en belirgin diğer asimetriden ne haber? Konu burada yine Doğanın bize hangi üst üste binmeleri serbest parçacıklar olarak bulmamıza izin vereceği konusudur. Örneğin, Z^0 ve γ'ya ilişkin, bir parçacığın yalnızca *zak* kısmını gören belirli bir üst üste binme, Y diyelim, mevcuttur. (Kabaca: yalnızca zak'ı bırakarak zik etkileşimini yok etmek üzere Z^0'ı γ'dan "çıkarın".) Orijinal γ'mızı Z^0 ve Y'den yeniden geri kazanabiliriz fakat Doğa başka bir seçim yapmış olsaydı fotonun rolünü eşit biçimde oynayabilecek olan bu tür pek çok başkaca olası üst üste binme söz konusu olurdu.

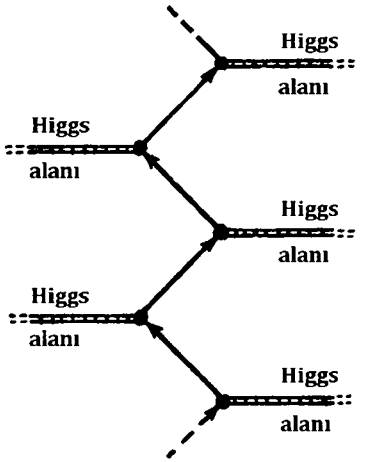
Öyleyse kilit bir konu, Doğanın, diğerlerini değil de belirli bazı üst üste binmeleri serbest parçacıklar olarak bulmamıza izin verirken benimsediği kıstasların ne olduğudur. Buna verilecek en temel yanıt, serbest bir parçacıkla ilgili olarak, onun bir *kütle* öz durumu olmasına gerek duyma-



Şekil 25.12 Ayar grubunun Abelci olmayan doğası nedeniyle kuramsal olarak ortaya çıkabilen 3–parçacık ayar bozon köşeleri. (Foton çizgileri dalgalı; Z^0 çizgileri oksuz çift; $W^\pm$ çizgileri beyaz oklu çift.)

mızdır, öyleyse genel olarak parçacık kütlesini belirleyen şeyin ne olduğunu bilmeye gerek duyarız. Burada U(2) altında tam simetri bekleyemeyiz; diğer bir deyişle kütle bir tür *simetri kırılımı* içerir. Bu, standart modelde nasıl yapılır? Fikir, en azından normal biçimde sunulduğunda, parçacık etkileşimlerinde bugün gerçekte gözlemlediğimiz asimetrinin, evrenin başlangıç aşamalarında gerçekleştiği kabul edilen *kendiliğinden* bir simetri kırılımının sonucu olduğudur. O dönemden önce koşullar bugün geçerli olanlardan oldukça farklıydı. Standart elektrozayıf kuram U(2) simetrisinin başlangıç evrenindeki son derece yüksek sıcaklıklarda, W^+, W^-, Z^0 ve γ'nın bu parçacıklara ilişkin kuantum üst üste binmelerinin pek çok diğer kümesiyle tümüyle eşdeğer olacağı ve γ fotonunun bu biçimde ortaya çıkabilecek diğer tüm birleşim çeşitleriyle eşit konumda olacağı şekilde, *tam olarak* sağlandığını ileri sürer. Bununla birlikte fikir ilerlediğinde, evrendeki sıcaklık düşünce (Büyük Patlamadan yaklaşık 10^{-12} saniye sonra yaklaşık 10^{16}K'nın altına; *bkz.* §§28.1–3) bugün gözlemlediğimiz W^+, W^-, Z^0 ve γ bu kendiliğinden simetri kırılım işlemi yoluyla "dışlan"dı. Böylece bu işlemde dört gerçek parçacık, başlangıç olasılıklarına ilişkin tümüyle simetrik biçimli manifolddan ayrıştırılır. Yalnızca üçü kütle edinir ve W'lar ve Z^0 olarak anılır; diğeri kütlesiz kalır ve foton olarak adlandırılır. Kuramın başlangıçtaki kırılmamış "saf" versiyonunda, tam U(2) simetrisi mevcut olduğunda W'ler, Z^0 ve γ'nın tümü etkin biçimde kütlesiz olmak zorundadır. Bu simetri kırılımı önermesinin temel bir görünümü olarak, *Higgs* (parçacığı) olarak bilinen diğer bir parçacık/alan devreye girmeye gerek duyar. Higgs (alanı) tüm bu parçacıklara (Higgs parçacığının kendisi de dahil) ve evrendeki diğer parçacıkları oluşturan kuarklara kütle atama sorumluluğuna sahip olarak değerlendirilir.

Bunu nasıl yapar? Bu dikkate değer ve yaratıcı fikirler bütününün ayrıntıları yazık ki bu kitabın kapsamı dışında kalıyor fakat ona ilişkin bazı bileşenleri daha sonra §26.11 ve §28.1'de veriyor olacağım. Şu an için, Higgs alanının rolünü en iyi şekilde, Dirac elektronunun Şekil 25.2'de gösterildiği haliyle "zikzak" açıklamasına başvurarak (oldukça eksik biçimde) açıklayabileceğimi düşünüyorum. Elektronun, her biri kendine ait kütleye sahip sol–elli bir zik (α_A) ve sağ–elli bir zak ($\beta_{B'}$) arasındaki sürekli bir salınım biçiminde görüldüğünü anımsayın. Dirac spinörünün α_A ve $\beta_{B'}$ parçaları arasındaki "çevrim" oranına hükmeden bir $2^{-1/2}M$ "bağlaşım sabiti"nin bulunduğu kabul edilmişti. Aslında "Higgs" bakış açısı $2^{-1/2}M'$yi, daha önce $2^{-1/2}M$ bağlaşım sabitine sahip olduğumuz yerde bir etkileşim olarak devreye giren bir *alan* biçiminde değerlendirmektir. (*Bkz.* Şekil 25.13.) Çok erken evrendeki kendiliğinden simetri kırılımı davranışının etkilerinden biri, Higgs alanının her yerde sabit bir değere sahip olmak



Şekil 25.13 Bir Dirac parçacığına ilişkin zikzak tabloda köşeler (sabit) Higgs alanıyla etkileşimler biçiminde görülebilir.

üzere durulmuş hale geldiğinin kabul edilmesidir. Bu değer tüm parçacık kütlelerinin saptanmasıyla ilgili, bu kütlelerin farklı değerleri belirli her parçacığın ayrıntılarına bağlı olan sayısal bir katsayıyla ölçeklenmek üzere, toplam bir ölçek saptar.

Bu olağanüstü fikirler toplamına ilişkin değerlendirmelerimi, daha uygun olan §§28.1–3'e kadar erteleyeceğim. Yine de bu fikirlerle ilgili ne düşünürsek düşünelim, sonuçtaki zayıf ve elektromanyetik kuvvetlere ilişkin birleşik kuram, elektrozayıf kuram,[13] dikkat çekici derecede başarılı oldu. Z^0'ın var olması (ayrıca $W^{\pm}$'nin var olması zaten daha erken fikirler temelinde çıkarsanmıştı) ve $W^{\pm}$ ve Z^0'ın kütlelerine ilişkin oldukça belirli bazı değerler (sırasıyla yaklaşık 80 ve 90 GeV)[14] onun öngörüleri arasındaydı. $W^{\pm}$ ve Z^0 CERN'deki (Cenevre, İsviçre) deneylerde 1983'te gözlemlendi ve öngörülen kütle değerleri oldukça iyi bir isabetle doğrulandı. Çağdaş gözlem değerleri sırasıyla yaklaşık 81,4 ve 91,2 GeV'dir. Başka tür sayısız öngörü de doğrulandı ve elektrozayıf kuram gözleme dayalı olarak, yazım esnasında, mükemmel biçimde ayakta durmaktadır.

---

[13] Elektrozayıf kuram 1960'ların sonlarında Stephen Weinberg, Sheldon Glashow ve Abdus Salam tarafından, bu çalışma her üçüne de bir Nobel Ödülü kazandırmak üzere, düzenlenmiştir. *Bkz.* Weinberg, 1967; Salam ve Ward, 1959; Glashow, 1959; elektrozayıf kuram üzerine genel bir kaynak olarak Zee, 2003 ya da Halzen ve Martin, 1984; Kaku, 1993.

[14] GeV giga elektron volttur. Giga 10^9'la çarpmayı belirten Yunan ön ekidir ve bir elektron volt, 1 voltluk bir potansiyel farkına maruz bırakılan serbest bir elektronun özel olarak ne kadar enerji kazanacağını belirten bir enerji ölçüsüdür. Yaklaşık olarak $1{,}6\times10^{-19}$ J'dir.

25.6 Yeğin etkileşen parçacıklar

Peki ya *yeğin* etkileşimler nedir? Onları açıklayan çağdaş kuram standart modelin diğer "yarı"sını oluşturur ve *kuantum kromodinamiği* ya da QCD olarak adlandırılır. Bu, ismin geldiği kök Yunanca *khroma*, "renk" anlamına geldiğinden tuhaf bir isim gibi görünür ve nükleer kuvvetlere hükmeden yeğin etkileşimler kuramında "renk" nasıl bir yere sahiptir sorusunu sorabiliriz. Yanıt, burada değinilen "renk" kavramının tümüyle tuhaf olup görülebilir ışığın frekansıyla ilgili olan olağan renk kavramıyla hiçbir ilgisi bulunmamasıdır.[15] Parçacık fiziğindeki (nükleer) "renk" kavramının ne olduğunu açıklamak üzere bir parça geri dönüp nötron ve protonların kendisinin belirli örnekleri olduğu *hadronlar* olarak bilinen gizemli parçacık dizilerini ele almak uygun olacaktır.

"Hadron" ismi "hacimli" anlamına gelen Yunanca *hadros*tan gelir. Hadronlar Doğanın temel parçacıklarının daha kütleli olanlarıdır ve yeğin etkileşimlere (etkileşimlerin kuvveti bu kütleye büyük bir enerji katkısı sunmak üzere) katılırlar. Hadron ailesi, "baryonlar" olarak bilinen o fermiyonları ve "mezonlar" olarak anılan o bozonları içerir. Geleneksel kuramda tüm hadronların, kısa süre içinde kendileri hakkında daha fazla şey söylenecek olan *kuarklar*dan oluştuğunu kabul eder. Özellikle, *baryonlar* olarak bilinen hadronlar olağan "nükleonlar" (nötron ya da protonlar) ve daha ağır kuzenleri (kozmik ışın yağmuru ve parçacık hızlandırıcılarda keşfedilmiş olan) "hiperonlar"dır. Orijinal *mezonlar*, Japon fizikçi Hideki Yukawa tarafından 1934'te nükleer kuvvetlere ilişkin analizleri temelinde yaptığı dikkat çekici kuramsal bir öngörüdür. Bunlar sonuç olarak 1947'de C. F. Powell tarafından kozmik ışın izlerinde bulunmuş olan *pionlar*dır (π mezonlar). Artık pionun pek çok mezon kuzeni bilinmektedir.

"Baryon" terimi, *lepto*stan gelip "küçük" anlamına gelen "lepton"un karşıtı olarak "ağır" anlamına gelen Yunanca *barys* kelimesinden gelir. *Leptonlar* elektron ve onun kardeş parçacıkları müon ve tauonla birlikte bunlara karşılık gelen nötrinolardır; bunların karşı–parçacıkları *karşı–leptonlar*dır. Hem leptonlar hem de baryonlar $\frac{1}{2}$–spinli fermiyonlardır fakat leptonlar baryonlardan, belki de baryonlardan çok daha az kütleli olma eğiliminin (tauon, proton ya da nötronun neredeyse iki katı kütleyle bir istisna olsa da) ana "sebebi" olan, yeğin etkileşimlere doğrudan boyun eğmemeleri gerçeğiyle ayırt edilir.

[15] Dalga boyu ve ν frekansı arasında $\nu = \frac{c}{\lambda}$ bağıntısı uyarınca geçiş yapılabilmek üzere, görülebilir ışık λ = 400–700 nanometre dalga boyu aralığına düşer.

1940'ların sonlarından beri kozmik ışınlar ve hızlandırıcılarda devasa sayıda hadron keşfedildi: $\Lambda^0, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Xi^-, \Xi^0, \Delta^{++}, \Delta^\pm, \Delta^0, \Omega^-, \rho^0, \rho^\pm, \omega^0, \eta^0, K^\pm, K^0$ ve "Regge yinelenmeleri" olarak anılan, bu parçacıkların pek çoğunun daha yüksek spine sahip (burada sembollere yıldız işareti eklenerek belirtilen, örneğin Ξ^{*-}) sayısız ağır versiyonu (*bkz.* Şekil 31.6). Bunların *çok katlılar* olarak adlandırılan belirli ailelere girmek üzere gözlenmiş olmaları gerçeği nedeniyle olmasaydı, bu, tümüyle şaşırtıcı olurdu. Bu çok katlıların doğasıyla ilgili iyi bir kavrayış, bunların SU(3) grubunun ya da daha doğru biçimde $SU(3)/\mathbb{Z}_3$'ün gösterimlerini sunması temellinde (1961'de Murray Gell–Mann ve Yuval Ne'eman tarafından) elde edildi ("gösterim" kavramı için §13.6'ya ve "bölüm"ün, /, kullanımında içerilen "çarpım grubu" kavramının yorumu için §13.2'ye bakın; $\mathbb{Z}_3$ burada SU(3)'ün normal bir alt grubundan doğal biçimde kaynaklanan 3 elemanlı döngü grubu yerine kullanılır;[25.3] ayrıca *bkz.* §5.5).

Bu gösterimlerde içerilenin ne olduğunu anlamanın en iyi yolu her hadronun $\frac{1}{2}$–spinli, belirli temel parçacıklardan, Gell–Mann'ın isim babası olduğu "kuarklar" (üç tür) ve "karşı–kuarklar"dan (üç tür), oluştuğu (1963'te Zweig ve Gell–Mann tarafından açıklanmış) hipotezinde bulunmaktır. Her baryon bu kuarklardan yalnızca üçü tarafından ve her mezon bir kuark ve bir karşı–kuark tarafından oluşmuş kabul edilir. Üç *nitelik* olarak anılan bu üç tür kuark "üst", "alt" ve "tuhaf" biçiminde adlandırılır. Kuarklara ilişkin gizemli bir özellik kesirli elektrik yüklerine (proton yük biriminde) sahip olmalarıydı; üst, alt ve tuhaf kuark sırasıyla $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ ve $-\frac{1}{3}$ yük değerine sahiptir.

Belki de kuarklar, mantıksız görünen elektrik yükü değerlerine sahip olmaları, ve kuarkların asla kendileri olarak gözlemlenmemesi (gözlemlenmiş parçacıklar yükleriyle ilgili olarak her zaman tüm değerlere sahiptir; *bkz.* §5.5) ilişkili gerçeği nedeniyle başlangıçta gerçek parçacıklar olarak düşünülmedi fakat $SU(3)/\mathbb{Z}_3$'le ilgili farklı gösterimlerin basit olarak uygun bir "muhasebe"sini sağlar biçimde kabul edildi. Bununla birlikte muhasebecilik yalnızca, kuarklar $\frac{1}{2}$–spinli parçacıklarla ilgili "yanlış istatistiği" sağlayan parçacıklar olarak ele alınsaydı, işlerdi. Bu, kuarkların çok katlıların doğru biçimde ortaya çıkmalarıyla ilgili "bozonlar" olup spin istatistik teoreminin (*bkz.* §23.7 ve §26.2) talep eder göründüğü fermiyonlar olmadığı gibi davranılması gerektiği anlamına geliyordu.

Bu son noktayı anlamak üzere iki örnek ele alalım. İkisi arasında daha açık olanı, Ω^- parçacığının Gell–Mann ve Ne'eman tarafından 1962'de tah-

[25.3] Bu normal alt grubu bulun. *İpucu*: 3×3 bir matrisin determinantını düşünün.

min edilmesine yol açan, $\frac{3}{2}$–spinli parçacıkların 10'lu grupları (dekuplet) tarafından sağlanandır. Bu tahmin 1964'te doğrulanmıştır:[16]

$$\Delta^{++}\ \Delta^{+}\ \Delta^{0}\ \Delta^{-}$$
$$\Sigma^{*+}\ \Sigma^{*0}\ \Sigma^{*-}$$
$$\Xi^{*0}\ \Xi^{*-}$$
$$\Omega^{-}.$$

Bu dizilim her parçacığı değişik nitelikteki üç kuarktan oluşmuş biçimde, d aşağı yerine, u yukarı ve s tuhaf yerine kullanılmak üzere, ele aldığımızda anlaşılabilir:[25.4]

uuu uud udd ddd
uus uds dds
uss dss
sss.

Şu halde bu yalnızca üç kuarkın simetrik bir durumda olması nedeniyle işler. Örneğin uud, udu'dan ayırt edilmez. Dahası, örneğin uuu ve uud gibi aynı türdeki iki kuark durumu benzer biçimde yok olmaz; Pauli ilkesinin geçerli olduğu ters simetrik durumdaysa yok olur. Spinin $\frac{3}{2}$ olması gerçeği üç kuark spininin de (her biri $\frac{1}{2}$ değerli olmak üzere) sıraya dizilmiş olması anlamına gelir, böylece duruma ilişkin spin görünümüyle ilgili olarak tam simetri söz konusudur. Kuarklar fermiyonlar biçiminde davransaydı bu durumda kuarkların değişimiyle simetri değil, bu tabloyla uyumsuz biçimde ters simetri elde ederdik.[25.5]

Benzer (fakat daha karışık) bir yorum, sıradan proton (N^{+}) ve nötronun (N^{0}) sahip olduğu 8 adet (oktet) $\frac{1}{2}$ –spinli parçacıkla ilgili olarak ortaya çı-

$$\begin{array}{ccccc} & N^{+} & & N^{0} & \\ \Sigma^{+} & & \Sigma^{0}\Lambda^{0} & & \Sigma^{-} \\ & \Xi^{0} & & \Xi^{-} & \end{array}$$

kan daha karışık bir durum için de geçerlidir:[17]

---

[16] Kuramla ilgili olarak *bkz.* Gell–Mann ve Ne'eman, 2000; $\dot{U}^{-}$'nin gözlemlenmesiyle ilgili, orijinal olarak 1964'te yayımlanmış V. E. Barnes tezi aynı çalışmada yer alır; s. 88–92.

[25.4] İlk tabloda belirtilen yük değerlerinin doğru biçimde ortaya çıktığını kontrol edin.

[25.5] Bunu, kuark spinleriyle ilgili 2–spinör indis açıklamasını, §22.8'de açıklandığı gibi kullanarak ve 3 değer, u, d, s, alan yeni bir 3–boyutlu "SU(3) indisi"ni kullanarak daha tam biçimde açıklayın.

[17] Modern parçacık fiziği terminolojisinde "N^{+}" ve "N^{0}" sırasıyla proton ve nötronu göstermek üzere "p" ve "n"nin yerini almış görünmektedir. Bu, SU(3) sınıflandırma düzeninde

Burada Σ^0 ve Λ^0'ı temel olarak, altıgen bir dizilimin merezindeki "aynı yuva"yı doldurur biçimde düşünmek zorundayız. Bu düzen spini artık $\frac{1}{2}$ olarak ele aldığımızda ortaya çıkar, böylece kuark spinlerinden ikisini paralel ve birini de ters paralel olarak düşünebiliriz. Bunu, merkezde gösterilen (Σ^0 ve Λ^0 çiftine karşılık gelen) uds kuark bileşimi için düzenlemenin doğrusal olarak bağımsız yalnızca iki yolu olduğu ortaya çıkar; uuu, ddd ve sss için hiç yoktur ki bu üçgen yerine altıgen bir dizilimi açıklar ve geri kalanların her biri için yalnızca bir adet mevcuttur.[25.6]

25.7 "Renklendirilmiş kuarklar"

Kuarklar yanlış "spin istatistiği" ilişkilerine sahipse (*bkz.* §23.7 ve §26.2) onları nasıl gerçek parçacıklar olarak ele alabiliriz? Standart modelde bu sorunla başa çıkmanın yolu[18] her kuark niteliğinin ayrıca üç (sözde) "renk"te gelmesini talep etmek ve kuarklardan oluşan herhangi bir gerçek parçacığın renk serbestlik derecesinde tümüyle ters simetrik olması zorunluluğudur. Bu ters simetri, tekil (fermiyonik) kuarklar arasındaki ters simetri bir üç–kuark parçacığında etkin biçimde simetriye çevrilecek şekilde, kuark durumlarının kendilerinin üzerinden atlar.[25.7] Renkler asla kendilerini serbest parçacıklarda göstermemelidir, böylece renk, temel bir şekilde "gözlemlenemez"dir. Herhangi bir serbest parçacık "renk–nötral" olmak zorundadır. Örneğin, "uud"deki d–kuarkının hangi renkte olduğuna bağlı olarak Δ^+ parçacığının üç farklı versiyonuna sahip olmayız. Gerçek serbest parçacıklarla ilgili renk serbestlik derecesindeki ters simetri bunu garanti eder.[25.8]

Bazen "kırmızı", "beyaz" ve "mavi" olarak anılan renkler beni, hem kafa karıştırıcı olması (çünkü beyazı bir renk olarak düşünmüyorum) hem de bir tür kayıp vatanseverliği açığa çıkartıcı olması nedeniyle etkiler. Bazen daha iyi biçimde "kırmızı", "yeşil" ve "mavi" olarak adlandırılırlar fakat "kuark rengi" ve gözdeki renk alıcıları arasındaki bağlantı hiçbir durumda

---

(N^+, N^0)'ın (Ξ^0, Ξ^-), vb gibi bir *eş* oluşturduğu diğer parçacıklarla ilgili notasyonla uyumludur ve bize bir *nükleon*a kendine özgü bir şekilde "N" olarak başvurma olanağı sağlar.

[25.6] Tüm bunları uygun ayrıntılarla açıklayabilir misiniz görün. 2–spinör spin indislerini kullanmak isterseniz onlara dikkat etmeniz gerekir. Onların bir çiftindeki ters simetri o çiftin çıkarılmasına olanak tanır (bir 0 spin durumunu, §23.4'teki gibi $\frac{1}{2}$–spinli bir parçacık çifti biçiminde gösterirken olduğu gibi). Yine de hâlâ (gizli) bir simetri söz konusudur çünkü her kuark için yalnızca bağımsız iki spin durumu mevcuttur.

[18] *Bkz.* Han ve Nambu, 1965.

[25.7] Bu yorumu, alıştırma [25.5]'in 3–boyutlu nitelik indisine ek olarak yeni bir 3–boyutlu SU(3) *renk* indisinin var olduğu durumda indislerle açıklayın.

[25.8] Açıklayın.

bilimsel bir dayanağa sahip olmadığından bunlar yerine "kırmızı" (R), "sarı" (Y) ve "mavi"yi (B) kullanacağım. Bu seçim terminolojisi renklerimi daha kolay biçimde "karıştır"abilmem avantajını sağlar ve "turuncu", "yeşil" ve "mor"un (bunlar başlangıçtaki R, Y ve B'nin kuantum üst üste binmeleri olarak değerlendirilmek üzere) tam olarak başlangıç kümesi gibi olduğunu görürüz. Burada aslında, renkleri tek başına değiş tokuş etmekten öteye geçen bir simetri mevcuttur. Renk simetrisine ilişkin, içerisinde R, Y ve B'nin, SU(3) matrislerinin üzerine etkiyecekleri vektör uzayıyla ilgili taban elemanlarının yalnızca bir kümesini sağladıkları (*bkz.* §13.9), toplam 8–gerçek–boyutlu bir SU(3) olmalıdır.

Bu aşamada, görünüşe göre gözlemlenemeyen bu "renk" serbestlik derecesinin sunumu, (çeşitli karşı–parçacıkları ve kuantum üst üste binmeleriyle birlikte) hiçbiri doğrudan gözlemlenemeyen dokuz temel kuarka,

$$d_R, d_Y, d_B;\ u_R, u_Y, u_B;\ s_R, s_Y, s_B,$$

sahip olmamız nedeniyle oldukça yapay görünür. Aslında standart modeldeki durum bunun "iki katı kadar kötü"dür çünkü (eşit biçimde yaratıcılıktan uzak) "tılsım" (c), "alt" (b) ve "üst" (t) olarak adlandırılan üç kuark niteliği daha sunulmak zorundadır, böylece toplamda hiçbiri doğrudan gözlemlenemeyen on sekiz bağımsız kuark olacak şekilde,

$$c_R, c_Y, c_B;\ b_R, b_Y, b_B;\ t_R, t_Y, t_B$$

ifadelerine de sahip oluruz.

Spin istatistiği bağıntısını sağlamak, varsayımda bulunulmuş gözlemlenemeyen parçacıkların bu çoğalmasına ilişkin tek fayda olsaydı düzen kesinlikle yapay görünürdü. Bununla birlikte "serbest" kuark renginin bütünsel gözlemlenemezliği aslında cömert bir armağan sunar! Çünkü bu gözlemlenemezlik ve SU(3) renk simetrisinin (yakından ilişkili) tümüyle kırılmamış doğası bize bu simetriyi, §§15.1, 8'de açıklandığı üzere, ayar bağlantısıyla ilgili mükemmel fikrin dolaysız bir tabanı olarak kullanma potansiyeli sunar. Bunun, o durumda ayar grubu U(1) olmak üzere, elektromanyetik etkileşimin tanımlanma biçimi olduğunu anımsayın (*bkz.* §19.4, §21.9 ve §24.7). Aslında elektromanyetizmaya ilişkin U(1) ayar simetrisinin tam ve kırılmamış olduğu kabul edilir.[19] Ayrıca lif demeti fikrinin en temelinde, 15. bölümde açıklandığı üzere, liflere etkiyen tam bir simetri grubunun var olduğunu anımsayın. Yeğin etkileşimlere ilişkin hadronik SU(3) "renk grubu" tıpkı böylesi bir tam simetri sağlar ve U(1) elektromanyetik ayar grubuyla olan benzerlik çok yakındır. Elektromanyetiz-

[19] *Bkz.* Weinberg, 1992.

manın U(1) Abelci grubuyla ilgili bir ayar bağlantısı temelinde, örneğin SU(2) ya da SU(3) gibi Abelci olmayan gruplarla ilgili bir ayar bağlantısına dayanan ilgili bir kurama genellenmesi *Yang–Mills* kuramı olarak adlandırılır.[20]

Aslında bu, QCD'nin (kuantum kromodinamiği) temelidir. Elektromanyetizmada olduğu gibi kuark alanlarına etkirken $\partial/\partial x^a$ türevini, bize bir demet bağlantısı (*bkz.* §15.8 ve §19.4) sunan uygun (elektromanyetizmanın $\partial/\partial x^a - ieA_a$'sı gibi) "kovaryant türev işlemcisi" kavramına değiştirmek üzere A_a elektromanyetik potansiyeli gibi bir niceliği kullanabiliriz. Renk uzayı 3–boyutlu olduğundan, 1–boyutlu elektromanyetik durumdakinden daha karışık bir şeye sahip oluruz ve bu ek serbestlik derecesiyle başa çıkmak üzere indisler sunmak uygun olur. Elektrodinamik durumla yeğin etkileşimlerdeki arasındaki kritik bir fark U(1) Abelci'ken (diğer bir deyişle değişmeli; *bkz.* §13.1) SU(3) renk grubu Abelci değildir ve buradan hareketle kuram *Abelci olmayan ayar kuramı* olarak adlandırılır. Bu belirli karışık ve ilginç özelliklere yol açar. Burada kapsanmış şeylerin tam bir ayrıntısı için okuru yazına yönlendireceğim[21] fakat yeğin etkileşimlerin kendilerini ortaya koyup açıklama biçimleri temelde az önce açıkladığım gibidir.

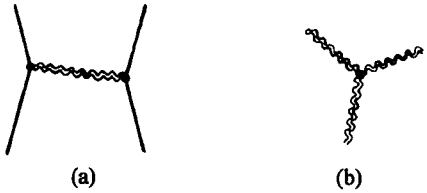
QCD'ye ait (fotonların SU(3) benzeri) "ayar bozonları" *gluonlar* olarak anılan niceliklerdir. Feynman grafik tanımlarında gluon çizgileri kendilerini kuark çizgilerine foton çizgilerinin kendilerini yüklü parçacık çizgilerine bağladığı aynı şekilde bağlar (Şekil 25.14a). SU(3)'ün Abelci olmayan doğası kendini, gluon çizgilerinin kendilerinin üç–çatallı (ya da daha fazla) gluon Feynman grafiklerinin Abelci elektromanyetik durumda olmayan bir şey olarak ortaya çıkabileceği şekilde "renk yükü"ne sahip olması gerçeğinde gösterir (Şekil 25.14b).

Böylece standart modeldeki SU(3) grubunun temel rolü, 1960'lar ve 1970'lerde sahip olduğu "nitelik simetrisi"nden günümüz standart modelindeki "renk simetrisine" geçiş yaptı. Aslında bu standart modelde üç nitelik, d, u ve s, artık temel olarak birlikte gruplandırılmaz. Bunun yerine

---

[20] Temel fikir daha önce II. Dünya Savaşını izleyen yıllarda Wolfgang Pauli ve 1955'te Ronald Shaw tarafından keşfedilmiş ve ayar parçacıklarının kütlesiz olmak zorunda oluşları nedeniyle reddedilmiş olsa da bu kuramı 1954'te C.N. Yang ve R. L. Mills buldu; *Phys. Rev.* 96, 191–195. Bu konulara ilişkin, kendisinin Nobel dersinde sunulmuş olan etraflıca bir tarihle ilgili *bkz.* Abdus Salam, 1980. "Kütlesizlik" sorununu alt etmek üzere artık kullanılan hile, §25.5'te şöyle bir değinilip §26.11'de daha ayrıntılı tartışılacak olan simetri kırıcı "Higgs mekanizma"sıdır.

[21] Teknik ayrıntılarla ilgili olarak *bkz.* Aitchison ve Hey, 2004, cilt 2 ya da Zee, 2003. Ayar kuramı kavramlarına genel bir bakış için *bkz.* Chan ve Tsou, 1993.



Şekil 25.14 Gluonlar QCD'nin "ayar bozonları"dır. (a) Kuarklar arasındaki (burada zikzaklı çizilmiş) gluon değişimi nükleer kuvvetleri ve kuark hapsini temeller. (b) Ayar kuramı Abelci olmamak üzere, gluon çizgilerinin kendileri "renk yükü"ne sahiptir, böylece üç–çatallı gluon Feynman grafikleri (Şekil 25.12'deki gibi) ortaya çıkabilir.

gruplandırmalar (d, u), (s, c), (b, t) eşlerine ait üç *kuşak* sağlar. Üç kuşağa sahip olma kavramı ayrıca, kuşaklar elektkron, müon ve tauon (ve bunlara ait ilgili nötrinolar) olmak üzere, leptonlarda da geçerlidir.

Bir bütün olarak standart modelde yeğin ve elektrozayıf etkileşimler arasında karışık ilişkiler mevcuttur. Özellikle, yeğin etkileşimlerce tanınan temel parçacıklarla zayıf etkileşimlerce tanınanlar arasında ortaya çıkan belirli "döndürmeler" bulunur. Bir örnek yüksek enerjili proton proton çarpışmalarıyla üretilebilen K^0 mezonunda ortaya çıkar. K^0'ın *yeğin etkileşimlere ilişkin bir öz durum* olduğunu söyleriz. Bununla birlikte K^0'ın kendisi bozunurken zayıf biçimde bozunur ve bu nedenle o, zayıf etkileşimlere ilişkin iki öz durumun, K_L (K–uzun) ve K_S (K–kısa), kuantum çizgisel bir birleşimi olarak değerlendirilmek zorundadır. (K_L genellikle yaklaşık 5×10^{-8} saniyede üç tana piona bozunurken K_S normalde 10^{-10} saniyelik çok daha kısa bir zaman ölçeğinde iki piona bozunur.) K_L ve K_S'nin her biri, K^0'ın yeğin değil fakat zayıf etkileşimler yoluyla kendisine "çevirilebileceği" K^0 ve karşı–parçacığı $\overline{K}^0$'ın çizgisel bir birleşimidir. Yeğin etkileşim taban durumlarıyla (K^0, $\overline{K}^0$) zayıf etkileşim taban durumları (K_L, K_S) arasındaki "döndürme", *Cabibbo açısı* olarak anılan (yaklaşık 0,26 radyanlık) (soyut) bir açı boyunca gerçekleşir. Bu aynı açı genellikle yeğin ve zayıf etkileşimler arasındaki ilişkilerde rol oynar.

Benzer bir şe kilde, zayıf ve elektromanyetik etkileşimler arasındaki ilişkide rol oynayıp elektrozayıf kuramın bütünleyici bir parçasını oluşturan, *Weinberg açısı* ya da *zayıf karıştırıcı açı* (§25.5) olarak anılan bir açı da mevcuttur. Aslında elektrozayıf kurama ilişkin en etkileyici bazı kanıtlar, birbiriyle oldukça yakın biçimde uyum gösteren yanıtlar veren, bu açıya ilişkin (görünüşte bağımsız) çeşitli türdeki gözleme dayalı saptamalardan ortaya çıkar. Bununla birlikte, olduğu haliyle kuramda, Cabibbo ve Weinberg açılarının rolleri arasında bir farklılık mevcuttur çünkü zayıf ve elektromanyetik etkileşimler bileşik olarak değerlendirilmek durumunda-

dır. Weinberg açısıyla ilgili, onun, elektrozayıf kuramın U(2) simetrisi Büyük Patlamadan (§ 28.1) yaklaşık 10^{-12} saniye sonra "kırıl"dığında "donakalmış" bir şey olduğu biçimindeki bakış kabul edilebilir fakat Cabibbo açısı standart modelde, bu model elektrozayıf ve yeğin etkileşimlerin nasıl birleştirilebileceğiyle ilgili herhangi bir savda bulunmadığından, böylesi bir duruma sahip değildir. Tüm standart modelin temel simetri grubu[22] $SU(3)\times SU(2)\times U(1)/Z_6$ olarak kabul edilir.

25.8 Standart modelin ötesi?

Öte taraftan Cabibbo açısıyla ilgili Weinberg açısına ilişkin kabul edilene karşılık gelen bir bakış açısı benimsene*bilir* fakat bu parçacık fiziğine ilişkin günümüz standart modelinin ötesinde bir şey gerektirir. İçerisinde yeğin ve zayıf etkileşimlerin SU(3) ve U(2)'yi birlikte içeren daha büyük bir simetri grubu altında birleştirildiği bir modele gerek duyarız. Bu tür bir kuram *birleşik büyük kuram* ya da GUT olarak anılır. Pek çok girişim olmasına rağmen (temel olanları SU(5) ya da SO(10) ya da istisnai grup E_8 olmak üzere; *bkz.* §13.2) genel olarak kabul edilmiş bir GUT mevcut değildir. §31.14'de, sicim kuramının bu konular hakkında da söyleyecek bir şeylere sahip olduğunu göreceğiz. Belirli GUT modellerinin kayda değer bazı anlatımları §28.2'de değerlendirilecek.

Her durumda, standart modelin parçacık fiziğiyle ilgili olarak "son yanıt" olmadığı çok açıktır çünkü o, kuşku götürmez başarısına karşın açıklanamayan pek çok özellik ve "kırık dökük kenarlıklar" içerir. Basit olarak gözlemden elde edilmesi gereken yaklaşık 17 adet açıklanmamış (Cabibbo ve Weinberg açıları, kuark ve lepton kütleleri ve pek çok başkaca özellik gibi) parametre içerir. Ayrıca SU(3) ve U(2)'nin rolleri arasında, U(2) ciddi biçimde kırıkken SU(3)'ün tam şekilde kabul edilmesi anlamında oldukça tuhaf bir asimetri mevcuttur. Aslında bana göre, kırılmamış bir tam simetri gerektirir görünen U(2)'nin bir "ayar grubu" olarak kabul edildiği belirli biçimle ilgili tuhaf bir şey mevcutmuş gibi görünür (*bkz.* 15. bölüm, özellikle §15.8'in son paragrafı).

Bu noktada, GUT fikrinden ayrı olarak, bu belirli soruya yeni bir biçimde yönelen başka bir gelişmeye başvurmak uygun olur. Bu kişisel olarak benim için, §33.13'te görünür hale gelecek nedenlerden dolayı özel bir çekiciliğe sahiptir. Bu, Chan Hong–Mo ve Tsou Sheung Tsun (2002) isimli Çinli İngiliz eşlerden oluşan bir ekiple anılan bir önermedir. Onların dü-

[22] *Bkz.* not 25.12. Standart Model'e ilişkin bir genel bakış herhangi bir iyi ders kitabında bulunabilir; örneğin Zee, 2003.

zeninde her (Abelci olmayan) parçacık simetri grubu, orijinal olanla aynı soyut grup olan fakat ters biçimli bir rol oynayan ilgili bir *ikili* gruba sahiptir. F Maxwell tensörünün §19.2'de sunulmuş olan $^*F$ ikiliğini anımsayın. F yerine kendisine ait $^*F$ demet eğriliğine (*bkz.* §15.8) sahip olan "ikili" bir U(1) ayar bağlantısı hayal edebiliriz. Fikir, standart modelin geri kalan SU(2) ve SU(3) simetri gruplarıyla ilgili olarak benzer bir şey yapmaktır. Bununla birlikte bu gruplar Abelci olmadıklarından ilgili ikili eğriliklerini yine basit biçimde dolaysızca demet eğrilikleri olarak değerlendirmek olası değildir[25.9] ve ("yol bağımlı" niceliklerin ele alınması gereken) daha kapsamlı bir şey gereklidir.

Bu düzene ilişkin etkileyici görünümlerden biri, grup ve ikili grubun, ikisinden biri QCD'nin SU(3)'ü (ya da elektromanyetizmanın U(1)'i) gibi tam ve diğeriyse elektrozayıf kuramın SU(2)'si gibi kırık olmak üzere ve tam grupla ilgili olarak ("rengi değiştirilmiş" kuarkların SU(3) durumunda geniş dünyaya kaçmasını engelleyen şey olan) "hapsedilme" beklenmek üzere, nitelik olarak farklı roller oynamasıdır. (Bu özellik t'Hooft ve Weinberg'in ilk çalışmalarıyla ilgilidir.)[23] Chan–Tsou düzeninde, "2–renkli" lepton bileşenlerine sınırlanmış kuarkların benzerleriyle ilgili şimdiye dek keşfedilmemiş bir simetriye başvuran (halen elektrozayıf kuramda rol oynayan kırık olana ikili) yeni bir tam SU(2) var olur. (Bu parçacıklar, henüz algılanmadıklarından ve leptonların günümüz enerjilerinde nokta parçacıklar olarak görünmelerinden kaynaklı, oldukça ağır olabilirler.) Buradan hareketle ayrıca kırık bir SU(3) mevcut olmak zorundadır ve bu basitçe, kuark ve leptonların üç kuşağının, standart modelde geleneksel biçimde anlaşıldığı için oldukça kafa karıştırıcı görünen "SU(3)'ü olarak kabul edilir. Chan–Tsou düzeni ayrıca standart modele ilişkin 17 (ya da o civarda) serbest parametreyle ilgili olarak, bunlardan 14'ünün ayarlanabilir 3 parametre yoluyla hesaplayarak, belirgin tahminlere sahiptir. Bu beni, düzenin tahminlerinin desteklenmesi koşuluyla ileri doğru atılmış kesin bir adım olarak etkiliyor. Şu haliyle görünüm oldukça umut vericidir.

Standart modele geleneksel yaklaşımda SU(2) grubunun, böylesine ciddi biçimde kırılmışken, gerçekte bir ayar grubu olarak nasıl kabul edilebildiği benim için pek de açık değil. Bazıları bu SU(2)'yi gerçekten tam olan ve "potansiyel olarak" yalnızca bir ayar grubu biçiminde davranan bir tür "gizli simetri"yi yansıtır biçimde kabul edebilir ve elektrozayıf kurama ilişkin SU(2) bunun bir tür dışsal göstergesidir. (Belki de bu, Chan–

[25.9] Zorluğun ne olduğunu görebiliyor musunuz? *İpucu*: Ayar eğriliği, Bianchi özdeşlikleri, vb üzerinde çalışın.

[23] Chan–Tsou fikri Chan ve Tsou, 2002'de gözler önüne serilir; o t'Hooft, 1978'de geliştirilmiş olan bir özelliğe dayanır.

Tsou fikrinden o kadar açık olmasa da pek uzak değildir.) Elektrozayıf kuramın SU(2)'siyle ilgili geleneksel bakış açısı, onun gerçekten tam olduğu (ya da daha önceden tam olduğu) ve erken evrende gerçekleşen uç süreçlerde kırılmış hale geldiği biçiminde görünür. Buna ilişkin hoş olmayan bazı anlatımlara 28. bölümde bakacağız. Bu arada sonraki bölümün bir tartışma konusu olarak ilginç olan fakat simetri kırılımının standart modelde halihazırdaki ele alınış biçiminin ardında yatan temel matematiksel fikirlere ilişkin bir şeyi göreceğiz.

26

KUANTUM ALAN KURAMI (QFT)

26.1 Modern kuramda QFT'nin temel konumu

Önceki bölümde parçacık fiziğiyle ilgili 20. yüzyıl standart modeliyle kısaca tanıştık. O, geniş yelpazeli olgulara ilişkin gözleme dayalı gerçeklerle kayda değer uyum içindeki matematiksel bir modeldir ve Doğanın yollarıyla derin bir harmoni bulduğu görülen incelikli bazı matematiksel bileşenler içerir. Yine de şeyleri sunduğum üzere, bu modele ilişkin matematiksel yapı bir biçimde karışık ve rasgele görünür. Elbette bu yapının çoğu parçacık fiziğinin kaba gerçeklerince motive edilmiştir ve fizikçiler bu gerçekleri Doğanın onları sunduğu şekliyle kabullenmek zorunda kalmıştır. Bu, ciddi herhangi bilimsel bir kuram için olması gereken şeydir. Bununla birlikte ayrıca, yapıya ilişkin standart modeldeki belirli seçimlerin temelinde yatan güçlü *kuramsal* nedenler de mevcuttur. Kuramın öngörme gücü aslında kritik biçimde bu tür kuramsal desteklere ilişkin matematiksel uyumluluğa bağlıdır.

Kuramsal güdü 24. bölümde başladığımız hikâyenin sürdürülmesidir: parçacık fiziğiyle ilgili, Einstein'ın özel görelilik kuramının gerekleriyle uyumlu bir kuantum kuramını nasıl buluruz? O bölümde Dirac'ın karşı–parçacıkları sunumunun görelilikçi bir kuantum kuramındaki önemini ve alanlarla ilgili bir kuantum kuramı çerçevesine zorlandığımızı gördük. Gerçekte standart model etkileşen alanlara ilişkin bir kuantum kuramının belirli bir örneğidir ve büyük oranda böylesi kuramlarda sağlanması zor olan uygunluk gerekliliklerince yönlendirilmiştir. Bu (günümüzün sicim kuramı gibi daha modern kurgusal kuramlarını yönlendirmeyi sürdüren) uygunluk gerekliliklerinin ardındaki kuvvete ilişkin bir şeyi değerlendirmek üzere kuantum alan kuramının (QFT) yapısındaki bir şeye göz atmamız gerekecek. Bu ayrıca geçen bölümde karşılaştığımız Feynman grafiklerinin anlamını değerlendirmemize yardımcı olacak. Ek olarak, karşı–parçacıklarla ilgili yine, 23. ve 24. bölümlerde karşılaştıklarımızdan bir biçimde daha geniş olan başka bir bakış açısı edineceğiz.

Kuantum alan kuramı, fiziki gerçekliğin temellerini derinlemesine sorgulama girişiminde bulunan hemen hemen diğer tüm fiziki kuramların yaptığı gibi standart modelin temelinde yatan esas ardalanı oluşturur. O halde bu ihtişamlı ve heybetli şeylere ilişkin düzene, büyük oranda Paul Dirac'ın 24. bölümde tanıştığımız o dikkat çekici anlayışından kaynaklanan düzene bir göz atmamız gerekli olacak. Jordan, Heisenberg ve Pauli'den de önemli başlangıç katkıları gelmesine rağmen QFT'nin asıl öncüsünün Dirac'ın kendisi olduğu belirtilmelidir. Bununla birlikte, şu haliyle, kuramın "∞" yerine *sonlu* yanıtlar sağlama yetisi gösteremediği ilgili problemlerin çoğu pratik olarak her zaman ortaya çıkar görünür. Kuramı "yeniden normalleşebilir" olarak anılan uygun QFT'ler için işler hale getirmek üzere Bethe, Tomonaga, Dyson, Schwinger ve özellikle Feynman'ın gerçekleştireceği güçlü gelişmeler gerekti. Diğerleri arasında Ward, Weinberg, Salam, Wilson, Veltman ve 't Hooft'tan gelen daha güncel katkılar bizi, kendisinden aslında artık tutarlı yanıtlar elde edilebilen parçacık fiziğiyle ilgili standart modele yaşamsal bir girdi vererek (25. bölüm), oldukça uygun bir yeniden normalleşebilir kuramlar sınıfına yöneltti.[1] (Kuramsal gereklilikler, bu yanıtların deneyle gerçekten mükemmel uyum içinde olmasının neredeyse tesadüf gibi görülebileceği kadar sıkı görünür!) Temel problem her zaman sonsuzlarla uygun bir biçimde başa çıkmak olagelmiştir ve gözlemden gelen önemli girdiyle birlikte bu yönlendirme sayesinde kuram kendi uygun ve verimli yoluna girmiştir.

Gerçekte QFT evrenin en derin düzeydeki işleyişine ilişkin bir resim sunabilmek üzere ciddi biçimde girişimde bulunan neredeyse tüm fiziki kuramları temeller görünür. Pek çok fizikçi (ve belki de çoğu), QFT çerçevesinin "kalıcı olduğu" ve herhangi bir tutarsızlıkla ilgili (bunlar genellikle ıraksak integrallerden ya da yakınsak toplamlardan ya da her ikisinden gelen sonsuzlar olmak üzere) suçun QFT'nin kendi çerçevesinden çok onun uygulanmakta olduğu belirli düzende bulunduğuna ilişkin bakış açısını kabul eder. Bu tür düzenler normalde belirli simetri ilkelerine bağlı bir Lagrange denklemi tarafından belirlenir. §§26.6, 10'da Lagrange denklemi fikrinin QFT'ye uygulandığı genel biçimi göreceğiz.

QFT'deki sonsuzları gidermekle ilgili pek çok modern girişim uzayzaman davranışını son derece küçük ölçeklerde derinden değiştirmek üzere *kütleçekime* bakar ve bu yolla halihazırdaki ıraksak ifadeleri sonlu kılabilen "kesikler" sağlar (özellikle *bkz.* §31.1). Yine de, Einstein'ın (kütleçekimle ilgili) *genel* görelilik ilkeleri gündeme geldiğinde QFT'nin kendisinin değişime gerek duyup duymayacağıyla ilgili soru ortada durur (bkz 30. bö-

[1] *Bkz.* Aitchison ve Hey, 2004; ya da Zee, 2003.

lüm). Bununla birlikte böylesi bir alandaki günümüz araştırmacılarının büyük çoğunluğunun etkinliklerince değerlendirildiği üzere QFT normalde var olan haliyle sorgulanmaz. Bizim için ona ait karışık fikirleri yapabildiğimiz ölçüde kabullenmek önemli olacaktır. Kendi açıklamalarımda bu şahane, derin, zor, olgusal olarak bazen kesin ve yine de sıklıkla boş yere umutlandırıcı biçimde tutarsız şeyler düzeninin ayrıntılarına girmem kesinlikle olanaklı olmayacak. Yine de, sonuç olarak standart modeli temelleyen kuramsal yönlendirici kuvveti sunan o özelliklere dönmeden önce QFT''nin niteliğine ilişkin bir şeyi son derece yetersiz olmasına karşın kısaca aktarmayı deneyeceğim.

26.2 Yaratma ve yok etme işlemcileri

QFT'ye ilişkin ilk fikirlerden biri, oldukça yanıltıcı "ikinci kuantizasyon" ismiyle bozulan işlemdi. Bu işlem uyarınca, bir parçacığa ilişkin ψ dalga fonksiyonunun kendisi en sağ tarafta gizlenen $|0\rangle$ tarafından gösterilen belirsiz bir durum vektörü üzerine etkiyen bir "işlemci" haline gelmiş gibi davranmaya çalışırız (§21.3 ve §22.4'teki Heisenberg tablosunu kıyaslayın). Bu "dalga fonksiyonu işlemcisi"ni tek parçacıklı dalga fonksiyonumuzu gösteren ψ Yunan harfiyle ilgili kalın Yunan *büyük* harfi $\boldsymbol{\Psi}$'yle göstereceğim. Olağan kuantum parçacık mekaniğinde olduğu üzere $\boldsymbol{\Psi}$ parçacığın 3–uzay konumu $\mathbf{x}$'e ilişkin bir fonksiyon olarak, diğer bir deyişle $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})$ ya da bir momentum gösterimi tercih edilirse ona ait $\mathbf{p}$ 3–momentumu, diğer bir deyişle $\widetilde{\emptyset} = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{p})$ olarak düşünülebilir.

Bu tuhaf $\boldsymbol{\Psi}$ (ya da $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$) "dalga fonksiyonu" işlemcisini nasıl yorumlamalıyız? O artık gerçek kuantum durumunu göstermez fakat bu verili ψ dalga fonksiyonuna sahip yeni bir parçacık "yaratan" işlemi,[2] onu daha önceden orada bulunan duruma, bu "daha önceki" durum $\boldsymbol{\Psi}$ (ya da $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$) işlemci sembolünün hemen sağındaki ifade tarafından gösterilmek üzere, sunarak tanımlar. Bu tür bir işlemci *yaratma işlemcisi* olarak anılır.

En sağda yer alan belirsiz $|0\rangle$ durum vektörü normalde her türlü parçacığın tam yokluğunu gösteren "vakum durumu" olarak kabul edilir. Bu yaratma işlemcilerinin birbirini izlemesi daha sonra birer birer vakuma eklenen bir dizi parçacık yaratır. Böylece

[2] Buradaki açıklamalarımda, ψ "dalga fonksiyonu"nun zorunlu biçimde normalleştirilmiş değil yalnızca *genel* bir pozitif frekans alanı olmasına izin vererek bir miktar "standart dışı" olacağım. Normalleşme yoksunluğu buna bağlı olarak ayrıca $\boldsymbol{\Psi}$ yaratma işlemcisine ve $\boldsymbol{\Psi}^{\bullet}$ yok etme işlemcisine de uygulanır. Çoğu geleneksel açıklamada ψ bir momentum durumu olarak kabul edilir.

$$\boldsymbol{\Psi\Phi}\ldots\boldsymbol{\Theta}|0\rangle$$

parçacıkların

$$\theta,\ldots,\phi,\psi$$

dalga fonksiyonlarıyla birlikte art arda sunulmasından kaynaklanan durum olur.

Belirli herhangi bir tür parçacık ya bir fermiyon ya da bozon olacağı için bu gerçeğin hesaba katılması gerekir. Özellikle, iki fermiyonu aynı duruma birbiri ardından sunmamızı engelleyen Pauli ilkesi devreye sokulmak zorundadır. Bu formalizmde Pauli ilkesi, herhangi bir ψ fermiyon dalga fonksiyonuyla ilgili bize, bu belirli fermiyon dalga fonksiyonunu duruma iki kez sunmayı denersek izin verilen bir durum vektörü olmayan sıfırı elde edeceğimizi söyleyen, $\boldsymbol{\Psi}^2 = 0$ (diğer bir deyişle $\boldsymbol{\Psi\Psi} = 0$) özelliğince ifade edilir. Bu "Pauli ilkesi" kuralı yalnızca, $\boldsymbol{\Psi}$ ve $\boldsymbol{\Phi}$ aynı tür fermiyonu tanımlayan yaratma işlemcileri olmak üzere,

$$\boldsymbol{\Psi\Phi} = -\boldsymbol{\Phi\Psi}$$

karşı–değişme özelliğinin belirli bir örneğidir. Aynı tür bozonu tanımlayan $\boldsymbol{\Theta}$ ve $\boldsymbol{\Xi}$ yaratma işlemcileri için

$$\boldsymbol{\Theta\Xi} = \boldsymbol{\Xi\Theta}$$

değişme özelliğine sahip oluruz.[26.1] Böylece yaratma işlemcilerinin §11.6'da açıklandığı gibi, fermiyon yaratma işlemcilerinin tek dereceli ve bozon yaratma işlemcilerinin çift dereceli sayıldığı (dereceli) bir Grassmann cebirinin kurallarını sağladığını görürüz.

§24.3'teki tartışma uyarınca bir parçacık yaratmayla ilgili olarak bir duruma sunulan dalga fonksiyonları pozitif frekanslı olmak zorundadır. Negatif frekanslı nicelikler de formalizmde ayrıca bir rol oynar; yok etme işlemcileri. Pozitif frekanslı ψ dalga fonksiyonunun karmaşık eşleniği $\bar{\psi}$ negatif frekanslı bir niceliktir. O, $\boldsymbol{\Psi}$ yaratma işlemcisinin (*bkz.* §13.9) Hermitsel eşleniği[3] olan $\boldsymbol{\Psi}^*$ yok etme işlemcisiyle ilgilidir. $\boldsymbol{\Psi}^*$'ın yorumu onun, bir parçacığın toplam durumdan, o toplam durum önceki gibi ifadede $\boldsymbol{\Psi}^*$'ın sağında yer alan şey tarafından tanımlanan durum olmak üzere, çıkarılmasını göstermesidir. En sağda yer alan belirsiz $|0\rangle$ vakum durumumuz hiçbir parçacık içermediğinden herhangi bir yok etme işlemcisinin onun üzerindeki dolaysız eylemi sıfır vermek zorundadır:

[26.1] Bunun niçin, bozonlar ve fermiyonlarla ilgili §23.8'de açıklandığı üzere doğru simetrili durumlar verdiğini açıklayın.

[3] En standart yazında bir yok etme işlemcisi için, $a^\dagger$, a'nın Hermitsel eşleniği, ilgili yaratma işlemcisi yerine kullanılmak üzere, a sembolü kullanılır ve normalde bir momentum uzay tanımı benimsenir; *bkz.* Shankar, 1994 ve Zee, 2003.

$$\Psi^*|0\rangle = 0.$$

Elbette bu yok etme işlemcilerinin her zaman sıfır sonucu verdiği anlamına gelmez çünkü ilk önce içeriye birkaç parçacık koyabiliriz. Örneğin $\Psi^*\Theta|0\rangle$ gibi bir ifadenin sıfır olması gerekmez. Bu, Φ ve Θ durumlarının ikisi de çıkarmakta olduğumuz Ψ'yle aynı bile olsa geçerlidir. Çünkü Ψ^* işlemcisini parçacığın belirli ψ dalga fonksiyonunu durumdan basitçe çıkarır şekilde düşünmeye çalışmamalıyız.[4] Genellikle belirli ψ dalga fonksiyonunun tam olarak durumun parçası biçiminde davranması olası değildir. Ψ^*'ın bunun yerine yaptığı aslında, durumun çıkarılmakta olan parçacık türüyle ilgili parçasıyla skaler bir çarpım oluşturmaktır. (Bununla ne kastettiğimi Şekil 26.1'de, temelde uzmanlara eğlence olması için, diyagram biçimli formda, yok etme işleminin yanı sıra yaratmayı gösteren diyagramları da ayrıca verdiğim fermiyon ve bozon durumlarının ikisinde de belirttim.)[26.2] Bununla uyumlu olarak, (aynı tür parçacıklarla ilgili) yaratma ve yok etme işlemcilerinin, "artı" işareti fermiyonlara "eksi" işareti bozonlara işaret etmek, ***I birim*** işlemciyi göstermek, $\langle\ |\ \rangle$ tekil parçacıklara ilişkin olağan Hilbert uzayı skaler çarpımı yerine geçmek (spinsiz durum spinli parçacıklar için uygun bir genelleme bulunan §22.3'te değerlendirilmiş olmak üzere)[5] ve i^k (sizi kendisiyle ilgili olarak kaygılandırmayacağım) spine bağlı olarak 1, i, –1, –i'den biri yerine kullanılmak üzere,

$$\Psi^*\Phi \pm \Phi\Psi^* = i^k\langle\psi|\phi\rangle I$$

(karşı–) değişme kurallarını sağlamak zorundadır. Ayrıca (yukarıda da verilmiş olan) iki yaratma ve iki yok etme işlemcisiyle ilgili olarak şu (karşı–) değişme kurallarına da sahibiz (fermiyonlar için artı bozonlar için eksi işaret):

$$\Psi\Phi \pm \Phi\Psi = 0, \Psi^*\Phi^* \pm \Phi^*\Psi^* = 0.$$

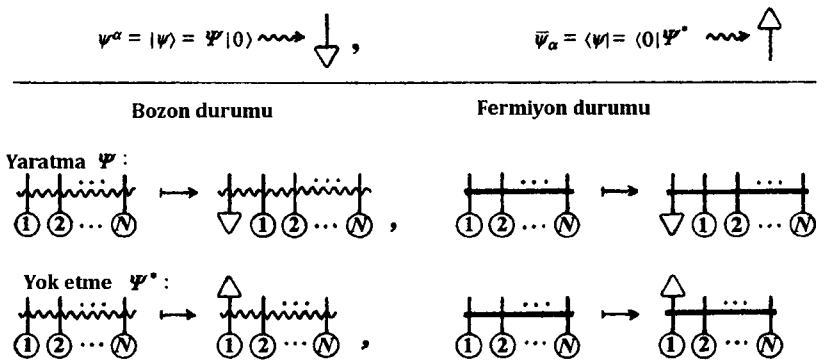
§23.7'de kısaca değinilen spin istatistiği teoreminin $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots)$ yarı–tek spinli parçacıklar için karşı–değişme (fermiyonlardan kaynaklı üstteki ar-

---

[4] Standart literatürü tanıyan bazı okuyucuların kafası bunun yüzünden karışabilir çünkü durum sıklıkla, kullanılan yaratma ve yok etme işlemcilerinin, *ortogonal bir* taban oluşturan pek çok farklı momentum durumuyla ilgili olanlar olmalarının yasaklanmasıdır. Bu durumda, yok etme işlemcileri belirli durumları *ortadan kaldırır*.

[26.2] Tüm bunları, §23.8'deki indis notasyonuna ya da Şekil 12.17'deki diyagram notasyonuna ya da ikisine birden başvurup $\bar{\psi}_\alpha\psi^{[\alpha}\phi^\beta\ldots\chi^{\kappa]}$ benzeri ifadeler kullanarak anlamlandırın (ve verili türdeki bir parçacığa ilişkin yaratma ve yok etmeyle ilgili bu değişme kurallarını doğrulayın). Fermiyon ve bozon durumlarının her ikisinde de duruma ilişkin normalleştirmeyi koruyan faktoriyel çarpanlarının tümünü düzenleyin.

[5] *Bkz.* Zee, 2003; Peskin ve Schröder, 1995.



Şekil 26.1 Bir Ψ yaratma işlemcisinin $\phi_1^{(\beta}\phi_2^{\gamma}\ldots\phi_N^{\nu)} \mapsto \psi^{(\alpha}\phi_1^{\beta}\phi_2^{\gamma}\ldots\phi_N^{\nu}$ bozon durumunda ve $\phi_1^{[\beta}\phi_2^{\gamma}\ldots\phi_N^{\nu]} \mapsto \psi^{[\alpha}\phi_1^{\beta}\phi_2^{\gamma}\ldots\phi_N^{\nu]}$ fermiyon durumunda; ve bir Ψ^* yok etme işlemcisinin $\phi_1^{(\alpha}\phi_2^{\beta}\ldots\phi_N^{\mu)} \mapsto \bar{\psi}_\alpha\phi_1^{(\alpha}\phi_2^{\beta}\ldots\phi_N^{\mu)}$ bozon durumunda ve $\phi_1^{[\alpha}\phi_2^{\beta}\ldots\phi_N^{\mu]} \mapsto \bar{\psi}_\alpha\phi_1^{[\alpha}\phi_2^{\beta}\ldots\phi_N^{\mu]}$ fermiyon durumundaki eylemine ilişkin Diyagram biçimli form.

tı işaret) ve (0, 1, 2, 3, ...) tamsayılı spinler için değişme (bozonlardan kaynaklı eksi) kurallarına sahip olmamızı talep ettiği belirtilmelidir. Bununla ilgili nedenler bu açıklamanın kapsamı dışındadır.[6] Bununla birlikte temel konular ilgili spinör indislerine ilişkin birleşimsel özelliklerle birlikte enerji pozitifliği (fermiyonlar durumunda) ve parçacık–sayı pozitifliğiyle (bozonlar durumunda) ilgilidir.[7]

26.3 Sonsuz boyutlu cebirler

Fermiyonlar durumunda bu karşı–değişme kurallarının §11.5'te açıklandığı üzere bir Clifford cebirini tanımlayanlarla tam olarak aynı cebirsel biçimde olması kayda değer bir gerçektir.[26.3] Tek önemli fark, olağan Clifford cebirleri sonlu boyutluyken bir fermiyon alanıyla ilgili yaratma ve yok etme işlemcileri uzayının, tek parçacıklı dalga fonksiyonları uzayı sonsuz boyutlu olmak üzere, sonsuz boyutlu olmasıdır. Bununla birlikte okur, sonsuz boyutlu uzayların, sonlu boyutlu olanlarla çoğu kez benzer

---

6 Bu gerekliliğin dokunaklı bir gösterimi için Zee, 2003.

7 Parçacık değişimini 2π döndürmeyle bağlantılandıran ilgi çekici bazı topolojik konular da mevcuttur fakat bunların QFT'yle ilgili bütünlüklü anlatımı belirsiz kalır. *Bkz.* Finkelstein ve Rubinstein, 1968; Feynman, 1986; Berry, 1984; Berry fazına ilişkin bir tartışma için Shankar, 1994.

[26.3] Bu Clifford cebiri yapısını skaler çarpımın rolünü daha ayrıntılı ifade ederek açıklayın. Clifford cebirini tanımlayan kuralları $\gamma_p\gamma_q + \gamma_q\gamma_p = -2g_{pq}I$ biçiminde kabul edin. *İpucu*: g_{pq}'nun çapraz olması gerekmez.

olsa da, oldukça farklı bazı özelliklere sahip olabileceği ve onlarla çalışmanın sıklıkla çok daha zor olduğu konusunda uyarılmalıdır.

QFT formalizminin bu kitapta daha önce ele aldığımız diğer tür sonlu boyutlu cebirsel yapılarının bazılarının sonsuz boyutlu versiyonlarını da içermesi ilginçtir. Örneğin $\langle \ | \ \rangle$ skaler çarpımı gerçekten §13.9'da ele alınmış olan Hermitsel skaler çarpımın sonsuz boyutlu bir versiyonudur (*krş.* §22.3). Aslında QFT'de yalnızca "Hermitsellik"le (üniterlik) ilgilendiğimiz açığa çıkmaz fakat ayrıca simetrik formlar ("sözde ortogonallik"), ters simetrik (simplektik) formlar ve karmaşık yapıların kendi rollerini oynadıklarını görürüz.[8] Sözde ortogonal ve simplektik formların olağan sonlu boyutlu versiyonları §§13.8, 10'da ele alındı; olağan sonlu boyutlu karmaşık yapılar §12.9'da sahne aldı.

Burada QFT'yle ilgili (sonsuz boyutlu) karmaşık bir yapının açığa çıkma biçiminde belirli bir anlam mevcuttur. Karmaşık sayılar, holomorfik fonksiyonlar ve karmaşık vektör uzaylarının kuantum kuramında (ve böylece dünyamızın temel yapısında) temel rollere sahip olduğunu zaten görmüştük. Bununla birlikte bu noktada devreye giren sonsuz boyutlu belirli karmaşık yapı, QFT çalışmasında, karmaşık sayı sihrinin bu ilk örneklerinden bir biçimde (ilişkili olsa da) farklı bir anlama sahip görünür. Kuantum kuramına ilişkin Hilbert uzayının karmaşık olduğu (diğer bir deyişle kuantum üst üste binmesinin karmaşık katsayılarla gerçekleştiği) saf ifadesinden öteye geçer. Bunun neyle ilgili olduğunu anlamaya çalışalım.

Karmaşık yapı kavramının §12.9'da nasıl sunulduğunu anımsayalım. n–boyutlu karmaşık bir vektör uzayı, gerçel $2n$–uzayı üzerindeki eylemi karmaşık n–uzayında "i'yle çarpma" anlamına gelip $\boldsymbol{J}^2 = -1$ ifadesini sağlayan bir $\boldsymbol{J}$ işlemi mevcut olmak üzere, $2n$–boyutlu gerçel bir vektör uzayı biçiminde düşünülebilir. Bunun QFT'yle ilgili sonsuz boyutlu versiyonu klasik bir alandan bir kuantum alanına geçişle ilgilidir. Bu noktaya kadar şeyleri bir parçacık/dalga fonksiyonu dilinde açıkladım. Yine de klasik bir alandan doğruca bir kuantum alanına nasıl gidildiğini bilmeye gerek duyarız çünkü klasik alanlarda ele almak üzere bölümler 21–23 uyarınca "kuantize edebileceğimiz" klasik hiçbir parçacık tablosu bulunmaz.

Elektromanyetik alanı bir model olarak özellikle akılda tutmak yararlıdır. Burada Maxwell denklemlerinin doğrusallığı (§19.2) işleri kolaylaştırır. Serbest Maxwell denklemlerinin (ilgili integrallari yakınsak hale getirmek üzere sonsuzdaki uygun azalma koşullarıyla birlikte) çözümlerine

[8] Oldukça kafa tutan teknik bir kaynak için *bkz.* Landsman, 1998; ayrıca Ashtekar ve Magnon, 1980.

ilişkin $\mathcal{F}$ uzayı sonsuz boyutlu bir gerçel vektör uzayıdır.[26.4] §9.5'te açıklananlarla ilişkili işlemleri kullanarak Maxwell denklemlerine ilişkin her F çözümünü[9] pozitif frekanslı F^+çözümüyle negatif frekanslı F^- çözümünün bir *toplamı* olarak ifade edebiliriz:

$$F = F^+ + F^-.$$

Bu pozitif ve negatif frekanslara ayırma, uygun QFT'nin oluşturulması için kritik önemdedir (bu konu üzerine §24.3 ve §26.2'deki yorumları anımsayın). J işlemi, bu sonsuz boyutlu $\mathcal{F}$ gerçel vektör uzayına uygulandığı şekliyle onu, (sonsuz boyutlu) karmaşık bir vektör uzayına dönüştürür ve böyle yaparak bu pozitif/negatif frekans bölmeyi kapsamanın bir yolunu sağlar. J bunu, serbest her F Maxwell alanına etkiyerek şu biçimde gerçekleştirir:

$$J(F) = \mathrm{i}F^+ - \mathrm{i}F^-.$$

Öz değeri i olan J öz durumları pozitif frekanslı, –i olan J öz durumları negatif frekanslı (karmaşık) alanlardır.[26.5] Pozitif frekanslı alanlar yaratma işlemcilerinin sunması gereken tekil foton dalga fonksiyonlarını sağlar. Ayrıca gerektiğinde (potansiyel Maxwell bileşenleriyle çarpılan Maxwell alan bileşenleri içeren bir ifadeye ilişkin uzaysal herhangi bir 3–uzay üzerindeki bir integrali içererek;[10] skaler durumla ilgili olarak §21.9 ve §22.3'ü karşılaştırın) durumları normalleştirmekte kullanılabilecek açık bir skaler çarpım ifadesi de mevcuttur. Diğer klasik alanlar da benzer biçimde ele alınabilir fakat "serbest alan denklemleri" doğrusal olmadığında (genel görelilikte olduğu gibi) derinlikli zorluklar ortaya çıkabilir. Doğrusal olmayan alanları "kendi–etkileşen" alanlar olarak adlandırabiliriz ve bu tür zorlukları, kısa süre içinde göreceğimiz, etkileşimlerin var olduğu durumdaki kuantizasyonla ilgili sorunlara dayandırabiliriz.

26.4 QFT'deki karşı–parçacıklar

Böyle yapmadan önce karşı–parçacıklar konusuna geri dönelim. 24. bölümde ve yine §26.1'de QFT'yle ilgili karşı–parçacık kavramının önemini vurguladım. Karşı–parçacıklar var olan QFT formalizminde nasıl bir rol

[26.4] Bu uzaydaki hangi toplama ve çarpmanın ortalama olduğunu açıklayın.

9 Belki bir potansiyel biçiminde yazılmıştır.

[26.5] Bunu gösterin. "Düşme koşulları" benzeri inceliklerle ilgili endişelenmeyin.

10 Durum normalleştirmesiyle ilgili genel konular örneğin Ryder, 1996'da ele alınır. Elektromanyetik alanın kuantize olması Shankar, 1994'te bir biçimde daha geleneksel bir davranışla verilir.

oynar? §25.3'te belirtildiği üzere bazı parçacıklar kendilerinin karşı–parçacıklarıyken çoğu parçacık değildir. Matematiksel olarak konu karmaşık eşleme işleminin, klasik alan niceliklerine (ya da 1–parçacıklı dalga fonksiyonuna) dolaysızca uygulandığı haliyle daha önceden olduğu aynı türde bir nicelik verip vermediğidir. Bir skaler alan durumunda bu genellikle (fakat pek de yeterli olmayarak) klasik alanın gerçel bir alan olup olmadığı konusu biçiminde ifade edilir. Karmaşık alanlar, karmaşık faz açısının ($e^{i\theta}$ çarpanı) elektromanyetik etkileşimlerle ilgili "ayar alanı" reçetesi uyarınca §15.8 ve §19.4'te açıklandığı gibi ele alınması gerektiği yerde, yüklü alanlar olarak kabul edilir. Bu tür bir alanın karmaşık eşleniği ters yüke sahiptir, böylece o "aynı türde bir nicelik" değildir (böylece örneğin alanı kendi eşleniğine anlamlı biçimde ekleyemeyiz). Böylesi durumlarda parçacık ve ona ait karşı–parçacık kesinlikle farklıdır, Bununla birlikte klasik alanın karmaşık doğası, ya da "yüklü" doğası, hiçbir biçimde hikâyenin tümü değildir. Yüksüz K^0 mezonu örneğin kendi karşı–parçacığından farklıyken yüksüz π^0 mezonu kendi karşı–parçacığıyla aynıdır. Her iki durumda da klasik alan gerçel bir skaler olur.

Spinör (ya da fermiyon) alanlarından ne haber? Dirac elektronunun yükü, kendi karmaşık eşleniğini orijinal alanınkinden farklı bir karaktere sahip olarak nitelemeye yeterlidir. Bununla birlikte, kütleye sahiplerse nötrinolar durumunda birden fazla olasılık bulunur. Örneğin *Majorana* spinör alanı olarak anılan şey durumunda (kütleli) nötrino kendi karşı–parçacığı olur. (25. bölümde verilen açıklamalarda nötrinonun zik'i karşı–nötrinonun zak'ı ve tersi olur.) Var olan anlayış uyarınca[11] tüm nötrinolar kendi karşı–parçacıklarından farklıdır.

Öyleyse QFT formalizmi karşı–parçacıklarla nasıl ilgilenir? Klasik alan, ya da 1–parçacıklı ψ dalga fonksiyonu, üzerindeki karmaşık eşleme işleminin farklı karakterde bir nicelik sağladığı durumu ele alın, böylece kuantum parçacığı kendi karşı–parçacığından farklılık gösterir. (Parçacık ve karşı–parçacığın aynı olduğu durum §26.2'de, daha önceki tartışmamızda ele alınmıştı.) Şu halde olağan bir ψ dalga fonksiyonu pozitif frekansa sahip olmalıdır fakat ψ'yle aynı türde olup negatif frekanslı olan bir ϕ niceliğini de ele alabiliriz. Bu durumda ϕ'nin karmaşık eşleniği $\bar{\phi}$, hem $\bar{\phi}$ hem de ψ artık pozitif frekanslı olsa da, ψ'den farklı türde bir dalga fonksiyonu olur. $\bar{\phi}$ niceliği 1–parçacıklı bir durumla ilgili dalga fonksiyonu sağlar. O durumda, karşı–parçacığa ilişkin ilgili yaratma işlemcisi $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ ve yok etme işlemcisiyse $\bar{\boldsymbol{\Phi}}^*$ olur.

[11] Halihazırda fizikte son derece "heyecanlı" bir alan olan nötrinolar üzerine bazı yeni bilgiler için *bkz.* Shrock, 2003.

Dirac'ın (§24.8'de açıklanmış olan) orijinal "denizi"yle, Dirac durumunda tüm işlemcilerin en sağındaki "belirsiz" durumu olağan $|0\rangle$ vakum durumundan, $|0\rangle$'ın parçacık ya da karşı–parçacıklardan tümüyle yoksun biçimde görülmesi gerekmek üzere, farklı biçimde düşünerek bağlantı kurmaya çalışalım. Bunun yerine $|\Sigma\rangle$'yla gösterilen bu yeni "vakum" durumunu, başka bir şeyle değil bütünüyle negatif enerjili elektron durumlarının tümüyle dolması gereken Dirac "denizi"nin kendisi olarak kabul edelim. Şimdi, Dirac'ın orijinal tablosunda, negatif enerjili elektron durumlarındaki tekil bir "delik" tarafından tanımlanan tekil bir pozitron durumunu ele alalım. Negatif frekanslı bir ϕ'yle verilen bu belirli kayıp olan dışındaki negatif enerji durumlarının tümü doldurulmak durumundadır. Bu $|\Sigma\rangle$ vakumunu kullanan kuantum alan kuramsal tanımı, $|\Sigma\rangle$ üzerine etkiyen Φ^* yok etme işlemcisinin sonucudur çünkü bu işlemci ϕ negatif enerji durumunu, $\Phi^*|\Sigma\rangle$ toplam durumunu vererek bu vakumdan ayırır.[26.6]

Daha genel $|0\rangle$ vakumunu işe koşan tanımlamayı kullansaydık negatif enerjili ϕ elektron durumunu ayırmak yerine $\bar{\phi}$ dalga fonksiyonlu pozitron durumunu yerleştirdiğimizi düşünürdük. Bu, $\bar{\Phi}$ yaratma işlemcisinin $|0\rangle$ üzerine $\bar{\Phi}|0\rangle$ toplam durumunu verecek şekilde uygulanmasıyla gerçekleştirilir. Bu, daha önce "Dirac denizi"nde sahip olduğumuz $\Phi^*|\Sigma\rangle$'yla aynı *görün*mez fakat $\bar{\Phi}|0\rangle$ ve $\Phi^*|\Sigma\rangle$ durumlarının temelde eşdeğer olduğu belirli bir anlam mevcuttur. $\bar{\Phi}$ ve Φ^* ikisi de toplam duruma aynı cebirsel niceliği, diğer bir deyişle 1–paracıklı dalga fonksiyonuna ilişkin Hilbert uzayındaki $\bar{\phi}$ niceliğince tanımlanan o belirli vektörü, sunmayı içerir. Gerçek $\bar{\Phi}$ ve Φ^* işlemcileri arasındaki fark yalnızca, bu Hilbert uzay vektörünün toplam durum üzerine etkir varsayıldığı cebirsel[26.7] biçimdedir. Karşı–değişme kurallarını $\bar{\Phi}$ ya da Φ^*'ı en sağa götürmek üzere her zaman kullanabildiğimizden $\bar{\phi}$'nin toplam durum üzerine etkir varsayıldığı biçim, en sağdaki seçili vakum durumu $|0\rangle$ ya da duruma göre $|\Sigma\rangle$ üzerindeki kendi eylemine indirgenir. Bu bilgi, bu vakum durumunun gerçekten ne anlama geldiğiyle ilgili tanımlamanın parçası olarak ele alınabilir.

26.5 Alternatif vakumlar

Burada, "vakum durumu"yla ilgili alternatif seçimlerin mevcut göründüğü bu durumla ilgili olarak bazı önemli yorumlar yapılmalıdır. "Alter-

---

[26.6] Belirli bir durumu, bir yok etme işlemcisinin gerçekte ne yaptığına ilişkin daha önceki nitelemelerime karşın, bu biçimde nasıl ayırabildiğimizi açıklayın. *İpucu*: *Bkz.* alıştırma [26.2].

[26.7] Alıştırma [26.2] ve Şekil 12.18'e başvurarak soyut indis ya da diyagram notasyonundaki bu cebirsel farklılığı gösterin.

natif vakumlar" konusunun modern QFT'de kayda değer bir öneme sahip olduğunu göreceğiz. Yaratma ve yok etme işlemcileri biçimindeki cebirsel ifadelerden ya da yakınsak üslü seri ifadelerinden oluşturulabilen tüm $\boldsymbol{A}$ işlemcilerinden oluşan $\mathcal{A}$ cebirini ele alalım. Bir "vakum durumu"yla ilgili iki önerme, $|0\rangle$ ve $|\Sigma\rangle$ diyelim, $\mathcal{A}$'ya ait $|0\rangle$ ya da $|\Sigma\rangle$'ya uygulanabilen hiçbir eleman olmaması özelliğine sahip olabilir. Böylesi durumlarda, $|0\rangle$ ve $|\Sigma\rangle$ farklı Hilbert uzaylarına ait olarak ele alınmak zorundadır ve böylece, $\boldsymbol{A}$, bize sonsuz yanıt verecek ya da anlamlı hiçbir yanıt vermeyecek şekilde $\mathcal{A}$'ya ait olmak üzere,

$$\langle\Sigma|\boldsymbol{A}|0\rangle \text{ ya da } \langle 0|\boldsymbol{A}|\Sigma\rangle$$

biçiminde ifadelerin mevcut olduğunu bulmamız olası olur. Bu bize, $|0\rangle$ ve $|\Sigma\rangle$ durumlarının ikisinin de göründüğü tutarlı bir kuantum kuramı oluşturmayı yasaklar. (§22.5'teki tartışmadan $\langle\Sigma|\boldsymbol{A}|0\rangle$ benzeri niceliklerin, olasılıkları hesaplamak üzere kullanmaya gerek duyduğumuz genel türdeki ifadeler olduğunu anımsayın; notasyonla ilgili olarak *bkz.* §22.3.)

Burada ortaya çıkan konu QFT'deki derin konulardan biridir ve parçacık fiziğine modern yaklaşımlarda yaşamsal bir rol oynar. "Vakum durumu seçimi", yaratma ve yok etme işlemcilerince, sonuncusu bir anlamda QFT'nin *dinamiği*ni tanımlamak üzere, üretilmiş olan $\mathcal{A}$ cebirine ilişkin seçimle karşılaştırılabilir (ve bütünleyici) önemde bir konudur. Serbest elektronlar durumunda ele almakta olduğumuz iki vakum, (hiçbir parçacık ya da karşı–parçacık içermeyen) $|0\rangle$ ve (içerisindeki negatif enerjili parçacık durumlarının tümü dolu olan) $|\Sigma\rangle$, bir anlamda, $|0\rangle$ ve $|\Sigma\rangle$'nın bize farklı Hilbert uzayları vermesi gerçeğine karşın, etkin biçimde eşdeğer olarak ele alınabilir. $|\Sigma\rangle$ vakumuyla $|0\rangle$ vakumu arasındaki farkı, yalnızca "yük sıfırı"nı tanımlayan bir çizgi çizdiğimiz bir konu olarak değerlendirebiliriz.

Aslında, Dirac denizinin uygun bir vakumdan fiziki olarak farklı olduğunu düşünebiliriz çünkü negatif enerjili elektron denizinin bize devasa büyüklükte, aslında sonsuz, bir elektrik yükü sunması gerekir. $|\Sigma\rangle$ durumunun fiziki anlam ifade etmesi için yükü, "deniz"in toplam sonsuz yük değeri (gerçekte, elektron yükü negatif olacak şekilde negatif biçimde sonsuz) sıfır sayılacak şekilde "yeniden normalleştirmek" zorundayız. Dirac denizinin *kütle*sini, artık onun (etkin) kütleçekimsel etkisiyle ilgilenmek üzere, ele alsaydık benzer bir durum ortaya çıkardı. Dirac denizinin ($E = mc^2$ üzerinden) sonsuz toplam negatif enerjisi, fiziki olarak tıpkı sonsuz elektrik yükü durumundaki gibi anlamsız olan sonsuz bir negatif kütle sunar. Yine, Dirac denizini ciddiye almamız gerekirse vakum kütlesini, denizinkine "sonsuz bir kütle yoğunluğu ekleyerek", toplamın bize gözlem-

lenmiş olan vakumun kütle yoğunluğuyla ilgili gerek duyduğumuz sıfır değerini sağlayacağı şekilde, yeniden normalleştirmek zorunda oluruz.

Okur, bu "alternatif vakumlar" ve hassas fiziki yanıtlar elde etmek üzere sonsuz bir sabit ekleyerek yük ve kütle türü şeyleri "yeniden normalleştirme"ye ilişkin bu belirgin gereklilik sorununun yalnızca, Dirac'ın başlangıçta bulduğu tuhaf "deniz" fikrini sunma gerekliliğinin bir aracı olduğu izlenimini edinmiş olabilir. Yine de bu iki özelliğin hiçbir biçimde Dirac'ın olağanüstü "denizi"ne özgü olmadığını göreceğiz. Bunlar, parçacık fiziğiyle ilgili gerçekçi bir kurama yönelik ciddi yaklaşımların, en azından bugün var olan yaklaşımların tümünde mevcut görünürler. Standart model yeniden normalleştirme ve alternatif vakumların her ikisinden esaslı biçimde faydalanır. Tarihin bir hasarı olmaktan uzak biçimde Dirac denizi, ilerlemeye çalıştığımızda, en azından bugün olanaklı olan şeyler düzeni içinde, aklımızda tutmanın faydalı olduğu bir model türü olarak hizmet eder. Gözlemle uyum ve matematiksel tutarlılık ikiz kriteri, eksik biçimde karşılanmış olsa da bizi, şimdiye dek yeniden normalleştirme ve benzersiz olmayan vakumlar fikirlerine bağlanmış olan bir yola soktu.

26.6 Etkileşimler: Lagrange denklemi ve yol integralleri

Bizi bu yöne sevk eden zorluklar, *etkileşimleri* QFT çerçevesinde ele almaya giriştiğimizde ortaya çıkan sorunlardan kaynaklandı. Aslında şimdiye kadarki tartışmam temel olarak yalnızca serbest alanlar durumuyla ilgilendi ve tüm ayrıntılarını sunmamama rağmen okurun, etkileşim yokluğunda işlerin esasen tehlikesiz bir yoldan ilerleyeceğini söylediğimde bana güveneceğini umuyorum. Durumlar, parçacık ve karşı–parçacıkların farklı sayıda üst üste binmeleri ve hatta böylesi parçacıklardan sınırsız sayıda mevcut olduğunda oluşturulabilir. Bu durumlar $|0\rangle$ üzerine $\mathcal{A}$'nın rasgele bir elemanıyla, diğer bir deyişle yaratma ve yok etme işlemcileri biçimindeki bir ifadeyle (polinom ya da üslü seri, sonuncusundaki yakınsaklık konusuna dikkat ederek), birlikte etkimek yoluyla elde edilir. Böylesi durumlara ilişkin uzaylar (bu tür şeyler üzerine çalışan ilk kişi olan Rus fizikçi V. A. Fock'un ardından) *Fock uzayı* olarak anılır ve giderek artan sayıda parçacığa sahip Hilbert uzaylarına ilişkin bir *dolaysız toplam*[12] (*bkz.* §13.7) olarak adlandırılan şey biçiminde düşünülebilir. Bir durumda-

[12] Parçacığın kendi karşı–parçacığı olduğu basit bir bozon alanı durumuyla ilgili Fock uzayı, dolaysız toplama işlemi $\oplus$ ile gösterilmek ve $\odot$ sembolü *simetriklenmiş* tensör çarpımını göstermek üzere, $\mathcal{C} \oplus \mathcal{H} \oplus \{\mathcal{H} \odot \mathcal{H}\} \oplus \{\mathcal{H} \odot \mathcal{H} \odot \mathcal{H}\} \oplus \{\mathcal{H} \odot \mathcal{H} \odot \mathcal{H} \odot \mathcal{H}\} \oplus \ldots$ biçiminde yazılabilir.

ki parçacık sayısı, örneğin kuantum alan durumlarının, iyi tanımlı belirli bir anlamda,[13] en "klasik biçimli"si olan *uyumlu durumlar*daki gibi sınırsız olabilir. Bunlar, Ξ, (sonlu bir normun varlığını garanti etmek üzere sonsuzdaki uygun düşme özellikleriyle birlikte gerçek bir serbest Maxwell alanı olarak kabul etmemize olanak sağlayan) belirli $\boldsymbol{F}$ alan düzeniyle ilgili *alan işlemcisi* olmak üzere,

$$e^{\Xi}|0\rangle$$

biçimindeki durumlardır. Ξ'yi $\boldsymbol{F}$'nin sırasıyla pozitif ve negatif frekanslı kısımlarına karşılık gelen yaratma ve yok etme işlemcilerinin toplamı olarak tanımlarız.

§26.2'den yaratma ve yok etme işlemcilerinin belirli değişme bağıntılarını sağladığını anımsarız. Buradan, alan işlemcilerine ait çeşitli bileşenlerin genellikle birbirleriyle değişmedikleri sonucu izler. Örneğin, elektromanyetik alan durumunda **B** manyetik alanını tanımlayan işlemciye ait bileşenler ve **A**'yı tanımlayanlar (*bkz.* §§19.2, 4) *kanonik* (bir parçacığın konum ve momentumu arasındakiler gibi, *bkz.* § 21.2) değişme kurallarını sağlar.[14] Buradan, Heisenberg belirsizlik bağıntılarının (*bkz.* §21.11) bu nicelikler arasında, onların eşzamanlı olarak ölçülebileceği kesinliğe bir sınır sağlayarak geçerli olmak zorunda oluşu sonucu izler.

Öyleyse etkileşimlerle nasıl ilgileniriz? Modern QFT genel çerçevesinde, görelilikçi bir kuramla ilgilendiğimizde pek çok açıdan bir Hamiltondan daha uygun olan *Lagrange denklemi* (*bkz.* §20.1) çok önemlidir. §21.2, §23.2 ve 24. bölümden anımsayacağımız üzere, standart Schrödinger/Hamilton kuantizasyon işlemleri göreliliğe ilişkin uzayzaman simetrisinden huzursuz olur. Bununla birlikte bir zaman koordinatı seçimiyle ilişkili Hamiltondan farklı olarak Lagrange denklemi bütünüyle görelilikçi olarak değişmez bir kavram biçiminde kabul edilebilir (*bkz.* §20.4). Bir Lagrange denkleminden yola çıkarak nasıl bir QFT oluşturabiliriz? Temel fikir, kuantum kuramı formalizminin temelinde yatan pek çok fikir gibi, onu görelilikçi kuantum kuramına ilişkin bir taban olarak aktaran kişi parlak zekalı Amerikalı fizikçi Richard Feynman[15] olmasına rağmen Dirac'a[16] dek

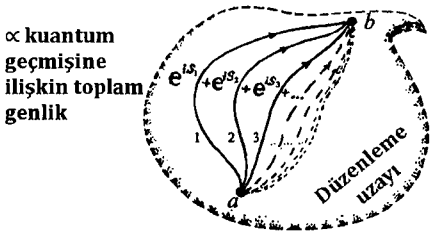
---

[13] Pek çok biçimde, fermiyonik, spin, vb, ortaya çıkabilen uyumlu durumlara ilişkin bir tartışma için *bkz.* Hannabuss, 1997; Shankar, 1994.

[14] *Bkz.* Wald, 1994; Birrell ve Davies, 1984.

[15] *Bkz.* Feynman, 1948, 1949. Feynman ve Hibbs, 1965 fikre ilişkin mükemmel bir gözden geçirmedir. Kuantum elektrodinamiğine Schwinger rekabetçi yaklaşımı pek çok biçimde daha hassastı fakat çoğu araştırmacı bugün yol integralleri ve Feynman grafiklerine ilişkin sezgisel tabloyu kullanır.

[16] *Bkz.* Dirac, 1933; Schwinger, 1958.



Şekil 26.2 Kuantum kuramına ve QFT'ye ilişkin yol integrali yaklaşımında alternatif klasik geçmişlerin, bir geçmiş düzenleme uzayındaki bir yol olup burada a ve b sabit noktaları arasında alınmış olmak üzere, kuantum çakışmalarını ele alırız. Bu tür bir yola atanan genlik, S eylemi Lagrange denkleminin yol üzerindeki, §20.1'deki gibi integrali olmak üzere, $e^{iS/\hbar}$'dir (çarpı bir sabit). a'dan b'ye varmak üzere toplam genlik bunların toplamıdır.

geri gider. Buradan hareketle bu genellikle, *Feynman yol integralleri* ya da Feynman *geçmişler toplamı* biçimindeki formülasyon olarak anılır. Bu ayrıca 25. bölümde ele aldığımız Feynman grafiklerinin temelidir.

Temel fikir, daha önce ele aldığımız ve §22.5'te belirginleştirilmiş olan karmaşık doğrusal üst üste binmeye ilişkin temel kuantum mekaniksel ilkeyle ilgili farklı bir bakış açısıdır. Burada bu ilkeyi yalnızca belirli kuantum durumlarına değil fakat aynı zamanda tüm uzayzaman geçmişlerine uygulanır biçimde düşünürüz. Bu geçmişleri (düzenleme uzayındaki) "olası alternatif klasik yörüngeler" olarak düşünmeye yöneliriz. Fikir, kuantum dünyasında bu tür tek bir yörünge (bir geçmiş) tarafından gösterilen yalnızca bir klasik "gerçeklik" olması yerine bu "alternatif gerçeklikler"in (varsayılan alternatif geçmişler) tümünün büyük bir *karmaşık üst üste binme*sinin bulunmasıdır. Buna göre her geçmişe, toplam, birim modüle normalleştirildiğinde bir *genlik* (§22.5) olarak adlandırdığımız karmaşık bir ağırlıklandırma katsayısı atanmalıdır, böylece bir genliğin modül karesi bize bir olasılık verir. Genliklerle genellikle düzenleme uzayında bir *a* noktasından bir *b* noktasına giderken ilgileniriz.

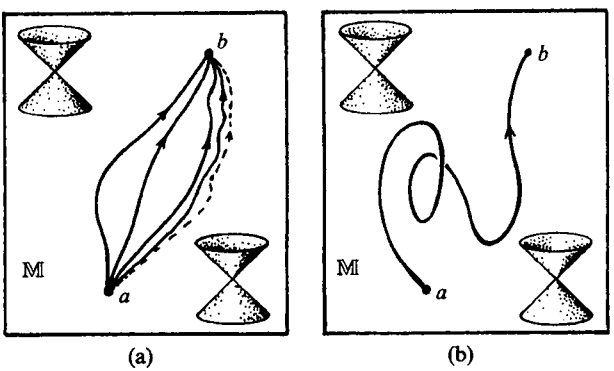
Lagrange denkleminin sihirli rolü, onun bize böylesi her geçmişe hangi genliğin atanması gerektiğini söylemesidir; *bkz.* Şekil 26.2. $\mathcal{L}$ Lagrange denklemini biliyorsak o geçmişle ilgili S *eylemi*ni (eylem o klasik geçmişle ilgili olarak yalnızca $\mathcal{L}$'nin §20.5'te verilmiş reçete uyarınca alınan integrali olmak üzere; *bkz.* Şekil 20.3) elde edebiliriz. Bu belirli geçmişe atanması gereken karmaşık genlik böylece aldatıcı biçimde basit görünen şu denklemle verilir:

$$\text{genlik} \propto e^{iS/\hbar}.$$

Denklemin basitliğiyle ilgili aldatıcılığın bir kısmı "genliğin" burada (yazıldığı haliyle birim modüle sahip olması gereken) gerçekten (karmaşık) bir sayı değil fakat bir tür yoğunluk olması gerçeğinde bulunur. Alternatif

klasik geçmişlerin yalnızca, diyelim ki 1, 2, 3, 4, ... biçiminde numaralandırılmış ayrık bir ailesine sahip olsaydık bu durumda n'inci geçmişe genlik olarak, $|\alpha_n|^2$ modül karesi, kuantum ölçüm kurallarıyla (§22.5) uyumlu biçimde o geçmişe ilişkin olasılık olarak yorumlanabilecek gerçek bir α_n karmaşık sayısı atanabileceğini ve bunu 1 toplam olasılığını veren klasik alternatiflerin tümü üzerinde toplanmış olan $\sum|\alpha_n|^2 = 1$ ifadesini elde etmek üzere normalleştirmemiz gerektiğini düşünebilirdik. Burada fakat klasik alternatiflerin *sürekli* bir sonsuzluğuna sahibiz. Bu nedenle üstteki "genliğimiz" bir "genlik yoğunluğu" biçiminde düşünülmek zorundadır ve daha çok, toplam olasılığın 1 olmasına ilişkin gerekliliğimizi gerçekleştirmek üzere klasik durumlar uzayı üzerinde integral almak zorunda olarak, $\int|\alpha(\mathbb{X})|^2\,\mathrm{d}X = 1$ benzeri bir şeye gerek duyarız. Bu, özel olarak sıkıntılı değildir; daha önce §21.9'da bir nokta parçacığa ilişkin olağan kuantum mekaniğiyle ilgili ($|\psi(\boldsymbol{x})|^2$'nin bize parçacığı $\boldsymbol{x}$ noktasında bulmaya ilişkin olasılık yoğunluğunu verdiği) bir dalga fonksiyonu durumunda buna benzer çeşitli şeyler yapmıştık. Bununla birlikte buradaki kötü haber, "klasik yollar uzayı"nın neredeyse kesin biçimde *sonsuz boyutlu* olarak ortaya çıkacak olmasıdır. Bu, sonsuz boyutlu bir uzayda çalışmak üzere gerek duyduğumuz her şeyi tanımlamak zorunda olduğumuzda, içerilen çeşitli nicelikleri anlamlandırmak ve sonuçta sonlu yanıtlara ulaşıldığından emin olmak, üzere farklı bir büyüklük düzenine ilişkin bir sorundur.

Bir yol integraline ilişkin en bulunur örnek bir kuvvet alanında ilerleyen (böylece düzenleme uzayı artık uzayın kendisidir) tekil bir nokta parçacık durumudur. Burada, Şekil 26.3a'daki gibi bir a uzayzaman noktasın-



Şekil 26.3 (a) Tekil bir yapısız parçacık için klasik bir geçmiş, uzayzamandaki (burada $\mathbb{M}$ Minkowski uzayı) sabit a ve b olayları arasında alınan bir eğridir. (b) Eğrinin, her zaman gelecek zamansal tanjanta sahip, klasik biçimde izin verilen pürüzsüz bir dünya çizgisi olması gerekmez; hatta o zamanda ileriye ya da geriye doğru gezinebilir.

dan başlayıp diğer bir b uzayzaman noktasında sonlanan çeşitli geçmişlerin tümünü ele alırız. Bu geçmişler a'dan b'ye olan yollarını sürekli uzayzaman yolları biçiminde dolanan geçmişler olarak kabul edilir. Özel görelilik kuralları uyarınca ne yolun "yasal" olmasına (diğer bir deyişle klasik göreliliğin gerektirdiği üzere ışık konileri içinde bulunmakla sınırlanmış olmasına; *bkz.* §17.8) ne de tümüyle geleceğe ilerlemesine gerek duyarız. İsterse "geçmiş" zamanda yukarı aşağı kıpırdayabilir (Şekil 26.3b)![26.8] Kuvvet alanı nedeniyle parçacığın potansiyel enerjisinin kinetik enerjisinden çıkarılmış halini (§20.1'le uyumlu biçimde) açıklayan bir $\mathcal{L}$ Lagrange denklemini düşünelim. Her bir geçmişe ilişkin bir S eylemi, Lagrange denkleminin yol üzerindeki integrali olmak üzere (Şekil 20.3'ü anımsayın), olacaktır. Klasik mekanikte dostumuz Joseph L. Lagrange bize kendisi için eylem integralinin durağan olacağı (Hamilton ilkesi; *bkz.* §20.1), bu verili kuvvet altındaki klasik hareketle uyumlu gerçek parçacık hareketi olmak üzere, belirli bir geçmişi araştırmamızı söylemişti. Kuantum mekaniğine yönelik yol integrali yaklaşımında farklı bir bakışı benimsememiz gerekir. *Tüm* geçmişlerin kuantum üst üste binmesinde "bir arada bulunma"sı gerekir ve her geçmişe bir $e^{iS/\hbar}$ genliği atanır. Lagrange'ın, kendisiyle ilgili eylemin aslında durağan olduğu seçilip ayrılmış belirli bir geçmişin bulunması gerektiğine ilişkin gerekliliğiyle nasıl bağlantı kurmalıyız?

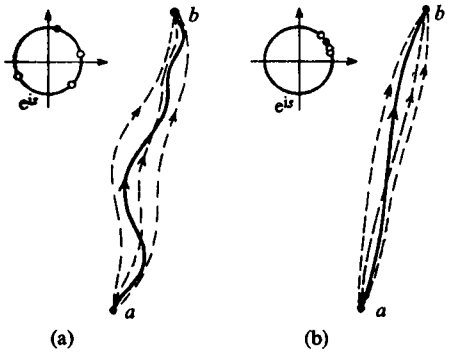
Fikir, üst üste binmemiz içinde bir "durağan eylem" geçmişinden epey uzak olan o geçmişlerin, temelde komşu geçmişlerin katkılarıyla iptal edilen katkılara sahip olacağıdır (Şekil 26.4a). Bu, geçmiş değiştirildiğinde S'de ortaya çıkan değişikliklerin saatin her tarafında değişen $e^{iS/\hbar}$ faz açıları üretecek olması nedeniyledir ve ortalamada iptal olacaktır. (Bu, özellikle Şekil 26.3b'nin nedensel olmayan hırçın geçmişlerinden gelen "fiziki olmayan" katkılara uygulanır.) Geçmiş yalnızca, eylemin kendisi için büyük ve durağan olduğu birine çok yakın olursa (argüman böylece geçerli olur), katkısı komşularınmkilerce iptal edilmek yerine desteklenmeye başlayacaktır (Şekil 26.4b) çünkü bu durumda aynı yöndeki faz açılarının büyük bir kümelenmesi mevcut olacaktır.[26.9]

Aslında bu oldukça güzel bir fikirdir. "Yol integrali" felsefesiyle uyumlu olarak, toplam genliğe ve böylece toplam olasılığa, başat bir yardımcı olarak yalnızca klasik geçmişi değil aynı zamanda bu klasik davranışa

---

[26.8] Şekil 26.3b'deki geçmişe ilişkin parçacık yaratma ve yok etme biçiminde "fiziki bir yorum"da bulunun.

[26.9] Bu ifadeleri, yoldaki birinci derece değişikliklere, "O" sembollerini kullanarak (§14.5'teki gibi) ve bunu §20.1'de "durağan eylem"in anlamıyla ilgili verilmiş olan tartışmayla ilişkilendirerek başvurmak yoluyla daha kesin hale getirmeyi deneyin. S'nin $\hbar$ cinsindeki birimlerde büyük olduğunu varsayın.



Şekil 26.4 Kuantum "Hamilton ilkesi". (a) S'nin durağan olmadığı (ve ħ'yle karşılaştırıldığında büyük olduğu) bir geçmiş. Yaklaşan geçmişlerle ilgili $e^{iS/\hbar}$ değerleri birim çember etrafında büyük oranda değişme eğilimindedir ve bu nedenle toplamda daha fazla iptal söz konusu olur. (b) S'nin durağan (ve büyük) olduğu bir geçmiş. Yakın geçmişler için $e^{iS/\hbar}$ değerleri pek de değişmez, böylece daha az iptal söz konusu olur.

ilişkin, pek de klasik olmayan geçmişlerden kaynaklanıp deneysel olarak da sıklıkla gözlemlendiği üzere pek de iptal olmayan katkılar sunan daha küçük *kuantum düzeltmeleri*ni de elde etmemiz gerekir. Üstteki açıklamalarım bir kuvvet alanında hareket eden noktasal bir parçacık biçiminde ifade edilmiş olsa da fikirler son derece genel geçerlidir ve parçacık hareketleri yanı sıra alan dinamiğine de uygulanabilir. Yine, alan denklemlerinin klasik çözümlerini gösteren "alan geçmişleri" temel katkıları sunar biçimde ortaya çıkmalıdır. Klasik yan geçmişlerden kaynaklanan kuantum düzeltmeleri de söz konusu olacaktır.

26.7 Iraksak yol integralleri: Feynman'ın tepkisi

En azından olması *gereken* şey bu. Gerçekten öyle mi? Üstte sunduğum ham açıklamalar matematiksel olarak haklı mı? Öyle olmayıp toslamış olsak bile matematiksel incelikleri görmezden gelip deneyle uyumlu iyi fiziki yanıtlar elde edebilir miyiz?

Bu sorulara yalnızca çok karışık yanıtlar verebilirim. Matematiksel gerekçelendirme konusu özellikle sıkıntılıdır ve bu noktayla ilgili verilecek en makul yanıt şu olur: "Hayır; şeylerin bugünkü haliyle değil." Üstte açıklanmış olan tekil noktasal parçacık durumu bile kesinlikle sorunludur. Yol uzayı kesin olarak sonsuz boyutludur[26.10] ve bunu ele almak üzere uygun bir "ölçü" (bir hacmin sonsuz boyutlu versiyonu) gerekir. Bu ölçünün pürüzsüz bile olmayan geçmişler lehine aşırı biçimde ağırlıklandırıldığı açığa çıkar, öyleyse bu tür koşullarda Lagrange denkleminin bile ne anlama geldiğiyle ilgili kaygılanmak zorundayız. Tanımın bu haline göre her şey ıraksar.

[26.10] Niçin?

Bu ıraksaklıklar matematiksel bakış açısıyla kesinlikle ciddidir ve kendisi yoluyla, §4.3'te, $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = (1 - x^2)^{-1}$'de $x = 2$ koyarak elde edilen "saçma"

$$1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \cdots = -\frac{1}{3}$$

toplamına güvenmemize olanak tanıyan anlamla ilgili tahminlerde bulunmaya yönelten "Eulerci" felsefeye başvurmayı seçebiliriz. Aslında yol integrali yaklaşımı neredeyse tümüyle, bize sunulmuş olan (üstteki ıraksak seri gibi) çılgın biçimde ıraksak ifadelerin gerçekten de henüz uygun biçimde algılayamadığımız daha derin bir "Platonik" anlama sahip olduğuna ilişkin bir inanca bağlıdır; öyle görünür. Durumun bu doğadaki bir şey olduğunu kabul etmeye zorlanır görünmekteyiz çünkü, fiziki taraftan, (olanaksız görünen bir mecazı akla getirmeme izin verilirse) matematik içindeki yolumuzu büyük hassaslık ve isabetle buldozer yardımıyla açarken (!) bize esrarengiz fiziki doğrulukta yanıtlar seyrek olarak sunulmuyor. Örneğin hesaba dayalı bu işlemler, Dirac'ın elektronun manyetik momentiyle ilgili orijinal değerine, §24.7'de değinilmiş olan, 1,001159652188 düzeltme katsayısını, kuramla gözlem arasında 10^{-11}'den daha küçük farklılıktaki bir uyum sağlayarak sunar.[17]

Aslında matematiksel/fiziki hassaslık uygulamasının bizi pek çok durumda ne derece mükemmel yanıtlara yöneltebildiği dikkat çekicidir. Böylesi yol integrallerini anlamlandırmaya yönelik ilk değerli adım,[18] bireysel serbest kuantum parçacıkları durumunda, çılgın geçmişler toplamının *Feynman yayıcısı*[19] olarak anılan şeyle yerinin değiştirilmesidir. Bu bize Feynman grafiğindeki (25. bölümde karşılaşılanlar gibi) çizgilerden birinin matematiksel yorumunu verir.

Daha özel olarak, uzayzamandaki bazı serbest parçacıkların bir p noktasında başlayıp başka bir q noktasında sonlanmak durumunda olduğu geçmişler üzerine bir toplamı ele alalım. Kural olarak, p'de başlayıp q'da sonlanan yollara ilişkin tüm $e^{iS/\hbar}$'lerin toplamını (integral) oluşturmamız gerekir fakat bu, olduğu şekliyle kesinlikle hırçın biçimde ıraksaktır. Öte taraftan $K(p, q)$ toplamının matematiksel bir tür varlığa sahip olduğunu

---

[17] Feynman tarafından belirtildiği üzere, bu isabet derecesi Los Angeles ve New York arasındaki uzaklığı bir insanın saç teli kalınlığından daha az bir hatayla belirler.

[18] Örneği "Öklitçileştirme" olarak adlandırılan fikir gibi diğer bazı kayda değer fikirler §28.9'da tartışılacak.

[19] Bu, bir değirmencinin oğlu olup kendi kendini eğitmiş oldukça dikkat çekici İngiliz matematikçi George Miller anısına *Green fonksiyonu* olarak adlandırılan şeyin bir örneğidir. Feynman yayıcısı [propagatör], kuantum kuramına ilişkin §24.3'te anılan pozitif frekans gerekliliklerince tanımlanan belirli bir $K(p, q)$ Green fonksiyonudur.

düşünebiliriz ve bu toplamın, varsa, hangi tür ("Eulerci/Platonik) resmi cebirsel ve türevsel özelliklere sahip olması gerektiğini sorarız. Bu özellikler $K(p,q)$ biçimini eşsiz biçimde (seçtiğimiz örnekte makul biçimde şanslıysak) sabitler ve bu bize aradığımız Feynman yayıcısını verir. Aslında bu şeyleri konum uzayı yerine momentum uzayında tanımlamak, momentum uzayı tanımları belirgin biçimde daha basit görünmek üzere, (hiçbir biçimde gerekli olmasa da)[20] daha olağandır.

Dirac parçacığı durumunda (örneğin bir elektron) momentum uzayı yayıcısının, P_a niceliği ele alınan seçili yola ilişkin parçacığın sahip olduğu 4–momentum olacak şe kilde $\mathrm{P}\!\!\!/ = \gamma^a P_a$ olmak üzere (*bkz.* §§24.6, 7), $\mathrm{i}(\mathrm{P}\!\!\!/ - M + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1}$ biçimini aldığı açığa çıkar. "ε" niceliği, Feynman yayıcısının pozitif/negatif frekans gerekliliklerini garanti altına almak üzere ayarlanan çok küçük pozitif bir gerçel sayı olarak kabul edilir. $\varepsilon \to 0$ limitinde, parçacığın seçili yola ilişkin olarak sahip olduğu $(P_a P^a)^{1/2}$ "durağan kütle"si parçacığın gerçek durağan kütlesi olan M değerini aldığında yayıcıda bir tekillik, sonsuz bir değer, elde ettiğimiz açığa çıkar.[26.11] Klasik bir parçacıkla ilgili olarak "durağan kütle"nin bu değeri, diğer bir deyişle $P_a P^a = M^2$, almasına gerek duyarız fakat geçmişler üzerine kuantum mekaniksel toplamda parçacığın, kendileriyle ilgili durağan kütlenin "yanlış" olduğu ortaya çıkan momentum değerlerini öğrenmesine izin vermek zorundayız. Bununla birlikte az önce anılan tekillik nedeniyle genliğin, $P_a P^a$ M^2 değerine çok yakınlaştığında çok büyük hale geldiğini görürüz, böylece kütleyle ilgili klasik değer baskın katkısını verir. Bu bir Dirac parçacığına özgü olmayan bir özelliktir ve oldukça genel biçimde geçerlidir.

26.8 Feynman grafiklerinin oluşumu; S–matrisi

Önceki bölümde açıklanmış olan şey bir Feynman grafiği elde etmek üzere atılmış ilk adımdır. Bu, biraz daha açıklama gerektirir. Bulduğumuz şey böylesi bir grafiğin tek bir (parça) çizgisidir. Feynman grafiğindeki bu tür belirli bir çizgi normalde yalnızca, diğer parçacık çizgilerini ve çizgilerin bir araya geldiği çeşitli köşeleri içeren karışık bir ifadenin parçasıdır. Toplam genliğe *köşeler*den gelen katkılar normalde[21] yalnızca, etkileşimin kuvvetini yöneten skaler bir bağlaşım sabitini (elektrik yükü gibi), "indis-

---

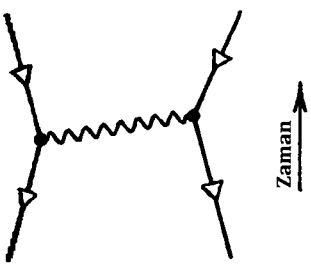
[20] Bu, hafif biçimde "eski moda" gibi görülebilir; örneğin *bkz.* klasik Bjorken ve Drell, 1965.

[26.11] Bu tekilliğin nasıl ortaya çıktığını, ilk olarak $(\mathrm{P}\!\!\!/ - M + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1}\mathrm{i}$ paydası $P_a P^a - M^2 - \varepsilon^2$ olan bir pay biçiminde yazarak açıklayın.

[21] Bir Feynman köşesinde gelen parçacıklara ilişkin toplam sistemin durağan enerjisine fonksiyonel bağımlılığa sahip "koşan bağlaşım sabitleri" olarak anılan nicelikler mevcuttur. Bunlar, parçacık fiziğiyle ilgili pek çok modern kuramda önemlidir.

leri eşleştirmek üzere elde etmek"te gerekli γ_a gibi bir terim belki ve toplam genliğe sıfır olmayan katkıların yalnızca 4–momentuma ilişkin korunum her köşede var olduğunda ortaya çıktığını garanti etmek üzere bir "delta fonksiyonu" terimi (§9.7) içeren basit çarpanlardır.[22] Grafikteki farklı türdeki çizgilerden (çizginin temsil ettiği parçacığa ilişkin spin ve durağan kütle değerlerine bağlı olarak) kaynaklanan birçok çeşit terim söz konusu olacaktır. İfadedeki (normal olarak 4–momentum korunumunu garanti eden kısıtlamalar sağlar biçimde değerlendirilen delta fonksiyonu terimlerininkilerden ayrı olarak) *sonsuzlar*, P_a momentumları klasik yollara ilişkin belirli değerleri edindiğinde (temelde $P_a P^a = M^2$) ortaya çıkar. Bu anlamlıdır çünkü yol integraline egemen olacak klasik davranış bekleriz. Bu tekilliklerin (delta fonksiyonundakilerden ayrı olan sonsuzlar) varlığı böylece, kaba bir anlamda, klasik davranışın kuantum mekaniksel genliğe sağladığı başlıca katkıya ilişkin gereklilikle yakından ilgilidir. Yine de bu tekilliklerde, birazdan göreceğimiz üzere, gizlenen bir tehlike mevcuttur.

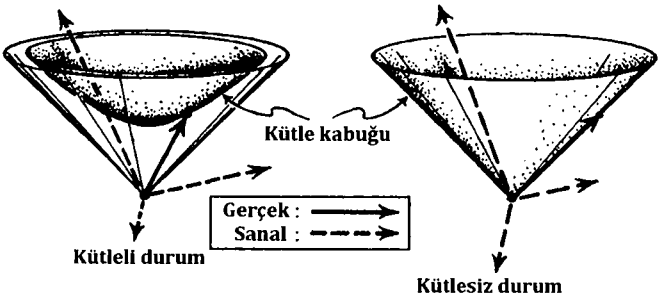
Yalnızca, bu tekil ifadeleri vurgulamak gerektiğinden $P_a P^a = M^2$ koşulunu, örneğin iki elektronun "bir fotonu değiştikleri" (foton §§25.3–5'teki gibi dalgalı bir çizgiyle belirtilmek üzere) Şekil 26.5'teki gibi temel işlemlerin varlığı nedeniyle (köşelerdeki momentum korunumu gibi) bir kısıtlama olarak değerlendiremeyeceğimizi belirtmeliyim. Bu, negatif yüklü iki parçacık arasındaki elektrostatik (Coulomb) itmeye (Møller saçılımı) ilişkin temel kuantum mekaniksel göstergedir. Gelen iki çizgi (grafiğin altında) başlangıç durumundaki iki elektronu ve giden iki çizgi (grafiğin üstünde)[23] elektronları son durumlarında gösterir. Bunlar, *dışsal* momentumları



Şekil 26.5 Elektronlara ilişkin Møller saçılımı: iki yüklü parçacık arasındaki elektrostatik (Coulomb) kuvvetinin en ilkel kuantum gösterimi. Burada elektrostatik kuvvet, iki elektron arasındaki tek bir foton (dalgalı çizgi) "değiş tokuş"undan ortaya çıkar. Her köşedeki 4–momentum korunumunun sonucu olarak foton "kabuk–dışı" ve böylece sanal olmak zorundadır.

[22] Böylece bir köşedeki gelen momentumlar $P_a^{(1)}, P_a^{(2)}, \ldots$ ve giden momentumlar $Q_a^{(1)}, Q_a^{(2)}, \ldots$ ise bu durumda $\delta(P_a^{(1)} + P_a^{(2)} + \cdots - Q_a^{(1)} - Q_a^{(2)} \cdots)$ terimini de dahil edin.

[23] *Bkz.* not 25.5.



Şekil 26.6 Momentum uzayındaki kütle kabuğu. (*Krş.* şekiller 18.7, 18.17.) M durağan kütleli gerçek (serbest) parçacıklar için p^a 4–momentumu kütle kabuğu üzerinde bulunur (öyleyse p^a gelecek zamansal ya da $p_a p^a = M^2$'yle birlikte boş gelecektir) fakat bir Feynman grafiğinin iç kısmındaki sanal parçacıklar "kabuk–dışı" olabilir.

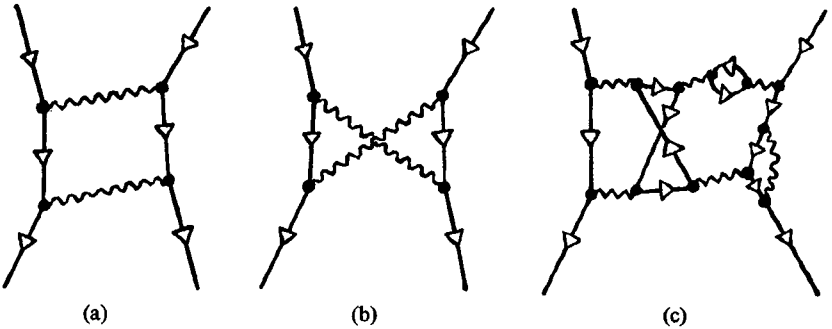
sağlayan, "verili şeyler" olarak kabul edilir ve son genlikleri hesaplarken integralleri alınmamalıdır.

Bu dışsal durumlarla (ve yalnızca bunlarla) ilgili olarak momentumları klasik $P_a P^a = M^2$ bağıntısını sağlar biçimde kabul ederiz. Bu bağıntı sağlandığında parçacık kütlesi *kabukta*dır, bu Şekil 18.7'de çizilmiş olan çanak biçimli hiperboloidin momentum uzay versiyonu olan "kütle kabuğu" olmak üzere, deriz. *Bkz.* Şekil 26.6. Gerçek parçacıklar (gerçekten serbest parçacıklar olarak gözlemlenmiş olanlar) her zaman kabuktadır. Bununla birlikte bir Feynman grafiğinin *iç* çizgileriyle ilgili olarak bu kabukta oluş gerekliliğinin sağlanmasını beklemeyiz. Özellikle, Şekil 26.5'teki Feynman grafiğinin değiş tokuş edilmiş fotonu, ne zaman önemsiz olmayan bir etkileşim söz konusu olsa kabukta olamaz (diğer bir deyişle ona ait 4–momentum $P_a P^a = 0$'ı sağlamaz).[26.12] Bu tür kabuk–dışı parçacıklar *sanal* parçacıklar olarak anılır ve yalnızca bir Feynman grafiğinin iç bölgesinde ortaya çıkabilir. Şekil 26.5'in değiş tokuş edilmiş fotonu sanaldır ve büyük uzaklıklarda gözlemlenmekten "kurtul"amaz.

Şekil 26.5'teki işlem, iç çizginin (sanal foton) dış çizgiler tarafından bütünüyle sabitlenmesi anlamında oldukça özeldir. Bu durumda, genellikle gerek duyulan "iç durumlar üzerinde integral alma", yalnızca tek bir terimden oluşarak tümüyle önemsizdir. Bununla birlikte Şekil 26.7a, b'de gösterilenler gibi iki fotonun değiş tokuş edildiği daha karışık işlemlerde iç çizgilere ilişkin 4–momentumlarda bir serbestlik söz konusu olur.[26.13]

[26.12] Niçin olmasın? Her köşedeki 4–momentum korunumunun sanal fotona ilişkin 4–momentumu nasıl belirlediğini açıklayın. *İpucu*: Tüm elektronlar aynı durağan kütleye sahiptir!

[26.13] Bu serbestlik nedir?



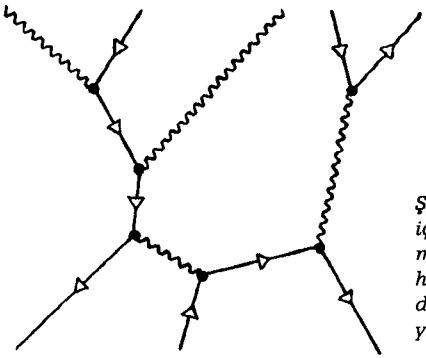
Şekil 26.7 Møller saçılımına düzeltmeler veren yüksek dereceli işlemler. (a) ve (b) iki elektron arasındaki 2 foton değiş tokuşunu gösterirken (c) iç çift yaratma ve yok etmeler içeren çok daha yüksek dereceli bir işlemdir. Bu tür her Feynman grafiği bir integrali gösterir ve bunların tümünden gelen katkılar toplanmak zorundadır.

Fikir, bu tür durumlarda (ve daha da karışık olan çok büyük sayıdakilerde; Şekil 26.7c) iç çizgilere ait izin verilen momentumlara ilişkin tüm olasılıklar üzerinde integral almamız ve ayrıca kendilerinin verili momentumlarıyla verili dış çizgilerin uyumlu olduğu olası farklı tüm "Feynman grafik topolojileri"nin farklı tüm katkılarını toplamamız gerektiğidir. (Bir "topoloji" basit olarak, bir Feynman grafiğinin birleştirilebileceği pek çok farklı yoldan birisine, grafikteki çizgilere atanmış olan belirli 4–momentum değerleriyle ilgisiz biçimde, aittir.)

Bu işlemin bize, "verili" olarak belirtilmiş olan belirli "iç" ve "dış" momentumlar kümesiyle ilgili toplam genliği vermesi gerekir. Olası çeşitli iç durumlar ve dış durumlarla ilgili genlikler bütünü, "sıralar"ı ve sütunlar"ı sırasıyla (sonsuz boyutlu olsa da) dış ve iç durumlara ilişkin bir tabana karşılık gelen bir tür matris oluşturur. Bu, *saçılım matrisi* ya da daha genel olarak *S–matris* olarak anılır. S–matrisin hesaplanması QFT'nin temel görevlerinden biri olarak değerlendirilir.[24]

Üstteki işlem, hesaba dayalı terimlerde, orijinal "geçmişler üzerindeki toplam"la ilgili muazzam bir gelişmedir çünkü aslında grafikteki ayrı her çizgiye karşılık gelen sonsuz boyutlu (ve görünüşe göre umutsuz biçimde ıraksak) yol integrallerini zaten etkili biçimde gerçekleştirdik. Feynman grafiği topolojisine ilişkin her seçim (§12.6'da ele alınmış olanlar gibi) sonlu boyutlu olağan bir integrali gösterir ve bu bir yol integralinin doğrudan yorumunun bizi içine yönlendireceği çılgın biçimde ıraksak sonsuz boyutlu integrallerden hatırı sayılır bir ilerlemedir. Dahası bu sonlu bo-

[24] Son derece kendine özgü Amerikalı fizikçi J. A. Wheeler'a atfedilen önemli "S–matris" kavramı Feynman grafiği kavramına bağlı değildir ve başka bir yolla hesaplanabilir.



Şekil 26.8 Bir ağaç grafiği hiçbir döngü içermez. İç momentumlar bu nedenle dış momentumlarca saptanır, böylece herhangi bir integral alma da söz konusu değildir. Ağaç grafikleri klasik kuramı yeniden üretir.

yutlu integraller, (§7.2'de tartışıldığı üzere) karmaşık kontür integral almaya ilişkin güçlü yöntemlerce ele alınabilir. Yayıcıda görülen (§26.7'nin son paragrafına bakın) ε Feynman parametresi gerçekten yalnızca, integral kontürünü ifadelerde görünen tekilliklerin uygun tarafına yönlendirmekle ilgili bir reçetedir.

Yine de "ormanın dışında" olmaktan bir hayli uzağız çünkü, her Feynman grafiğiyle ilgili, baş başa kaldığımız biricik sonlu boyutlu integralin kendisi, Feynman grafiğinde ne zaman *kapalı döngüler* söz konusu olsa ıraksak olacaktır. Bu, "çok kötü bir haber" gibi görünür çünkü herhangi bir integral işlemi gerçekleştirmeyi kabullenmeye başladığımız tek şey kapalı döngülerdir. Tüm diğer durumlarda (diğer bir deyişle hiçbir kapalı döngüye sahip olmayan "ağaç grafikleri" denilenler; *bkz.* Şekil 26.8), iç momentumlar basit biçimde dış değerlerce saptanır. Ağaç grafikleri yalnızca, *klasik* kuramı yeniden üretir!

26.9 Yeniden normalleştirme

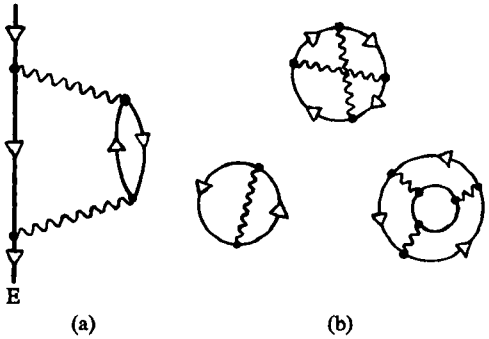
Böylece tüm çabalarımızla (ya da daha çok Feynman'ınkilerle) ilgili olarak hâlâ herhangi gerçek bir kuantum işlemine ait toplam genliğe ilişkin ıraksak bir ifadeyle baş başa kalmış görünüyoruz. Bıkkın okuyucu haklı olarak tüm bunların bize ne fayda sağladığını merak edebilir. Aslında katı bir matematiksel bakış açısından resmi olarak, tüm ifadelerimizin (Euler'in $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \cdots = -1/3$'ündeki gibi) hâlâ "matematiksel olarak anlamsız" olması anlamında "hiçbir yere" ulaşmadık. Yine de iyi fizikçiler bu kadar kolayca pes etmeyeceklerdi. Ve böyle davranmakta haklıydılar. Sonuçta çabaları, QED (kuantum elektrodinamiği: etkileşen elektron, pozitron ve fotonların kuramı) durumunda tekil Feynman grafiklerinin ıraksak kısımlarının tümünün, sonsuzların yalnızca (§26.5'te çıtlatıl-

mış) *yeniden normalleştirme* olarak bilinen bir işlem uyarınca görmezden gelinebilecek "yeniden ölçeklendirme" çarpanları sunar biçimde değerlendirilebileceği şekilde çeşitli "parseller"de bir araya toplanabildiği açığa çıktığında ödüllendirildi.[25]

Bu belirli sonsuzlar ortaya çıkar çünkü Feynman grafikleri, momentum değerleri belirsiz biçimde büyüdüğünde ya da eşdeğer olarak uzaklıklar belirsiz biçimde küçüldüğünde ıraksayan integraller verir. (Heisenberg'in $\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$ momentum konum belirsizlik bağıntısını anımsayın; *bkz.* §21.11.) Sonsuzluklar *morötesi* ıraksamalar biçiminde anılır. QFT'deki biricik ıraksamalar olmasa da, en önemlileri olarak değerlendirilir. Ayrıca, belirsiz biçimde büyük uzaklıklardan (diğer bir deyişle belirsiz biçimde küçük momentumlardan) ortaya çıkar şekilde değerlendirebileceğimiz *kızılaltı* ıraksamalar da mevcuttur. Bunlar genellikle çeşitli şekillerde, sıklıkla, bir sisteme sorulmasının fiziki olarak hassas olduğu düşünülen türdeki soruları kısıtlayarak, "iyileştirilebilir" olarak değerlendirilir.

Morötesi ıraksamalarda içerilen şeye ilişkin bir miktar izlenim elde etmek üzere, yeniden normalleştirmeye ilişkin en berrak örneğin fiziki anlamını inceleyelim. Bu, elektronun sahip olduğu elektrik yükünün değerinde açığa çıkar. Bir elektronu, uzaydaki bir E noktasında bulunan noktasal bir yük olarak düşünün. *Vakum kutuplanması* olarak bilinip şu şekilde anlaşılabilecek olan bir etki söz konusudur. Kafamızda E'ye yakın bir noktada bir çift (sanal) parçacık yaratımı olabileceğini canlandırırız: oldukça kısa bir süre içinde birbirini yok edecek olan bir elektron ve pozitron. (Bu zaman zarfını, çifti üretmekte gerekli enerjinin Heisenberg enerjisinin belirsizliği, $\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar$ (§21.11) içine düşeceği kadar kısa olarak değerlendiririz.) Bu işlemle ilgili Feynmnan grafiği Şekil 26.9a'da belirtilir. Bu işlemin başlangıcındaki (ayrıca sonundaki) (sanal) foton çizgisinin varlığı yaratmanın (ve izleyen yok etmenin) E'deki elektrona ilişkin elektrik alanı ortamında meydana geldiğini belirtmelidir. (Ayrıca, içerisinde E'deki elektronun alanıyla ilgili ortam olmaksızın yaratma ve yok etme işlemlerinin gerçekleştiği tümüyle bağlantısız Feynman "döngüleri"ni düşünebiliriz, *bkz.* Şekil 26.9b; fakat bu tür "tümüyle bağlantısız" işlemlerin fiziki olarak gözlemlenebilir herhangi bir etkiye sahip olmadıkları düşünülür.) Bu ortam alanının etkisi, yaratılan elektron E'deki elektron tarafından hafifçe itilirken yaratılmış olan pozitronun hafifçe çekilmesi ve böylece anlık varlıkları süresince bu yükler arasında hafif, fiziki bir ayrılık bulunmasıdır. Bu,

[25] Daha fazla ürpertici ayrıntı için *bkz.* Zee, 2003 ya da Ryder, 1996.



Şekil 26.9 (a) Yük yeniden normalleştirmesinde içerilen bir Feynman grafiği. Bu, ardalandaki bir elektron alanındaki bir pozitron elektron çifti yaratılışı ve izleyen yok edilişini gösterir (bkz. Şekil 26.10). (b) Tümüyle bağlantısız Feynman grafikleri. Bunların doğrudan gözlemlenebilir herhangi bir etkiye sahip olmadığı düşünülür.

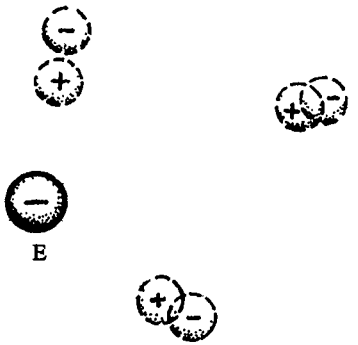
E'deki elektronun her tarafında her zaman olmaktadır ve "vakum kutuplanması" olarak anılan net etki o elektronun yüküne ilişkin belirgin değeri, diğer yükler üzerindeki etkisi tarafından ölçüldüğü gibi indirgemelidir[26]; Şekil 26.10.[26.14] Vakum, elektron yükne "kalkan olmak" üzere hizmet eder ve elektronun "gerçek" *çıplak* yük değerinden daha küçük, yükün *giyinik* değeri olarak adlandırılan, bir yüke sahip olmayı belirginleştirir. Fiziki deneylerde doğrudan ölçülen bu giyinik değerdir.

Bu tamamen makul görünür fakat tehlike, çıplak değerin kendisi yoluyla giyinik değerle ilişkili olarak büyütülmek zorunda olduğu, hesaplanmış olan sayısal çarpanın sonsuz olarak ortaya çıkmasıdır! Bu sonsuz açık olarak, kuantum elektrodinamik hesaplamadaki (temel olarak Şekil 26.9a'dakine ve onun ayrıntılandırılmış biçimlerine benzeyen diyagramlar) sonsuzlardan birisi biçiminde saptanabilir. Herhangi bir gelecek kuramı uyarınca, belki de çok küçük uzaklıklarda, diğer bir deyişle oldukça büyük momentumlarda (§21.11), devreye giren bir "kesik" nedeniyle ıraksak integrallerin yerinin sonlu bir şeyle değiştirilmesi gerektiğine ilişkin bakış kabul edilebilir. Böylece doğru yeniden normalleştirme çarpanı ∞ yerine görece daha büyük sonlu bir sayı olmalıdır. (Aslında, daha sonra, §31.1'de, geleceğimiz "doğal birimler" biçiminde elektronun ölçülmüş giyinik yükü yaklaşık 0,0854'tür ve çıplak değerin, diyelim ki 1 olması gerektiğini düşünmek oldukça caziptir. Bu, ∞ yerine 11,7062 ya da yaklaşık $\sqrt{137}$'lik bir büyütme çarpanına karşılık gelir.) Diğer bir bakış açısı *çıplak* yükü kavramsal bir uygunluktan daha fazla bir şey olarak değerlendirmemek ve "gözlemlenemez" olduğu için "çıplak yük" kavramının aslında "anlamsız" olduğuna ilişkin bakışı kabul etmektir.

---

[26] Elektron yükü negatif olduğundan buradaki "indirgeme", "modülü daha küçük hale getirme" anlamına gelir.

[26.14] Bunun niçin olması gerektiğini görebiliyor musunuz?



Şekil 26.10 Vakum kutuplanması: yük yeniden normalleştirmesinin fiziki temeli. E elektronu vakumdan anlık olarak yaratılmış sanal elektron pozitron çiftinde hafif bir yük ayrılığına sebep olur. Bu bir şekilde E'nin etkin yükünü çıplak değerinden, ne yazık ki doğrudan hesaplama uyarınca sonsuz bir çarpan yoluyla azaltır.

Bu konuyla ilgili hangi felsefi konum savunulursa savunulsun yeniden normalleştirme modern QFT'nin temel bir özelliğidir. Aslında olduğu haliyle, bu tür bir "sonsuz yeniden ölçeklendirme" işleminin yalnızca zorunlu biçimde yük ya da kütleye değil fakat aynı zamanda diğer niceliklere de uygulanması söz konusu olmaksızın sonlu yanıtlar elde etmenin kabul edilmiş hiçbir yolu mevcut değildir. Bu tür bir işlemin geçerli olduğu kuramlar *yeniden normalleşebilir* olarak adlandırılır. Yeniden normalleşebilir bir QFT'de Feynman grafiklerinin ıraksak kısımlarının tümünü, geri kalan tüm ıraksak ifadelerin (standart modelde önemli roller oynayan simetri kuralları gibi) belirli bütünsel kurallar uyarınca birbirlerini iptal ettiği varsayılmak üzere, yeniden normalleştirmeyle "ölçeklendirilebilecek" sonlu sayıdaki "parsel"de[27] bir araya getirmek olasıdır. QED ve böylece bir bütün olarak standart model de, yeniden normalleşebilir bir kuramdır. Öte taraftan çoğu QFT yeniden normalleşebilir değildir. Parçacık fizikçileri arasında, yeniden normalleşebilmeyi önerilen kuramlara ilişkin bir seçim kuralı olarak kabul etmek genel bir bakış açısıdır. Buradan hareketle yeniden normalleşebilir olmayan herhangi bir kuram otomatik olarak Doğaya uygun olmamak biçiminde reddedilir. Aslında bu kural, 25. bölümde karşılaştığımız, parçacık fiziğine ilişkin 20. yüzyılın standart modeli haline gelmiş olan kuramla ilgili belirli seçime yönelik güçlü bir kılavuz sundu. Böylece, bu bakış açısından, QFT'deki sonsuzların yaygınlığı pek de "kötü" bir şey olmayıp güçlü biçimde lehimize çevrilebilecek bir özelliktir.[28] Yeniden normalleşebilirlik testini oldukça az kuram geçer ve yalnız-

[27] §32.1'de kısaca tartışılan değişmeli olmayan geometriye ilişkin fikirlerle ilgili "eş ürün" kavramından faydalanan, bu yöntemin sistematikleştirilmesine ayarlanmış, belirli zarif matematiksel işlemler mevcuttur; *bkz.* Connes ve Kreimer, 1998.

[28] Önemli bir teknik bütünü "yeniden normalleştirme grubu" kavramınca sunulandır. Bu fikirleri Peskin ve Schröder, 1995 yanı sıra Zee, 2003 ve Ryder, 1996 da ele alır; onların istatistiksel mekanikle ilgilenişleri ansiklopedik Zinn–Justin, 1996'da açıklanır.

ca geçenler fizik için kabul edilebilir olarak değerlendirilme şansına sahip olur.

Yine de fizikçilerin tümü bu konumu titizlikle onaylamaz. Standart modelin yeniden normalleşebilirliğini gösteren kilit bileşeni sunan Nobel Ödüllü Gerard t'Hooft bile yeniden normalleşebilirliğe katı bağlılıkla ilgili belirli koşulları dillendirdi. (1971'de Utrecht Üniversitesi'nde henüz bir yüksek lisans öğrencisiyken t'Hooft, "kendiliğinden kırık" bir simetrinin var olduğu kuramlara ilişkin, elektrozayıf kuramın temel bir özelliği haline gelen, yeniden normalleşebilirliği göstererek fizik camiasını sarsmıştı.) Bir seferinde bana bir kurama ilişikin yeniden normalleşebilirliğin öneminin söz konusu etkileşimdeki bağlaşım sabitine bağlı olduğuyla ilgili bakış açısını aktarmıştı. Özellikle parçacık fiziğine ait kuvvetlerle kıyaslandığında olağanüstü biçimde zayıf olan, yine de kendisine ait kuantum kuramının Einstein'ın genel görelilikle ilgili denkleminin kuantize olmasına yönelik standart yaklaşımlar uyarınca yeniden normalleşebilir olmadığı ortaya çıkan kütleçekime değindi; *bkz.* §19.6 ve §31.1. (Bir hidrojen atomundaki elektron ve proton arasındaki kütleçekimsel etkileşim elektrik kuvvetten, kendisini radyoaktif bozunuma ilişkin "zayıf etkileşimler"den neredeyse hayal etmesi olanaksız biçimde daha zayıf hale getiren yaklaşık 10^{-40}'lık bir çarpan kadar daha zayıftır.) Uyarıları QFT'ye ilişkin *faydacı* bir bakış olarak adlandırılabilecek şeyi ifade etti. Kısa süre içinde ayrıntılandıracağım bir konu olan yeniden normalleşebilir kuramlar dahi sonsuzlardan bağımsız değildir. Durduğu nokta bir kuramda potansiyel olarak var olan sonsuzların, deneyin çok küçük bir dereceye kadar erişebildiği enerjilerde fiziki olarak gerçekten önemli olup olmadığını sorgulamaktı. "Kuantize olmuş bir kütleçekim" durumunda böylesi enerjiler, tuhaf biçimde gerçekleştirilebilir olanın ötesindedir ve fiziki kuramdaki pek çok diğer belirsizlik resme, kütleçekime ilişkin yeniden normalleşebilir olmayış kendi uyarısını yapmaya başlamadan çok önce dahil olur.

Terazinin diğer kefesinde tek başına Feynman grafikleri biçimindeki açıklamanın tümüyle kullanışlı olmasının şüpheli olacağı kadar büyük bir bağlaşım sabitine sahip *yeğin* etkileşimlere, artan terimli serilerin oldukça hırçın biçimde ıraksaması nedeniyle, sahip olduğumuzu iddia etti. Tek başına yeniden normalleşebilirlik kuantum kromodinamiğinin sonlu yanıtlar sunabilmesini garanti etmek üzere yetersizdir. Bu durumda güçlü kuvvetlere ilişkin *asimptotik serbestlik* olarak adlandırılan şey kullanılır. Kuantum kuramında oldukça küçük uzaklıklara karşılık gelen çok büyük momentumlar için güçlü kuvvet, dikkat çekici etkin biçimde kaybolma özelliğine sahiptir. Bu, ters kare yasasının bize uzaklık küçüldükçe kuvvetin büyüyeceğini söylediği parçacıklar arasındaki tanıdık elektrik ya da

kütleçekimsel kuvvetle tümüyle zıttır. Güçlü kuvvet daha çok, kuvvet dayanıklılığının gerilim uzaklığıyla orantılı biçimde artıp uzaklık sıfır olduğunda sıfıra düştüğü elastik bir banda benzer.[29] Bu kuvvet yasası kuarkların bireysel olarak bir hadron dışına çekilememesi gerçeğinden sorumlu tutulur; bu gerçek *hapsedilme* olarak adlandırılır (*bkz.* §§25.7, 8). Sıradan bir elastik bandın aksine, yeteri kadar şiddetli biçimde çekseniz ve parçacık hızlandırıcılarda ortaya çıkabilen "jetler"de meydana gelen türde bir şey olarak karşı–kuarklar ya da kuark çiftleri gibi diğer kavramların vakumdan çekilip çıkarılabilmesi olanaklı olsa da, güçlü kuvvet "kırıl"amaz. Asimptotik serbestliğe ilişkin bu kayda değer özellik, yeniden normalleşebilir olmayışına karşın yeğin etkileşimler kuramını hesaba dayalı anlamda faydasız olmaktan kurtaran şeydir. Kayıt altında olsun diye, *ince–yapı sabiti* olarak adlandırılıp yaklaşık 1/137 olan elektromanyetik bağlaşım sabitiyle karşılaştırılabilecek yeğin bağlaşım sabiti yaklaşık 10'dur ve sayısal olarak doğrudan kıyaslanabilir olma sa da zayıf kuvvet çok daha zayıfır (ayrıca *bkz.* §31.1)

26.10 Lagrange denkleminden Feynman grafikleri

Feynman grafikleri, yeniden normalleştirme, vb açıklamalarımda biraz ileriye sıçradım ve herhangi belirli bir alan kuramıyla ilgili bu diyagramların nasıl elde edildiğini açıklamadım. Ya da bu bölümün girişinde başlanmış haliyle, Feynman grafiği tanımını QFT'ye ilişkin genel formalizmle ilişkilendirmedim. Şimdi bu eksikliği gidermek üzere bir miktar yol alayım ve QFT'nin genel çerçevesi içinde Feynman grafiklerinin konumunu belirginleştireyim.

Başlangıç noktası, ele alınan kurama uygun olarak bir Lagrange denklemidir. Şu halde Feynman grafikleri o Lagrange denklemiyle ilgili kuantum kuramına ilişkin bir *tedirgeme genişlemesi*ni temsil eder. Bir tedirgeme genişlemesi temelde yalnızca, normal olarak küçük biçimde düşüneceğimiz bir parametreli (ya da parametre ailesine sahip) üslü seri açılımıdır. Bu tür bir ifade, bir $f(x)$ fonksiyonunun x'li bir üslü serisi olarak açıldığı, §4.3'te tartıştığımız biçimde bir şeydir. Feynaman grafiklerine ilişkin x'in

[29] Kütleçekimle ilgili kuvvetler, ters kare yasası uyarınca uzaklıkla azalmasına karşın, galaksiler boyutu ötesinde bile hâlâ fark edilebilirdir. Öte taraftan okur güçlü kuvvetin, gerçekte uzaklıkla *art*sa bile nükleer uzaklıklardan büyük uzaklıklarda niçin güçlükle fark edilebilir olduğunu merak edebilir. Bunun nedeni, kütleçekim her zaman çekici biçimde birikirken, güçlü kuvvetin ayrı çekirdekler arasında, tekil çekirdek zorunlu biçimde "renk tekli"si olmak üzere, birbirini zorunlu biçimde tümüyle iptal eden çekici ve itici bileşenlerin bir birleşimi olmasıdır.

benzeri normalde bir bağlaşım sabitidir. Örneğin QED durumunda bu parametre e elektrik yükü olur. Bir Feynman grafiğindeki her köşe için bir e çarpanı söz konusu olur ve böylece serinin terimleri artan sayıda köşeye sahip grafikler olur; n köşeli grafikler birlikte e^n katsayısını sunar. Bir bağlaşım sabitinden fazlasına sahip kuramlarla ilgili olarak birden fazla değişkenli daha karışık bir üslü seri elde ederiz. Buna bir örnek, standart yaklaşımın elektron çizgilerinin yerlerinin şekiller 25.2 ve 25.3b uyarınca zikzaklar tarafından alındığı bir QED versiyonudur. Böylece iki "bağlaşım sabiti" elektrona ait elektrik yükü ve M kütlesi olur.

Yeniden normalleşebilir kuramların zorunlu biçimde sonlu olması gerekmediğini belirtmiştim. Arketip biçimli yeniden normalleşebilir QED kuramı dahi, yeniden normalleştirildikten sonra bile aslında sonlu bir kuram değildir. Bu nasıl olabilir? Yeniden normalleştirme Feynman grafiklerinin sonlu toplamlarından sonsuzların çıkarılması anlamına gelir. O bize, sonuçtaki bu sonlu niceliklerin tümünün *toplamının* gerçekte yakınsak olduğunu söylemez. QED'in bize verdiği şey, $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ katsayılarının her biri Feynman grafik integrallerini ardışık her 0, 1, 2, 3, ... derecesinde çözmeye ilişkin kabul edilmiş "yeniden normalleştirme" işlemlerinden elde edilmek üzere, $f_0 + f_1 e + f_2 e^2 + f_0 e^3 + \cdots$ biçimindeki bir üslü seridir. (Aslında herhangi belirli bir durumda yalnızca çift ya da yalnızca tek üsler görünür.)[26.15] Yeniden normalleşebilirlik bize tüm serinin toplamının sonlu olduğunu söylemez. Aslında o sonlu değildir fakat QED'le ilgili, normalde önemli olduğu değerlendirilen şeyin oldukça ötesinde olan 137. ya da o civardaki dereceden bir terime ulaşana kadar kendini göstermeye başlamayan bir "logaritmik ıraksaklığa" ($x = 1$'deki $-\log(1-x)$'le ilgili $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ serisi gibi) sahiptir.

Genel bir kuantum alan kuramıyla ilgili olarak her derecede tam olarak hangi grafiklerin oluştuğunu çözümlemek üzere, orijinal yol integrali ifadesine, bu ifade onu dolaysız biçimde toplamaya çalıştığımızda oldukça kötü biçimde ıraksak olan bir şeyi gösterse bile, başvurmamız gerekir. Yöntem yol integralini tümüyle, kendisine biçimsel fonksiyonel türev işlemlerinin kestirme biçimde uygulandığı *biçimsel* bir nicelik olarak ele almaktır (§20.5). Art arda daha çok köşeye sahip Feynman grafikleri git gide daha yüksek dereceli fonksiyonel türevler gerçekleştirildiğinde elde edilir. Burada bu konuya, Feynman grafiklerinin üretiminin bu biçimsel işlem uyarınca apaçık[30] olduğunu söylemek dışında daha ayrıntılı biçimde gir-

[26.15] Niçin olduğunu görebiliyor musunuz?

[30] Algoritmayı Zee, 2003 ve Zinn-Justin, 1996 öğretir; ayrıca daha eğlenceli ve sezgisel bir alıntı için Mattuck, 1976 önerilir.

me niyetinde değilim. Lagrange denklemi elbette §20.5'te tartışılmış genel tipteki bir *alan* Lagrange denklemidir. Böylesi bir Lagrange denklemiyle ilgili "yol", diyelim ki sonsuz boyutlu bir düzenleme uzayındaki sıradan bir 1–boyutlu eğri olmaz. Tam görelilikçi biçimdeki değişmez bir tablo için "geçmiş", belirli bir uzayzaman bölgesindeki tüm bir 4–boyutlu alan olmak zorundadır. Bu bölge üzerinde, Lagrange denklemi yoğunluğunun integrali S eylemi olur. Böylece $e^{iS/\hbar}$, o belirli düzenlemeye atanması gereken genliği (yoğunluk) sunar.

26.11 Feynman grafikleri ve vakum seçimi

Bir gruptaki, elektrozayıf kuramın U(2) simetrisi ya da kuantum kromodinamiğinin SU(3) simetrisi ya da her ikisi gibi bir simetriye sahip bir kuramla ilgili olarak bu simetri normalde Lagrange denkleminin açık bir simetrisi olarak kabul edilir. Böylesi bir simetrinin varlığı QFT'nin yeniden normalleşebilirliği için önemli olur. Açık konuşacak olursak, simetri belirli ıraksak terimlerin birbirini iptal etmesini, iptal olma, geride kalmış ıraksak bir ifade gerektiğinde böylesi bir ifadenin kurama ilişkin olarak ileri sürülmüş simetriyi paylaşamayacak olması nedeniyle ortaya çıkmak (ya da ortaya çıkması varsayılmak) üzere, garanti etmekte kullanılır.

En azından genel fikir budur. Bununla birlikte elektrozayıf kuram durumunda başka bir incelik mevcuttur çünkü sonuç olarak elde edilen kuram orijinal olarak ileri sürülmüş olan U(2) simetrisine sahip olur.[31] U(2) simetrisinin eksikliği simetri kırılımının sonucu biçiminde kabul edilir (§25.5) fakat bunun nasıl bağdaştırılacağını anlamak üzere genel kuantum alan kuramsal formalizmimize dönmemiz gerekir. Temel fikir simetri kırılımının, *vakum durumu*na ilişkin bir U(2)–*a*simetrik seçimince açıklanmasıdır. Buradan hareketle tüm yaratma ve yok etme işlemcilerinin en sağında olduğu düşünülüp Feynman grafiklerine ilişkin değerlendirmelerimizde bu noktaya dek büyük oranda göz ardı edilmiş olan gizemli "$|0\rangle$" durumu gölgeden gün ışığına çıkmaya başlamak zorundadır.

İlk olarak QFT $\mathcal{A}$ cebirinin elemanlarını Feynman grafikleriyle nasıl ilişkilendireceğimizi kabaca görmemiz gerekecek. Kilit önemde bir nokta, bir Feynman grafiğini gösteren *Feynman yayıcıla*rının temel olarak §26.2'de karşılaştığımız *çevirici* ya da *karşı–çevirici* değerleri (diğer bir deyişle bu ifadelerdeki "$\langle\psi|\phi\rangle$" değerleri) olduğudur. Pratikte bunlar, kesin Feynman yayıcılarını tanımlamakta (belki de en iyi biçimde §9.7'nin hi-

[31] *Bkz.* not 25.12.

perfonksiyonel bakış açısından anlaşılacak olan) pozitif/negatif frekans konularından kaynaklanan bazı incelikler mevcut olsa da, normal olarak momentum uzayı biçiminde ifade edilir. Burada bu inceliklere takılmayalım.

Şimdi, gelen parçacıkların belirli bir bütünüyle başlayan ve giden parçacıkların bir toplamının sonuç olarak açığa çıktığı bir durumu ele aldığımızı düşünelim. $|0\rangle$ vakum durumuyla başlar ve gelen parçacıklarla ilgili istenen durumu üretmek üzere gerekli çeşitli yaratma işlemcilerini uygularız. Bu işlem $|\psi_{\text{iç}}\rangle$ başlangıç durumu sonucunu üretir. Benzer biçimde aynı işlemi fakat bu kez giden parçacıklarla ilgili yaratma işlemcilerini, $|\psi_{\text{dış}}\rangle$ sonuç durumunu üretecek şekilde yine $|0\rangle$ üzerine etkiyerek kullanmayı benimseyebiliriz. Kendisinden, durumlar normalleştirildiğinde yalnızca $|\langle\psi_{\text{dış}}|\psi_{\text{iç}}\rangle|^2$ olan, §22.5'te verilmiş standart denklemi basit biçimde kullanarak "iç"ten "dış"a geçme olasılığını elde edebileceğimiz $\langle\psi_{\text{dış}}|\psi_{\text{iç}}\rangle$, hesaplamak istediğimiz şeydir.

Şu halde $\langle\psi_{\text{dış}}|\psi_{\text{iç}}\rangle$ ifadesi yok etme işlemcilerini sol tarafta içerir (çünkü $|\psi_{\text{dış}}\rangle$'tan $\langle\psi_{\text{dış}}|$'a geçmekte içerilen Hermitsel eşleme tüm yaratma işlemcilerini yok etme işlemcilerine çevirir). Tüm bunlar $|\psi_{\text{iç}}\rangle$'teki yaratma işlemcilerinin sol tarafında bulunur, böylece kafamızda tüm bu yok etme işlemcilerini kendi sağlarındaki yaratma işlemcileri boyunca en sağdaki $|0\rangle$'a çarpana kadar "itme"yi canlandırabiliriz. Bu ne zaman olsa, $|0\rangle$ ortadan "yok olur" (*bkz.* §26.2) ve elde edilen ifade sıfır olur. Yine de bir yok etme işlemcisini bir yaratma işlemcisi boyunca ittiğimiz her seferinde, belirttiğim üzere bize Bir Feynman grafiğine ait bir çizgi veren üstte anılmış çeviriciyi (ve pozitif/negatif frekans gerekliliklerini) hesaba katmak zorundayız. Bunu yaptığımız her seferinde böylesi başka bir çizgi ortaya çıkar. Sonuç olarak elde ettiğimiz şey, normalleştirilmiş bir vakum durumuyla ilgili bir Feynman grafiğinin çizgilerini ve $\langle 0|0\rangle = 1$'i, gösteren Feynman yayıcılarının toplamıyla $\langle 0|0\rangle$'ın çarpımıdır; böylece yalnızca Feynman grafiğinin kendisini elde etmiş oluruz.

Şimdiye dek Feynman grafiğimiz herhangi bir köşeye sahip olmayarak tümüyle önemsizdi fakat bunun nedeni $\mathcal{A}$ işlemcileri cebirine herhangi bir etkileşim dahil etmememdi. Böyle yapmak üzere belirli sorunumuzla ilgili özel Lagrange denklemini incelememiz ve onu doğru $\mathcal{A}$'yı üretmek üzere kullanmamız gerekir. Temel olarak bu işlemler yalnızca, uygun köşe terimleriyle birlikte Feynman grafiklerini üretmek için §26.10'da anılmış olanları yansıtır.

Şimdiye dek az şey edinmiş olabiliriz fakat Feynman grafiklerimizi QFT'nin genel çerçevesi içine getirmenin bir faydası artık $|0\rangle$ vakum duru-

munu kendisine denk olmayan alternatif bir $|\Theta\rangle$ vakumuyla (§ 26.4'te ele aldığımız $|\Sigma\rangle$ Dirac denizi durumunda olduğu gibi) değiştirebilmemiz oldu. Elektrozayıf kuramla ve temel olarak kırılmış simetriye yaşamsal biçimde bağlı diğer kuramlarla ilgili olarak bunun üstünlüğü Lagrange denklemi ve bunun sonucu olarak kuramın Feynman grafikleri, tam bir simetriye (elektrozayıf kuram durumunda U(2) grubu) bağlıyken sistemin gerçek durumlarının yalnızca daha düşük bir simetriye (elektrozayıf kuram durumunda elektromanyetizmaya ilişkin U(1) ayar grubu), $|\Theta\rangle$ vakum durumunun yalnızca bu düşük simetriye sahip olması nedeniyle, bağlı olmalarıdır. Bu şekilde, kırılmamış simetrinin ortaya koyduğu kuramın yeniden normalleşebilirliği, kuramın bir bütün olarak yalnızca küçük bir "kırılmış" simetri grubu göstermesi gerçeğine karşın rahatsız edilmemiş kalır.

Bu, açık biçimde, bir tam simetrinin yararlarını toplayabilecek fiziki kuramlar üretmek için harikulade bir araçken, gözleme dayalı durum, simetrinin tatminden uzak olduğu bir durumdur. Bu, daha iyi ve derin düzenlere ilişkin arayışlarında fizikçilere büyük bir cezbedicilik sunar. Aslında standart modelin ötesine geçen tüm modern kuramlar bu tür bir "simetri kırılımı"nı kullanmaya çalışır. Yine de böylesi tüm girişimler, örneğin §§28.1–5'te yönelecek olduklarım gibi, ne kadar popüler olursa olsun, son derece kurgusal olarak değerlendirilmek zorundadır. Çok kolay şekilde sürüklenmeyelim diye bu doğadaki önermelere eleştirel ve şüpheci bir gözle yaklaşmamız gerekecek.

Bu önermelere yönelmek üzere bir başlangıç için sonraki bölümde Büyük Patlamayla bir tanışıklığa gerek duyacağız. Daha sonra 28. bölümde, erken evrenle ilgili belirli bağlamdaki kendiliğinden simetri kırılımına eşlik edebilen korku verici konulardan bazılarını kabullenmeye çalışacağız. Son olarak, bu her yerde bulunan fikirle ilgili, 31. bölümde süpersimetri, sicim kuramına ilişkin orijinal fikirler ve daha sonra bunların olağanüstü bazı devamcılarını incelemeye geldiğimizde daha da güçlü olmaya gerek duyacağız.

27

BÜYÜK PATLAMA VE TERMODİNAMİK MİRASI

27.1 Dinamik evrimdeki zaman simetrisi

Evreni bileşenleriyle birlikte ne tür yasalar biçimlendirir? Galilei zamanından bu yana pratik olarak başarılı tüm fiziki kuramların sunduğu yanıt, fiziki bir sistemin belirli bir zamandaki fiziki durumu verildiğinde zamanla nasıl gelişeceğinin bir belirtimi olan *dinamik* biçiminde verilir. Bu kuramlar bize dünyanın neye benzediğini söylemez, bunun yerine derler ki: "dünya bir zamanda şu ve şu şekildeyse bir süre sonra şu ve şu şekilde olacaktır." Böylesi bir kuram biz ona dünyanın nasıl şekillen*di*ğini söylemedikçe bize, onun nasıl şekillen*mekte* olduğunu söylemeyecektir.

Şeylere ilişkin bu biçimin, örneğin Kepler'in 1609'da güneş etrafındaki gezegenlerin yörüngelerinin belirli kuralları yerine getiren hızlarla tanımlanan belirli geometrik biçimlere, bir odağında güneş olan elipslere, sahip olacağını söyleyen mükemmel vargısı gibi önemli istisnaları var olagelmiştir. Bu, evrenin durumunun bazı dinamik yasalar uyarınca an be an nasıl geliştiğinden daha çok evrenin nasıl *ol*duğuyla ilgili bir savdı. Bununla birlikte Kepler'in geometrik hareketlerine ilişkin günümüz bakış açısı onların yalnızca, ilk olarak Newton tarafından gösterilip 1687'de kendisine ait büyük *Principia*'da yayımlanmış olan 17. yüzyıl kütleçekim dinamiğinin sonuçları olmasıdır ve Kepler yasaları Doğanın davranış biçimlerinin dolaysız temelleri olarak düşünülmemelidir. Aslında Kepler'in, ve bir bütün olarak bilimin, Newton kütleçekimini yöneten belirli kuvvet yasası, ters kare yasası (§17.3), merkezi bir kuvvet etrafındaki küçük cisimlerin tüm yörüngelerinin esasen basit ve zarif matematiksel biçimler (ve aslında bir on sekiz yüzyıl kadar önce, eski Yunanlar tarafından yoğun biçimde çalışılmış olan biçimler) olması özelliğine sahip olduğundan, son derece şanslı olduğu ileri sürülebilir. Çünkü bu, herhangi başka bir basit merkezi kuvvet yasasıyla güçlükle paylaşılan son derece ender bir özelliktir. Genelde modern bakış açımız zarif bir matematiksel biçime sahip olmasını beklediğimiz şeyin *dinamik yasaları* olduğunu savunur ve bu ya-

saların sonucu olarak basit matematiksel şekiller bulduysak şansımızadır.

Bu dinamik yasaların nasıl davrandıklarıyla ilgili genel düşünüş biçimi, dinamiğin hangi belirli gerçekleşme biçiminin ortaya çıkacağını belirleyen şeyin başlangıç koşulları seçimi olduğu şeklindedir. Normalde, geçmişte belirtilmiş olan veriden geleceğe evrimleşen, gerçekleşen bu belirli evrimleşme diferansiyel denklemlerce saptanmak üzere, sistemler biçiminde düşünülür. (Dinamik biçimde evrimleşen alan ya da dalga fonksiyonları söz konusu olduğunda bunlar kısmi diferansiyel denklemler, alan denklemleri, olur; *bkz.* §10.2, §§19.2, 6, §21.3, alıştırma [19.2] ve not 21.1.) Öte taraftan bu aynı denklemlerin, klasik ve kuantum mekaniğinin dinamik denklemlerinin zaman yönünün bir ters çevrimi altında simetrik olmaları gerçeğine karşın, *geçmişe* doğru evrimleştiğini düşünmeye meyledilmez! Matematikle ilgilenildiği sürece uzak bir gelecek zamandaki sonuç koşulları da belirtilip zamanda geriye doğru evrimleşilebilir. Bir sistemin evrimini saptamak üzere sonuç koşulları matematiksel olarak başlangıç koşulları kadar iyidir.

Bu zaman simetrik dinamik belirlenimcilikle ilgili bazı yorumlar gereklidir. İlk olarak, bunun ne özel ne de genel görelilik çerçevesince geçersiz kılındığı konusunda okurun güveni tazelenebilir. Sistemin durumunu tanımlayan veri, bir başlangıç uzaysal 3–yüzey olan bir başlangıç "zaman"ında saptanır ve bu veri dinamik denklemler uyarınca sistemin fiziki durumunu belirlemek üzere o 3–yüzeyin geleceği ve de ayrıca geçmişine evrimleşir. Bununla birlikte *genel* görelilikten kaynaklanan bazı yeni konular söz konusudur çünkü evrimin içine akacağı uzayzamanın yapısı saptanması gereken fiziki durumun bir parçasıdır. (Bu, daha sonra yüzyüze gelmemiz gerekecek olan kara delikler bağlamında belirli anlatımlara sahiptir; *bkz.* §28.8, §§30.4, 9.)

Kuantum mekaniği durumunda belirlenimcilik, kuantum durumu Schrödinger denklemince (ya da eşdeğeri) yönetilir biçimde kabul edilmek üzere, o kuramın yalnızca **U** kısmıyla ilgilidir. Zaman ters çevrimi altında, §25.4'te anılan T, Schrödinger denkleminin (§21.3) $i\hbar\partial/\partial t$ zaman türev işlemcisi ($t \mapsto -t$ olduğundan) $-i\hbar\partial/\partial t$'yle değiştirilmek zorundadır. Hamiltonın T'nin eylemi altında kendisine giden sıradan bir işlem olması sağlanmak koşuluyla, Schrödinger evriminin de $t \mapsto -t$ zaman ters çevrimine sanal birimin, $i \mapsto -i$, işaret ters çevrimiyle eşlik ettiğimiz sürece, kendisine gittiğini görürüz. Aslında bu, T'nin eylemini kuantum mekaniğinde düşünme biçimimizdir. (Pozitif frekanslı bir $f(t)$ fonksiyonunun bu bileşik $t \mapsto -t$ ve $i \mapsto -i$ yer değişimi altında pozitif frekanslı bir fonksiyona

geri çevrildiğini belirtelim.)[27.1] Bununla birlikte T'nin eylemi altındaki **R** kuantum durum indirgemesine ilişkin davranış başka bir konudur ve o, 30. bölümdeki (§ 30.3) değerlendirmelerimizle ilgili önemli bir konu sunacak.

27.2 Mikroskopla bile görülemeyen bileşenler

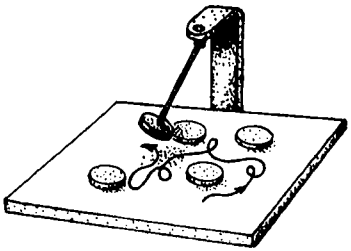
Bununla birlikte bilinçli okuyucuyu yalnızca klasik dinamikle ilgili dahi kaygılandırabilecek başkaca sorular mevcuttur. Zaman ters çevrim simetrisi klasik mekanikte kesinlikle tekil parçacıklar ve onlara eşlik eden alanların mikroskopla bile görülemeyen dinamiğinin gerçeğidir. Yine de pratikte bir sisteme ait tekil bileşenlerin davranışıyla ilgili az bilgiye sahip olunur. Her parçacığın ayrıntılı konum ve momentum bilgisi, sistemin bütünsel davranışı tekil parçacıkların fiziki parametrelerine ilişkin yalnızca uygun bazı ortalamalar biçiminde yeterince iyi tanımlanmış olmak üzere, normalde hem elde edilemez hem de gereksiz olarak varsayılır. Bunlar, kütle, momentum ve enerji dağılımı, kütle merkezinin konum ve hızı, farklı yerlerdeki sıcaklık ve basınç, elastiklik özellikleri, eylemsizlik momentleri, ayrıntılı bütünsel biçim ve uzaydaki yönelimi, vb gibi şeylerdir. Öyleyse önemli konu, böylesi ortalama "toplam" parametrelere ilişkin iyi başlangıç bilgisinin pratikte, sistemin dinamik davranışını uygun bir dereceye kadar belirlemekte yeterli olup olmayacağıdır.

Şüphesiz bu her zaman böyle değildir. *Kaotik* olarak bilinen sistemler, sonuçtaki davranışın tam olarak nasıl başladıklarına kritik biçimde bağlı olma özelliğine sahiptir. Tanıdık bir örnek olarak, tabanına yerleştirilmiş bir mıknatıslar bütününün hemen üzerinde sallanan manyetik bir sarkacın bulunduğu "uygulamalı bir oyuncak" mevcuttur. *Bkz.* Şekil 27.1. Dinamik davranış, belirlenimci bir biçimde, havanın sürtünme direncinden kaynaklanan yavaşlamayla birlikte Newton yasaları ve mıknatıs statiği tarafından yeterince iyi yönetilir. Sarkacın duracağı son nokta başlangıç durumuna kritik biçimde bağlı olsa da aslında, bu başlangıç durumunun tüm bileşen parçacık ve alanlarla birlikteki son derece ayrıntılı bilgisi bu evrimi eşsiz biçimde kesin olarak sabitlemesine rağmen, tahmin edilemezdir.[1] Bu tür "kaotik sistemler"e ilişkin başkaca pek çok örnek bilinir. Ha-

---

[27.1] Niçin? Ayrıca uzamsal momentumun niçin bu yer değişikliğiyle uyumlu biçimde ele alındığını açıklayın.

[1] Bu, dinamiği bütünüyle klasik kabul etmektir. Teknik olarak "kaotik sistem", başlangıç durumundaki küçük bir değişikliğin zamanla kendisini izleyen, diyelim ki, doğrusal biçim yerine üstel biçimde büyüdüğü davranışsal bir değişikliğe yol açabildiği klasik bir sistemdir. Elbette bu "tahmin edilemezlik", belirlenimcilikle ilgili olarak kendisine atfedildiği ilke konusu değil, bir derece konusudur.



Şekil 27.1 Kaotik hareket. Sabit bir mıknatıslar bütününün hemen üzerinde sallanan manyetik bir sarkaçtan oluşan "uygulamalı bir oyuncak". Sarkaç tarafından kat edilen gerçek yol son derece hassas biçimde kendi başlangıç konum ve hızına bağlıdır.

va tahminine ilişkin kaprisin iyi bir ölçüsü genellikle içerilmiş olan kaotik sistemlerin doğasına bağlanır. Güneş sistemindeki cisimlerin son derece düzenli (ve tahmin edilmesi kolay) kütleçekimsel Newtoncı hareketleri bile, böylesi "kaos"la ilgili zaman ölçekleri astronomik gözleminkilerden çok daha uzun olmasına rağmen teknik olarak (olasılıkla) kaotik bir sistem oluşturur.

Gelecek yerine geçmişe yönelik evrimden ne haber? Geçmiş yönlü evrimde içerilmiş "geçmişe yönelik tahmin"le ilgili bu tür "kaotik tahmin edilemezliğin" normal olarak gelecek yönlü evrimin normal "tahmin"iyle ilgili olandan çok daha kötü olduğunu söylemek uygun bir yorum olur. Bu, *termodinamiğin ikinci yasası*yla ilgilidir ve yasa en basit halinde temel olarak şunu ileri sürer:[2]

Isı sıcak bir cisimden soğuk bir cisme doğru akar.

Bu yasa uyarınca ısı ileten bir malzeme kullanarak sıcak bir cismi soğuk bir cisimle temas ettirirsek bu durumda her ikisi de aynı sıcaklığa gelene dek sıcak cisim soğuyacak ve soğuk cisim ısınacaktır. Bu, *tahmin*in beklentisidir ve bu evrim belirlenimci bir niteliğe sahiptir. Öte taraftan bu işlemi ters zaman yönünde görürsek bu durumda eşit olmayan sıcaklıklara doğru kendiliğinden evrimleşen etkin olarak aynı sıcaklığa sahip iki cisim buluruz. Hangi cismin ne kadar ve ne sürede ısınıp hangisinin soğuyacağına karar vermek pratik bir olanaksızlık olur. Bu sistemle ilgili dinamik *geçmişe yönelik tahmin* işlemi pratikte açıkça umutsuz bir görünüme sahiptir.

Aslında bu zorluk ikinci yasa uyarınca davranan çok sayıda bileşen parçacığa sahip neredeyse her makroskopik sisteme ait geçmişe yönelik tahmin için geçerlidir. Bu tür bir neden dolayısıyla fizik normalde geçmişe yönelik tahmin yerine gelecek tahminiyle ilgilenir.[3] Buna ilişkin başka

---

[2] Bu, öz ısıların, normaldeki durum olarak, pozitif olduğunu varsayar. Yine de kara deliklerde bu varsayım doğru değildir; *bkz.* §31.15.

[3] Bununla birlikte, olağan yaşamda işlerin normalde başka türlü olduğuna ilişkin ilginç "pa-

bir görünüm olarak ikinci yasanın fiziğin öngörü gücüne, geçmişe yönelik tahminle ilgili henüz karşılaştığımız o sorunları ortadan kaldırarak, temel bir bileşen olduğu değerlendirilir.

Yine de pek çok fizikçi bu yasanın, diyelim ki, enerjinin korunumu yasası, kuantum mekaniğindeki doğrusal üst üste binme yasası ve belki parçacık fiziğinin standart modelinin temel olması anlamında "temel" olmadığına ilişkin bakışı kabul eder. İkinci yasanın hassas her fiziki kurama ilişkin neredeyse "apaçık" gerekli bir bileşen olduğunu ileri sürerler. Çoğu onun belirsiz ve kesin olmayan ve temel fiziği kontrol eden dinamik yasalarda bulduğumuz olağanüstü kesinlikle hiçbir biçimde kıyaslanamayacak bir şey olduğuyla ilgili bakışı kabul eder. Ben oldukça farklı bir şey ileri sürmek ve genellikle basit olarak "ikinci yasa" şeklinde andığımız görünüşte belirsiz istatistiki ilkenin ardında bulunan neredeyse "akıl kaçırtan" kesinliği göstermek istiyorum.

27.3 Entropi

İkinci yasanın gerçekten ne ifade ettiğini bir biçimde daha tam olarak inceleyelim. Bir ön koşul olarak okuru termodinamiğin birinci yasasıyla ilgili bilgilendirmeliyim. Birinci yasa basit olarak herhangi yalıtık bir sistemdeki toplam enerjinin korunduğunun ifadesidir. Okur bunun hiç de yeni bir şey olmadığından yakınabilir (§18.6, §20.4, §21.4). Bununla birlikte bu yasa ileri sürüldüğü zaman (kendisi tarafından yayımlanmasa da 1820'lerin başlarında ilk olarak Sadi Carnot tarafından)[4], daha önceden, ne ısının bir enerji biçimi olduğu ne de olağan makroskopik enerji kavramının kendisi tümüyle açıktı. İlk yasa, diyelim ki bir cisim hava direnci nedeniyle yavaşlayıp kinetik enerjisini (§18.6) kaybettiğinde toplam enerjinin kaybolmadığını açık hale getirir. Çünkü bu enerji basitçe havayı ve cismi ısıtmak üzere alınır. Bu *ısı* enerjisi (öncelikle) hava moleküllerinin hareketleri ve cismi oluşturan parçacıkların titreşimlerindeki kinetik enerji olarak anlaşılır. Dahası *sıcaklık* basit biçimde serbestlik derecesi başına düşen enerjinin bir ölçüsüdür böylece termodinamik ısı ve sıcaklık kavramları temel olarak daha önce anlaşılmış dinamik kavramlarla aynı-

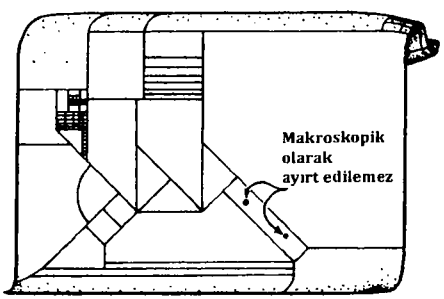
radoks" söz konusudur! Geçmişte ne olduğu basitçe hatırlanarak sıklıkla "geçmişe yönelik kesin tahminler" yapılıyorken gelecekle ilgili buna denk düşen herhangi bir erişime sahip değiliz. Dahası, arkeolojik araştırmalar böylesi "anıları" insanın var olmadığı çok daha erken zamanlara dek genişletebilir. Bununla birlikte geçmişe yönelik bu tahmin herhangi belirgin bir anlamda dinamik denklemlere ilişkin evrimi içermez ve ikinci yasayla olan bağlantısı bana hâlâ anlaşılmaz gelmektedir. *Bkz.* Penrose, 1979a.

[4] *Bkz.* Pais, 1986.

dır fakat maddelerin tekil bileşenleri düzeyinde uygulanır ve istatistiki bir biçimde ele alınır. İlk yasa tanıdığımız bir kesinlik türüne sahiptir: bir şeyin, diğer bir deyişle toplam enerjinin değeri, her tür karışık işlem türünün gerçekleşebilir olması gerçeğine karşın sabit kalır. İşlem sonrası toplam enerji işlem öncesi toplam enerjiye eşittir.

İlk yasa bir eşitlikken ikinci yasa bir eşitsizliktir. Bize, *entropi* olarak bilinen başka bir niceliğin, bir işlem sonrası daha önce sahip olduğundan daha büyük (ya da en azından küçük olmayan) bir değere sahip olduğunu söyler. Entropi, oldukça kabaca, sistemdeki "rasgelelik" ölçüsüdür. Hava içinde hareket eden cismimiz düzenli biçimdeki enerjisiyle (kinetik hareket enerjisi) başlar fakat hava direnci nedeniyle yavaşladığında bu enerji hava parçacıklarının ve cisimdeki tekil parçacıkların rasgele hareketlerine dağıtılır. "Rasgelelik artmıştır"; daha özel biçimde entropi artmıştır.

Entropi kavramı 1865'te Clausius tarafından ileri sürüldü fakat entropinin tanımını 1877'de açık hale (ya da en azından olması olası görünecek kadar açık) getiren ilk kişi göze çarpan Avusturyalı fizikçi Ludwig Boltzmann'dı. Boltzmann'ın fikrini anlamak üzere *faz uzayı* kavramına (§12.1, §§14.1, 8, §§ 20.1, 2, 4) gerek duyarız. n (niteliksiz) parçacıklı klasik bir sistem, noktalarından her biri n parçacığın tümünün konum ve momentumlarını temsil eden $6n$ boyutlu bir $\mathcal{P}$ uzayıdır. Entropi kavramını kesin hale getirmek üzere *kalın taneleme* olarak adlandırılılan kavrama gerek duyarız.[5] Bunu $\mathcal{P}$ faz uzayının, "kutular" olarak adlandıracağım bir sayıda alt bölgeye bölünmesi olarak düşünebiliriz. *Bkz.* Şekil 27.2. Fikir, makroskopik gözlemlerle ilgili olarak birbirinden ayırt edilemeyen sistem durumlarını gösteren $\mathcal{P}$ noktaları toplamının aynı kutuda bir arada gruplan dırılmış olarak değerlendirilmesi fakat farklı kutulara ait $\mathcal{P}$ noktalarının



$\mathcal{P}$ faz uzayı, kalın tanelenmiş

Şekil 27.2 Boltzmann entropisi. Bu, $\mathcal{P}$ faz uzayının alt bölgelere ("kutular") bölünmesini, $\mathcal{P}$'ye ilişkin bir "kalın taneleme" olarak adlandırılır, verili bir kutunun noktaları makroskopik olarak ayırt edilemez fiziki durumları göstermek üzere, içerir. V hacimli bir V kutusundaki x durumunun entropisiyle ilgili Boltzmann tanımı, k Boltzmann sabiti olmak üzere, $S = k\log V$'dir.

[5] *Bkz.* Gibbs, 1960; Ehrenfest ve Ehrenfest, 1959; Pais, 1982.

makroskopik olarak ayırt edilebilir varsayılmasıdır. $\mathcal{P}$'ye ait bir x noktasınca (bu *doğal* bir logaritma olmak üzere; *bkz.* §5.3) gösterilen sistem durumuyla S Boltzmann entropisi, V, x'i içeren $\mathcal{V}$ kutusunun hacmi ve k (J joules ve K^{-1} "bir bölü kelvin" anlamına gelmek üzere),

$$k = 1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$$

değerine sahip *Boltzmann sabiti*[6] olmak üzere,

$$S = k\log V$$

ifadesidir.

Boltzmann tanımlamasının entropi kavramını açık hale getirdiğini söyledim. Bununla birlikte üstteki denklemin S'yle ilgili olarak fiziki anlamda kesin bir şeyi göstermesi için, kalın tanelemeyle ilgili "kutular" ailemizin göstermek durumunda olduğu belirgin bir reçeteye sahip olmak gerekir. Seçilebilmiş olan, belirli kutulara ayırmada kuşkusuz "rasgele" bir şey söz konusudur. Tanım, bir sistemin ne kadar yakından incelenmek üzere seçildiğine bağlı görünür. Bir deneyci için "makroskopik olarak ayırt edilemez" olan iki durum bir diğeri için ayırt edilebilir olabilir. Dahası iki kutu arasındaki sınırın tam olarak nereye çizileceği de, fiilen özdeş olmalarına karşın, sınırın iki tarafında kalan $\mathcal{P}$'ye ait iki noktaya çok farklı entropiler atanmış olabileceğinden yine oldukça rasgeledir. S'nin bu tanımlamasıyla ilgili, çok daha sınırlı uygulanabilirlikteki başlangıç kavramları üzerine belirgin bir ilerleme ve bir sistemde yalnızca "rasgeleliğin" bir ölçüsü olma fikrine ilişkin kuşku götürmez bir gelişme olmasına karşın, hâlâ öznel bir şey söz konusudur.

Entropinin fiziki konumuyla ilgili benim konumum, kesinlikle çok kullanışlı olmasına rağmen onu günümüz fiziki kuramında "mutlak" bir kavram olarak görmememdir. Bununla birlikte gelecekte çok daha temel bir konum edinebilme olasılığı söz konusudur. Bunun için kuantum fiziğinin kesin olarak değerlendirilmeye alınması gerekir. Ayrıca, her durumda, birimler $\hbar = 1$ olacak şekilde (Planck birimlerindeki gibi, *bkz.* § 27.10)[27.2] seçilmek üzere, $\mathcal{P}$'de içerilmiş belirli herhangi bir $\mathcal{V}$ faz uzayı bölgesine mutlak bir *ölçü* sağlayan şey kuantum mekaniğidir. Öyle olsa bile, rasgeleliğin termodinamik hesaplamalarında bu derece az etkiye sahip olması

---

[6] Gerçekte Boltzmann'ın kendisi de, pratikte kullanılabilecek gerçek birimlerle ilgilenmediğinden, bu sabiti asla kullanmadı; *bkz.* Cercignani, 1999. Bu sabiti içeren $S = k\log V$ denklemidenkleminin, açık biçimde ilk olarak Planck tarafından yazılmış olduğu görülür; *bkz.* Pais, 1982.

[27.2] Birimler $\hbar = 1$ olacak biçimde seçilirse bir faz uzayı hacmine mutlak bir ölçüyü nasıl atamak gerektiğini gösterin.

dikkat çekicidir. Bunun sebebi, ilgili tüm değerlendirmelerde, kalın tanelemenin sistemler makroskopik olarak ayırt edilebilir sayıldığı zamanki sezgisel fikri "akla uygun olarak" yansıtması koşuluyla, ilgili faz uzayı kutu hacim boyutları arasındaki kesinlikle muazzam oranlarla ilgilenilmesi ve sınırların nereye çizildiğinin çok az farklılık yaratması gibi görünür. Entropi kutu hacminin bir logaritması biçiminde tanımlandığından aslında o, S'de belirli herhangi bir değişim elde etmek üzere sınırların "müthiş" bir yeniden çizimine gerek duyar.[27.3] Bana göre entropi, kuantum kütleçekimsel değerlendirmelerin önem kazandığı (özellikle kara delik entropisiyle ilişkili olarak) daha derin bir bağlamda bu tür bir kavram için daha temel bir konum bulunabileceğine ilişkin belirtiler söz konusu olsa da, günümüz kuramında "temel" olmaktan çok bir "uygunluk" konumuna sahiptir. Bu konuya bu bölümde (§27.10) ve §§30.4–8, §31.15 ve §32.6'da yeniden döneceğiz.

27.4 Entropi kavramının sağlamlığı

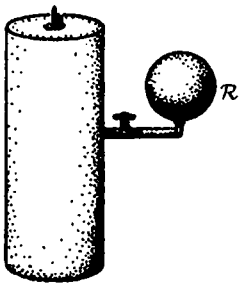
Basit bir gösterim Boltzmann entropi denkleminin rolünü biraz daha açık hale getirebilir. İçindeki, diyelim ki küçük bir açıklık yoluyla kabın geri kalanına bağlanıp kap hacminin onda birine sahip ampul biçimli bir çıkıntı olan bir $\mathcal{R}$ bölgesinin *özel* olarak işaretlendiği kapalı bir kap düşünün; *bkz.* Şekil 27.3. Bu kapta m molekül içeren bir gazın bulunduğunu varsayın. Tüm gazın kendini $\mathcal{R}$'de bulduğu duruma atanacak S entropisini, gazın kap boyunca rasgele dağıldığı durumda atanacak olan entropiyle karşılaştırarak arayacağız.

Boltzmann denklemiyle, $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ tüm molekülleri $\mathcal{R}$'de olarak gösteren $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ faz uzayı bölmesinin hacmi olmak üzere, $S = k\log\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$'ye sahip olacağız. Basitlik için, §23.7'de açıklandığı üzere, bozonlara ilişkin "Bose–Einstein istatistiği" ve fermiyonlara ilişkin "Fermi–Dirac istatistiği"nin aksine *Boltzmann istatistiği* denen şeyi varsayarız; diğer bir deyişle tüm gaz moleküllerinin birbirinden (en azından kural olarak) ayırt edilebilir olduğunu varsayarız.[27.4] Gazı bir litre hacme sahip bir kap içinde, atmosfer basıncındaki sıradan bir gaz olarak kabul ederek yaklaşık $m = 10^{22}$ moleküle sahip oluruz. $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ faz uzayı bölgesinin hacminin kap içindeki gazla ilgili tüm $\mathcal{P}$ faz uzayının hacmine oranı

$$10^{-10000000000000000000000}$$

[27.3] Boltzmann denklemindeki logaritma, kutu hacimlerindeki "müthiş" uyuşmazlıklarla nasıl ilişkilenir?

[27.4] Üç durumdaki saymanın nasıl değiştiğini açıklayın.



Şekil 27.3 Bir parçası, hacmi tüm kabınkinin onda biri olan ampul biçimli $\mathcal{R}$ bölgesi olan kapalı bir kap. Başlangıçta tamamı $\mathcal{R}$'de bulunan bir gazın tüm hacme dağılmasına izin verildiğinde entropi ne kadar artar?

olacak şekilde 10^{-m} $(=\frac{1}{10^m})$'dir,[27.5] böylece bu tür değerlendirmelere ilişkin karşımıza çıkan "müthiş" hacim oranlarına ilişkin bir şey görürüz. Üstteki şekil, tüm gaz moleküllerinin aslında $\mathcal{R}$'de olduğunu, yalnızca katıksız şansla, bulmaya ilişkin anlamsız biçimdeki küçük olasılığı gösterir. Bu fazlasıyla olanaksız durumun entropisi gazın rasgele biçimde dağıtıldığı durumun entropisinden, 10'un doğal logaritmasının yaklaşık 2,3 olması gerçeğini kullandığım Boltzmann denklemiyle fark yaklaşık

$$-k\log(10^{-100000000000000000000000}) = 2{,}3\times10^{22}k$$
$$= 0{,}32\,\mathrm{J\,K^{-1}}$$

olmak üzere, çok daha küçüktür.[27.6] Böylece başlangıçta gazın, diyelim ki kendisini kabın geri kalanından kapalı bir vanayla ayırarak, $\mathcal{R}$'de tutulduğunu varsayarsak ve daha sonra vanayı gazın kabın geri kalanına dağılması için açarsak, olağan birimlerde yaklaşık bir joule bölü kelvinin üçte biri olan $2{,}3\times10^{22}k$'lık hissedilir bir entropi artışı buluruz.

Okuyucu pratikte, başlangıçta kabın özel kısmında kesinlikle hiçbir gaz molekülünün olmadığı bir kaba sahip olmanın gerçekleştirilebilir olduğundan kuşkulanabilir. Buradan hareketle $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ bölgesi tanımımızı, onu $\mathcal{R}$'nin, gaz moleküllerinin yalnızca en az %99,9'unu kapsamaya gerek duyacağı şekilde tanımlayarak bir miktar rahatlatalım. Böylece artık $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ bu moleküllerin binde birinden daha fazlasının $\mathcal{R}$ dışında bulunmasını talep etmez. Günümüz teknolojisiyle özel olmayan bölgede böyle göreli bir vakum kusursuzluğuna sahip olmak olanaklıdır. Sonucun neredeyse hiç etkilenmediği ve vananın açılması üzerine gerçekleşen entropi artışının *hâlâ* $2{,}3\times10^{22}k$'lık genel düzende[27.7] olduğu açığa çıkar. Bu, kalın taneli ku-

[27.5] Niçin?

[27.6] Fermiyon/bozon değerlendirmelerini gündeme aldığımızda ya da $\mathcal{R}$'de sınırlanmaları durduğunda gaz moleküllerinin olası momentum düşüşünü hesaba kattığımızda bu sonucun niçin önemli biçimde etkilenmediğini gösterin.

[27.7] Entropi artışının niçin çok küçük bir miktar düştüğünü, yaklaşık olarak 2,30×

tuların ($\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ diyelim) çiziminde var olan öznelliğe rağmen, kutular "makul biçimde çizilmiş olduğu" sürece ciddi herhangi bir sorunun ortaya çıkmaması gerçeğinin çarpıcı bir gösterimidir.

Boltzmann denklemindeki logaritma, devasa biçimdeki büyük sayıları başa çıkılabilir görünümlere getirmenin yanı sıra önemli bir amaca da sahiptir. Bu, entropinin bağımsız sistemlerle ilgili sonuçtaki tanımınının *toplamsal* olmasıdır. Bu nedenle bağımsız iki sisteme atanmış olan entropiler S_1 ve S_2'yse böylece toplam sisteme atanmış, ikisinin birlikte alınmasından oluşan entropi $S_1 + S_2$'dir. Toplam sisteme ilişkin faz uzayının, $\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{P}_2$ bireysel iki sistemle ilgili faz uzayı olmak üzere, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ olduğunu ve toplam sistemin kalın taneli kutularının $\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{P}_2$'nin kalın taneli kutularının ürünleri olduğunu, bu S_1, S_2 sistemleriyle ilgili çok doğal bir varsayım olmak üzere,[27.8] varsayıyorum. (Uzaylara uygulanan $\times$'nın tanımı için *bkz.* §15.2, alıştırma [15.1] ve Şekil 15.3a.) Kutu hacimleri çarpıldığı için ilgili entropiler (logaritmanın standart özelliği uyarınca, *bkz.* §5.2) eklenir.

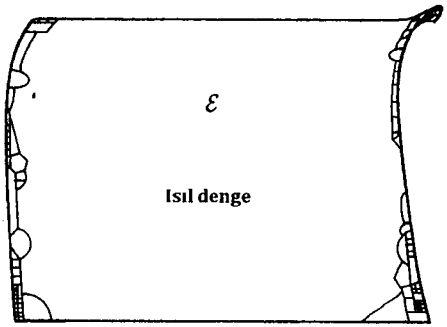
Fiziki sistemlere ilişkin normal örneklerde, kalın tanelemeye ilişkin olarak E hacmi diğer tüm kutuların hacmini fazlasıyla aşan belirli bir $\mathcal{E}$ kutusu mevcuttur. Bu, *ısıl denge* durumunu gösterir. Aslında E normalde tüm faz uzayı P'nin hacmine pratik olarak eşit olacaktır ve böylece E bir araya konulmuş diğer tüm kutuların hacmini kolayca aşacaktır. *Bkz.* Şekil 27.4. Isıl dengedeki küresel olarak özdeş simetrik toplardan yapıldığını düşündüğümüz sıradan bir gazla ilgili olarak hız dağılımları (daha önce elektromanyetizmayla ilgili olarak karşılaştığımız aynı James Clark Maxwell tarafından bulunmuş) *Maxwell dağılımı* olarak bilinen özel bir biçim alır. Bu, v sorgulanan gaz parçacığına ilişkin 3–hız büyüklüğü, β sıcaklıkla ilgili bir sabit ve A olası tüm hızlara ilişkin uzay üzerindeki olasılık integralinin 1 olacağı şekilde bir sabit olmak üzere,

$$Ae^{-\beta v^2}$$

biçiminde (bilgide, bazen "çan eğrisi" denilen bir *Gauss* dağılımınki gibi tanınacak olan) bir olasılık yoğunluğuna sahiptir; *bkz.* Şekil 27.5. Isıl denge, sistemle ilgili olası en büyük entropiye kolayca sahip olarak, ikinci yasa uyarınca yeteri kadar uzun bir süre kendi başına kaldığında bir sistemin, içinde durulacağı beklenen durumdur.

$10^{22}k$'dan $2{,}29\times10^{22}k$'ya, içerilmiş olan matematiksel nicelikler için çeşitli kaba tahminler yaparak görebilir misiniz bakın. Dilerseniz $n! \approx (n/e)^n(2\pi n)^{-1/2}$ Stirling denklemidenklemini kullanın.

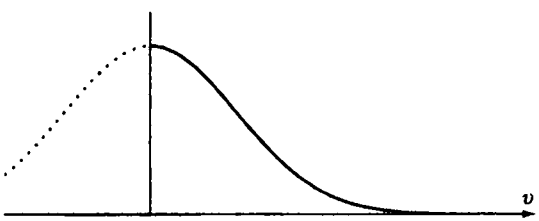
[27.8] Bu kalın taneleme varsayımı niçin doğaldır?



Şekil 27.4 Isıl dengeyi gösteren belirli ε kutusu normalde tüm faz uzayı P'nin hacmine pratik olarak eşit olan bir E hacmine sahiptir. Böylece diğer tüm kutuların bir aradaki hacmini fazlasıyla aşar.

Maxwell dağılımı, henüz açıklandığı üzere, özdeş klasik cisimlerden yapılmış, hiçbir iç serbestlik derecesine sahip olmayan bir gazla ilgilidir. İşler, çeşitli boyutta ve (bileşen kısımları arasındaki spin ya da titreşimler gibi) farklı iç serbestlik derecesine sahip pek çok türde bileşen söz konusu olduğunda belirgin biçimde daha karışık hale gelebilir. Isıl dengedeki bu tür sistemlerle ilgili, kendisi uyarınca sistem enerjisinin sistemin farklı tüm serbestlik dereceleri arasında (istatistiksel bir yayılımla) eşit biçimde dağıldığı *enerji eşdağılımı* olarak bilinen genel bir ilke söz konusudur.

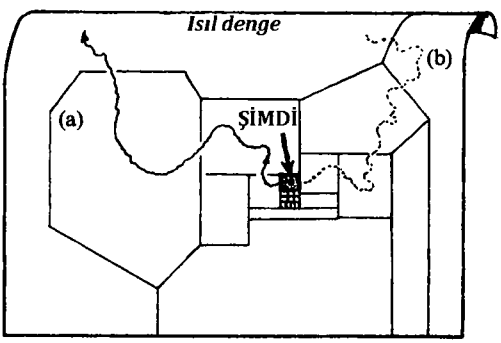
Maxwell dağılımının genellenmiş hale gelebilmesinin başka bir yolu tam ısıl dengeden uzaklaşmak ve (ikinci yasa uyarınca) dengeye yaklaşan bir gazın nasıl hareket edeceğini bekleyebildiğimizi sormaktır. Böylesi koşullarda *Boltzmann denklemi* olarak bilinen bir denklem evrimi açıklamakta kullanılır. okur burada, klasik makroskopik cisimlerin, kendi dinamikleriyle ilgili bireysel olarak izlenmesi gereken son derece fazla bileşen parçacık bulunduğunda nasıl davranacağına ilişkin kuramsal kavrayışla hatırı sayılır ölçüde ilişkili devasa bir konu bulunduğunu algılayacaktır. Bu konu *istatistiksel mekanik* olarak anılır.



Şekil 27.5 Dengedeki bir gazla ilgili Maxwell hızlar dağılımı, A ve β, β gaz sıcaklığıyla ilgili, sabitler, v parçacık hızı olmak üzere, $Ae^{-\beta v^2}$ biçimine sahiptir. Eğrinin noktalı kısmı bunu, istatistiğin tanıdık Gaussian dağılımı "çan eğrisi" biçimini açığa çıkararak v'nin negatif kısımlarına doğru genişler.

27.5 İkinci yasanın türetimi; yoksa değil mi?

Şimdi ikinci yasanın ardında neyin bulunduğunu anlamaya çalışalım. Uygun biçimdeki kalın taneli bir $\mathcal{P}$ faz uzayındaki bir x noktasınca gösterilen fiziki bir sisteme sahip olduğumuzu düşünün. x'in ŞİMDİ V hacimli küçük bir kalın taneli $\mathcal{V}$ kutusunda başladığını varsayın (Şekil 27.6a). x noktası, ele alınan fiziki duruma uygun dinamik denklemler uyarınca bir biçimde $\mathcal{P}$ etrafında hareket edecektir. Farklı kalın taneli kutuların boyutlarındaki devasa uyuşmazlığı akılda tutarak ve kutu konumlarıyla ilişkili x'in dinamik hareketiyle ilgili olarak belirli herhangi bir eğilim umut etmeksizin, ezici çoğunluktaki durumda x git gide daha büyük hacme sahip kutularda gezinecektir. Diğer bir deyişle, zaman ilerledikçe aslında sistemin entropisi git gide daha da büyüyecektir. x, belirli bir entropi ölçüsüne sahip bir kutuya giden yolu bir kez bulduğunda, kendisini, hissedilir bir zaman zarfında, belirgin biçimde daha küçük bir entropiye sahip bir kutuda bulabilmesi son derece olanak dışı hale gelir. Belirgin biçimde daha küçük bir entropiye ulaşmak saçma biçimde daha küçük bir hacim bulmak anlamına gelir ve olasılıklar buna son derece terstir. Henüz ele almış olduğumuz örneği ve Boltzmann denklemindeki logaritma ve Boltzmann sabitinin küçük boyutu nedeniyle entropideki oldukça mütevazi bir azal-



Şekil 27.6 Eylem halindeki ikinci yasa. Fiziki bir sistemin evrimi faz uzayındaki bir eğri tarafından gösterilir. (a) ŞİMDİ anında sistemimizin oldukça küçük V hacimli bir $\mathcal{V}$ kutusundaki bir x noktasıyla gösterildiğini bilirsek gelecekteki olası davranışının ne olacağını görmeye çalışırsak kutu hacimlerindeki devasa uyuşmazlıklar nedeniyle, hareketindeki herhangi bir büyük eğilim yokluğunda ikinci yasa uyarınca neredeyse kesin olarak git gide daha büyük kutulara gireceği sonucuna ulaşırız. (b) Bu argümanı, ilk olarak eğrinin $\mathcal{V}$'ye olan yolunu bulmasının en olası biçimini arayarak *geçmişe* uyguladığımızı düşünün. Aynı argüman bizi, x'in $\mathcal{V}$'ye giden yolu basitçe, geçmişe doğru ilerledikçe dereceli biçimde büyüyen kutulardan bulmasının en olası biçim olduğuna ilişkin aynı açıkça saçma sonuca, ikinci yasayla besbelli bir çelişki içinde yöneltir görünüyor.

maya eşlik eden faz uzayı hacmindeki kesinlikle müthiş azalmayı düşünün. Gaz $\mathcal{R}$ dışına giden yolu bir kez bulduğunda, yeniden $\mathcal{R}$'ye giden yolu bulması anlamsız biçimde olasılık dışıdır (en azından "düpedüz saçma biçimde uzun" olmayan bir zaman zarfı içinde).[27.9]

Bu argüman ikinci yasanın geçerli olmasını beklemekle ilgili temel sebebi içerir. Argümanın, x noktasının kasıtlı biçimde daha küçük kutular araması etkisine sahip herhangi bir eğilime gerek duymamamız dışında, dinamiğin ayrıntılarına pek de bağlı görünmediğini belirtelim. İkinci yasayla ilgili her şey gerçekten bu mu? Her şey oldukça kolay görünmektedir ve belki de pek çok fizikçinin ikinci yasayla ilgili temelde kafa karıştırıcı hiçbir şey olmadığına ilişkin bakışı kabul etmelerinin ve akla yatkın her fiziki kuramın bunu sağlamak zorunda olmasının sebebi böylesi bir argümanın belirgin evrensel doğasıdır. Burada seçkin astrofizikçi Sir Arthur Eddington'dan harika bir alıntı uygun olur:

Biri size evrenle ilgili evcil hayvan kuramınızın Maxwell denklemleriyle uyumsuz olduğunu belirtirse bu durum Maxwell denklemleri için kötü haber. Gözlemle çeliştiği görülürse, şey, bu deneycilerin bazen beceriksizce şeyler yaptıkları oluyor. Fakat kuramınızın termodinamiğin ikinci yasasına karşı olduğu ortaya çıkarsa size herhangi bir umut vaat edemem; en derin utançla çökmekten başka yapacağı bir şey yoktur.[7]

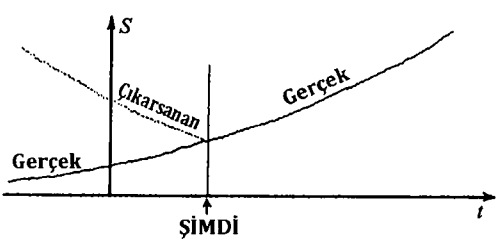
Bununla birlikte kısa bir süreliğine düşünme bize henüz sunduğum argümanın sonucuyla ilgili tuhaf bir şey olduğunu ya da belki de bu temel değerlendirmelerin önemli biçimde eksik bıraktığı bir şey olduğunu söyler. Temelde yatan fiziğin zamanda *simetrik* olduğu kabul edildiğinde çıkarsar göründüğümüz şey bir *asimetrik* zaman yasasıdır. Bu nasıl gerçekleşti? Aynı argümanı *geçmiş* zaman yönünde uygulamaya çalışmayı düşünebiliriz (Şekil 27.6b). x faz uzayı noktamızı daha önce seçtiğimiz aynı küçük kutuya ŞİMDİ anında yerleştirip ŞİMDİ'ye ön gelen geçmiş yönlü evrimi incelediğimizde, x'in bu kutuya geçmişe doğru giderek daha fazla ilerledikçe git gide daha büyük hale gelen kutulardan girmiş olmasının son derece olası olması sonucunu çıkarırız. Diğer taraftan bu bize geçmişte, bu argüman temelinde ikinci yasanın tanıdık versiyonunun aslında geleceğe doğru geçerli olması gerektiğine ilişkin beklentilerimize karşın, *geçmiş* yönde artan entropiye sahip ikinci yasanın *tersi*nin geçerli olduğunu söyler. Bu vargı, geçmişte evrenimizin gerçekten davrandığı biçime ilişkin gözlemlerle fena şekilde farklılık gösterir. *Bkz.* Şekil 27.7.

[27.9] Bunun, hem *tüm* gazın $\mathcal{R}$'ye döndüğü hem de %99,9'unun döndüğü durum için ne kadar süreceğini tahmin etmeye çalışın. Gaz moleküllerinin ne hızla hareket ettiğini bilmeye gerçekten gerek duyuyor musunuz?

[7] Eddington, 1929a'dan.

Yanlış giden nedir? Bunu anlamak üzere bu argümanları, tümüyle $\mathcal{R}$'de bulunan gazla ve x $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$'de bulunacak şekilde ($t_0$ anında) başladığımız yerde, kabı içindeki gazımızın davranışlarına uygulayalım. Vana açıldıktan sonra gazın aslında $\mathcal{R}$'den tüm kaba taştığı, entropinin, x kendini hızlıca dosdoğru $\mathcal{E}$ bölgesi içinde bulduğunda ısıl dengeyi göstererek çok belirgin biçimde yükseldiği yerde gaza ilişkin doğru gelecek davranışını elde eder görünürüz. Peki ya geçmiş davranışı? t_0 anından hemen önce ne olduğu sorusunu sormak zorundayız. Gazın $\mathcal{R}$'ye giden yolu gerçekten bulması için en olası yol aslında hangisidir? Vananın t_0'dan hemen önce açık olduğunu düşünürsek böylece elde eder göründüğümüz "en olası evrim", gazın kap boyunca yayılmaya başlayıp sonuçta t_0'dan bir zaman daha önce ısıl dengeye ulaşması ve daha sonra kendisini, t_0 anında tümüyle $\mathcal{R}$ bölgesinde bulunacak şekilde kendiliğinden biçimde git gide daha çok yoğunlaştırmasıdır.

Saçma görünse de aslında bu, dışarıdan herhangi bir müdahale olmaksızın, bu belirli biçimde sorulmuş soruya verilen doğru yanıttır. Pratikte gazı hiçbir zaman tümüyle $\mathcal{R}$'de bulmayız. Argüman bize yalnızca, rasgele biçimde hareket eden bir gazın, onu *kendiliğinden* tümüyle $\mathcal{R}$'de bulacak ol*sa*ydık, ki hiçbir zaman bulmayız, nasıl davranmak zorunda olduğunu söyler. Burada hiçbir paradoks bulunmaz. Diğer taraftan bu, okurun ele almasını istediğim, pratikte gazın tümüyle $\mathcal{R}$'de olması gibi bir durumun nasıl ortaya çıkabildiğiyle ilgili sorundan kaçar. Bunun ($\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ bölgesine ilişkin, gazın binde birinin $\mathcal{R}$ dışında olmasına izin veren rahat tanımı benimsediğimiz) gerçek evrenimizde meydana gelmesinde bir sorun yoktur. Deney yapan birinin başlangıçta kabın tümüne gerekli olan gaz miktarının on katını pompalayıp vanayı kapadığını ve son olarak kabın ana kısmına gazın tüm %90'ını pratik olarak boşaltmak üzere bir vakum pompası uyguladığını düşünebiliriz. Tüm bu işlem boyunca ikici yasa uyarınca



Şekil 27.7 Şekil 27.6'nın vargılarının, S entropisinin t zamanı karşısındaki bir grafiğiyle ifade edilmiş hali. Gerekçelendirme bizi doğru biçimde ŞİMDİ, geleceğimize yönelik davranışla ilgili bir ikinci yasa beklemeye yöneltir fakat bu bize, gerçek deneyimle toptan çelişkili olarak, ikinci yasanın tersinin geçmişte geçerli olduğuna ilişkin saçma görünümlü yanıtı verir.

entropi her zaman yükselmiştir. Elbette bunu faz uzayı biçiminde tartışmak üzere, deney yapan kişinin de birleştirildiği, olasılıkla evrenin büyük bir kısmı boyunca, belki de güneşe ya da daha ötesine kadar genişleyen daha büyük bir faz uzayına gerek duyarız. Deneycinin vücudunda, yemek yeme ve nefes alma yoluyla edinilen entropi son derece küçük tutulur. Basit olması için pompanın elle çalıştığını varsayalım, aksi halde (şu anki amaçlarımızla ilgisiz konular ortaya çıkaracak olan) yakıt kaynağındaki düşük entropinin kökeniyle ilgili kaygılanmamız gerekirdi. Deneycinin düşük entropisinin bir kısmı, içindeki gazla birlikte kaba aktarılır ve gazı $\mathcal{R}$'ye getirmek üzere işe koşulur. Deneycinin yiyecekleri ve havadaki düşük entropi sonuç olarak güneşten gelir. Güneşin bu belirli rolüne kısa süre içinde döneceğim.

Böylece, kaptaki tüm gazın fiilen $\mathcal{R}$ bölgesinde olduğu gerekli durumu, fiziki olarak uygun "entropi zamanla artar" biçimine sahip ikinci yasayı çiğnemeksizin elde edebildik. Geçmişe yönelik davranışla ilgili zaman ters çevrilmiş bir ikinci yasayla belirgin vargıya ilişkin güçlüğümüze ne oldu? Çözümlendi mi? Kesinlikle hayır! Deneycinin vücudu, güneş ve genişletilmiş faz uzayımızca tanımlanan her şey gibi, gerçek ikinci yasa uyarınca davranmak zorundadır (ve aslında öyle davranır). Bununla birlikte faz uzayı argümanımızı artık bu genişletilmiş faz uzayına uygularsak bu durumda hâlâ, entropinin tüm sistemimizi incelediğimiz herhangi bir zamandan önceki geçmişe doğru artma zorunluluğuna ilişkin fiziki saçmalığı elde eder görünürüz.

27.6 Tüm evren "yalıtık bir sistem" midir?

Bazı kuramcılar "yalıtık" ve "açık" sistemler arasına, yalıtık bir sistemde entropi (dengeye ulaşılana dek) yükselirken dış dünyadan zaman zaman, bir deneyci tarafından müdahale edilmesi ya da güneşten gelen düşük bir entropi girdisi gibi, entropiyi düşürmeye hizmet edecek bir girdi olasılığının her zaman var olduğunu iddia ederek bir ayrım koymaya çalışırlar. İkinci yasadaki zaman asimetrisine ilişkin bu çizgiler boyunca girişilen herhangi bir açıklama bana yalnızca geçici bir konuma sahip olabilir gibi görünüyor çünkü bu dış etkiler kendi toplamlarıyla sisteme eklenebilir. Bu, ele alınan "sistem"in gerçekten bir bütün olarak evren olmak zorunda olduğu anlamına gelir. Bazen insanlar buna karşı çıkar fakat böylesi bir karşı çıkış için herhangi bir haklı neden görmüyorum. Evren aslında uzamsal olarak sonsuz da olabilir fakat bu onun bir bütün olarak ele alınması önünde bir engel değildir (*bkz.* 16. bölüm). Ne olursa olsun, evren

uzamsal olarak sonlu olabilir (birazdan geleceğimiz belirgin bir olasılık) ve ikinci yasa için geçerliliği evrenin uzamsal olarak gerçekten sonsuz olmasına bağlı olan bir argümana dayanması tuhaf görünür. Daha sonra göreceğimiz üzere sonsuz/sonlu ayrımı ikinci yasanın kaynağı sorusuyla yalnızca çok hafif biçimde ilişkilidir. Entropi tartışması aslında, (hacmi sonsuz olabilen) bir $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ faz uzayının olası evrenlerin geniş bir toplamını, tüm evrimlerini (uygun) klasik dinamiğin dinamik denklemleri uyarınca birleştirerek açıkladığı $\mathcal{U}$ toplam evrenine uygulanabilir.

Bununla birlikte yüzleşilmesi gereken bazı uygunsuz konular mevcuttur. Evreni bir bütün olarak ele almak üzere, genel göreliliği devreye sokmadan uygun biçimde yapılamayan şeyi yapıp kozmoloji diyarına girmemiz gerekir. Genel göreliliğin genel kovaryans (§19.6) ilkesiyle tümüyle uyum içinde olan bir tartışmaya sahip olmak üzere, içinde evrenin kendisine göre "evrimleşme"sinin gerektiği özel herhangi bir zaman koordinatı seçimi bulunmayan bir tanımı işe koşmak gerekir. Geçici biçimde evrimleşen bir tablo, kendisini bir $\mathcal{P}$ faz uzayında hareket eden bir x noktası olarak gösterdiğimizde fiziki bir sistemi değerlendirmemizin açık biçimli bir yoludur. x'e ait her konum sistemin bir zamandaki uzamsal bir açıklamasını (momentum dahil) gösterir. Yine de daha görelilikçi bir bakış benimsemek bu açıklamayı gereksiz biçimde karıştırır ve burada vurgulamak istediğim noktalarla ilgili olarak katı bir görelilikçi bakış açısı benimsemenin yardımcı olacağını düşünmüyorum. Aslında, kısa süre içinde göreceğimiz üzere, standart kozmolojik modeller doğal biçimde tanımlanmış bir zaman koordinatına sahiptir ve bu, tüm evren kendisine göre evrimleşir biçimde açıklanabilecek bir t "zaman parametresi"ne iyi bir yaklaşıklık tahmini verir. $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$'nun her noktası yalnızca t anındaki evrenin madde bileşimini değil fakat aynı zamanda sürekli alanların dağılımını (ve momentum) da açıklar biçimde kabul edilecektir. Kütleçekim alanı böylesi bir alandır, böylece evrenin *uzamsal geometri*si de (kütleçekim alanına ilişkin uygun başlangıç bilgisiyle verilmiş kendisine ait değişim oranıyla birlikte)[8] $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ içindeki x'in konumunda şifrelenecektir.

Aslında $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ sonsuz boyutlu olacaktır fakat bu $\mathcal{U}$ evreni uzamsal olarak sonsuz olsa da olmasa da ortaya çıkar ve bu, örneğin elektromanyetik alan gibi diğer tüm alanlarda ortaya çıkan bir özelliktir. Bu, gerekli her $\mathcal{V}$ faz uzayı bölgesi sonsuz hacme sahip olacağından entropi tanımıyla ilgili teknik bazı sorunlara neden olur. Bu sorunla, enerji ve uzamla ilgili boyutta uygun biçimde sınırlanmış sistemlerle ilgili faz uzayı hacimleri için elde edilmesi gereken sonlu bir yanıt sunan kuantum (alan) kuramından

[8] *Bkz.* Hawking ve Ellis, 1973; Misner vd., 1973; Wald, 1984; Hartle, 2002.

alınan ödünç fikirler yoluyla ilgilenmek olağandır. Bunun ayrıntıları bizim için önemli değildir. Kütleçekim durumunda, kuantum kütleçekime ilişkin tatmin edici bir kuram eksikliği nedeniyle, bu konularla tam olarak tatmin edici bir biçimde ilgilenmenin herhangi bir yolu olmamasına rağmen bunları, ikinci yasa tarafından ortaya konan genel tartışmaları etkilemeyen teknik özellikler olarak değerlendireceğim.

Bu noktada kozmolojik bir düzende ikinci yasayla ilgili sıkça büyük bir kafa karışıklığına sebep olan bir yanlış anlamayı belirtmeliyim. İkinci yasadaki entropi artışının bir biçimde yalnızca evrenin genişlemesinin zorunlu bir sonucu olduğuna ilişkin genel bir bakış mevcuttur. (Bu genişlemeye §27.11'de geleceğiz.) Bu fikir, küçük olduğunda evrenin kullanımında karşılaştırmalı biçimde, olası entropi değerlerine bir tür alçak "tavan" sağlayan az serbestlik derecesi bulunup evren büyüdükçe daha yüksek bir "tavan" sağlayıp daha yüksek entropilere izin veren daha fazla kullanılabilir serbestlik derecesi bulunmasıyla ilgili bir yanlış anlamadan kaynaklanır görünür. Evren genişledikçe bu izin verilebilir maksimum artar, böylece evrenin gerçek entropisi de artar.

Bu bakış açısının doğru olamayacağını görmenin pek çok yolu mevcuttur. O örneğin, çöken bir fazın bulunduğu o evren modellerinde entropinin ikinci yasayı çiğneyerek düşmeye başlayacağını anlatır. Bazıları bundan hoşnut olur[9] fakat bu bakış açısı, özellikle kara deliklerin varlığında temel güçlüklerle karşılaşır.[10]

Kara delikleri kısa süre içinde ele alacağız (§27.8) fakat üstte adı geçen, evrenin boyutuna bağlı olarak entropi değerleriyle ilgili bir "tavan" talep eden, bakış açısının niçin yanlış kavrandığını görmek üzere onları bilmeye gerçekten gerek duymayız. Bu, entropi artışıyla ilgili doğru açıklama olamaz çünkü evrene uygun olan serbestlk derecesi $\mathcal{P}_U$ faz uzayı tarafından tanımlanır. Genel görelilik dinamiği (evrenin boyutunu tanımlayan serbestlik derecesini içeren), $\mathcal{P}_U$ faz uzayındaki x noktamızın hareketi tarafından tıpkı içerilimiş tüm diğer fiziki işlemler kadar açıklanır. Bu $\mathcal{P}_U$ faz uzayı yalnızca "orada"dır ve o, zaman $\mathcal{P}_U$'nun parçası olmamak üzere, hiçbir anlamda "zamanla büyümez". O tür bir "tavan" yoktur çünkü ele alınan evrenin (ya da evrenler ailesinin) dinamik olarak ulaşabileceği tüm durumlar $\mathcal{P}_U$'da gösterilmek zorundadır. Verili küçük bir kalın taneli kutudan büyük birine ulaşmak x için biraz zaman alabilir fakat "entropi tavanı" kavramı uygunsuzdur. (Ayrıca *bkz.* §2713.)

---

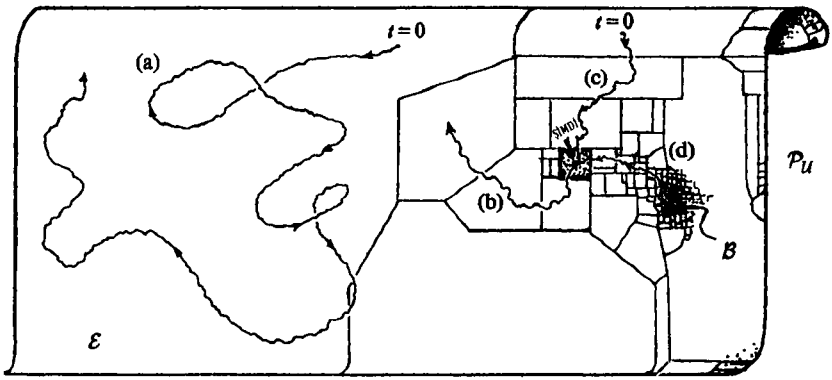
[9] *Bkz.* Gold, 1962; bu fikirlerin bir miktar hayali bir sonuca kavuşturulmuş hali için *bkz.* Tipler, 1997.

[10] *Bkz.* Penrose, 1979a.

İkinci yasayı göstermek üzere üstte verilmiş olan argümana geri dönelim. Tüm evrene uygun $\mathcal{P}_U$ faz uzayını kullanacağız, böylece evrenin bir bütün olarak evrimi, $\mathcal{P}_U$'daki bir ξ eğrisi boyunca hareket eden x noktası tarafından açıklanır. ξ eğrisi t zaman koordinatı tarafından parametrize edilir ve ikinci yasadan t arttıkça ξ'nin git gide çok daha büyük kalın taneli kutuya girmesini bekleyebiliriz. $\mathcal{P}_U$'ya "makul" bir kalın tanelemenin uygulanmış olduğunu varsayarız fakat x'in karşılaştığı entropilerle ilgili sonlu değerler elde etmek istersek bu kutuların hacimlerinin sonlu olmasını isteriz. Fiziki olarak uygun bir kalın tanelemeyle ilgili olarak bunun gerçekleşmesi için evren, kendisine uygun enerji üzerindeki sonlu bir sınırla birlikte sonlu olarak kabul edilmek zorundadır. Aslında, kısa süre içinde göreceğimiz üzere standart üç kozmolojik modelden biri bu doğadadır, böylece argümanın bu tür bir durumda uygulandığını hayal edebiliriz. Elbette, herhangi bir zamanda, entropiyle ilgili gerçek bir sonsuz sayısal değeri önemsemezsek bununla ilgili belirli bir gereklilik söz konusu olmaz. (Bazı kutuların diğerlerine oranla "son derece büyük" olmalarıyla ilgili matematiksel kavramı, kendilerinden bazılarınının gerçek hacimleri ve böylece entropileri sonsuz olsa bile, hâlâ oluşturabiliriz.)

27.7 Büyük Patlamanın rolü

Kafamızda, $\mathcal{P}_U$ faz uzayına yerleştirilmesi gereken, olası bir evren geçmişini gösteren parametrize edilmiş ξ eğrimizi nasıl canlandırmalıyız? ξ basit olarak rasgele biçimde $\mathcal{P}_U$'nun içine atılacak olsaydı, onun çok büyük olasılıkla tümüyle (ya da neredeyse tümüyle) en devasa $\mathcal{E}$ ısıl denge kutusunda bulunmasını beklerdik ve uzunluğu boyunca sürekli biçimde fark edilebilir hiçbir "entropi artışı" ölçüsü söz konusu olmazdı; *bkz.* Şekil 27.8a. Böylesi bir durum, kendisini gerçekten bildiğimiz haldeki, ikinci yasanın hüküm sürdüğü evrenle tam anlamıyla uyuşmazlık içindedir. ŞİMDİ'yi gösteren belirli bir $t_0(> 0)$ zamanı için ξ üzerindeki x noktasının, özel olarak büyük olmayan (şu an gözlemlediğimiz bir entropi değerine ilişkin evreni temsil eden) makul boyutlu bir $\mathcal{V}$ bölgesine sınırlandığı fakat aksi halde ξ eğrisinin rasgele seçildiği, Şekil 27.8b, c'de belirtilen durum için de aynı şey söz konusudur. Bu, entropisi ŞİMDİ'den sonraki gelecekte ve ayrıca, ikinci yasayı çiğneyerek, ŞİMDİ'den geçmişe doğru da artan bir evrene karşılık gelir. Gerçekte bulduğumuz, ξ'nin bir ucunun, geçmiş ucu ($t = 0$) $\mathcal{P}_U$'daki son derece küçük (böylece son derece küçük bir entropiye sahip) bir $\mathcal{B}$ bölgesinde olduğu fakat oradan itibaren (dinamik yasaları izleyerek) olacağı üzere, etrafta çırpınarak, t arttıkça git gide çok



Şekil 27.8 Olası evren durumlarına (diyelim ki sabit toplam kütleli ya da korunan herhangi başka bir nicelikteki) ilişkin $\mathcal{P}_u$ faz uzayında parametrize edilmiş bir ξ eğrisi tarafından tanımlanan olası farklı evren evrimleri. (a) ξ eğrisi rasgele biçimde $\mathcal{P}_u$ içine atılırsa neredeyse hayatının tümünü $\mathcal{E}$'de geçirir ve evren önemsiz dalgalanmalar dışında "ısıl denge"den zorlukla farklılık gösterir (ve kapalıysa Şekil 27.20d'ye benzer). (b) $\mathcal{V}$'nin noktalarını şu an içinde yaşadığımız evreni gösterir biçimde kabul ederek eğrinin yalnızca, (gölgeli gösterilen) çok küçük bir $\mathcal{V}$ kutusu içinde ŞİMDİ'den başladığını, aksi halde ξ'nin rasgele atılacağını belirttiysek, ikinci yasanın artan entropisiyle birlikte görmeye devam ettiğimiz şeyle uyumlu bir gelecek evrimi buluruz. (c) Tüm eğrinin $\mathcal{V}$'den yalnızca belirli bir $t_N > 0$ zamanında (ŞİMDİ) geçmekle sınırlandığı duruma aynı ele alışı uygularsak bu durumda evrenle ilgili makul bir gelecek buluruz fakat Şekil 27.6b'deki gibi geçmişteki ikinci yasanın açık bir ihlalini görürüz. (d) Bu, ξ'nin başlangıç ucunun ($t = 0$), evrenin, görünüşe bakılırsa gerçek evrenimizde meydana gelmiş olan olağanüstü özel Büyük Patlama'yla başladığı saçma biçimde küçük $\mathcal{B}$ bölgesinde bulunduğunu belirtirsek düzeltilmiş olur.

daha büyük boyutlu hacimler bulduğu ve ŞİMDİ'yi temsil eden belirli t değerimiz t_0 için x'i hâlâ gözlemlediğimiz evrene karşılık gelen görece küçük $\mathcal{V}$ hacminde bulduğumuz tanıdık ikinci yasaya sahip bir evrenle ilgili olarak Şekil 27.8b, d'de gösterilmiş olana benzer bir şeydir. İkinci yasanın ileri sürdüğü şey basit olarak budur ve (c) ve (b) yerine (d) ve (b) elde ederiz.

Üstte söylenmiş olanları başka bir biçimde ifade etmeye çalışayım. Şeylere "ŞİMDİ" olarak adlandırdığımız belirli bir $t_0(> 0)$ avantajlı noktasından, x'i makul boyutlu bir $\mathcal{V}$ bölgesinde t_0 zamanında bularak baktığımızı düşünelim. Böylece ξ'nin t'ye ilişkin büyük değerlerle ilgili olarak gezindiği yerlere bakarak aslında onun t arttıkça git gide daha büyük boyutlu kutulara girdiğini görürüz. Bu, ikinci yasayla ve x'in kutu konumlarına ilişkin olarak "belirli hiçbir eğilim" göstermemesiyle ilgili üstteki varsayımla uyumludur. Bununla birlikte $\mathcal{V}$'deki x'le, t'den "başlayarak" ters çevrilmiş zaman perspektifinden bakılınca x noktası, $\mathcal{B}$ olarak işaretlediğim saçma biçimde küçük faz uzayı bölgesine doğru amaçlı biçimde zamanda geriye yönlendirilir izlenimi verir.

Bu ters çevrilmiş zaman yönüyle ilgili olarak, zaman geçmişe doğru ilerledikçe gittikçe olağanüstü bir dereceye kadar küçük hale gelen kutular arayan x'in davranışı aslında inanılmaz biçimde "yönlendirilmiş" görünür. Bunu, yalnızca şeytanlık için, gittikçe daha küçük kutular için inatçı bir "kasıtlı" arayış olarak mı anlamalıyız? Hayır, $\mathcal{B}$ yalnızca, basit olarak art arda daha küçük hale gelen kutular tarafından sarılır (*bkz.* Şekil 27.8), böylece t 0'a giderken ξ'nin $\mathcal{B}$'ye ulaşması gerekirse yalnızca bu biçimde gittikçe küçülen kutularla karşılaşmak *zorunda*dır. Bilmece basit olarak ξ'nin bir ucunun $\mathcal{B}$'de bulunma zorunluluğuna ilişkin gerçekte yatar! İkinci yasasının kaynağını kavramak istediğimizde anlamak zorunda olduğumuz şey budur. $\mathcal{B}$ bölgesi evrenin Büyük Patlama kökenini temsil eder. Birazdan bu bölgenin gerçekte ne kadar saçma biçimde küçük olduğunu göreceğiz!

Burada neyle ilgilenildiğini anlamak zorundayız. $\mathcal{B}$ hangi belirli biçimde özeldir? Bu özgüllüğe sayısal bir ölçü atayabilir miyiz? Büyük Patlamaya ne olursa olsun inanmanın gözleme dayalı nedenleri nelerdir?

Evrenin patlamalı kökenine inanmaya ilişkin nedenler ilk olarak, Einstein denklemiyle ilgili, 1922'de Alexander Friedmann tarafından kozmolojik bağlamda gerçekleştirilen kuramsal bir çalışmayla geldi (altta §27.11'e bakın). Daha sonra 1929'da Edwin Hubble, uzak galaksilerin aslında bizden, evrendeki maddenin kendiliğinden bir patlamanın sonucu olduğunu ima eder görünen bir biçimde uzaklaştıklarına[11] ilişkin dikkat çekici keşfi gerçekleştirdi. Modern hesaplamaya göre, artık Büyük Patlama denen, patlama yaklaşık $1{,}4\times10^{10}$ yıl önce gerçekleşti. Hubble'ın vargıları, ani olarak uzaklaşan cisimlerden gelen ışığın, Doppler etkisi[27.10] nedeniyle (spektral çizgilerin "spektrumun kırmızı ucu"na, diğer bir deyişle daha uzun dalga boylarına doğru yer değiştireceği şekilde) *kırmızıya kayması* gerçeğine dayanıyordu. Galaksi ne kadar uzak görünüyorsa, "patlama" tablosuyla uyumlu biçimde bize olan uzaklıkla orantılı bir geri çekilme hızı belirterek, bu kırmızıya kaymanın sistematik biçimde o kadar büyük olduğunu buldu.

Bununla birlikte Büyük Patlamayla ilgili gözleme dayalı en etkili dolaysız destek yaklaşık 2,7K (diğer birdeyişle mutlak sıfırın 2,7°C üstü)[12] sı-

---

[11] Hubble'dan birkaç yıl önce 1917'de Amerikalı astronom Vesto Slipher evrenin genişlediğine ilişkin bazı belirtiler bulmuştu bile. *Bkz.* Slipher, 1917. Bu gözlemleri nedeniyle oldukça az bir saygınlık edindiyse de Pluto'yu keşfetmiş olma ayrıcalığı da kendisine aittir.

[27.10] v hızıyla uzaklaşan bir kaynakla ilgili özel görelilikçi Doppler frekans kaymasını (a) ışığın dalga tablosunu kullanarak, (b) 4–vektörlere ilişkin skaler çarpımları ve $E = h\nu$ ifadesini kullanarak türetin.

[12] Bu ışınım kuramsal olarak ilk kez 1946'da Georg Gamow tarafından Büyük Patlama temelin-

caklığına sahip ışınım geçiren uzayın evrensel varlığıdır. Böylesi şiddetli bir olayla ilgili olarak bu, olağandışı biçimde düşük bir sıcaklık gibi görünse de, bu ışınımın Büyük Patlamanın kendisine ait, evrenin devasa patlaması nedeniyle son derece seyreltilip ("kırmızıya kaymış") soğutulmuş bir "parlama" olduğuna inanılır. 2,7K ışınım modern kozmolojide son derece önemli bir rol oynar. Genellikle "(kozmik) mikrodalga ardalan" ya da bazen "ardalan kara cisim" ışınımı ya da "kozmik kalıntı" ışınımı olarak adlandırılır. Erken evrenin kendisinin Büyük Patlamadan hemen sonraki aşırı derecede düzenliliğini ve §27.11'de ele alacağımız kozmolojik modellerle oldukça iyi açıklandığını belirtir biçimde son derece düzenlidir (10^5'te bir benzeri bir şey).

Şimdi, $\mathcal{B}$'nin böylesi küçük bir hacme sahip olmasını sınırlayan Büyük Patlamayla ilgili aşırı derecedeki düşük entropi kısılamasının *doğa*sıyla ilgili bazı fiziki kavrayışlar edinmeye çalışalım.[13] Büyük Patlamayla ilgili olağandışı biçimde özel olan şeyin gerçekte, az önce değinildiği üzere onun mükemmel düzenliliği olduğunu bulacağız. Bunun niçin çok düşük entropiye karşılık geldiğini ve onun bize, bizim için dünyada önemli olan bildiğimiz tanıdık biçimde bir ikinci yasayı nasıl sağladığını anlamaya çalışmak zorundayız.

Öncelikle yine bir düşük enerji kaynağı olarak güneşin rolünü ele alın. Yaşamımızın bağlı olduğu şeyin güneşin sağladığı *enerji* olduğuna ilişkin genel bir yanlış anlayış mevcuttur. Bu yanıltıcıdır. O enerjinin bizim kullanımımızda olması için, onun düşük entropili bir biçimde olması sağlanmak zorundadır. Tüm gökyüzü örneğin, güneşten ya da başka bir şeyden kaynaklanan, düzenli bir sıcaklıkla düzenli biçimde aydınlatılsaydı bu durumda bu enerjiyi kullanmanın (bununla başa çıkmak üzere evrimleşmiş ne türde bir yaratık düşünebilirsek düşünelim) hiçbir yolu olmazdı. Isıl dengede olan bir enerji sunumu yararsızdır. Bununla birlikte güneş diğer türlü bir *soğuk ardalan*daki bir *kızgın nokta* olduğu için şanslıyız. Gün boyunca enerji güneşten dünyaya ulaşır fakat gün ve gece esnasında tümü yine geri, uzaya gider. Net enerji dengesi basit olarak (ortalamada) aldığımız tüm enerjiyi geri göndermemiz şeklindedir.[14]

---

de ve daha açık olarak 1948'de Alpher, Bethe ve Gamow tarafından ve yine bağımsız biçimde 1964'te Robert Dicke tarafından öngörüldü. Gözleme dayalı olarak, tesadüfen, Arno Penzias ve Robert Wilson tarafından 1965'te keşfedildi ve Dicke ve meslektaşlarınca hemen yorumlandı. *Bkz.* Alpher vd., 1948; Dicke vd., 1965 ve elbette Penzias ve Wilson, 1965; belki de tüm zamanların en alçak gönüllü ismine sahip tezi!

[13] Daha fazla tartışma için *bkz.* Penrose, 1979a, 1989.

[14] Aslında toplamda dünya aldığından hafif biçimde *daha fazla* enerjiyi geri gönderir. Güneşten alınıp milyonlarca yıldır dünyada depolanmış olan fosil yakıtlarının insanlar tarafından yakılması konusunu (ve terazinin diğer kefesinde, buna eşlik eden, "sera etkisi"nden

Bununla birlikte güneşten aldığımız şey, *yüksek* enerjili tekil fotonlar (temel olarak güneşin yüksek sıcaklığı nedeniyle yüksek frekanslı sarı fotonlar) biçimindeyken bu enerji çoğunlukla uzaya *düşük* enerjili (kızılaltı, düşük frekanslı) fotonlar biçiminde geri gider. (Bu foton enerjisi ilişkisi Planck'ın $E = h\nu$ denklemiyle kara cisim ışınımıyla ilgili kavrayışlarından gelir; *bkz.* §21.4.) Daha yüksek enerjileri (daha yüksek sıcaklık) nedeniyle uzaya giden fotonlardan daha az foton güneşten gelir çünkü onların taşıdığı içeri girdiği gibi dışarı çıkan *toplam* enerji aynıdır. Güneşin daha az sayıdaki fotonu daha az serbestlik derecesi anlamına gelir ve böylece uzaya dönen fotonlardan daha küçük bir faz uzayı bölgesi ve daha küçük bir entropi söz konusudur. Bitkiler, bu düşük entropili enerjiyi fotosentezde kullanarak kendi entropilerini düşürür. Daha sonra biz kendi entropimizi düşürmek üzere bitkilerden, onları yiyerek ya da onları yiyen bir şeyi yiyerek ya da onların serbest bıraktığı oksijeni soluyarak yararlanırız; *bkz.* Şekil 27.9.

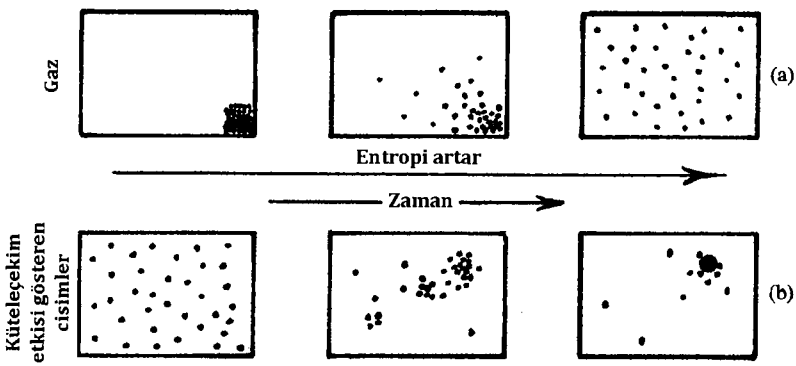
Peki ama niçin güneş soğuk gökteki kızgın bir noktadır? Ayrıntılı hikaye karışık olsa da sonuçta iş güneşin ve tüm diğer yıldızların, kütleçekimsel olarak daha önceki düzenli bir gazdan (temelde hidrojen) yoğunlaşması gerçeğine dayanır. Başka ne tür etki (birincil nükleer kuvvetler) mevcut olursa olsun, güneş kütleçekilm olmaksızın var olamaz bile! Güneşin entropisindeki "düşüklük" (ısıl dengeden belirgin uzaklık), güneşin kütleçekimsel olarak kendisinden yoğunlaştığı gazın *düzenliliği*nde potansiyel olarak var olan devasa bir düşük entropi deposundan gelir.

Entropiyle ilişkili olarak kütleçekim, evrensel biçimdeki çekici doğası nedeniyle bir biçimde karışıktır. Entropiyi sıradan bir gaz biçiminde düşünmeye, küçük bölgelerdeki gaz yoğunlaşması (Şekil 27.3'teki kabımız gibi) *düşük* entropiyi göstermek üzere ve *yüksek* entropili ısıl denge durumunda gaz düzenli biçimde yayılmış olmak üzere, alışığız. Yine de kütleçekimle birlikte işler başka türlü olmaya eğilimlidir. Kütleçekim etkisi gösteren cisimlere ilişkin düzenli biçimde yayılmış bir sistem (cisimlerin hızları son derece yüksek olmadıkça ve/ya da cisimler kütleçekimsel katkıların önemsiz hale geleceği biçimde çok küçük ve/ya da büyük oranda yayılmış olmadıkça) oldukça *düşük* entropi gösterirken *yüksek* entropi bu cisimler bir arada kümelendiklerinde gerçekleşir (Şekil 27.10).

---

kaynaklanıp ve kendisi yoluyla dünyanın güneş enerjisinin öncekine göre biraz daha fazlasını hapsettiği küresel ısınmayı) göz ardı edersek dünyanın iç kısmının radyoaktif bozunma yoluyla ısınması, bu enerji atmosfer yoluyla çok azar azar uzaya kaçmak üzere, söz konusudur. *Bkz.* §34.8.

Şekil 27.9 Dünya güneşten aldığına eşit miktarda enerjiyi geri verir fakat güneşten aldığı şey, güneşin sarı ışığının dünyadan dönen kızılaltınınkinden daha yüksek frekansa sahip olması gerçeği nedeniyle çok daha düşük bir entropi biçimindedir. Buna göre Planck'ın $E = h\nu$'sü uyarınca güneşin fotonları foton başına, dünyadan dönenlerden daha fazla enerji taşır, böylece güneşten gelen enerji dünyadan dönenden daha az foton tarafından taşınır. Daha az foton daha az serbestlik derecesi ve böylece daha küçük bir faz uzayı bölgesi ve uzaya dönen fotonlarınkinden daha düşük entropi anlamına gelir. Bitkiler, bu düşük entropili enerjiyi fotosentezde kullanarak kendi entropilerini düşürür ve kendi entropimizi düşürmek üzere biz onlardan, onları yiyerek ya da onları yiyen bir şeyi yiyerek ya da onların serbest bıraktığı oksijeni soluyarak yararlanırız. Sonuç olarak bu, gökteki, güneşi üreten kütleçekimsel kümelenmeden sonucundaki sıcaklık dengesizliğinden kaynaklanır.



Şekil 27.10 Soldan sağa doğru artan zamanla artan entropi. (a) Başlangıçta bir köşeye sıkışmış olan kutudaki bir gaz için entropi, gaz kutu içerisinde sonuçtaki düzenli ısıl denge durumuna ulaşmak üzere yayılmaya başladığında, artar. (b) Kütleçekimle birlikte işler başka türlü olmaya eğilimlidir. Kütleçekim etkisi gösteren cisimlerin düzenli biçimde yayılmış başlangıç sistemi oldukça düşük bir entropiyi gösterir ve entropi arttıkça kümelenme ortaya çıkma eğilimindedir. Sonuçta malzemenin çoğunu yutan bir kara delik oluşurken entropide devasa bir artış söz konusu olur.

Maksimum entropi durumundan ne haber? Bir gazda ısıl dengeye ilişkin maksimum entropi, sorgulanan bölge içinde düzenli biçimde yayılmış gaza sahipken *kütleçekim etkisi gösteren* büyük cisimlerde maksimum entropi tüm kütle tek bir yerde, *kara delik* olarak bilinen bir varlık biçiminde, yoğunlaştığında gerçekleşir. Daha fazla ilerlemek üzere bu tuhaf ve harika nesnelerle ilgili bir şeyi anlamamız gerekecek ve bu yolla bir bütün olarak evrende potansiyel biçimde var olan entropiye ilişkin hatırı sayılır derecede iyi bir tahmin elde edeceğiz. Böylece bu bize, $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{P}_U$'nun gerekli hacimlerini tahmin etme olanağı sağlayacak.

27. 8 Kara delikler

Nedir bir kara delik? Açık konuşacak olursak, kütleçekime ilişkin çekimin ışığın bile kaçamayacağı kadar güçlü hale geldiği, malzemenin içe doğru çökmesi sonucu oluşan bir uzayzaman bölgesidir. Böylesi bir durumun niçin ortaya çıktığına ilişkin sezgisel bir tablo elde etmek üzere Newtoncı *kaçma hızı* kavramını düşünün. Bir taş yerden yukarıya doğru belirli bir v hızında fırlatılırsa bu durumda belirli bir yüksekliğe eriştikten sonra, bu yükseklik kendisi için, taşın kinetik enerjisinin tümüyle yer seviyesinden itibaren kütleçekimle ilgili potansiyel enerjinin üstesinden gelmekte kullanıldığı yükseklik olmak üzere (§18.6), geri yere düşecektir. Yerden yükseklik, hava direnci etkilerini göz ardı ederek, tümüyle atış hızına bağlıdır.[27.11] Bununla birlikte *kaçma hızı* olarak anılan $(2GM/R)^{1/2}$'yi aşan bir hız için taş dünyanın kütleçekim alanından tümüyle kurtulur. (Burada G Newton kütleçekim sabiti olmak üzere, M ve R sırasıyla dünyanın kütle ve yarıçapıdır.) Şimdi dünya yerine çok daha büyük kütleli ve yoğun bir cisme sahip olduğumuzu düşünün. Böylece (M artıp R azalırsa M/R artacağından) kaçma hızı daha büyük olur. Şu durumda kütle ve yoğunluğun yüzeydeki kaçma hızının ışık hızını bile aşacak kadar büyük olabileceğini düşünebiliriz.

Newtoncı kuramda bu olduğunda, büyük uzaklıklardan bakıldığında cismin tümüyle kara görüneceğine inanabiliriz çünkü hiçbir ışık ondan kaçamaz; aslında bu, saygın İngiliz astronom ve papaz John Michell'in 1784'te vardığı sonuçtu. Daha sonra 1799'da büyük Fransız matematiksel fizikçi Pierre Simon Laplace aynı sonuca ulaştı.[15] Yine de durum bana bu kadar açık görünmüyor çünkü ışık hızı Newton kuramında mutlak her-

[27.11] R dünya yarıçapı ve g dünya yüzeyindeki kütleçekimden kaynaklanan ivme olmak üzere bu yüksekliğin $v^2R(2gR - v^2)^{-1}$ olduğunu gösterin.

[15] *Bkz.* Michell, 1784; Tipler vd., 1980.

hangi bir konuma sahip değildir ve böylesi bir cisim için, kendi yüzeyindeki ışık hızının serbest uzayda ölçülenden çok daha büyük olması gerektiği ve cisim ne kadar kütleli ve yoğun olursa olsun o ışığın hâlâ sonsuza kaçabileceği itirazında bulunulabilir.[16, [27.12]] Bu durumda, kara delik kavramının ileri görüşlü bir habercisi olsa da Michell'in "kara yıldız"ı bana göre Newtoncı kuramdaki kütleçekim etkisi gösteren nesnelerle ilgili ikna edici bir durum sunmaz.

Bu konu, ışık hızı orada temel olduğu ve aslında tüm sinyaller için sınırlayıcı hızı gösterdiğinden (§17.8) görelilik kuramı bağlamında çok daha uygundur. Bununla birlikte kütleçekimle ilgili bir olguyla ilgilendiğimizden yalnızca Minkowski uzayı yerine bir *genel* görelilikçi uzayzamana gerek duyarız. Genel görelilikte beklentiler aslında kaçma hızının, şimdi *kara delik* olarak adlandırdığımız sonucu vererek, ışık hızını aştığı durumların ortaya çıkacağı yönündedir.

Bir kara delik, iri kütleli bir cisim, iç basınç kuvvetlerinin cismi kendi kütleçekim etkisinin içe doğru acımasız çekiminden ayrı tutmakta yetersiz kaldığı bir aşamaya ulaştığında beklenir. Aslında böylesi kütleçekimsel bir çökme güneşinkinden birkaç kat fazla kütleye, diyelim ki $10M_\odot$ ($1M_\odot$ güneşle ilgili bir kütle, güneşin kütlesi olmak üzere), sahip büyük bir yıldız uygun iç enerji kaynaklarının tümünü, soğuyup çökmeden kaçınacak yeterli basıncı muhafaza edemeyecek şekilde kullandığında beklenir. Bu olduğunda, kütleçekim etkileri acımasız biçimde bindirdiğinden çökme kaçınılmaz hale gelir.

Ayrıntılı resim, özellikle yüksek basınç koşulları altında madde davranışıyla ilgili karmaşık konuların önem kazanması nedeniyle oldukça karışık hale gelebilir. Elektron ya da nötron *bozulma basıncı* özellikle önemlidir. Bu, §23.7'den anımsayacağımız üzere, özdeş iki ya da daha fazla fermiyonu aynı kuantum durumunda olmaktan koruyan Pauli ilkesiyle ilgilidir. Aşağı yukarı dünyanın boyutuna yoğunlaşmış güneşle ilgili bir kütle benzeri bir şeye sahip olan *beyaz cüce* elektron bozulma basıncı tarafından ayrı tutulur; aynı kütleye sahip bir *nötron yıldızı*, temelde nötron bozulma basıncı tarafından ayrı tutulan boydan boya yalnızca 10 km'lik bir cisimdir. (Nötron yıldızı maddesiyle doldurulmuş bir tenis topu Mars'ın uydusu Deimos kadar ağır olur!) Bununla birlikte görelilik gereklilikleri nedeniyle, kütle yaklaşık $2M_\odot$'den fazlaysa tek başına bozulma basıncının

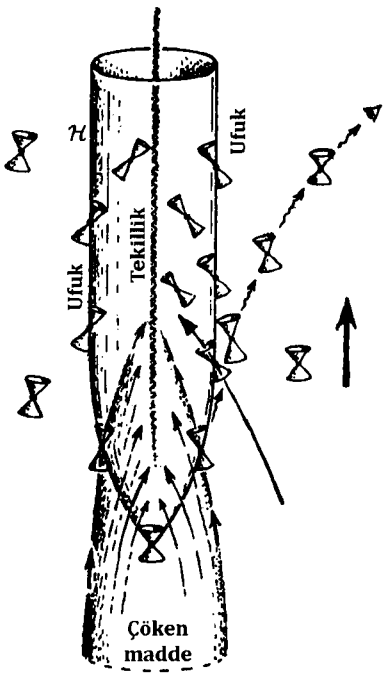
---

[16] *Bkz.* Penrose, 1978.

[27.12] Nedenini görebiliyor musunuz? *İpucu*: Işığın parçacık kuramı biçiminde ve dış ışığı cismin yüzeyine düşer biçimde düşünün. Işık cisim yüzeyindeki yatay bir ayna üzerine düşerse ne olur?

böylesi bir yıldızı ayrı tutamayacağı açığa çıkar. Kilit sonuç 1931'de, beyaz cücelerle ilgili böylesi bir $1{,}4M_{\odot}$'lik sınır tahmin ettiğinde Subrahmanyan Chandrasekhar tarafından elde edildi. Daha sonraki düzeltmeler nötron yıldızları için hafifçe daha büyük bir sınır elde etti.[17] Tüm bunların sonucu kabaca $2M_{\odot}$'den (ve olasılıkla $1{,}6M_{\odot}$'den) fazlasına sahip soğuk bir nesneyle ilgili herhangi bir dayanma düzeninin söz konusu olmamasıdır. Bu tür bir nesne içe çöker ve Michell'in değerlendirmelerinin anlamlı olmaya başladığı türdeki boyutlara dek çökmeye devam eder. Peki sonra ne olur?

Başlangıçta ısıl basıncın kendisini destekleyebileceği kadar yüksek sıcaklıktaki, diyelim ki 10 $M_{\odot}$ kütleli büyük yıldızımıza geri dönelim. Yıldız



Şekil 27.11 Bir kara deliğe çökmeyle ilgili uzayzaman diyagramı. (Uzamsal boyutlardan biri bastırılır.) Madde (mutlak) olay ufku haline gelen 3–yüzey boyunca içe doğru çöker. Bir kez oluştuğunda hiçbir madde ya da bilgi delikten kaçamaz. Boş konileri ufka tanjanttır ve madde ya da sinyallerin içeri geçişine izin verirken dışarı geçişe izin vermez. Dıştaki bir gözlemci deliğin içini değil fakat yalnızca deliğe girmeden hemen önce maddeyi, büyük oranda loş ve kırmızıya kaymış biçimde, görebilir.

[17] Bu konu hakkında böylesi durumla ilgili *bkz.* Kerkwijk, 2000.

soğudukça belirli bir aşamada, sıkıştırılmış çekirdeği Chandrasekhar sınırını aşacak ve çökecektir. Dış kısımlara ilişkin içe çökme *süpernova* olarak bilinen şiddetli bir patlamayı tetikleyebilir. Böylesi patlayan yıldızlar çoğunlukla diğer galaksilerde olmak üzere sıklıkla gözlemlenir ve süpernovalar içinde bulunduğu galaksinin tümünü birkaç günlüğüne gölgede bırakabilir. Bununla birlikte bu tür bir patlamada yeterli malzeme saçılmamışsa, ve başlangıçta $10M_\odot$ kütleli bir yıldızın o kadar fazla kaybetmesi olası değildir, beklentiler aslında yıldızın, Michell'in değerlendirmelerinin geçerli olduğu ölçeğe ulaşana dek durdurulamaz biçimde çökmesidir. Bir kara deliğe çökmeyi gösteren bir uzayzaman diyagramı olarak Şekil 27.11'i inceleyelim. (Elbette uzamsal boyutlardan biri bastırılmak zorundaydı.) Aslında kaçma hızı ışık hızı haline gelmek üzere, maddenin o, (mutlak) *olay ufku* olarak adlandırılan, yüzey boyunca içe doğru çökmeye devam ettiğini görürüz. O andan itibaren dışarıdaki herhangi bir gözlemciye yıldızın kendisinden hiçbir bilgi ulaşamaz; bir kara delik oluşmuştur.

Şekil 27.11'deki resim Einstein denklemine ilişkin, Einstein'ın kuramı yayımlandıktan kısa süre sonra ve kendisi Birinci Dünya Savaşı sırasında doğu cephesiyle sınırlı kalmış az görülen bir hastalıktan ölmeden yalnızca birkaç ay önce 1916'da Karl Schwarzschild[18] tarafından bulunan, ünlü Schwarzschild çözümüne dayanır. Bu çözüm küresel biçimde simetrik bir cismi, cisim büzüşse de büzüşmese de çevreleyen statik bir kütleçekim alanını açıklar. Ufuk, $r = 2MG/c^2$ (tam olarak Michell'in kritik değeri) yarıçap uzaklığında meydana gelir.[27.13]

Olay ufku herhangi maddi bir malzemeden oluşmaz. O yalnızca uzayzamandaki, sinyallerin dış sonsuza kaçabildiği yerleri, tüm sinyallerin kara delik tarafından kaçınılmaz biçimde kapana kıstırıldığı yerlerden ayıran belirli bir (hiper)yüzeydir. Olay ufkunun dışından içeri düşen bahtsız bir gözlemci, ufuk geçilir geçilmez yerel olarak tuhaf herhangi bir şey fark etmez. Dahası kara deliğin kendisi fikir yürütülebilir cisim değildir; onu

---

[18] *Bkz.* Schwarzschild, 1916; ya da Wald'deki, 1984, modern sunum.

[27.13] Birimler $G = c = 1$ olacak şekilde seçilmek ve θ ve ϕ küresel kutupsal koordinatlar (§22.10) olmak üzere Schwarzschild'in orijinal metrik biçimi $ds^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$'ydi. r radyal koordinatının r ve t sabitlerinin kürelerine ilişkin alanlarla ilgili bir gereklilik tarafından nasıl saptandığını açıklayın. Bu metrik biçim $r \leq 2M$ bölgesine pürüzsüz biçimde genişlemez; bunun için metriğin $ds^2 = (1 - 2M/r)dv^2 - 2\,dv\,dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ Eddington–Finkelstein biçimi kullanılabilir. İkisini açık biçimde ilişkilendiren bir koordinat değişimi bulun. Her (v, r) düzlemindeki sıfır eğrilerinin niçin radyal sıfır jeodezileri olmak zorunda olduğunu açıklayın ve bu gerçeği onlara ilişkin denklemleri elde edip grafikleri çizmekte kullanın. (Sabit r çizgilerini dikey biçimde ve sabit v çizgilerini sağdan içe doğru 45°'lik açıyla eğimlenir biçimde çizin.) Olay ufkunu ve tekilliği (§27.9) tanımlayın.

yalnızca kendisi içinden hiçbir sinyalin kaçamayacağı kütleçekim etkisi gösteren bir uzayzaman bölgesi olarak düşünürüz. Peki ya zavallı yıldızın kaderine ne demeli? Bu muammaya kısa süre içinde, §27.9'da geleceğiz.

İlk olarak gözlemle ilgili durumu ele alalım. Kara deliklerin varlığıyla ilgili kanıt mevcut mudur? 1970'lerde, çiftin yalnızca bir üyesinin görünür ışık biçiminde parladığı ilginç "çift yıldız" sistemlerine ilişkin bir miktar örnek biliniyordu. Diğerinin varlığı, kütlesi ve hareketi, görünen eşinin hareketine ilişkin ince ayrıntılardan çıkarsandı. Dahası, kendi çevresinden gelen X–ışınları yayımından görünmeyen eşin, kabul edilmiş olan fiziki yasaların tıkız bir yıldızın olmasına izin verdiği her iki nesnenin, beyaz cüce ya da nötron yıldızı, kütlesinden de çok daha büyük bir kütleye sahip tıkız bir nesne olduğu sonucuna varıldı. X–ışını yayımı, görünmez nesnenin, sürekli artan hızlarla deliğin içine doğru git gide daha da yakınlaşan bir sarmal hareketi yapıp merkeze yaklaştıkça son derece sıcak hale gelen bir gaz ve toz "büyüme diski" olarak bilinen şey tarafından sarılmış bir kara delik olmasıyla uyumluydu. Sonuç olarak X–ışınları malzeme deliğe gerçekten girmeden önce yayılır (*bkz.* Şekil 27.12a). Bu kara delik adayları arasında en iyi bilineni (ve o zaman gözleme dayalı olarak en ikna edici olanı), kendisini kabul edilmiş kuram uyarınca bir beyaz cüce ya da nötron yıldızı olmaktan kesinlikle koruyacak biçimde yaklaşık $7M_{\odot}$'lik bir kütleye sahip, yıldız çiftinin tıkız ve kara üyesi, X–ışını kaynağı olan Cygnus X–1'di.

Bu tür kanıt her zaman oldukça dolaylı ve tümüyle ikna edici olmaktan uzaktı çünkü bize böylesine kütleli tıkız nesnelerin genişletilmiş cisimler biçiminde var olamayacağını söyleyen *kurama* dayanıyordu. Öte taraftan şimdi, kara deliklerle ilgili görece daha dolaysız etkileyici bazı kanıtlar söz konusudur. Büyüme diskleri kara deliklere düşen malzemenin aldığı tek biçim değildir. Bazı durumlarda malzeme basitçe "dosdoğru içeri" düşer ve bu türdeki davranış biçimi artık gözlemlenmiş görünüyor (Şekil 27.12b). Çekici tıkız nesne herhangi türde maddesel bir yüzeye sahip olsaydı bu durumda içe düşmekte olan malzeme bu yüzeyi ısıtır ve parıltısı bir süre sonra görünür hale gelirdi fakat bu tür hiçbir parıltı görünmez. Böylece artık böylesi tıkız bir nesnenin herhangi bir yüzeye sahip olmadığına ilişkin dolaysız bir kanıt mevcuttur ve aslında bir kara delik olduğu epeyce ikna edici biçimde çıkarsanabilir.[19]

Tüm bunlar, kütlesi güneşin yalnızca birkaç katı olan "yıldız gibi" kara deliklerle ilgilidir. Ayrıca çok daha büyük kara deliklere ilişkin etkileyici bazı kanıtlar da söz konusudur. Galaksilerin çoğu, belki de hepsi, merkez-

[19] Güncel kanıt için *bkz.* Narayan, 2003.

(a) (b)

Şekil 27.12 Üyelerinden biri (minik) bir kara delik olan çifte yıldız sistemleri. (a) Kara delik tarafından büyük yıldızdan sürüklenen madde, içe doğru azar azar sarmal hareketi yapıp malzeme deliğe gerçekten girmeden önce X–ışınları yayılana kadar ısınmaya devam ederek, onun etrafında bir büyüme diski oluşturur. (b) Bazı durumlarda büyüme diskleri olmaz ve malzeme basit biçimde "dosdoğru içeri" düşer. Çekici tıkız nesne hayal edilebilir bir yüzeye sahip olsaydı, içe düşen malzeme onu ısıtır fakat bir kara deliğin varlığını doğrular biçimde herhangi bir parıltı görülmezdi.

lerinde, oldukça ebatlı kara deliklere sahip görünür. Özelde Samanyolu galaksimizin merkezinde $3\times10\ M_{\odot}$ kütleli iri bir kara deliğin olduğu görülür ve onun etrafında dönen yıldızların gerçek hareketleri, bu kara delik tablosuyla tam anlamıyla uyumlu olmak üzere, ayrıntılı biçimde izlenmektedir.

27.9 Olay ufukları ve uzayzaman tekillikleri

Boş konilerinden bazılarını, uzayzamanın nedensellik özelliklerinin makul şekilde belirgin hale gelmesi gerekecek biçimde, Şekil 27.11'e dahil ettim. En temel özellik kara deliğin, uzayzamanda bir $\mathcal{H}$ 3–yüzeyi olan olay ufkunun varlığıdır. §27.8'de belirtildiği üzere bu, $\mathcal{H}$ bölgesi içinde ortaya çıkan hiçbir sinyalin bölge dışına kaçamaması özelliğine sahiptir. Bu, konilerin, kendilerini $\mathcal{H}$'ye tanjant olacak biçimde bulacağı şekilde içe doğru eğilme etkisi olarak görülebilir. $\mathcal{H}$'yi içten dışa kesen herhangi bir dünya çizgisi konilerin tanımladığı nedenselliği (§ 17.7) ihlal etmek zorundadır. Küteleçekimle ilgili çökmenin, J. Robert Oppenheimer ve Hartland Snyder, 1939, tarafından çalışılan orijinal durum olup içe düşen maddeye dışsal olan bölgeyi tanımlamak üzere Schwarzschild geometrisini işe koşan küresel olarak tümüyle simetrik durumu gösterdim.

$\mathcal{H}$ ufku tuhaf özelliklere sahip olsa da oradaki yerel geometri başka bir yerdekinden belirgin biçimde farklı değildir. Üstte belirtildiği gibi uzay gemisinde bulunan bir gözlemci ufuk dışarıdan içeriye geçilirken özel hiçbir olay hissetmez. Yine de oldukça tehlikeli yolculuğa girişilir girişilmez geri dönüş yoktur. Boş konilerin uçları kaçış olmayacak biçimdedir ve

gözlemci merkezdeki ($r = 0$) uzayzaman tekilliğinde sonsuza ıraksayan çabucak artan gelgit etkileriyle karşılaşır (uzayzaman eğriliği; *bkz.* §17.5 ve §19.6). Bu özellikler küresel simetri durumuna özgü değil fakat oldukça geneldir. Aslında bize tekilliklerin, belirli bir "geri dönüş yok noktası"nı geçen kütleçekimle ilgili çökmeden kaçınamayacağını söyleyen oldukça geniş kapsamlı kuramlar söz konusudur.[20] İlgili bazı konular biraz daha ayrıntılı olarak §28.5'te tartışılacak.

Güneş kütlesinin birkaç katına sahip bir kara delikle ilgili olarak, ufka ulaşmadan çok önce bile gelgit etkisi bir insanı öldürmeye kolayca yeter fakat galaksi merkezlerinde bulunduklarına inanılan $10^6\ M_\odot$ ya da daha fazla kütleli büyük kara delikler için ufuk geçilirken (ufuk birkaç milyon km genişliğinde olmak üzere) gelgit etkisinden kaynaklanan belirli herhangi bir sorun söz konusu olmaz. Aslında kendi galaksimizle ilgili olarak, merkezi kara deliğinin ufkundaki eğrilik burada, dünya yüzeyindeki, farkında bile olmadığımız uzayzaman eğriliğinin yalnızca yirmi katı kadardır. Yine de gözlemcinin merkezdeki tekillik içine acımasız biçimde sürüklenişi, sonrasında gelgit etkilerinin çok çabuk biçimde sonsuza çıkıp gözlemciyi bir dakikadan az zamanda tümüyle yok etmesine neden olur. Aslında gelgit kuvvetlerinin ani bindirmesi yoluyla yok olma, bir kara deliğin merkezinden içeri doğru batan fiziki herhangi bir maddeyi bekleyen şeydir. $10\ M_\odot$'lik çöken yıldızımızın malzemesine ilişkin kadere olan ilgimizi anımsayın. Malzemenin kendilerinden oluştuğu tekil parçacıklar bile gelgit kuvvetleriyle çabucak parçalanacak kadar şiddetli biçimde karşılaşacak; neye olduğunu kimse bilmiyor!

En azından, bil*di*ğimiz şey, Einstein'ın klasik uzayzaman tablosu korunduğu sürece, Einstein denklemi uyarınca (negatif olmayan enerji yoğunlukları ve bazı başkaca hafif ve "makul" varsayımlarla birlikte) davranıldığında delik içinde bir uzayzaman tekilliğiyle karşılaşılır.[21] Beklenti, Einstein denkleminin bize, bu tekilliğin delikteki herhangi bir madde ta-

[20] "Kapana kısılmış yüzey" olarak bilinen şeyin meydana gelmesi böylesi bir "geri dönüş yok noktası"nın faydalı bir nitelemesidir. Kapana kısılmış bir yüzey, $\mathcal{S}$'ye olan sıfır normallerinin her iki ailesinin de geleceğe *ıraksama*sı özelliğine sahip uzaysal tıkız bir $\mathcal{S}$ 2–yüzeyidir. (Daha "günlük" terimlerle bu, $\mathcal{S}$'de bir ışık parlaması meydana geldiğinde parlamanın giden ve gelen kısımlarının küçülmeye başlayacak olması anlamına gelir.) Bir kara deliğin $\mathcal{H}$ ufku içinde kapana kısılmış yüzeyler bulmayı bekleriz. Kapana kısılmış yüzey kriterinin üstünlüğü herhangi bir simetri varsayımına dayanmamasından ve küçük geometrik karışıklıklar altında "kararlı" olmasından kaynaklanır. Kapana kısılmış yüzey bir kez oluştuğunda (Einstein kuramında nedensellik ve enerji pozitifliğiyle ilgili belirli çok zayıf ve makul koşullar varsayarak) tekillikler kaçınılmazdır. Benzer sonuçlar kozmolojik Büyük Patlama tekilliklerinde de geçerlidir. *Bkz.* Penrose, 1965b; Hawking ve Penrose, 1970.

[21] *Bkz.* Penrose, 1965b; Hawking ve Penrose, 1970. Wald, 1984, bu teoremleri pedagojik bir düzen içinde yineler.

rafından önlenemeyeceğini ve "gelgit kuvvetleri"nin (diğer bir deyişle Weyl kuvvetleri; *bkz.* §19.7), genel durumda yüksek olasılıkla çılgın biçimde sözde salınımlı bir tarzda sonsuza ıraksayacağını söylemesidir.[22] Gerçekte, klasik kuramın bu beklentilerinin kendisi uyarınca değişmek zorunda olacağı *kuantum kütleçekim* (ya da uygun terim her neyse) diyarına girilmesi kaçınılmaz görünür. Doğru "kuantum kütleçekimsel" kuramın ne olduğunu henüz bilmiyoruz fakat bu kara delik değerlendirmeleri bize önemli bir girdi sağlar ve bu girdi bizi doğru "kuantum kütleçekim"le ilgili arayışımızda uygun yönlere yönlendirmelidir. Bu konular bizim için sonraki bölümlerde, özellikle 30, 31 ve 32. bölümlerde önemli olacak.

Genellikle kütleçekimle ilgili çökmeye ilişkin uzayzaman tekilliklerinin zorunlu biçimde her zaman bir olay ufku içinde bulunacağına inanılır, böylece bu tür bir tekillikteki olağandışı fiziki etkiler ne olursa olsun bunlar herhangi dışsal bir gözlemcinin bakışından gizlenecektir. Bununla birlikte bu, genel görelilikle ilgili matematiksel biçimde oluşturulmuş bir özellik değildir. Tekilliklerin her zaman böylesine gizli olacağına ilişkin varsayım *kozmik sansür* olarak adlandırılır.[23] Bu durum §28.8'de daha ayrıntılı biçimde tartışılacak.

Öte taraftan, kütleçekimle ilgili çökmeden kaynaklanan olağandışı etkiler bulmak üzere tekillik kadar uzağa gitmek zorunda değiliz. Evrende görülebilir bazı aşırı şiddetli süreçler mevcuttur. Örneğin, fevkalade parlak *kuasarlar*ın galaksi merkezlerindeki kara deliklerin dönmeleri yoluyla güçlendirildiğine inanılır. Dışarı (açıktır ki dönme ekseni boyunca) atılan gerçek malzeme deliğin dışından gelmesine rağmen (§30.7) buradaki elektrik santrali, kara deliğin dönmesidir. Küçük bir bölgeden gelse de (yaklaşık Güneş Sistemi boyutunda), bazı kuasarlar tarafından yayılan enerji tüm galaksiyi 10^2 ya da 10^3 ya da daha fazlalık bir çarpan kadar gölgede bırakabilir! Muazzam uzaklıklardan görülebilirler ve kozmoloji için önemli gözlem araçlarıdır. Ayrıca kara delikler de, belki de çarpışan kara delik çiftleri içerdiğine inanılan güçlü γ ışını kaynakları mevcuttur.[24]

27.10 Kara delik entropisi

Yalıtık, durağan ("ölü") kara deliklerin "daha güvenli" dış bölgelerini değerlendirmeye geri dönelim. Böylesi bir nesneye atanması gereken ent-

---

[22] *Bkz.* Penrose, 1969, 1998; Belinskii vd., 1970.

[23] *Bkz.* Penrose, 1969, 1998.

[24] Bu konularla ilgili en güncel bakış için *bkz.* Reeves vd., 2002 ve Cheng ve Wang, 1999; çarpışma kuramıyla ilgili *bkz.* Hansen ve Murali, 1998.

ropinin ne kadar olağanüstü biçimde büyük olduğunu göreceğiz. İlk olarak, başlangıçta –olasılıkla sarmal hareketi yapan ve ters çevrilemez bir felaket biçimindeki– asimetrik bir çökme nedeniyle karışık düzensizliklere sahip olabilecek genel kara deliklerin yine de çabucak (dışsal uzayzaman geometrileri söz konusu olduğu sürece) dikkat çekici derecede basit ve zarif geometrik biçimlere bürüneceğine ilişkin zorlayıcı kanıt sunan matematiksel teoremlerin[25] bulunması gerçeğini not etmeliyiz. Bu, *Kerr metriği*yle[26] açıklanır ve yalnızca, m ve a biçiminde işaretlenmiş fiziki/geometrik iki parametre (gerçel sayılar) tarafından nitelenir.[27] Burada m kara deliğin toplam kütlesini ve $a \times m$ toplam açısal momentumu ($G = c = 1$ olan birimlerde) tanımlar. Nobel Ödüllü Subrahmanyan Chandrasekhar'ın yazdığı gibi:

Doğadaki kara delikler evrende bulunan en mükemmel makroskopik nesnelerdir: oluşumlarındaki biricik elemanlar bizim uzay ve zaman kavramlarımızdır. Ayrıca genel görelilik kuramı, açıklanmalarıyla ilgili olarak yalnızca tek bir eşsiz çözümler kümesi sunduğundan aynı zamanda en basit nesnelerdir de.[28]

Bir kara deliğin, kendisini yalnızca on parametreyle (bunlar a, m, spin ekseninin yönü, kütle merkezinin konumu ve ona ait 3–hız olmak üzere) açıklanabilir tekil bir düzenlemeye dönüştüren acımasız doğası ikinci yasanın güçlü bir ortaya konuşudur. Bu on parametre sonuç durumunun uygun bir makroskopik nitelenişi için gerekli olan her şeydir.[29] Bir kara delik ısıl dengedeki sıradan maddeye benzemese de onunla, gözle görülemez biçimdeki ayrık durumların çok az sayıda parametre tarafından açıklanabilen bir şeye yol açması kilit özelliğini paylaşır. Bu nedenle aslında ilgili kalın taneli kutu faz uzayı muazzamdır ve bunun sonucu olarak kara delikler muazzam entropilere sahip olur.

Aslında kara delik entropisi dikkat çekici bir geometrik yoruma sahiptir: o, deliğin ufuk alanıyla doğru orantılıdır! İyi tanımlı bir entropi aslında, A kara delik ufkunun yüzey alanı olmak ve dilerseniz BH Bekenstein–

---

[25] *Bkz.* Israel, 1967.

[26] *Bkz.* Kerr, 1963; yüklü durumda Newmwn vd., 1965. Wald, 1984, pedagojik bir sunuma sahiptir.

[27] Bu bölümün başında değinildiği üzere Kepler'in elipsleri gibi, Kerr metriği, bizler, oldukça basit geometrik düzenlemelerin esasen dinamik yasalardan kaynaklanmasına ilişkin iyi kaderle kutsanmış olmak üzere, o istisnai durumların bir başkasını sunar.

[28] *Bkz.* Chandrasekhar, 1983, s. 1.

[29] Aslında, §27.9'da göreceğimiz üzere, toplam elektrik yükü, bu korunan bir nicelik olmak üzere, *bkz.* §19.3, tanımlayan başka bir parametre daha söz konusudur. Bununla birlikte gerçekçi astrofiziki kara delikler için, m ve a'ya kıyasla küçük olarak bu, kara deliğin kendini elektriksel olarak yüksüzleştirmeye yönelik kuvvetli eğilimi nedeniyle göz ardı edilebilir.

Hawking ya da kara delik yerine geçecek şekilde kabul edilebilmek üzere, ünlü

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{kc^3 A}{4G\hbar}$$

Bekenstein–Hawking denklemi uyarınca bir kara deliğe atfedilebilir. Kütleçekim sabitinin yanı sıra bu entropinin "kuantum kütleçekimsel" bir etki olduğunu belirten Planck sabitinin belirmesine de dikkat edin. Aslında burası, hem kuantum mekaniğinin temel sabiti ($\hbar$ Dirac biçiminde yazılmış Planck sabiti) hem de genel göreliliğinkinin (Newton'ın G kütleçekim sabiti) aynı denklemde bir arada görünmelerine rastladığımız ilk yerdir.

Kuantum mekaniği ve genel göreliliğin ikisinin de dahil olduğu temel fizik konularıyla ilgili olarak bu sabitlerin *birim* olarak kabul edileceği birimleri benimsemek çoğu kez uygundur. §17.8 ve §19.2, 6, 7'de (ve örneğin 24. bölüm gibi başka yerlerde) c ışık hızının birim olarak kabul edildiği birimlerin benimsenmesinin çoğunlukla son derece uygun olduğunu zaten görmüştük. Tutarlılığı kaybetmeksizin bu uzlaşıyı $\hbar$ ve G'nin de birim olacakları şekilde genişletebiliriz. Bu, zaman, uzay, kütle ve elektrik yükü birimlerinin tümünün artık *Planck* birimleri (ya da *doğal* birimler ya da *mutlak* birimler) olarak bilinen şeyleri sağlayarak *sabitlen*diğiyle ilgili dikkat çekici imaya sahiptir. Dahası k Boltzmann sabitini de birim olarak kabul edebiliriz (*bkz.* §27.3);

$$G = c = \hbar = k = 1.$$

Bu durumda sıcaklık birimi de mutlak bir şey haline gelir.

Geleneksel birimlerimizi Planck birimleri biçiminde ifade etmeyi denediğimizde de görülebileceği üzere bunlar günlük kullanımdaki pratik birimlerden bir hayli uzaktır:

$$\begin{aligned}
&\text{gram} = 4{,}7\times10^{4},\\
&\text{metre} = 6{,}3\times10^{34},\\
&\text{saniye} = 1{,}9\times10^{43},\\
&\text{derece Kelvin} = 4\times10^{-33}.
\end{aligned}$$

Bu birimlerle proton üzerindeki (ya da elektron üzerindeki *eksi*) yük kabaca $e = \frac{1}{\sqrt{137}}$ ve daha kesin biçimde

$$e = 0{,}0854245\ldots$$

olarak ortaya çıkar.[30] Ayrıca bu bağıntıları diğer türlü de ifade edebiliriz:

[30] Elbette bu "e"yi doğal logaritma tabanı olan e = 2,7182818285... ile karıştırmamak için dikkatli olunmalıdır, bkz §5.3.

Planck kütlesi = $2{,}1\times10^{-5}$g,
Planck uzunluğu = $1{,}6\times10^{-35}$m,
Planck zamanı = $5{,}3\times10^{-44}$s,
Planck sıcaklığı = $2{,}5\times10^{32}$K,
Planck yükü = 11,7 proton yükü.

§31.1'de Planck birimleriyle ilgili daha fazla şey göreceğiz.

Kara delik entropisiyle ilgili Bekenstein–Hawking denklemine dönerek şimdi, Planck birimleriyle, A yüzey alanına sahip bir kara deliğin S_{BH} basit olarak

$$S_{BH} = \frac{1}{4}A$$

olur. Kerr çözümü durumunda açık olarak (genel birimlerle)

$$A = \frac{8\pi G^2}{c^4} m(m + \sqrt{m^2 - a^2})$$

$$S_{BH} = \frac{2\pi Gk}{c\hbar} m(m + \sqrt{m^2 - a^2})$$

ifadelerini buluruz. Kayda değer Bekenstein–Hawking denklemi ardında yatan nedenlerden bazılarına §30.4'te geleceğiz.

Bir kara delik içinde gerçekleşebilecek olağandışı entropi değerleriyle ilgili bir miktar fikir elde etmek üzere ilk olarak 1960'larda evren entropisine yapılan tüm katkıların en büyüğü olan 2,7K mikrodalga ışınımındaki entropiyi sağlamak üzere düşünülen şeyi değerlendirelim: Büyük Patlama "parlaması"na ilişkin kalıntılar. Bu entropi doğal birimlerle yaklaşık baryon başına 10^8 ya da 10^9'dur. (Kabaca belirtirsek bu, Büyük Patlamadan baryon başına kalan foton sayısıdır.) Kesinlikle son derece büyük olan bu sayıyı evrendeki kara deliklerden kaynaklanan entropiyle kıyaslayalım. Astronomlar ne kaç adet kara delik bulunduğu ne de tümünün ne ebatlarda olabileceğiyle ilgili tam anlamıyla açık bir fikre sahipler fakat Samanyolu galaksimizin merkezinde makul biçimde tipik olan yaklaşık $3\times10^6 M_\odot$ kütleli bir kara deliğe ilişkin oldukça sağlıklı kanıt söz konusudur. Bazı galaksiler çok daha büyük kara deliklere sahiptir ve bunların, genel olarak entropi değerlerine kolaylıkla hükmedecek olan şey büyük kara delikler olduğundan,[27.14] daha küçüklerine sahip olabilecek çok sayıdaki diğer galaksileri rahatça dengelemeleri gerekir. Aşağı yukarı bir tahmin olarak (olasılıkla çok tutucu) galaksimizin tipik olduğunu kabul edelim, böylece

[27.14] Niçin olduğunu görebiliyor musunuz?

baryon başına, mikrodalga ardalanına ilişkin 10^8 ya da 10^9 sayılarını gölgede bırakan yaklaşık 10^{21}'lik bir entropi buluruz. Dahası sayı şu anda ne olursa olsun gelecekte acımasız ve hayret verici biçimde büyüyecektir.

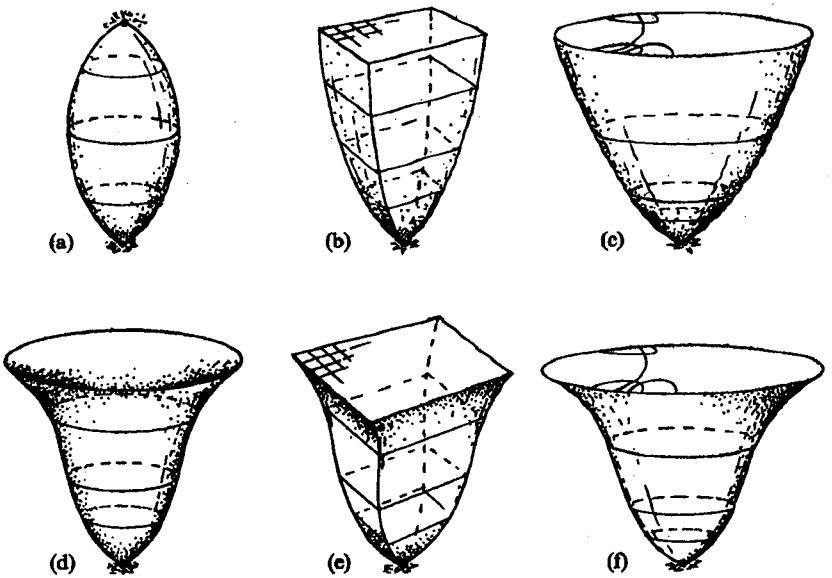
27.11 Kozmoloji

Evrenimizce potansiyel olarak erişilebilir olan kesinlikle muazzam entropi sayısıyla ilgili, evrenimizin şu an aslında ne kadar "özel" olduğu ve "özellikle" Büyük Patlama zamanında ne kadar "özel" olmuş olması gerektiğiyle ilgili bir hissiyat elde edebileceğimiz şekilde, bir tahminde bulunmaya çalışmadan önce kozmoloji hakkında bir şey bilmemiz gerekecek. Büyük Patlamayı temsil eden $\mathcal{B}$ kutusu faz uzayının boyutunu tahmin etmek üzere kozmolojik kanıt kullanmaya çalışacağız ve bunu tüm $\mathcal{P}_U$ faz uzayının boyutu ve ayrıca evreni şimdiki haliyle temsil eden kalın taneli $\mathcal{N}$ kutusunun faz uzayı hacmiyle karşılaştıracağız.

Kendisinden (esasen) üç adet bulunan, kozmolojinin *standart modelleri* olarak adlandırılan şeyleri kısaca açıklayarak başlayayım. §27.7'den anımsayacağımız üzere tartışma, Einstein denkleminin uygun çözümlerini, galaksilerin tümüyle düzenli büyük ölçekli (bazen "basınçsız bir akışkan" ya da "toz" olarak adlandırılan) bir dağılımına yaklaşıklık tahmini yapmakta kullanılabilecek bir malzeme kaynağıyla birlikte ilk olarak 1922'de bulan Rus Alaxandr Friedmann'a dek gider. Friedmann'ın çalıştığı genel sınıf kozmolojik modelleri artık, kendilerinin sonraki katkı, açıklama ve genellemeleri nedeniyle genel olarak Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) modelleri olarak anılır.

Temelde bir FLRW modeli, kendisinin tümüyle *uzamsal olarak türdeş* ve *izotropik* olması gerçeğince karakterize olur. Kabaca söylersek "izotropik", evrenin tüm yönlerde aynı görünmesi anlamına gelir, böylece o dönel bir O(3) simetri grubuna sahiptir. Ayrıca "uzamsal olarak türdeş", evrenin, uzayın her noktasında, her bir anda aynı görünmesi anlamına gelir; buradan hareketle bir uzaysal 3–yüzey ailesinin, bunlar (toplamda 6–boyutlu bir simetri grubu veren)[27.15] "uzay"ın sabit t "zaman"ındaki $\mathcal{T}_t$ 3–yüzeyleri olmak üzere, her elemanı üzerinde *geçişken* (§18.2) olan simetri grubu bulunur. Bu bir çift varsayım çok büyük ölçekteki madde dağılımına ilişkin gözlemler ve mikrodalga ardalanının doğasıyla iyi bir uyum gösterir. Uzamsal izotropinin dolaysız biçimde son derece iyi bir yaklaşıklık tahmini olduğu (çok uzak kaynakların gözlemlenmesi ve öncelikli olarak 2,7K

[27.15] Neden 6–boyutlu?



Şekil 27.13 Uzamsal olarak türdeş ve izotropik Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) kozmolojik modelleri. Zaman yukarı doğru gösterilir ve her model bir Büyük Patlama'yla başlar. Her biri t zamanındaki "uzay"ı veren, kesişmeyen uzaysal türdeş 1–parametreli bir $\mathcal{T}_t$ 3–yüzeyler ailesiyle doldurulmuştur. Friedmann modellerinde madde basmçsız bir akışkan ("toz") olarak ele alınır. Üç durum gösteriliyor: (a) $\mathcal{T}_t$ S^3 (diyagramlarda bir S^1 çevrel çemberi olarak belirtilen) 3–küreleri olmak üzere modelin sonuç olarak bir Büyük Çöküşe ilerlediği $K > 0$ durumu; ya da (b) tepedeki 2–düzlem olarak gösterilmiş Öklitçi $\mathbb{E}^3$ 3–uzayları olarak $\mathcal{T}_t$; ya da (c) (tepedeki konformal bir gösterimle belirtilen) hiperbolik 3–uzaylar olarak $\mathcal{T}_t$. (d), (e) ve (f)'de sırasıyla (a), (b) ve (c)'ye nihai üstel genişlemeyle birlikte pozitif bir kozmolojik Λ sabiti eşlik eder. (d)'de Λ'nın, çökme fazım önlemek üzere yeteri kadar büyük olduğu varsayılır.

ışınımından) görülür. Dahası evren türdeş ol*ma*saydı yalnızca çok belirli yerlerden izotropik olarak görünebilirdi,[27.16] böylece evrenin bize, aynı zamanda homojen olmadıkça, izotropik biçimde *görünmesi* için oldukça ayrıcalıklı bir konumda bulunmak zorunda oluruz. Elbette tekil galaksileri, galaksi kümelerini ve süper galaksileri yalnızca belirli yönlerde gördüğümüz için gözleme dayalı izotropi mutlak değildir. Örneğin, yalnızca bizim galaksimizi değil fakat komşu birkaç galaksi kümesini de çeker görünen, "Büyük Çekici" olarak anılan gibi kafa karıştırıcı ölçüde, her zaman görünür olmayan eşitsiz malzeme dağılımı söz konusudur. Bununla birlikte bu, ne kadar uzağa bakarsak belirgin uzamsal düzenlilikten sapmanın

[27.16] Birleşik bir 3–uzayın iki ayrık nokta dolayında türdeş olmaksızın niçin izotropik olamayacağını göstermek üzere genel bir argüman verin.

orantılı biçimde o kadar küçülmesi durumu gibi görünür. Evrenin bizim için erişilebilir olan en uzak bölgeleriyle ilgili sahip olduğumuz en iyi bilgi 2,7K kara cisim ardalanı ışınımından gelir. COBE, BOOMERANG ve WMAP verisi vb bize, o ölçekte çok küçük sapmalar, 10^5'te birkaç parça kadar, izotropinin iyi desteklendiğini söyler.[31]

Aslında türdeş ve izotropik kozmolojiler, FLRW modelleri, gerçek evrenin yapısına, en azından 10^{11} civarında galaksi içerip yaklaşık 10^{80} dolayında baryon barındıran genişlikteki gözlemlenebilir evrenin sınırları dışına, yapılan mükemmel yaklaşıklık tahminleri olarak görünür. (Bu "gözlemlenebilir evren" kavramının ne anlama geldiğini birazdan göreceğiz.) Uzamsal izotropi ve türdeşlik, 3–boyutlu "sabit zaman" $\mathcal{T}_t$ uzamsal kesitlerinin, her $\mathcal{T}_t$ 3–geometrisi $\mathcal{M}$'ye ait türdeşlik/izotropi simetri grubunu paylaşmak üzere, tüm $\mathcal{M}$ uzayzamanını (birbirlerini kesmeden) doldurduğunu ima eder;[32] *bkz.* Şekil 27.13. 3–geometriyle ilgili (esasen) üç farklı olasılık (sabit) uzamsal eğriliğin pozitif ($K > 0$), sıfır ($K = 0$) ya da negatif ($K < 0$) olmasına bağlıdır. Kozmoloji literatüründe, eğrilik yarıçaplarını $K > 0$ ve $K < 0$ olarak anılan $K \neq 0$ durumlarında basit olarak sırasıyla $K = 1$ ve $K = -1$ biçiminde normalleştirmek olağandır. Bununla birlikte bunu burada yapmayacağım ve sonraki tartışmalarda açıklık için ilgili $K > 0$ ve $K < 0$ açıklamalarını tercih edeceğim.

Şekil 27.13a, b, c'de uzamsal eğriliğe ilişkin farklı alternatif seçimlerle ilgili, Friedmann'ın Einstein denklemine ilişkin orijinal analizi uyarınca evrenin zaman evrimini göstermeye çalıştım. Her durumda evren, uzayzaman eğriliklerinin sonsuz hale geldiği, Büyük Patlama denen, bir *tekillik*ten başlayıp aniden dışa doğru genişler. Sonuçtaki davranış kritik biçimde K'nin değerine bağlıdır. $K > 0$'sa (Şekil 27.13a) genişleme sonuç olarak ters döner ve evren, bütünlüklü Friedmann modelindeki başlangıç Büyük Patlamasının kesin bir zaman tersi olup sıklıkla *Büyük Çöküş* olarak anılan bir tekilliğe geri döner. $K = 0$'sa (Şekil 27.13b) genişleme ancak olduğu haliyle kalmaya yeter ve bir çökme fazı meydana gelmez. $K < 0$'sa (Şekil 27.13c) genişleme sonuç olarak sabit bir orana ulaştığından herhangi bir çökme görünümü söz konusu değildir. (Burada, §27.8'de tartışılmış olan yerden yukarı doğru fırlatılan taşla bir benzerlik mevcuttur. Taşın başlangıç hızı kaçma hızından küçükse sonuç olarak o, Friedmann'ın $K > 0$ için olan evrenindeki gibi yere geri düşer; kaçma hızına eşitse, $K = 0$'daki gibi, geri düşmeyi beceremez; kaçma hızından büyükse devam eder ve $K < 0$'daki gibi, yavaşlamayan bir sınır hıza yaklaşır.)

---

[31] COBE kanıtı için *bkz.* Smoot vd., 1991; WMAP kanıtı için *bkz.* Spergel vd., 2003.

[32] Liddle, 1999, kozmolojiye mükemmel bir giriştir. Wald, 1984, konuyu daha gelişkin bir düzeyde kapsar.

Orijinal Friedmann çalışması kozmolojik bir Λ sabiti içermez fakat kozmolojinin daha sonraki sistematik tartışmalarının neredeyse tümünde,[33] Einstein'ın 1917'de ileri sürdüğü kozmolojik bir terim olan Λg_{ab}'ye, kendisinin $\Lambda = 0$ olarak kabul etmekle ilgili seçimine karşın (1929'dan sonra, *bkz.* §19.7), izin verildi. Bunun hayırlı olduğu açığa çıktı çünkü gözleme dayalı farklı türdeki pek çok güncel kanıt, evrenimizin davranışında aslında pozitif kozmolojik bir sabit ($\Lambda > 0$) bulunduğunu açık olarak belirtmeye başladı. Bu konuları §28.10'da tartışmaya devam edeceğim fakat şimdilik okuru içlerinde Friedmann denklemlerine (yeteri kadar büyük) pozitif bir Λ'nın eşlik ettiği Şekil 27.13a, b, c'nin benzerlerini sunan Şekil 27.13d, e, f'ye yönlendirmek isterim. Kozmologlar arasındaki günümüz gözlem ve fikir dengesi uyarınca bu modellerden birisi gerçek evrenimizin geçmişine ilişkin, en azından evren yalnızca, kabaca $1{,}5\times10^{10}$ olan şimdiki yaşının yaklaşık elli binde biri olan $\sim3\times10^{5}$ yaşında olduğu zamanki *ayrıştırma* zamanından itibaren, ayrıştırma mikrodalga ardalanını gözlemlediğimizde etkin biçimde "geriye baktığımız" zaman olmak üzere, doğru bir açıklama gibi görünür.

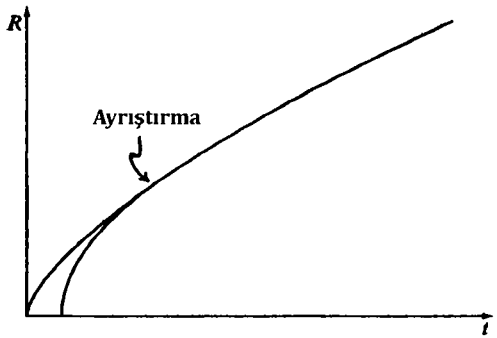
Ayrıştırmadan önce evren, temel olarak "ışınım baskın" ve ayrıştırma sonrası "madde baskın" olmuş olmalıdır. Friedmann'ın "toz" modelinin ışınım baskın fazda uygun olmasını beklemeyiz; daha uygun olanı Tolman'ın (1934) ışınım dolu modeli olabilir. Bu, resimlerimizde büyük bir farklılık yaratmaz. Evrenin ömrünü Büyük Patlamadan ayrıştırmaya, Şekil 27.14'te belirttiğim üzere "Friedmann" öngörüsü[27.17] olmuş olan şeyden yaklaşık $\frac{3}{4}$'lük bir katsayı kadar kısaltır. Şişme kozmolojisi yanlıları, evrimde çok daha büyük bir değişim, diğer bir deyişle evrenin ölçüsünü belki de 10^{60} gibi bir çarpanla arttıran üstel bir genişleme önerirler. Yine de bu, evren henüz 10^{-32} saniyelikken bir nihayete ermek durumundadır, bu nedenle Şekil 27.13 ya da 27.14'ün görünümünde herhangi bir farklılık yaratmaz! Yine de diğer bakımlardaki imalar, şişme biçimli tablo doğruysa muazzam olabilir. Şişme kozmolojisini §§28.4, 5'te ele alacağım. Ne olursa olsun, "kozmolojinin standart modeli" olarak adlandırılması gereken şeye şişmeyi dahil etmemenin mantıklı olduğunu düşünüyorum ve burada öyle yapmayacağım.[34]

---

[33] *Bkz.* Bondi, 1961; Rindler, 2001; Dodelson, 2003.

[27.17] Bir Friedmanncı "toz" modeline ilişkin davranışın t zamanının küçük değerleri için $t = AR^{3/2}$ biçiminde ve $R = R(t)$ evrenin "yarıçap"mın bir ölçüsü, A ve B sabitler olmak üzere, Tolman "ışınımı"na ilişkin davranışın $t = BR^2$ olduğunu varsayarak bu 3/4 çarpanını türetebilecek misiniz bakın. *İpucu*: Eğrilere olan tanjantlar eşleşmek zorunda mıdır?

[34] $K = 0$ ve $\Lambda > 0$'la birlikte şişmenin de birleştirildiği durumu açıklamak üzere "uyum modeli" terimi ortaya çıktı. *Bkz.* Blanchard vd., 2003; Bahcall vd., 1999. Bunun güncel konumuyla ilgili değerlendirmem için *bkz.* §28.10.



Şekil 27.14 Evren, yaklaşık 300.000 yaşındayken meydana gelen "ayrıştırma"dan önce "ışınım baskın"dı ve Friedmann'ın "toz" yaklaşıklık tahmini geçerli değildi. Onun yerine içteki eğriyle belirtilen bir biçimde daha seri Tolman genişlemesine sahibiz.

Şekil 27.13d, e, f'deki üç modelden hangisi gerçek evren için uygun olmaya yakındır? Bu konuyu §28.10'da tartışacağım. Şimdilik bunlardan herhangi birinin temelde doğru ola*bil*eceğini düşünelim. Bu farklı uzamsal geometrileri biraz daha yakından inceleyelim.

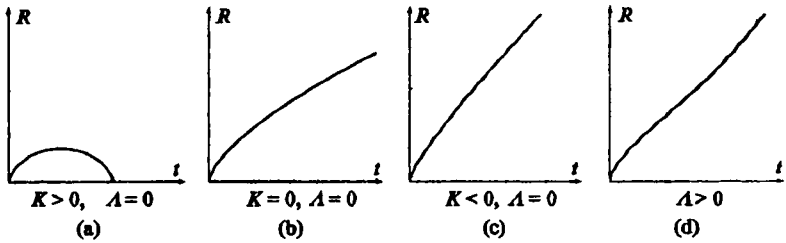
$K > 0$ durumu normalde 3–küre olarak gösterilir. Bununla birlikte ayrıca, S^3'e ilişkin antipodal noktaları tanımlayarak elde edilen $\mathbb{RP}^3$ izdüşümsel uzayı da söz konusudur (*bkz.* §§15.4–6); pratikte ikisinin gözleme dayalı olarak ayırt edilebilir olduğunu düşünmek güçtür. S^3'ün ayrı noktaları arasında *mercek uzayları* olarak adlandırılan şeyi veren başkaca tanımlamalar da bulunur fakat bunların hiçbiri evrensel olarak izotropik değildir.[35] $K = 0$ (izotropik) durumu olağan Öklitçi 3–uzaydır ve benzer biçimde $K < 0$, §§2.4, 7 ve §18.4'te çalıştığımız hiperbolik 3–geometriyi verir. M. C. Escher'in $K > 0$, $K = 0$ ve $K < 0$'a ilişkin ilgili uzamsal geometrilerin (2–boyutlu türlerinin) zarif ve yaratıcı gösterimleri için sırasıyla Şekil 2.21a, b ve c'ye bakın. Olağan $K > 0$ durumu, *uzamsal olarak kapalı* anlamına gelen (diğer bir deyişle tıkız bir uzaysal hiper yüzey içeren)[36] bir *kapalı* evren olarak adlandırılır. Kozmologlar $K < 0$'a sıklıkla "açık" durum olarak değinirken teknik olarak ayrıca $K = 0$ durumu da uzamsal olarak açıktır. Buradan hareketle bir miktar kafa karıştırıcı bu terminolojiyi burada kullanmayacağım. Evrensel izotropiden, üstte anılmış olan $K > 0$ mercek uzaylarındaki gibi vazgeçersek böylece $K = 0$ ve $K < 0$ için de (izotropik olmayan) kapalı evren modelleri söz konusu olur.[37]

---

[35] Oldukça özgün bir olasılık eski Yunanların haklı olup, §1.1, evrenin gerçekte bir on iki yüzlü, ya da daha çok bunun yapıştırılmış bir versiyonu, olmasıdır. *Bkz.* Luminet, 2003.

[36] *Hiper yüzey* terimi bir n–manifoldun $(n-1)$–boyutlu bir alt manifolduyla ilgilidir; burada bir $\mathcal{T}_t$.

[37] *Bkz.* Killing, 1893; Wolf, 1974.



Şekil 27.15 Friedmann modellerine ilişkin, öncelikle $\Lambda = 0$'la birlikte, $R = R(t)$ grafikleri: (a) $K > 0$, (b) $K = 0$, (c) $K < 0$ ve sonra (d) $\Lambda > 0$'la birlikte. ((d) durumu $K = 0$ için çizilir fakat diğer durumlar, uzamsal eğrilikle ilişkili olarak Λ'nın yeterince büyük olması koşuluyla, oldukça benzerdir.)

Tüm $\mathcal{M}$ 4–uzayı, gördüğümüz üzere zamanla değişen bütünlüklü bir ölçünün bulunduğu, uzamsal 3–geometriyle ilgili bir zaman evrimi biçiminde açıklanır. Standart tabloda evren başlangıçta bir Büyük Patlamadan çok hızlı biçimde uzaklaşarak genişler fakat patlamanın meydana geldiği ve her şeyin kendisinden uzaklaştığı bir "merkezi nokta" biçiminde düşünülen bu tablo doğru değildir. Uzamsal iki boyut durumundaki daha uygun bir görüntü bir balonun patlatıldığı andaki yüzeyidir. Zaman ilerledikçe yüzeydeki her nokta, her diğer bir noktadan azar azar uzaklaşır ve evren modelinde herhangi bir "merkezi nokta" yoktur. Bu benzetmede yüzey evrenin tümünü temsil etmelidir. Böylece ne balonun merkezi ne de yüzeyde yer almayan herhangi başka bir nokta genişleyen evrenin parçası olarak sayılır.

Bu üç geometriden birine ilişkin metrik biçimi göstermek üzere $d\Sigma^2$ notasyonunu, $K \neq 0$ durumlarında metriği artık *birim* 3–kürenin ya da *birim* hiperbolik uzayınki olacak şekilde normalleştirmek üzere (diğer bir deyişle sırasıyla $K = 1$ ya da $K = -1$ kabul ederiz), kullanalım.[27.18] Tüm uzayzamana ilişkin 4–metrik böylece, t, sabit değerleri tekil $\mathcal{T}_t$'yi belirleyen bir "kozmik zaman" parametresi olmak ve

$$R = R(t)$$

"t zamanında" uzamsal evrenin "boyut"unu veren t zaman parametresine ilişkin bir fonksiyon olmak üzere,

$$ds^2 = dt^2 - R^2 d\Sigma^2$$

[27.18] Bir birim 3–kürenin metriğini $d\Sigma^2 = dr^2 + \sin^2\varphi(d\varphi^2 + \sin^2\theta d\theta^2)$'nin tanımladığını gösterebilir misiniz bakın ve §18.1'deki yöntemleri kullanarak $d\Sigma^2 = dr^2 + \sinh^2\chi(d\chi^2 + \sin^2\theta d\theta^2)$'nin birim hiperbolik uzayı tanımladığını çıkarsayın. *İpucu*: İlk olarak rasgele yarıçaplı bir 3–küre için olan metriği yazın.

biçiminde ifade edilebilir. Böylece her bir $\mathcal{T}_t$ için metrik $R^2 d\Sigma^2$'yle verilir. Şekil 27.15a, b, c'de $R = R(t)$'nin sırasıyla $K = 1, 0, -1$ için grafiğini, $\Lambda = 0$'la birlikte Friedmann'ın orijinal "toz" (basınçsız akışkan)[27.19] durumunda çizdim ve Şekil 27.15d'de her üç K değerine ilişkin eğriler ($K > 0$ durumunda, aslında gözlemlerin işaret ettiği üzere) Λ sonraki çökmeyle başa çıkabilecek kadar büyük olmak koşuluyla) çok benzer olmak üzere pozitif bir Λ'yla ne olacağını gösterdim. Böylece nihai genişleme hızı üsteldir.

27.12 Konformal diyagramlar

"Gözlemlenebilir evren" terimiyle ne kastedildiğini anlamak üzere, içinde tüm uzayzamana ilişkin (sıklıkla 2–boyutlu) bir gösterimin, boş yönlerinin düşeyle 45°'lik açıda çizilecek şekilde sunulduğu ve ayrıca sonsuzun diyagramın sınırı (bir parça) olarak gösterildiği, *konformal diyagram*[38] olarak bilinen şeyi işe koşmak faydalı olur. $\mathcal{I}$ elyazısı harfi genellikle bu "sonsuz" kavramına ilişkin olarak, $\mathcal{I}^+$ dışarı giden ışık ışınları tarafından nihai olarak "ulaşılan" *gelecek* sonsuz (ya da gelecek boş) ve $\mathcal{I}^-$ gelen ışık ışınlarıyla ilgili *geçmiş* sonsuz için kullanılmak üzere, kullanılır ve "skri" biçiminde telaffuz edilir. $\Lambda = 0$'a sahip standart Einstein kuramında normalde *sıfır* 3–yüzeyleri ve $\Lambda > 0$'sa *uzaysal* 3–yüzeyler oldukları ortaya çıkar.[39]

Konformal diyagramlar, ilgilendiğimiz şey bütünsel uzayzaman metriği yerine boş konileri ailesi olmak üzere, uzayzaman yapısının *nedenselliğini* gösterir. Bu, §2.4, §8.2 ve §§18.4, 5'te karşılaştığımız konformal geometrinin (Ω uzayzamandaki pozitif bir skaler olmak üzere, böylece Ω uzaklık ölçüünü konumdan konuma değiştirir, $\boldsymbol{g}$'nin $\Omega^2\boldsymbol{g}$'ye denk olduğu bir eşdeğerlik sınıfı metriğince tanımlanan) Lorentzci versiyonudur. §2.2'de tüm hiperbolik düzlemin, Öklitçi düzlemin sonlu bir bölgesinde konformal biçimde nasıl gösterilebildiğini gördük (Şekiller 2.11, 2.12,

---

[27.19] $K > 0$, $\Lambda = 0$ için Friedmann'ın "toz" çözümü, C bir sabit ve ξ uygun bir parametre olmak üzere $R = C(1 - \cos\xi)$, $t = C(\xi - \sin\xi)$ biçiminde ifade edilebilir. Bunun, bir *sikloide*, yatay bir düz çizgi üzerinde yuvarlanan bir çemberin çapı üzerindeki bir nokta tarafından çizilen eğri, ilişkin denklem olduğunu gösterin. $K > 0$'dan $K < 0$ durumuna §18.1 ve alıştırma [27.16]'da kullanılmış olana benzer bir "hile" kullanarak ve $K = 0$'a, (bir koordinat yeniden ölçeklelendirme içeren) uygun bir sınır kabul etmek yoluyla nasıl gelineceğini görebiliyor musunuz?

[38] Bunlar, Varşova derslerimde, 1962, onlardan yararlanmam nedeniyle bazen "Penrose diyagramları" ya da "Carter–Penrose diyagramları" olarak bilinir; katı konformal bir diyagram kavramı sistematik biçimde Carter, 1966, tarafından sunulmuştur.

[39] *Bkz.* Penrose, 1962; Carter, 1966; Penrose, 1963, 1964, 1965a. Hawking ve Penrose, 1996 diyagramlardan faydalanıp onların yorumlanışlarına ilişkin bazı açıklamalar sunar.

2.13). Bir *konformal uzayzaman diyagramı* fikri temel olarak aynıdır fakat artık konformal olarak gösterilecek olan şey (pozitif belirli) olmayan Lorentzci metriktir. Lorentzci geometrideki yeni kilit özellik, konformal geometriyi boş konilerin kendilerinin tanımlamalarıdır.

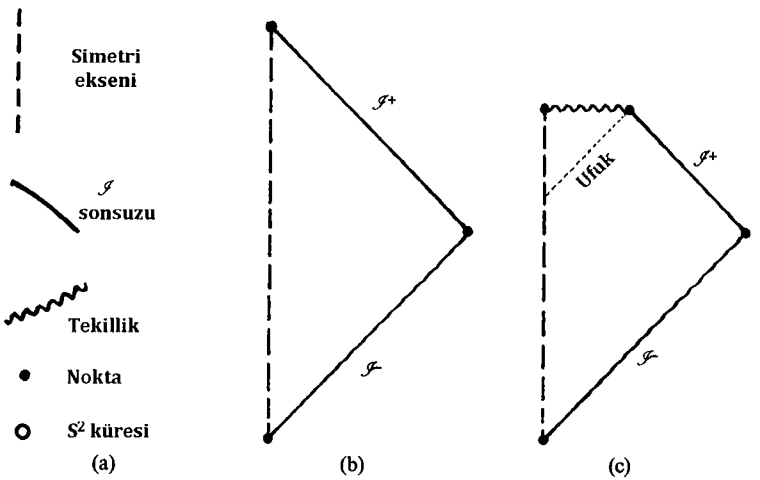
İki boyutta boş koni bir çift boş yönden oluşur ve bu, 2–metriği yerel bir konformal çarpana kadar belirler. Böylesi bir 2–boyutlu gösterimin özellikle değerli olduğu bir durum, tüm 4–uzayda küresel simetrinin bulunduğu durumdur. Böylece bu 4–uzayzamanı, 2–uzaya ait tüm noktaların 4–uzaydaki tüm bir S^2'yi göstereceği şekilde, "etrafta döndürülmüş" bir 2–uzayzaman olarak düşünebiliriz. Böylesi uzayzamanlarla ilgili olarak konformal diyagramlar oldukça kesin hale getirilebilir ve bunun için *katı* konformal diyagram kavramından yararlanacağım. Katı olmayan konformal diyagramlar *şematik* olarak adlandırılacak. Katı bir konformal diyagrama ait *noktalar* aslında tüm S^2 (metrik) kürelerini gösterir. (Sicim kuramı vb'de ele alınabilecek türdeki bir n–boyutlu Lorentzci "uzayzaman" durumunda –*bkz.* §§31.4, 7– bunlar S^{n-2} $(n-2)$–küreler olur.) Diyagram üzerindeki noktaların tekil uzayzaman noktalarını gösterdiği istisnai yerler diyagram sınırında bir *simetri ekseni* tanımlayan o kısımlarda ortaya çıkar. Bunlar kesik çizgilerle gösterilir, bu durumda diyagramı böylesi bir kesik çizgi etrafında döndürülür biçimde düşünmek zorundasınız.[27.20] Sınırın sonsuzu temsil eden kısımları koyu çizgilerle ve tekillikleri temsil eden kısımlar dişli çizgilerle belirtilir. *Bkz.* Şekil 27.16a. Ayrıca konformal diyagramın farklı sınır çizgilerinin buluştuğu belirli köşeler de mevcuttur. Küçük açık çemberlerle, ○, belirtilenler tüm 2–küreleri gösterir biçimde düşünülmeliyken dolu noktalarla, •, belirtilenler en iyi, noktaları (sıfır yarıçaplı küreler) gösterir biçimde düşünülür. Şekil 27.16b Minkowski uzayıyla ve Şekil 27.16c bir Schwarzschild kara deliğine kütleçekime ilişkin çöküşle ilgili (§27.11'de açıklanmış küresel simetrik çöküş) katı konformal diyagramlardır. Şekil 27.17'de Şekil 27.13'ün ilgili kozmolojik modellerini gösterdim.[27.21]

Konformal diyagramlar kullanışlıdır çünkü uzayzamanların nedenselik özelliklerini özellikle belirgin hale getirir. Örneğin Şekil 27.16b'de gös-

[27.20] Şekil 27.16a'nın Minkowski 4–uzayını, tüm Minkowski 2–uzayının ($r \geq 0$'la birlikte $ds^2 = dt^2 - dr^2$ metriği) sağ yarısını alıp bu biçimde düşey eksen etrafında çevirmek yoluyla elde edebilir misiniz görün. 4–uzay metriğini t, r ve küresel kutupsal θ ve ϕ açılarına ilişkin uygun fonksiyonları kullanarak ifade edin (*bkz.* alıştırma [27.18]). Görselleştirme niyetiyle ilgili olarak, döndürmenin artık daha tanıdık bir türde olduğu Minkowski 3–uzayını elde etmeyi deneyin.

[27.21] Şekiller 27.11 ve 27.16b'deki diyagramların nasıl eşleştiğini görebilecek misiniz bakın. Şekiller 27.16 ve 27.17'nin her bir örneğiyle ilgili metrikleri çarparak uygun konformal çarpanlar bulun.

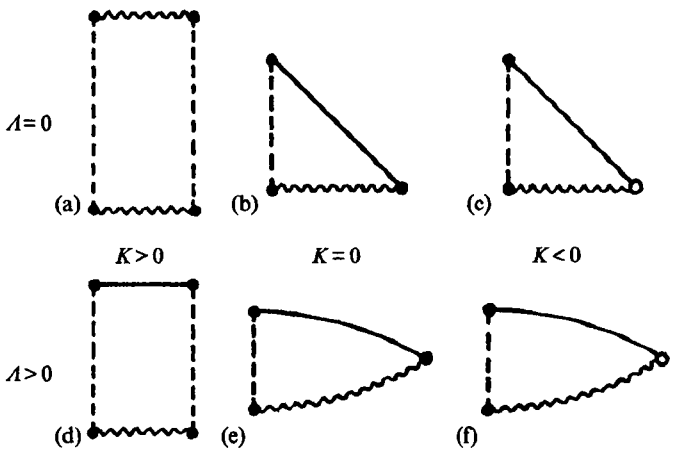
terilmiş olan bir kara deliğe küresel olarak simetrik çökmede, kara deliğin ufkunun 45°'yle durduğuna dikkat edin. Herhangi maddi bir parçacığın dünya çizgisi düşeye 45°'den fazla eğilemez, böylece bir kez onu geçtiğinde ufkun ardındaki iç bölgeden kaçamaz. Dahası, bir kez o bölgenin içinde olunca tekilliğe zorlanır (Şekil 27.18a). Tekillik, Şekil 27.11'in daha geleneksel bakış açısından bir biçimde mantığa aykırı bir gerçek olarak, uzayzamanın iç kısmına uzaysal bir gelecek sınırı olarak görünür. Büyük Patlama tarafından gösterilmiş olan durum bunun, uzayzamana uzaysal bir geçmiş sınırı biçiminde davranarak, zamansal tersine benzeyen bir rol oynar (Şekil 27.18b). Büyük Patlamayı (tekil) bir *nokta* olarak düşünme eğiliminde olduğumuzdan bu da yine bir biçimde mantığa aykırıdır.[40]



Şekil 27.16 Konformal diyagramlar uzayzamanlara ilişkin, genellikle düzlemde bulunan uzayzaman boş çizgilerin düşeye 45°'yle yönlendirilecek şekilde çizildiği ve "sonsuz"un resme sonlu bir sınır biçiminde gösterilme eğiliminde olduğu ve fiziki metrikten diyagramınkine olan konformal çarpanın sınır üzerinde *sıfır*a gittiği düzlem gösterimleridir. (a) Bir *katı* konformal diyagramda (*şematiğin* aksine) diyagram içindeki her nokta tam bir 2–küreyi gösterir; fakat (kesik bir çizgiyle gösterilen) bir simetri ekseni üzerinde bu 2–küre, • ile işaretli bir köşede yaptığı gibi, bir noktaya büzüşür; bununla birlikte o ile işaretli bir köşede sınır noktası konformal olarak bir 2–küre biçiminde kalır. Sonsuz (genelde $\mathscr{I}$'yla gösterilip "skri" biçiminde telaffuz edilir) koyu bir sınır çizgisiyle belirtilir; tekillikler dişli sınır çizgileriyle belirtilir. (b) $\mathbb{M}$ Minkowski uzayıyla ilgili katı konformal diyagram. (c) Kara deliğe küresel simetrik çöküşü gösteren Şekil 27.11'le ilgili katı konformal diyagram.

[40] Büyük Patlamanın gerçekte konformal, diğer bir deyişle nedensel olarak –"Ω noktası" olarak anılan– bir nokta olduğu belirli kurgusal modeller bazı kuramcılarda beğeni bulmaktadır; *bkz.* Tippler, 1997. Bununla birlikte böylesi modelleri fiziki olarak makul hale getiren, 27. bölüm argümanlarıyla uyumlu herhangi bir tartışmanın farkında değilim.

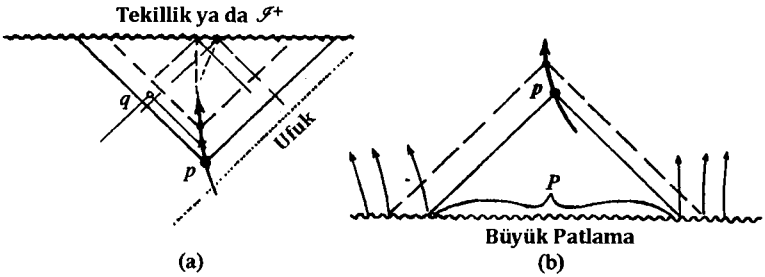
Bu başlangıç sınırının uzaysal doğası bizi, Büyük Patlamanın önemli bir görünümü olan parçacık ufku kavramına yöneltir. Bir gözlemcinin Büyük Patlamaya yakın bir p noktasında bulunduğu Şekil 27.18b'yi göz önüne alın. Gözlemciye bilgi aktarabilecek evren bölgesi p'nin geçmiş ışık konisi üzerinde ya da içindeki o bölgedir ve bunun yalnızca Büyük Patlama başlangıç hiper yüzeyinin bir P parçacını kestiğini belirtiriz.[41] Büyük Patlamada P dışındaki bölgede yaratılan parçacıklar p'deki gözlemci için erişilebilir değildir. Bu bölgeler p'nin *parçacık ufku*nun ötesindedir. Bunların p'nin *gözlemlenebilir evren*inin dışında, evrenin bu gözlemlenebilir kısmı p'nin geçmiş ışık konisi üzerinde ya da içinde bulunan olmak üzere, yer aldığını söyleriz.[27.22]



Şekil 27.17 Şekil 27.13'ün ilgili Friedmann modelleriyle ilgili katı konformal diyagramları: (a) $K > 0, \Lambda = 0$; (b) $K = 0, \Lambda = 0$; (c) $K < 0, \Lambda = 0$; (d) $K > 0, \Lambda > 0$ (ve yeteri kadar büyük Λ'yla); (e) $K = 0, \Lambda > 0$; (f) $K < 0, \Lambda > 0$.

[41] "Hiper yüzey" terimi için *bkz.* not 27.36. Bu durumda Büyük Patlamanın, konformal gösteriminde *3-boyutlu* olduğunu görürüz. Buna belirli başka gösterimlerle karşı çıkabiliriz, *bkz.* Rindler, 2001.

[27.22] Burada verilmiş konformal diyagramlara başvurarak $\Lambda = 0$ olmak üzere, $K = 0$ ya da $K < 0$ için p'de konumlanan bir parçacığın gözlemlenebilir evreninin, tüm evreni kapsamak üzere parçacığın zaman gelecek sınırında artarken bunun $K > 0$ durumu için ya da $\Lambda > 0$'sa (bir "kozmolojik durum ufku" ortaya çıkar) herhangi bir K için (Şekil 27.17'de gösterilen durumlar) doğru olmadığını gösterir.



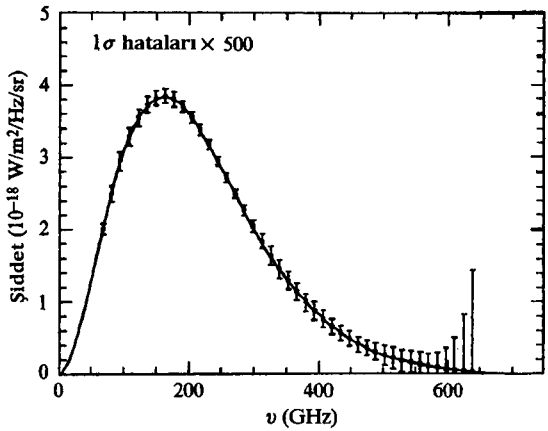
Şekil 27.18 Ufuklar. (a) Olay ufukları, bir gelecek sınırı –ya bir tekillik ya da sonsuz– şematik konformal bir diyagramda uzaysal olduğunda ortaya çıkar. Bir ***p*** gözlemcisi sınıra yaklaşırken her zaman ***p***'nin göremediği (sınırı bir durum ufku biçiminde tanımlanmış) bir uzayzaman parçası, kesin olarak hangi parça olduğu ***p***'nin nasıl hareket ettiğine bağlı olsa da, kalır. (Örneğin ***p*** sol değil de sağ taraftaki rotayı seçerse sonuç olarak ***q*** görülür.) Bir kara delik durumunda daha mutlak bir doğadaki daha tanıdık "durum ufku" (Şekilde noktalı) tüm dış gözlemciler için ortaktır. (b) Parçacık ufukları, geçmiş tekilliğin uzaysal olmasından kaynaklanarak, tüm standart kozmolojilerde ortaya çıkar. ***p***'deki gözlemci Büyük Patlama'nın (ve burada üretilmiş parçacıkların) yalnızca sınırlı bir ***P*** parçasını, bu parça zamanla büyümesine rağmen, görür.

27.13 Olağanüstü biçimde özel Büyük Patlamamız

Şimdi Büyük Patlamaya ilişkin olağanüstü "özgüllüğe" geri dönelim. Komik biçimde düşük bir entropiye sahip olma zorunluluğuna ilişkin gerçek, tek başına termodinamiğin ikinci yasasının varlığı nedeniyle zaten apaçıktır. Yine de düşük entropi pek çok farklı biçim alabilir. Evrenimizin başlangıçta özel olduğu *belirli biçimi* anlamak isteriz.

Büyük Patlamaya ilişkin özellikle çarpıcı –ve görünüşe göre çelişkili– bir özellik, çok erken evrenin *ısıl denge*de olduğuna ilişkin gözleme dayalı mükemmel kanıttan gelir. Bu kanıtın bir parçası, evrenin genişlemesinden kaynaklanan "kırmızıya kayma" nedeniyle fazlasıyla soğusa da bugün hâlâ tanıklık yaparak Büyük Patlamanın gerçek "parlaması"nı temsil eden 2,7K mikrodalga ardalan ışınımıyla gösterilen kuramsal *Planck* "kara cisim" eğrisine (*bkz.* §21.4, Şekil 21.3b) yönelik olağanüstü yakınlıktır (Şekil 27.19). Diğer kanıt, erken evrendeki nükleer süreçlerle ilgili kuram ve gözlemin bize söylediği şeyler arasındaki kayda değer ayrıntılı uyuşmadan gelir. Bu kuramsal hesaplamalar kritik biçimde, evrenin hızlı genişlemesiyle birlikte kabul edilen, erken evrendeki maddenin *ısıl denge*de olduğu varsayımına bağlıdır.

Bana göre, erken evrendeki bu belirgin ısıl denge bazı kozmologları ciddi biçimde yanıltarak Büyük Patlamanın, ikinci yasa nedeniyle aslında son derece düzenli (diğer bir deyişle düşük entropili) olmak zorunluluğu



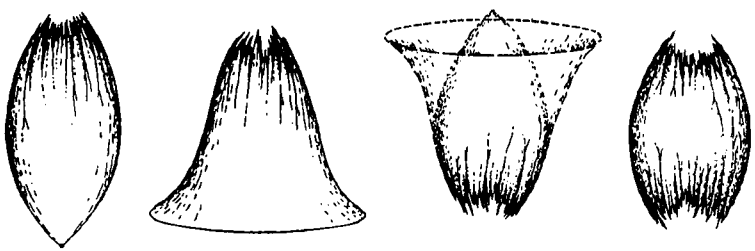
Şekil 27.19 Mikrodalga ardalanı, Planck kara cisim eğrisiyle (Şekil 21.3b) son derece kesin şekilde uyumlu olan, frekans biçiminde bir şiddete sahiptir. (Gösterilen "hata çubukları"nın 500'lük bir çarpan kadar büyütüldüğüne dikkat edin.)

gerçeğine karşın, bir biçimde yüksek entropili "rasgele" (diğer bir deyişle ısıl) bir durum olduğunu düşünmeye yöneltti. Yaygın bakış, bu paradoksun çözümünün, evrenin Büyük Patlamadan kısa süre sonra, kendisi için, olası entropilerle ilgili alçak bir "tavan" sunan nispeten az serbestlik derecesinin kullanılabilir olacağı şekilde "küçük" olduğu gerçeğinde yatmak zorunda oluşu olarak görünüyordu. Bununla birlikte §27.6'da işaret edildiği üzere bu bakış açısı aldatıcıdır. Belirgin paradoksun doğru çözümü, Büyük patlamadan bir an sonra, *kütleçekimle ilgili serbestlik derecesi*nin tüm o madde ve evrenin "ısıl durumu"nda içerilen parametreleri tanımlayan elektromanyetik serbestlik derecesiyle "termalize edilmemiş"* olması gerçeğinde yatar. Aslında, devasa bir entropi deposu sunan bu kütleçekimle ilgili serbestlik derecesi sıklıkla hesaba katılmaz!

Kütleçekim *yokluğu*nda maksimum entropinin aslında sıradan bir "ısıl durum"la gösterildiğini anımsayın. Kütleçekim etkileri baskın çıkmaya başladığında, kara delik durumunda, maksimum entropiyle ilgili oldukça farklı bir şeye sahip oluruz. Kütleçekimle birlikte malzeme kümelenmesi, özellikle bu kümelenme bizi bir kara deliğe yönelttiğinde, sıradan ısıl hareketlerden çok daha yüksek bir entropi gösterebilir. Bu, kapalı bir evren durumunu göz önüne aldığımızda özellikle belirgin hale getirilir. Evrenin (gözlemle uyumlu olarak) bir FLRW modeli olmaya yakın olduğunu düşünelim ve bir anlığına $K > 0$ ve $\Lambda = 0$'mış gibi davranalım. Orijinal malze-

* ısıl dengeye ulaştırılmamış, –çn.

mede bazı düzensizliklerin varlığı[42] kütleçekimsel yoğunlaşmalara yol açar. Bunların sağlam kara delikler ($10^6 M_\odot$ diyelim) içeren, baryon başına 10^{21}'lik bir entropi sunan galaksiler üretmeye yeterli olduklarını varsayalım. Kapalı evrenimizin yaklaşık 10^{80} baryona sahip (gözlemlenebilir evrenin yaklaşık baryon içeriği) olduğunu kabul edersek bu, Büyük Patlamadan yaklaşık 300.000 yıl sonra gerçekleşen ayrıştırma zamanındaki ışınım ve maddedeki 10^{88}'den çok daha büyük olan 10^{101}'lik bir toplam entropi verir. Galaktik kara delikler azar azar büyür fakat temel artış galaksiler bir araya gelip kara delikler katılaştığında, evrenin son çöküş fazı sırasında gerçekleşir. Son Büyük Çöküş, Şekil 27.16'daki düzenli simetrik FLRW Büyük Patlamasının zaman geri çevrimi biçiminde derli toplu gösterileni değildir; o daha çok Şekil 27.20a'da gösterilmiş katılaşan kara delik tekilliklerinin ürkütücü karışıklığına benzer. Büyük Çöküşe ilişkin bu karışıklığın entropisini, son durumundan biraz önce, bu karışıklığı hâlâ 10^{80} baryonun tümünün içerildiği nihai kara delik yığınına doğru yaklaşan gerçek kara deliklerden oluşmuş biçimde düşünebiliyorken, Bekenstein–Hawking denklemini kullanarak tahmin edebiliriz. Bu sayıdaki baryon için yaklaşık 10^{123} olan S_{BH} değeri, bu karmakarışık Büyük Çöküşe atanması gereken entropiyle ilgili yanıttan çok uzak olmamalıdır.

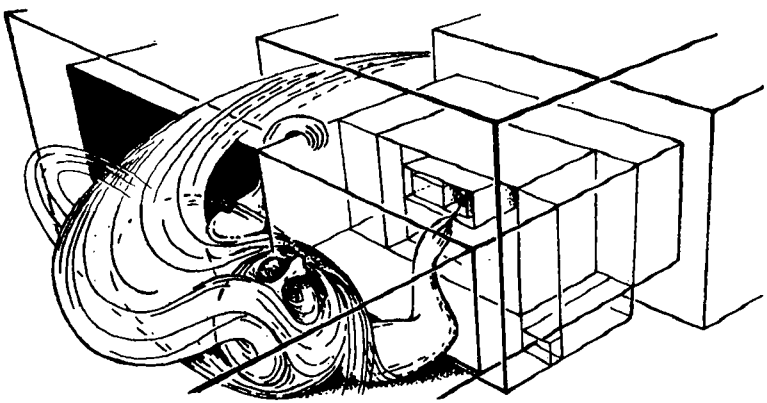


Şekil 27.20 (a) Şekil 27.13a'daki $K > 0$, $\Lambda = 0$ durumunda, gerçek evrenimizde gördüğümüz türdeki düzensizliklere izin verirsek böylece tam Friedmann modelinin "temiz" Büyük Çöküşü yerine son derece yüksek entropiye ($S \approx 10^{123}$) sahip katılaşmış kara delik tekilliklerinin ürkütücü bir karmaşasını elde ederiz. (b) Bu, benzer biçimde Şekil 27.13d'nin ilgili ters zamanlı rahatsızlıklarını ele alabildiğimiz gibi ($K > 0$, $\Lambda > 0$), $\Lambda = 0$'a bağlı değildir ve yine benzer bir son derece yüksek entropili ($S \approx 10^{123}$) katılaşan kara delik karmaşası elde ederiz. (c) Kendine özgü bir Büyük Patlama, bu tür kendine özgü bir çöküşün ters zamanlısınınkine benzer ($K > 0$ ve $\Lambda = 0$ ya da $\Lambda > 0$ için gösterilir). (d) Açıklık için $K > 0$, $\Lambda = 0$ durumunda gösterilen en "olası" (Şekil 27.8a'daki eğri gibi) durum, erken dönemlerindeki gerçek evrenle hiçbir benzerlik taşımaz.

[42] Sonuç olarak bu tür düzensizliklerin sorumlusu olan olgunun sıklıkla, Büyük Patlamanın başlangıç madde yoğunluğundaki "kuantum dalgalanmaları" olduğu düşünülür. Bu, §30.14'te tartışılacaktır.

Elbette okur bu noktada haklı olarak, $K > 0$ oluşu doğru bile olsa günümüz gözlemlerinin yapmakta olduğum $\Lambda = 0$ varsayımının güçlü biçimde tersini işaret eder göründüğü itirazında bulunabilir. Aslında Λ'nın gözlemlenmiş pozitif değeri (uzamsal eğrilik üzerinde gözlemlenmiş sınırlarla birlikte), ele almakta olduğum çöküş fazının, bunun yerine nihai bir üstel genişleme beklentisiyle birlikte, ortaya çıkışını önlemek üzere rahatlıkla yeterli büyüklükte görünür. Bununla birlikte uygun biçimde ifade edilecek olursa daha önceki tartışma hâlâ geçerlidir ve aynı ölçüde bir entropi değerinin ($\sim 10^{123}$), $\Lambda > 0$ olmasına bakmaksızın 10^{80} baryonluk kapalı bir evren için uygun olduğu görülür. Çünkü Şekil 27.13d tarafından açıklanan zamanın ters çevrildiği evren, tıpkı Şekil 27.13d'nin kendisince açıklananın olduğu kadar (zamanda tersinir olması gereken dinamik yasaları göz önüne almamız nedeniyle) dinamik denklemlerle ilgili bir çözümdür. Bu evrenin rahatsızlığını ele alırsak, içinde çoktan oluşmuş kara deliklerin bir araya gelip daha önce sahip olduğumuz türde katılaşmış bir kara delik "karmaşası" ürettiği modeller bulabiliriz. (*Bkz.* Şekil 27.20b.) Daha öncekiyle aynı nedenden kaynaklı olarak yine 10^{123} düzenindeki bir entropi değerine ulaşırız. (Bu biçimdeki gerekçelendirme §28.5'te şişme kozmolojisini değerlendirmeye başladığımızda bizim için yine önemli olacak.)

Böylece (esasen Şekil 27.4'teki $\mathcal{E}$ maksimum entropi kutusuyla aynı olan) $\mathcal{P}_U$ toplam hacmiyle ilgili makul bir tahmini değere, diğer bir deyişle



Şekil 27.21 Evrenin yaratılışı: hayali bir açıklama! Yaratıcının iğnesi, gerçekte bulduğumuz kadar özel bir Büyük Patlamaya sahip bir evren yaratmak üzere, tüm faz uzayı hacminin yalnızca $10^{10^{123}}$'te biri olan küçük bir kutu bulmak zorunda.

bu entropi değerinin üsteline oldukça yakın biçimde ulaşırız:[27.23]

$$E = e^{10^{123}} \approx 10^{10^{123}}.$$

(Bu, Boltzmann'ın doğal birimlerdeki $S = \log V$'sinden gelir.) Şu halde bu, bugünkü entropiyle ilgili $\mathcal{N}$ kutusunun N hacmine ve Büyük Patlamadaki entropiyle ilgili $\mathcal{B}$ kutusunun B hacmine ilişkin bildiklerimizle (şu anda 10^{80} baryonluk bir evrende yaşadığımızı varsayarak) nasıl kıyaslanır? Bugünkü entropi için üstte verilen kara delik tahmini değerini ve 2.7K ışınımdaki baryon başına 10^8'lik entropi değerini alarak

$$B:N:E = 10^{10^{88}}:10^{10^{101}}:10^{10^{123}}$$

ifadesini buluruz. Buradan, B ve N'nin her birinin toplam E hacminin yalnızca

$$10^{10^{123}}\text{'te biri}$$

olduğu sonucu izler. Dahası B hacmi bugünkü evrenin N faz uzayı hacminin yalnızca

$$10^{10^{101}}\text{'de biridir.}$$

$\mathcal{B}$'ye ilişkin saçma biçimde küçük faz uzayı hacmi tarafından ortaya konan soruyu değerlendirmenin bir biçimi olarak Yaratıcı'yı $\mathcal{P}_u$ uzayındaki bu minik noktayı bir iğne kullanarak belirleyip evreni, bugün bildiğimize benzer biçimde başlatmak üzere çalışırken düşünebiliriz. Şekil 27.21'de bu anlık olaya ilişkin hayali bir gösterim çizdim! Yaratıcı bu noktayı çok küçük bir miktar ıskalayıp iğneyi rasgele biçimde etkin olarak $\mathcal{E}$ maksimum entropi bölgesine batırmış olsaydı bu durumda sonuç, $\Lambda = 0$, $K > 0$ durumunda Şekil 27.20d'dekine benzeyen (aksi halde daha çok Şekil 27.20c'deki sürekli genişleyen duruma benzer), istatistiksel bir zaman yönlülüğü tanımlamak üzere hiçbir ikinci yasanın bulunmadığı (Şekil 27.8a'dakine benzer), içinde yaşanmaz bir evren olurdu. (Aslında işler, Yaratıcımızı içinde yalnızca bizler gibi bilinçli varlıkların bulunduğu bir evren inşa etmeyi amaçlarken düşünürsek çok daha iyi açıklanamaz. Bu, "antropik ilke" konusunu ortaya çıkarır ve bu konuları §§28.6, 7 ve §34.7'de tartışacağım.)

Öte taraftan evren, $K = 0$ ya da $K < 0$'a sahip FLRW modelleri gibi uzaysal olarak *sonsuz* da olabilir. Bu, yukarıdaki argümanı geçersiz kılmaz. Onu tüm evren yerine yalnızca (şimdiki zamanda) gözlemlenebilir evrene uygulanır biçimde düşünebiliriz. Şu andaki gözlemlenebilir evreni

[27.23] Bu sayılar –"123" sayısıyla ifade edilen kesinlik dahilinde– fiilen niçin aynıdır? B'nin gerçek değeri alttaki çıkarımlarda niçin görünmez?

yaklaşık 10^{80} baryon içerir biçimde kabul ederek üstteki değerlendirmelerin ciddi biçimde etkileneceğini görmek zordur. Öte taraftan argümanları evrene (FLRW'yi hâlâ iyi bir yaklaşıklık tahmini biçiminde kabul ederek) bir bütün olarak uygularsak tek başına saçma biçimdeki büyük kesinlik yerine basit biçimde Yaratıcı lehine *sonsuz* bir kesinlik gerekliliği elde ederiz. Bunun, Büyük Patlamada içkin olağanüstü biçimdeki kesin "ayarlama", ikinci yasanın temel bir ilintisi, tarafından sunulan muammayı herhangi bir biçimde nasıl çözümlediğini görmüyorum.

Bu değerlendirmelerle hangi mesajı taşımaktayız? Yalnızca, evrene ilişkin Büyük Patlama temelinin olağanüstü biçimde özel olduğunu değil fakat aynı zamanda bu özgüllüğe ait doğayla ilgili de önemli bir şey öğrendik. Madde (elektromanyetizma da dahil) ele alındığı sürece, genişleyen bir evren bağlamındaki "ısıl denge" açıklaması son derece uygun gibi göründü. Bu, kozmolojinin standart modelinin önemli bir bileşeni olan başarılı "Sıcak Büyük Patlama" tablosudur. 10^{-11}s sonra evren 10^{15}K dolayında bir sıcaklığa sahip görünüyorken, bir 10^{2}s kadar sonra sıcaklık 10^{9}K'ya düştü. Sıcaklıktaki bu düşüş Tolman–Friedmann genişleme hızıyla uyumluydu ve gözleme dayalı pek çok ayrıntı (örneğin hidrojen/döteryum/helyum oranları), o sonraki sıcaklıklarda gerçekleşen nükleer süreçlerle uyum içindedir.

Yine de kütleçekimle ilgili olarak işler, kütleçekimle ilgili serbestlik derecesinin pek de "termalize edilmemiş" olması anlamında tümüyle farklıydı. Başlangıç uzayzaman geometrisinin düzenliliği (diğer bir deyişle FLRW doğası) Büyük Patlamayla ilgili özel olan şeydi. Evrenle ilgili bir tekil başlangıç durumunun "böyle olması gerekmediği" gerçeği Şe kil 27.20b'de ya da Şekil 27.20a'nın fiziki olarak uygun Büyük Çöküşün ters zamanlısında gösterilir. Kütleçekim herhangi başka bir alandan farklı olarak çok özel bir konuma sahip görünmektedir. Erken evrendeki diğer tüm alanlara uygulanan termalizasyona katılmak yerine kütleçekim buna, serbestlik derecesini, ikinci yasanın bu serbestlik derecesinin kabul edilir hale gelmeye başlarken oyuna gireceği şekilde beklemeye alarak ilgisiz kaldı. Bu bize yalnızca bir ikinci yasa değil aynı zamanda Doğada gözlemlediğimiz belirgin biçimdeki birinciyi de verir. Kütleçekim farklı gibi görünür!

Peki ama niçin farklı? Bu tür soruları yanıtlamaya çalıştığımızda çok daha kurgusal alanlara gireceğiz. 28. bölümde fizikçilerin bu bilmece ve evrenin başlangıcıyla ilgili olanla uzlaşmayı denedikleri yolları göreceğiz. Bana göre, bu girişimlerin hiçbirisi önceki paragrafta işaretlenen bilmecenin başa çıkmanın yakınından bile geçmiyor. Kendi inanışlarımla uyumlu olarak, kuantum mekaniğinin temellerinin bir incelemesine geri dönmeye

gerek duyacağız çünkü güçlü biçimde inanıyorum ki bu konular derinden bağlantılıdır. Bunu 29. bölümde yapacağız. Sonra 30. bölümde bu temel sorularla ilgili kendi bakış açıma ilişkin iyi bir ölçü sunmaya çalışacağım.

28

ERKEN EVRENLE İLGİLİ KURGUSAL KURAMLAR

28.1 Erken evren kendiliğinden simetri kırılımı

Kitaptaki bu noktaya kadar olan değerlendirmelerimiz, gözleme dayalı etkileyici verinin bazen oyuna giren tuhaf görünümlü kuramsal fikirlerle ilgili güçlü destek sunduğu sıkıca kurulmuş fiziki kuram kapsamındaydı. Argümanlarımdan bazıları, genellikle yazında bulunanlardan biraz farklı olabilen bir biçimde sunuldu fakat bunda tartışmalı herhangi bir şey olduğunu düşünmüyorum. Bu bölümde Büyük Patlamanın özel doğasının neden olduğu konularla ilgili daha kurgusal fikirlerden bazılarına yönelmeye başlayacağım.

Özellikle, erken evrendeki kendiliğinden simetri kırılımıyla ilgili diğerlerinin yanı sıra (*bkz.* §25.5), şişme kozmolojisine ilişkin fikirleri ele alacağım. Kozmolojide ortak kullanımda olan belirli fikirler iyi bilen bazı okurlar şişme kozmolojisini böylesine katı biçimde "kurgusal" kampa yerleştirmemi kafa karıştırıcı bulabilirler. Aslında popüler açıklamalar sıkça, evrenin çok erken aşamalarında evrenin yaklaşık 10^{30} ya da belki hatta 10^{60} ya da daha fazla olan bir katsayıyla şiştiği bir üstel genişleme süreci bulunmasını sabit bir gerçek olarak kabul eder görünmektedir. Başkaca bilgili okurlar, erken evrendeki kendiliğinden simetri kırılımı genel olgusunu kurgusal bir fikir olarak değerlendirmem gerçeğiyle daha da telaşlanmış olabilir. Yine de, bu bölümde yönelmek istediğim kavramlar henüz gözlemden, belirgin ve açık yeterli (varsa eğer) desteğe sahip olmadılar. Öyleyse bu fikirlerin Doğayla gerçek bir ilişkileri olup olmadığı konusu da gündeme getirilebilir.

Kendiliğinden simetri kırılımı genel fikriyle başlayalım. Bu fikrin yeniden normalleşebilir QFT'ler yaratmakla ilgili, yeniden normalleşebilirliğin gözlemlenmiş davranışta dolaysızca gösterilenden daha çok daha büyük ("gizli") bir simetriden faydalandığı, gücünü anımsayın. Gözlemlenmiş şeydeki bu simetri yoksunluğu sistemin, dinamik kuramın bütünlüklü simetrisini paylaşmayan bir "vakum durumu"yla ilgili seçimine dayandırı-

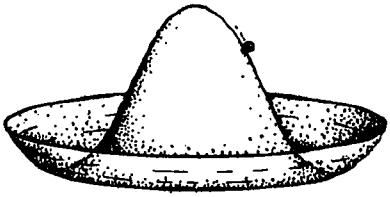
lır. Bu, parçacık fiziğinin standart modeline ait elektrozayıf kısmın özellikle kilit bir bileşenini oluşturur. Dahası, olası farklı "vakumlar" içeren bu tür fikir de ayrıca şişmeye ilişkin temel bir bileşendir ve kendiliğinden simetri kırılımı kavramları ve "yanlış vakumlar" da ilelebet birleşmiş düzenlere ilişkin arayışlarında, kuramcılar tarafından çoğunlukla hatırlatılır. Bununla birlikte kendiliğinden simetri kırılımının kendisinin kurgusal bir fikir olmadığını belirginleştirmeliyim. O, pek çok gerçek fiziki olguyla (süper iletkenlik mükemmel bir örnektir) şüphe götürmez ilişkiye sahiptir. En belirgin biçimde bir miktar iyi kurulmuş olguya, sıkça zarif ve tatmin edici bir biçimde uygulanır. Kesinlikle fikrin kendisini şüpheli hale getirmiyorum. Onunla sorunum, kendine özgü cazibesinin, fizikçileri bazen onu çok geniş biçimde ve bazen uygunsuz durumlarda işe koşmak üzere kandırabilmesidir.

Kendiliğinden simetri kırılımı fikri grafik biçimli olarak sıklıkla, ferromanyetizma olgusuna gönderme yapılarak sunulur. Küresel bir katı demir top düşünün. Ona ait atomları, dahil olan kuvvetler nedeniyle, aynı kuzey/güney yönelimiyle birlikte komşularıyla paralel biçimde dizilmeye yönelik bir eğilimleri bulunan küçük mıknatıslar biçiminde düşünebiliriz. Sıcaklık yeteri kadar yüksek, diğer bir deyişle yaklaşık 770°C (1043K) olan kritik bir değerin üzerinde olduğunda atomların enerjik ısıl çalkalanmaları manyetik hizalanmaya yönelik bu eğilimi bastırır ve atomik küçük mıknatısların yönelimlerine ilişkin etkin biçimde rasgele bir düzenleme söz konusu olmak üzere malzeme, büyük ölçekte bir mıknatıs haline gelmekle ilgili hiçbir istek göstermez. Bununla birlikte 770°C'den daha düşük bir sıcaklıkta atomların sıralanmaları enerjik olarak elverişlidir ve ideal bir durumda demir, mıknatıslanmış hale gelir.[1]

Şimdi, demir topumuzun başlangıçta 770°C'nin üzerine çıkacak şekilde ısıtıldığını (fakat eriyeceği kadar yüksek bir sıcaklığa kadar değil) düşünün, böylece başlangıçta o, mıknatıslanmamış küresel bir toptur. Daha sonra ortam azar azar kritik 770°C'nin altına düşecek biçimde soğutulsun.

---

[1] Örneğin *bkz.* Weinberg, 1992, s. 195. O burada ayrıca, uzmanların gözde açıklamalarında neredeyse evrensel olduğu görülen, ferromanyetizmanın örneğini de kullanmıştır. Yine de bunun, kuvvetlerin ayrıntılı etkilerinin çok karışık olabildiği *gerçek* bir demir gövdesiyle ilgili olarak önemli bir idealleştirme olduğunu aklımızda tutmak zorundayız. Demir içindeki yeterince küçük bir bölge için bu mıknatıslanma eğilimi iyi bir yaklaşıklık tahmini olabilirken böylesi mıknatıslanmış bölgeler pratikte, demirin bir bütün olarak etkin bir mıknatıs sunmaya eğilim göstermeyeceği şekilde rasgele biçimde yönlenmiş hale gelir. Dahası demirin belirgin biçimde mıknatıslanmış hale gelmesi için Curie noktası yoluyla soğutmanın son derece yavaş olması gerekir. İdeal durumu gerçekleştirmek hiç de kolay değildir. Var olan kuramsal tartışmayla ilgili olarak bu tür karışıklıkları göz ardı etmemiz ve açıklanmış olan idealleştirmeyi kabul etmemiz uygun olacaktır.



Şekil 28.1 Yükseklik enerjiyi ölçmek üzere, sisteme ilişkin izin verilebilir durumlarla ilgili bir "Meksika şapkası" potansiyeline sahip kendiliğinden simetri kırılımı. Sistem durumu şapka yüzeyine tutturulmuş bir misketle temsil edilir. Çevre sıcaklığı yeterince yüksek olduğunda (Curie noktası) sistemin denge durumu tepede duran misketle temsil edilir ve tam dönel simetriye (bu basitleştirilmiş resimde SO(2)) sahiptir. Bununla birlikte sıcaklık düştüğünde misket yuvarlanıp tam dönel simetriyi kırarak sonuçta şapka kenarındaki rasgele bir denge noktasına ulaşır.

Ne olur? Top için doğal eğilim, atomlarının iç titreşimlerindeki enerji soğuk ortama doğru aktarılmak üzere, bir minimum enerji durumu bulmaktır. Komşu atomlarla olan etkileşimler nedeniyle minimum enerji tüm atomlar, topun kuzey/güney kutupsallığına ilişkin belirli bir yönle birlikte mıknatıslanacağı şekilde hizalandığında meydana gelir. Bu yönlerin hiçbirinin herhangi bir diğeri üzerine ayrıcalığı söz konusu değildir. Minimum enerji durumlarında *bozulma* olarak adlandırılan şey mevcuttur (*krş.* §22.6). Başlangıçtaki mıknatıslanmamış kızgın durumunda ayrıcalıklı herhangi bir yön olmamak üzere, son mıknatıslanma yönü *rasgele biçimde* ortaya çıkar. Bu, *kendiliğinden simetri kırılımının* bir örneğidir: küresel biçimdeki başlangıç durumu daha küçük simetrili, diğer bir deyişle sonuçtaki manyetik kuzey/güney ekseni etrafındaki döndürme simetrili duruma yerleşir. Bir SO(3)–simetrili durum (diğer bir deyişle başlangıçta mıknatıslanmamış sıcak top) SO(2)–simetrili birine (mıknatıslanmış soğuk top; bu sembollerin anlamları için *bkz.* §§13.1, 2, 3, 8, 10) gelişir.

Bu türdeki durumu açıklamakta kullanılan resim Şekil 28.1'de gösterilen "Meksika şapkası" potansiyelidir. "Yükseklik" sistem enerjisini göstermek üzere, "şapka" sisteme ilişkin izin verilebilir durumlar ailesini gösterir (çevre sıcaklığı sıfıra düşürülmüştür). Şapkanın, orijinal gruba ilişkin, bu grup resimde düşey eksendeki döndürme olarak gösterilmek üzere, tam simetriye sahip tepesi olarak gösterilmiş (diğer bir deyişle yatay bir tanjant düzlemine sahip) bir *denge durumu*nun mevcut olduğunu görürüz. (Bu SO(2) dönel simetrisi demir topun tam SO(3) simetrisine benzer kabul edilir fakat resmi görüntülenebilir kılmak üzere bir uzamsal boyutu kaybetmek zorundaydık. Şapkanın tepesi top için bir bütün olarak tam mıknatıslanma yoksunluğunu gösterir.) Bununla birlikte, mıknatıslanmamış durumu gösteren bu denge kararsızdır ve elverişli enerjilerin minimumu-

nu temsil etmez. Bu minimumlar şapkanın kenarının (kenardaki farklı noktalar demir topun toplam mıknatıslanmasına ilişkin farklı yönleri göstermek üzere) hemen iç tarafındaki, tüm bir çember değerindeki, yatay kısımlar tarafından temsil edilen durumlardır.

Kafamızda, oraya önceki yüksek sıcaklık durumu tarafından bırakılmış durumun başlangıçta tepede olduğunu, başlangıçtaki fiziki durumu göstermek üzere o noktaya konmuş bir "misket"le temsil edilmek üzere, canlandırabiliriz. Kararlılık yoksunluğu misketin (bazı rasgele rahatsız edici etkilerin varlığını varsayarak) o noktadan yuvarlanıp sonuç olarak kendine kenarda duracağı bir nokta bulması anlamına gelir. Misketin kenarda yerleşebileceği her nokta topun sonuç olarak edinebileceği farklı bir mıknatıslanma yönünü temsil eder. Bu misket konumu son fiziki durumu temsil eder. Bununla birlikte dönel bozulma nedeniyle misket için hareketsiz hale geleceği ayrıcalıklı bir yer söz konusu değildir. Kenardaki tüm bu dengeler eşit konumdadır. Misketin seçimi rasgele bir seçim olarak kabul edilir ve o seçim yapıldığında simetri, rasgele biçimde seçilmiş bir yönde kırılmıştır.

Çevre sıcaklığındaki bir düşüşün, malzemenin kararlı denge durumunun doğasında ani bir brüt toplam değişikliğe sebep olduğu bu tür bir olguya *faz geçişi* denir. Demir top örneğimizde faz geçişi top (770°C üzerindeki sıcaklıkta) mıknatıslanmamış durumdan düzenli biçimde mıknatıslanmış duruma (770°C altındaki sıcaklık) geçtiğinde ortaya çıkar. Donma (sıcaklık düştükçe durum sıvıdan katıya geçer) ve ters bir işlemdeki kaynama (sıcaklık arttıkça durum sıvıdan gaza geçer) daha tanıdıktır. Sıcaklığın düştüğü bir faz geçişine çoğunlukla bir simetri indirgemesi eşlik eder fakat bu zorunlu değildir.

QFT işlemlerinde bir faz geçişi sıklıkla, durumun kafada bir vakumdan diğerine "tünel açarken"[2] canlandırıldığı (§26.11'deki $|\Theta\rangle$ benzeri) yeni bir vakum durumu seçimi biçiminde açıklanır. Bununla birlikte bu açıklama, kabaca söylersek, durumu bir *sektör*den diğerine (bir "sektör", $|\Theta\rangle$ vakum durumuna ilişkin belirli bir seçimden oluşturulabilecek durumlarla ilgili olmak ve farklı sektörlerdeki durumlar farklı Hilbert uzaylarına ait olmak üzere; *bkz.* §§26.5, 11) geliştirebilecek hiçbir (üniter) kuantum mekaniksel işlem bulunmadığından bir yaklaşıklık tahmini olarak kabul edilmek zorundadır. Bir sistemi, fiilen sonlu olduğunda, sonsuz olarak kabul etmeyi içeren yaklaşıklık tahmini pratik durumlarda açık olarak iyi bir tahmin-

[2] Bir kuantum sistemi bir durumdan düşük enerjili bir diğerine kendiliğinden bir geçişe, bunun klasik biçimde ortaya çıkmasını engelleyen bir enerji bariyeri söz konusu olmak üzere, maruz kaldığında kuantum mekaniksel tünelleme ortaya çıkar.

dir. Örneğin (sıcaklık yeteri kadar düşük olduğunda elektrik direncinin sıfıra düştüğü) iyi kurulmuş süper iletkenlik olgusu, süper iletkenlik sıradan U(1) elektromanyetizma simetrisini kıran simetri indirgemesine eşlik eden bir faz geçişi olmak üzere, bu biçimde ele alınır.

Şekil 28.1'de gösterilmiş olan belirli örnekte simetri, SO(2) eksensel döndürmeler grubundan, yalnızca bir eleman içeren önemsiz gruba ("SO(1)") kırılmıştır (böylece bu örnekte tüm simetri, misketin son konumunun simetriyi bütünüyle kırmasıyla kaybolmuştur).[3] Bununla birlikte bu "şapka"nın yüksek boyutlu versiyonları, $p > 2$ olmak üzere SO(p)'den SO($p-1$)'e kendiliğinden simetri kırılımını gösterir.[28.1] (Demir topumuz $p = 3$ durumunu örnekler.) "Meksika şapkası" resmini ayrıca, kendisi aracılığıyla elektrozayıf U(2) simetrisinin (*bkz.* §25.5) Büyük Patlamadan 10^{-12}s kadar kısa süre sonra ortaya çıkmış olan 10^{16}K dolayındaki bir sıcaklıkta U(1) elektromanyetizma simetrisine kırılmış olarak kabul edildiği, parçacık fiziğinin standart modelindeki U(2)'den U(1)'e kırılımı[28.2] örneklemek için de kullanabiliriz. Daha genel GUT kuramlarında (*bkz.* §25.8), SU(5) gibi diğer gruplar içerilir ve simetri kırılımının farklı aşamalarını farklı sıcaklıklarda meydana gelir biçimde hayal edebiliriz. Böylece, 10^{16}K'dan çok daha yüksek bir sıcaklıkta (diğer bir deyişle Büyük Patlamadan hemen önce, 10^{-12}s'den belirgin biçimde daha erken bir zamanda) SU(5) ilk olarak hem yeğin etkileşimler için SU(3)'ü hem de elektrozayıf kuram için gereken SU(2)×U(1)/Z_2'yi (diğer bir deyişle U(2)'yi) uygun biçimde[4] içeren bir şeye kırılabilir.

28.2 Kozmik topolojik bozukluklar

Bununla birlikte bu simetri kırılımının "birdenbire" gerçekleşmesinin olası olmadığını aklınızda tutun. İçinde, simetrinin farklı "yönlerde" kırıldığı *bölgeler* de ortaya çıkabilir. İdealize edilmiş demir topumuzu bir kez daha göz önüne alın; mıknatıslanma yönlerine ilişkin rasgele başlangıç seçiminin topun farklı yerlerinde farklı olabileceğini bekleyebiliriz. Soğutma yeterince yavaş olursa bu düzensizliklerin tek bir düzenli mıknatıs

---

[3] Bu örnekte SO(2)'deki "S" nedeniyle yansıma simetrisi dışlanmıştır.

[28.1] $E = (x_1^2 + \cdots + x_p^2 - 1)^2$ şekline sahip "şapka"nın bu simetri kırılımını ortaya koyduğunu gösterin.

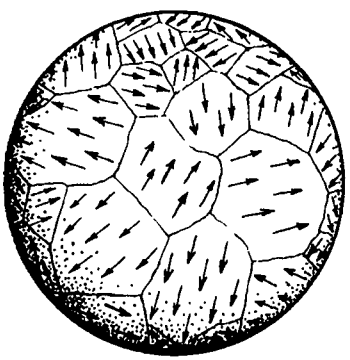
[28.2] Bunu, $\mathbb{C}^2$ üzerine etkiyen U(2) ve (w,z) karmaşık koordinatlarıyla birlikte, şapka $E = (|w|^2 + |z|^2 - 1)^2$'yle verilmiş olmak üzere, gösterin. Bu simetri kırılımının geometrisini, §15.4'te açıklanıp şekiller 15.8 ve 33.15'te örneklendiği üzere, S^3'teki Clifford paralellerinin düzenlenişinde görebiliyor musunuz?

[4] Bu "uygun grup" SU(3)×SU(2)×U(1)/Z_6 olarak görünür.

oluşturmak üzere "kendilerini eşitleyebileceklerini" düşünebiliriz.[5] Bununla birlikte alternatif olarak çok daha ani bir soğutmayla Şekil 28.2'de örneklenmiş olana bir biçimde benzeyen, yönlere ilişkin bir "yama işi"ni elde edeceğimizi görebiliriz. Sonuçtaki hücrelerin boyutu ve sundukları örüntü aslında, diğer şeyler bir tarafa, soğumanın ne hızla gerçekleştiğine bağlı olabilir. Burada, farklı bölgeler arasındaki "iletişim"in ne kadar kolaylıkla meydana geleceği ve topun bir bölgesindeki mıknatıslanma yönünün komşu bölgelerin etkisi altında ne kadar kolaylıkla "ters çevirilebileceği"yle ilgili konu mevcuttur.

Topun içindeki mıknatıslanma yönleri etrafında sürekli kıvrılma yoluyla bütünüyle ortadan kaldırılamayacak olan *topolojik bozukluklar* daha ciddi ve ilginçtir. Böylesi bir bozukluk "Dirac manyetik tek kutbu"dur (yalıtık kuzey ya da güney manyetik kutup). Bununla birlikte böylesi bir tek kutup, herhangi bir mıknatıs ya da akım toplamına sahip olağan uzayda üretilemez.[28.3] Bununla birlikte böylesi etkin bir tek kutup, manyetik yükün Şekil 28.3'teki gibi bir "Dirac teli" boyunca "nakledil"mesini sağlarsak ortaya çıkarılabilir. Maxwell kuramında (§19.2) manyetik yüklere izin verilirse bu durumda "tel" yalnızca ***A*** potansiyelinde (§19.4) görünür ve uygun "demet" bakış açısının (§15.4) benimsenmesiyle tümüyle ortadan kaldırılabilir. Benzer türde bir tek kutup ayrıca Abelci olmayan uygun ayar kuramlarında da var olabilir.

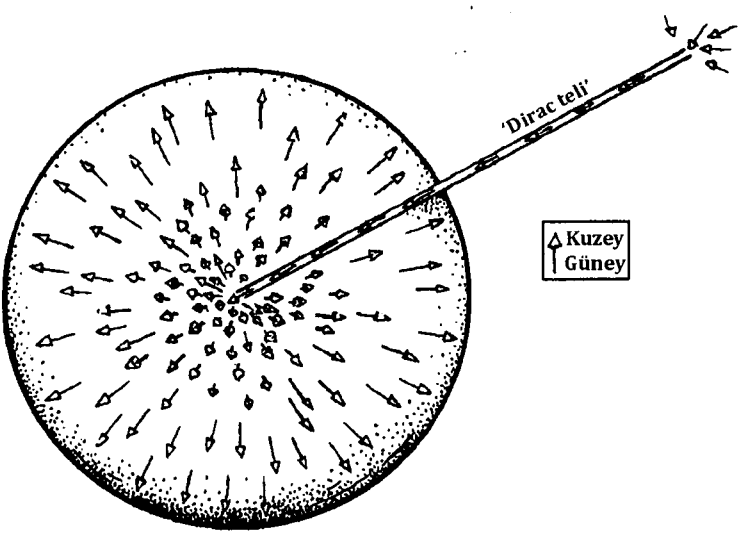
Kendiliğinden simetri indirgemesi tablosundaki, üstte "gerçekleştirilebilir" demir bir top örneğinde kısmen gösterilmiş bu karışıklıklar ayrıca temel olarak kendiliğinden simetri kırılımı fikrine dayanan temel fiziki



Şekil 28.2 İdeal olarak, bir ferromıknatıs kendi Curie noktasından yavaşça soğuduğunda tüm atomlarının mıknatıslanma yönleri aynı (rasgele) yöne yerleşir. Bununla birlikte pratikte (ya da çok ani soğutmayla) böylesi mıknatıslanma yönleriyle ilgili bir "yama işi" elde ederiz.

[5] *Bkz.* not 28.1.

[28.3] Bunu 19. bölümün integral ifadelerine başvurarak gösterin.



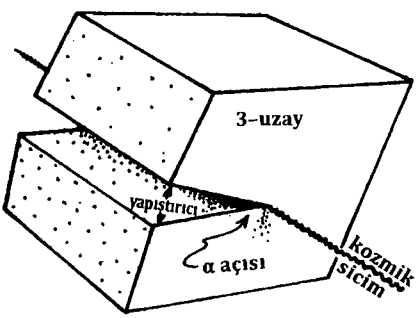
Şekil 28.3 Manyetik bir tek kutup, küre merkezindeki fazla "güney kutbu"nu "manyetik bir tel" boyunca bir şekilde nakledersek ortaya çıkabilir. Böylesi bir kutup, Maxwell kuramında izin verilen kaynaklarla merkeze yerleştirilebilir ve (Dirac) "tel" yalnızca, *A* potansiyelindeki bir kusur olarak ortaya çıkmaya gerek duyar. Bu kusur uygun "demet" bakış açısıyla ortadan kaldırılabilir (böylesi tek kutuplar ayrıca Abelci olmayan uygun ayar kuramlarında da ortaya çıkar).

kuramların (örneğin elektrozayıf ya da GUT) daha özel bir düzeyinde de anlama sahiptir. Bu tür kendiliğinden simetri kırılımı erken evrende ortaya çıktıysa, topolojik bozuklukların daha büyük (kozmolojik) bir ölçekte ortaya çıkması beklenebilir. Genellikle (3–boyutlu uzayla ilgili olarak), esasen bulundukları bölgelerin boyutlarına bağlı olarak üç temel topolojik bozukluk söz konusudur. Bunlar, (kozmik) *tek kutuplar* (uzamsal olarak 0–boyutlu), *kozmik sicimler* (uzamsal olarak 1–boyutlu) ve (uzamsal olarak 2–boyutlu) *bölge duvarları* biçiminde adlandırılır. Boyut, içerilen gruplarla ilgili topolojik konura bağlıdır. Topolojik bozukluklarla ilgili ciddi konu, simetri kırılımına ilişkin "yön"ün hiçbir miktardaki sürekli kıvrımının onları ortadan kaldıramamasıdır (bozulmanın kendisinde simetri kırılımına ilişkin iyi tanımlı hiçbir yön bulunmazken, bu yönün sürekli değişiminin başka bir yerde ortaya çıktığını düşünürüz). Bu "yön" kavramının olağan uzaydaki bir yönle değil fakat ele alınan fiziki model dahilinde (örneğin bize ne derecede elektron/nötrino karışımının değerlendirilmekte olduğunu söyleyen elektrozayıf kuramda) ortaya çıkan daha soyut bir "yön" kavramıyla ilgili olduğunu aklımızda tutmak zorundayız. Geometrik olarak uzayzaman üzerindeki bir vektör demeti biçiminde düşünüyor olmalı-

yız (bu kavramı hatırlamak isterseniz 15. bölüme bakın). Topolojik değerlendirmeler hâlâ geçerlidir ve simetri kırılımı, temel fiziki kuramın gerçekten bir parçası olarak kabul edilecekse topolojik bozukluklar öylece "gülüp geçiştirilemeyecek" ciddi konular sunar.

Aslında devasa boyutlardaki (galaksilerden bile daha büyük) kozmik sicimler ciddi şekilde, galaksi oluşumuna yol açan ardalan gazındaki o türdeşsizlikleri ortaya çıkaran esas sorumlu vasıta olarak kabul edilmektedir.[6] Böylesi kozmik bir sicimin kütleçekim alanını, Minkowski uzayzamanına uygulanan bir "kes yapıştır" işlemiyle oluşturulmuş biçimde düşünebiliriz. Uzamsal terimlerle (*bkz.* Şekil 28.4) 3–uzaydan çıkarılmış bir "sektör"ü, bu oluşmuş α açısı sicimin kendisi üzerinde merkezlenmiş bir çift yarı düzlemle sınırlanmış olmak üzere, resmederiz. Kozmik sicim geometrisini oluşturmak üzere iki düzlem yüzeyi yeniden birbirine "yapıştırılır". (Önerilen modellerde α yaklaşık 10^{-6}'dır.)

Okuyucu, bir miktar haklı olarak, bunların, bu tür "sıradan" bir nesnenin olağan bir galaksi biçiminde üretilmesiyle ilgili aşırı ölçüler olduğunu hissedebilir. Yine de galaksi oluşumuyla ilgili hâlâ kuramsal bazı muammalar söz konusudur, bu nedenle görünüşteki aşırı çirkin doğalarına karşın bu tür yabancı fikirler elden çıkarılmamalıdır. Aslında belki de galaksi oluşumuyla ilgili, gözleme dayalı önemli bazı desteklere sahip, en akla yatkın model onların, artık merkezlerinde bulunur görünen süper kütleli kara delikler tarafından "tohumlanma"sıdır.[7] Bununla birlikte kara delikler bugün artık yabancı fizikten ziyade geleneksel olarak değerlendirilmek zorundadır!



Şekil 28.4 Kozmik bir sicimin kütleçekim alanı Minkowski 4–uzayına uygulanan bir "kes yapıştır" işlemiyle oluşturulabilir. 3–uzayda, sicim boyunca bir α açısıyla buluşmuş iki yarı düzlemle sınırlı bir sektör çıkarılır. Daha sonra yarı düzlem yüzeyleri "yapıştırılır".

[6] *Bkz.* Vilenkin, 2000; Gangui, 2003; Sakellariadou, 2002.

[7] Bu kuram en yakın biçimde İngiliz astrofizikçi Sir Martin Rees'le ilintilendirilir. Bir yeniden gözden geçirme ve daha fazla kaynak için *bkz.* Haehnelt, 2003.

İleri sürülen bu topolojik bozuklukların çoğu, gözlemden önemli ya da açık desteğe sahip olmayan kuramlarla (örneğin değişik GUT'lar) ilgilidir. Öte taraftan elektrozayıf kuram gözleme dayalı olarak oldukça iyi desteklenir, öyleyse bu kuramın erken evrendeki süreçlerle ilgili ne anlattığına önem vermek zorundayız. Elektrozayıf kurama ilişkin simetri kırılımı sonucu ortaya çıkan kozmik tek kutuplar topolojik bir olasılıktır fakat gereklilik değildir. Bunlar U(2)'nin U(1)'e kendiliğinden simetri kırılımı sonucu fakat yalnızca, 10^{-12}s'den önce ortaya çıktığı kabul edilen kuramın kırılmamış U(2) simetrik fazında, "ayar kuramları" olarak adlandırılan şeyler zaten mevcutsa ortaya çıkabilirler. Bu tür tek kutuplar daha büyük bir GUT simetrisinin daha erken kırılmasından kaynaklanabilir fakat bu fikirler elektrozayıf kuramın hiçbir biçimde gerekli bir parçası değildir.[8]

Bu tür *ayar tek kutupları*, Dirac'ın bir seferinde elektromanyetizma (Abelci ayar) kuramı bağlamında (1931'de) ileri sürdüğü "manyetik tek kutuplar"ın, bir Yang–Mills (Abelci olmayan ayar) kuramı dahilindeki benzeridir. Dirac yaratıcı bir argümanla, Doğada tek bir manyetik kutup bile (ayrı bir manyetik kuzey ya da güney kutup) var olacak olsaydı bu durumda tüm *elektrik* yüklerinin belirli bir değerin, bu değer tek kutbun manyetik kuvvetiyle ters orantılı biçimde ilişkili olmak üzere, tamsayı katları olan değerlere sahip olmak zorunda olduğunu gösterdi. Aslında var olan gözlemler tüm elektrik yüklerinin, belirli bir değerin (protonunkinin üçte biri olan karşı–d–kuark yükününki diyelim; *bkz.* §3.5 ve §25.6) tamsayı katları *ol*duğunu güçlü biçimde ileri sürer. Bazıları bunu manyetik tek kutupların gerçek varlığına ilişkin olarak, koşullara bağlı bir kanıt biçiminde kabul eder. Yine de, böylesi tek kutupların gözlemle toptan çelişki içinde olmaması gerekiyorsa onlar, son derece olağandışı olmak zorundadır.[9] (Aksi halde, bu tür alanların varlıkları evrenin uzak erimlerinde gözlemlenirken "kısa devre yapan" kozmik manyetik alanlara ilişkin etkiye sahip olur.) Benzer biçimde böylesi tek kutuplar evrende bugün belirgin biçimde var olsaydı, Yang–Mills tek kutupları gözleme dayalı olarak sert çekişmelere neden olurdu. Bu konu, yakında göreceğimiz üzere, kozmoloji konusunun gelişiminde önemli anlatımlara sahip oldu.

28.3 Erken evren simetri kırılımıyla ilgili sorunlar

Buna geçmeden önce, Büyük Patlamadan 10^{-12}s kadar sonra gerçekleştiği varsayılan elektrozayıf kuramdaki simetri kırılımını yeniden ele al-

[8] *Bkz.* Chan ve Tsou, 1993.

[9] MACRO İşbirliği bu parçacıkların frekanslarıyla ilgili katı sınırlar ortaya koydu. *Bkz.* MACRO, 2002.

mak uygun olacaktır. Bunu gerçek bir olgu olarak mı kabul etmek zorundayız ya da o yalnızca, genellikle kuramın sunulduğu belirli biçime ilişkin bir alet olabilir mi? Anlayabildiğim kadarıyla elektrozayıf kuramcıların çoğu bu işlemi kesinlikle gerçek bir işlem olarak değerlendiriyor. Öyleyse okur bu yolla, burada onun gerçekliğini sorgulayan önermemin, kabul edilmesi alışıldık olmayan bir konum olduğu konusunda uyarılır. Yine de hızla ilerleyelim ve simetri kırılımı fikrine içkin zorlukların bazılarını ele alalım.

Bu konuyla ilgili (daha az geleneksel) fikirlerime zıt olarak evrenin erken tarihinde, içinde tüm lepton ve kuarkların kütlesiz olduğu, "zik" elektronları ve nötrinoların birbiriyle eşit konumda olduğu ve W ve Z bozonları ile fotonun bir U(2) simetrisi uyarınca (§25.5) uygun biçimde birbirlerinin birleşimlerine "döndürülebildiği" tam bir U(2) simetrisinin geçerli olduğu, Büyük Patlamanın 10^{-12}s sonrasından daha erken bir zamanın mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda, yaklaşık 10^{-12}s anında, sıcaklık evren boyunca kritik değerin hemen altına düştü. Bu anda, ayar bozonlarının olası kümelerine ait tüm U(2) simetrik $\mathcal{G}$ manifoldundan alınmış olan belirli bir (W^-, W^+, Z^0, γ) seçimi rasgele biçimde yapıldı. Şekil 28.2'de gösterilmiş olan demir toptaki mıknatıslanma bölgelerinde olduğu gibi bazı bölgelerde belirli bir seçim ve diğer yerlerde farklı seçimler yapılacağını bekleriz.

Bu noktada, bu bağlamdaki "aynı" ve "farklı" terimleriyle ne *kastedil*diği sorununa yönelmeliyiz. Olası ayar bozonlarına ilişkin $\mathcal{G}$ uzayı, her uzayzaman noktasında, simetri indirgenmesi gerçekleşmeden önce tümüyle U(2) simetriktir. *Demet* kavramına içkin olduğu üzere, bir noktadaki $\mathcal{G}$'yle oldukça farklı bir diğer noktadaki $\mathcal{G}$ arasında bir belirleme yapmanın, birbirinden ayrıcalıklı belirli hiçbir yolu mevcut olmamalıdır. Bu durumda, $\mathcal{G}$'nin bir noktadaki hangi elemanının $\mathcal{G}$'nin diğer bir noktadaki elemanıyla "aynı" eleman olarak adlandırılması gerektiğini söyleyen *önsel* bir kural elde etmiş görünmeyiz. Bu bize, "aynı" kavramını basit biçimde, kendiliğinden simetri kırılımının sağladığı belirli seçim tarafından sunulan kavram olarak *tanımlama*ya ilişkin bakış açısına tutunma serbestliği verir görünmektedir. Böylesi bir bakış açısı uyarınca bir noktada "dondurulmuş" belirli (W^-, W^+, Z^0, γ) diğer herhangi bir noktadaki ilgili (W^-, W^+, Z^0, γ)'yla belirlenir, böylece buradan hareketle, farklı noktalardaki simetri kırılımları arasında, Şekil 28.2'de gösterilmiş olan demir mıknatıslanma bölgelerinde ortaya çıkan türde "tutarsızlığa" tanıklık etmeyeceğimiz görülür.

Bununla birlikte bu tür bir bakış açısı, kendisi uyarınca yalnızca $\mathcal{G}$ uzaylarının, taban uzayı olarak $\mathcal{M}$ uzayzamanına sahip bir $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ lif demeti-

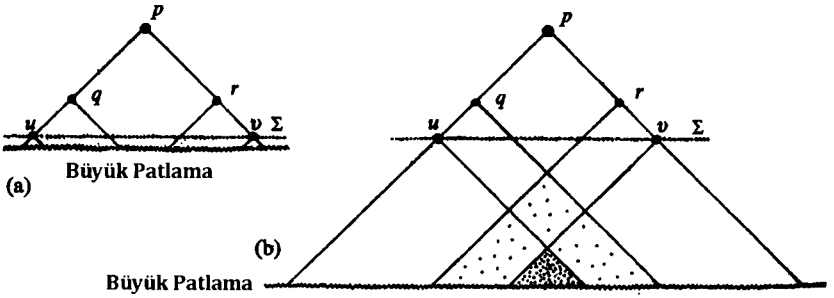
ne ait lifler olmayıp fakat aynı zamanda belirli ayar kuramının –bu durumda kırılmamış elektrozayıf kuram– bu demet üzerindeki bir ***bağlantı*** biçiminde tanımlandığı (§§15.7, 8), ayar kuramının ardındaki tüm fikre karşı çıkar. Bu bağlantı, $\mathcal{M}$'de verilmiş olan herhangi bir eğri üzerinde ilerlediğimizde, $\mathcal{G}$ uzayları arasındaki yerel olarak anlamlı belirlemeyi (paralellik) tanımlar.[10] Genelde bu belirleme kapalı döngüleri dolaştığımızda (bağlantıda bulunan, önemsiz olmayan ayar alanının varlığını ifade eden eğrilik nedeniyle; ***bkz.*** §15.8) evrensel olarak tutarlı değildir. Ne olursa olsun, farklı noktalardaki simetri kırılımında içerilen rasgelelik, $\mathcal{G}$ uzayları arasındaki yerel paralelliğin, kendiliğinden simetri kırılımında yapılan seçimlerle genellikle uyumlu olmayacağı anlatımına sahip olacaktır; böylece Şekil 28.2'deki resim makul olmayan bir benzetme değildir. Tutarsızlıkların, yeteri kadar yavaş biçimde soğuyan demir topta olduğu gibi, yeterli zaman verilirse "kendilerini gidereceğini" düşünebiliriz. Burada (Şekiller 28.3 ve 28.4'te belirtilenler gibi) hiçbir topolojik bozukluk olmadığı varsayılır. Burada gündeme getirmek istediğim konu, elektrozayıf kendiliğinden simetri kırılımı durumunda ***her zaman*** yeterli zaman olup olmayacağıdır.

Güçlük §27.12, Şekil 27.19b'de karşılaştığımız parçacık ufuklarıyla ilgilidir. Şekil 28.5'in şema biçimli konformal diyagramına bakın. p noktasında konumlanmış bir gözlemci iki farklı yönde, ilgili q ve r uzayzaman noktalarında kuasarlar görür (***krş.*** §27.9). Standart FLRW modeli uyarınca kuasarların kırmızıya kayması[11] (***bkz.*** § 27.7) yeterince büyükse bu durumda p ve q'nun geçmiş ışık konileri birbirini kesmez, böylece aralarında hiçbir tür iletişim gerçekleşemez. Birbirleriyle iletişimden yoksun olduklarından, uyumlu hale gelmek için simetri kırılımlarını üstte belirtildiği gibi "gidermek" üzere zamana sahip olmazlar. Kısa süre içinde, Büyük Patlama çizgisini konformal diyagram içinde, q ve r'nin sonuç olarak birbiriyle "haberleşir" hale geleceği şekilde geri iten "şişme senaryosu"nu ele alacağız. Yine de bu bize burada yardımcı olmaz çünkü elektrozayıf simetri kırılımının üzerinde gerçekleşeceği Σ 3–yüzeyi, var olan nedensellik değerlendirmelerimizde etkin biçimde Büyük Patlama rolü oynar çünkü

---

[10] Bu bağlantı başlangıçta $\mathcal{M}$ üzerindeki daha küçük $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ demeti üzerinde bulunan, lifleri her noktadaki leptonların U(2) simetrik $\mathcal{L}$ uzayları olan ∇ ayar bağlantısı olarak kabul edilir. Bununla birlikte, §14.3'teki olağan tensör analizinde ∇'nm vektörler üzerine nasıl etkidiğinin bilinmesinin genel tensörler üzerine nasıl etkiyeceğini saptamasındaki aynı biçimde ∇'nın $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ üzerindeki eyleminin bilinmesi onun $\mathcal{L}$'den tanımlanan "tensörler" üzerindeki eylemini tümüyle belirler. $\mathcal{G}$'yi $\mathcal{L}^{*}\otimes\mathcal{L}$ olarak kabul edebiliriz; bir "indis" aşağı birisi yukarı.

[11] z "kırmızıya kayması", $1+z$'nin, dalga boyunun kendisi yoluyla arttırıldığı çarpanı ölçeceği şekilde tanımlanır. Liddle, 1999, en kolay ulaşılabilir metindir; Dodelson, 2003, daha gelişmiş bir uygulamadır.



Şekil 28.5 Erken evrende nedensel bağımlılığı (ya da bağımsızlık) gösteren şema biçimli konformal diyagramlar. (a) p'deki gözlemci ters yönlerde, q ve r'de kuasarlar görür. Kendisi üzerindeki (γ fotonunu W ve Z fotonuyla ilişkilendiren) öncül tam U(2) elektrozayıf simetrisi kırık kabul edilen noktalı çizgi 10^{-11}'lik bir zamanda Σ 3–yüzeyini gösterirse, bu durumda q'daki "donmuş" belirli γ seçimi, q ve r'nin Σ'yla olan geçmişleri ayrık olmak üzere, neredeyse kesin olarak r'dekinden farklılık gösterir; yine de ilgili γ seçimleri kendi aynılık/farklılıklarını p'ye ulaşılana dek haberleşemezler. Benzer biçimde şimdi Σ, 10^{13}s anında ayrıştırmayı temsil ederse u ve v'deki sıcaklıklar, tüm geçmişleri ayrık olduğundan termalize etme yoluyla eşitlenemez. (b) Sonraki "ufuk sorunu"na ilişkin olarak şişmenin "çözüm"ü Büyük Patlama'yı, q ve r geçmişlerinin artık Büyük Patlama 3–yüzeyine ulaşacağı şekilde geri itmektir. Bununla birlikte önceki sorun, geçmişlerinin kesişimleri 10^{-11}s'deki "donma"dan önce gerçekleştiğinden çözümsüz kalır.

kendiliğinden simetri kırılımının Σ 3–yüzeyi üzerinde, herhangi geçerli bir ortak nedensel etki olmaksızın rasgele biçimde gerçekleştiği kabul edilir.

Şimdi qp ve rp çizgileri sıfır çizgileridir, o halde, foton ayar bozonları ailesinin kütlesiz tek üyesi olmak üzere, q'dan p'ye ya da r'den p'ye W ya da Z bozonu değil yalnızca foton yolculuk edebilir. Öyleyse bu iki boş çizginin tamamı boyunca, bir fotonun ne olduğuyla ilgili uyumlu bir kavrama sahip olmak zorundayız. q'daki "foton" kavramı yüksek olasılıkla r'deki "foton" kavramıyla (üstte belirtilen anlamda) uyumsuz olmalıdır çünkü her birinin ortak nedensel etki ve aralarında haberleşmek için zaman olmaksızın rasgele biçimde seçilmesi gerekmiştir.[12] "Farklı" tür fotonlar zaman içinde, p'deki gözlemciyi W–Z–γ'yı algılamakla ilgili şaşırtıcı karışıklıktan kurtarmak üzere "kendi sorunlarını giderebilir" mi? Bunun q'dan p'ye ve r'den p'ye olan dolaysız sıfır (diğer bir deyişle "ışık benzeri") bağlantılardan belirgin ayrılıklar söz konusu olmaksızın nasıl olası olabileceğini bilmiyorum. Bu, uzak nesnelerin optik teleskoplar yoluyla açık biçimde görülmesi gerçeğiyle bütünlüklü bir çelişkiye yol açabilir. Daha önce li-

[12] q ve r arasındaki bir *kudolanıklık* bağlantısıyla, *bkz.* §23.10, ilgili olası bir rol tasarlanabilir. Bu kesinlikle ele almaya değer fakat halihazırdaki "kendiliğinden simetri kırılımı" fikirlerinin ötesine geçer. Bu konular hakkındaki düşünüşüm Georg Sparling ve Bikash Sinha arasındaki konuşmalardan etkilenmiştir.

teratürde tartışıldığını görmemiş olsam da, bana burada gözlemle ciddi biçimde uyumsuz olma tehlikesi varmış gibi görünüyor.

Yine de bazı okurlar şüphesiz, elektrozayıf kuramla ilgili gözleme dayalı son derece etkileyici desteğin tümünü göz ardı eder görünmeme (belki de fısıldayarak) homurdanacaklar. Elbette tüm bunlardan yalnızca, kozmolojik uzaklıklardan yayılan olgularla ilgili bazı kafa karışıklıklarına sahip olmam nedeniyle vazgeçecek değilim! Gerçekten de öyle. Hiçbir biçimde elektrozayıf kurama ilişkin esas güzel kavrayışlardan vazgeçmemiz gerektiğini ileri sürmüyorum fakat genellikle kendisi üzerinden ortaya konduğu U(2) simetrisinin kırılımına hafif biçimde farklı bir yaklaşımı tercih ediyorum. Gördüğüm kadarıyla Doğanın parçacık fiziğine ilişkin gerçek düzeni henüz gün yüzüne çıkmadı. Böylesi bir düzen matematiksel olarak uyumludur ve günümüz QFT'lerinin sahip olduğu, makul biçimde ifade edilmiş pek çok fiziki soruya "∞" yanıtını yapıştırma kötü alışkanlığına sahip olmayacaktır. Bu (hâlâ bilinmeyen) "doğru" kuramın niçin sonlu yanıtlar verdiği bugün bizim için görülebilir değildir. Bu nedenle, tarihi şans ve olağanüstü insan becerisinin bir birleşimi yoluyla karşımıza çıkmış olup gözlemle eşleşen sonlu yanıtlar üretmemize olanak sağlayan çeşitli "hileler"e başvururuz. Var olan kavrayış düzeyimizle kesinlikle yeniden normalleşebilir olan zayıf ve elektromanyetik etkileşimlere ilişkin bir kuram isteriz ve Abelci olmayan kırılmış ayar simetrisi fikri yalnızca, bu tür yeniden normalleşebilir bir kurama yönelik bir rota sunmadı ayrıca böyle yapmaktaki kısıtlılıklar bizi bu etkileşimlerin daha geniş bir tablonun parçası olarak birbirine uyduğu biçime ilişkin derin gerçekler ailesinin yakınına yönlendirdi. Bununla birlikte parçacık fiziğinde kendiliğinden kırılmış simetrinin niçin Doğanın doğru yolu olması gerektiğini bilmiyorum. Aslında yeniden normalleşebilirliğin taleplerinin niçin elektrozayıf kuramın parametreleri arasındaki gerekli ilişkileri sağladığını görmenin başkaca yolları da bulunur.[13]

Bu, (§34.8'de döneceğim) önemli bir konuyu gündeme getirir: Doğanın gizemlerini araştırmakla ilgili çoğu fikirde hüküm süren *simetri* kavramı sıklıkla sahip olduğu varsayılan temel role gerçekten sahip midir? Bu gereğin niçin her zaman böyle olduğunu bilmiyorum. Parçacık fiziğini büyük bir simetri grubunda temellendirmenin (GUT felsefesinin bir parçası), temel fiziki bir kuram söz konusu olduğu sürece, gerçekten "basit" bir tablo oluşu beni zorunlu biçimde sarsmaz. Bana göre küçük şeyler yerine büyük simetri grupları daha karışıktır. Durum, Doğanın yasalarına içkin temel asimetriler bulunması ve gördüğümüz simetrilerin çoğu kez yalnızca,

[13] *Bkz.* Llewellyn Smith, 1973.

tam olarak en derin düzeylere dek ısrar etmeyen yaklaşık özellikler olması da olabilir. Bu konuya daha sonra (§34.8'de) geri geleceğim.

28.4 Şişme kozmolojisi

Üremeleri belirli GUT'ların bir özelliği olan kozmik tek kutuplar sorununa dönelim. Bu tek kutuplarla ilgili sorun, gerçek varlıklarına ilişkin herhangi bir belirtinin olmamasıdır. Daha kötüsü, bu tür tek kutuplara ilişkin kozmik bolluk içinde, GUT'lar tarafından öngörülenin çok altında gözleme dayalı dar sınırlar mevcuttur. Bununla birlikte 1981'de Alan Guth, evrenin, tek kutupların üretilmesinden bir süre sonra (yine de elektrozayıf simetri kırılmadan önce, 10^{-12}s anında), diyelim ki 10^{30} ya da belki 10^{60} ya da daha büyük bir katsayıyla genişlemesi gerekecek olsaydı istenmeyen tek kutupların artık, gözlemin de gerektirdiği üzere, algılanmaktan kolayca kurtulabilecek biçimde seyrek olması gerekeceğine ilişkin (aslında ayrıca daha önce bağımsız biçimde Alexei Starobinski ve Katsuoko Sato tarafından önerilmiş) "aşırı kötü" önermesini ileri sürdü.

Bu aşırı üstel genişlemeyle ilgili "şişen sürecin", evrenin düzenliliğiyle ilgilenerek başka amaçlara da hizmet edebileceği kısa sürede anlaşıldı. 27. bölümde vurgulandığı üzere aslında evren son derece düzenli ve çok büyük ölçekte uzamsal olarak düz olmaya yakındır. Bu durum kozmologlara bir bilmece sunar. Örneğin, erken evrene ilişkin olarak farklı yönlerde gözlemlenmiş sıcaklılar oldukça yakın biçimde (en azından 10^5'te bire kadar) aynıdır. Bu, ancak evrenin ele alınan farklı kısımları birbiriyle "iletişim halinde"yse, çok erken evrendeki bir "termalizasyon"un sonucu biçiminde kabul edilebilir. (Termodinamiğin ikinci yasasının bir gazın farklı yerlerdeki sıcaklıklarını, ısıl dengeye gelme işleminin bir parçası olarak eşitlemeye nasıl hizmet ettiğini anımsayın; *bkz.* §27.2.) Yine de Şekil 28.5'in incelenmesi bize, her ikisi de uzayzamandaki mevcut p konumumuzdan gözlemlenmiş olan farklı q ve r noktalarındaki sıcaklıların eşitliğinin, (artık kozmik kara cisim ışınımının oluştuğu zamandaki "ayrıştırma" anında oldukları kabul edilen) q ve r noktalarının standart modelde birbirlerinden nedensel iletişime asla sahip olamayacak kadar uzak olmaları nedeniyle, geleneksel kozmolojik modellerdeki termalizasyonun sonucu olamayacağını söyler.

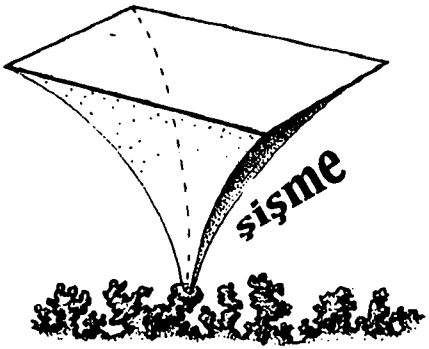
Standart modeldeki termalizasyon için gerekli olan bu nedensel iletişim olanaksızlığı *ufuk sorunu* biçiminde adlandırılır. Şişme sürecine ilişkin bu anlamdaki etki Şekil 28.5'in konformal diyagramında gösteriliyor. Büyük Patlamayı temsil eden uzaysal 3–uzay artık, q ve r'nin geçmişleri-

nin Büyük Patlamayı açıklayan 3–yüzeye ulaşmadan önce kesiş*eceği* ve termalizasyonun etki gösterme fırsatına sahip olacağı şekilde çok "daha erken" bir konuma yerleştirilmiştir. Böylece artık bu vesileyle q ve r'deki sıcaklıkların eşitliğinin ortaya çıkabileceğini düşünebiliriz.

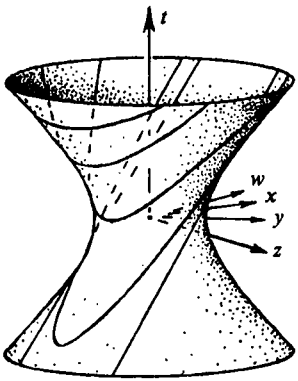
Önerilmiş bu şişen sürecin hissedilen bir diğer faydası, madde dağılımı ve uzayzaman geometrisine ilişkin kayda değer düzenliliğin, bu *pürüzsüzlük sorunu* olarak adlandırılmak üzere, bir açıklamasını sağlayabilir olmasıydı. Fikir, şişmeyle birlikte evrenin başlangıç durumunun ayrıntıda son derece düzensiz olmuş olabileceğiydi fakat evrenin şişme aşaması süresince muazzam genişlemesi bu düzensizlikleri "giderme"ye hizmet etti. Böylece bu durumda FLRW'ninkine oldukça yakın bir evren beklenir. Şişme bakış açısı, "kendine özgü" bir başlangıç durumunun bile küçük ölçekte, pürüzsüz bir manifolda benzeyeceğini tahmin eder ve bu küçük pürüzsüz parçanın şişen faz sırasında, uzamsal olarak düz biçimde görünecek şekilde, kozmolojik boyutlara genişlediğini görürüz; *bkz.* Şekil 28.6 (ve *krş.* Şekil 12.6). Bu olağanüstü fikirle ilgili kendi değerlendirmeme birazdan geleceğim. Şimdilik bu tabloda, evrenin yalnızca düzenli olmayıp aynı zamanda sıfır uzamsal eğriliğe ($K = 0$) sahip olduğuna işaret etmeye değer. Göreceğimiz üzere bu konunun tarihi gelişimiyle ilgili önemli bir etmendir. Bununla birlikte gözlemlenebilir evren, ortalamada, gerçekten uzamsal olarak düz olsa da olmasa da, öyle olmaya kesinlikle dikkat çekici biçimde yakındır. Bu durum pek çok kozmoloğa *düzlük sorunu* olarak anılan bir bilmece hediye etmiştir.

Genişlemeyle ilgili şişen fazın, Şekil 28.5'teki gibi konformal diyagramlardaki Büyük Patlama 3–uzayının geri hareketiyle ilişkisi hemen görülebilir cinsten değildir. Öyleyse, bu "şişen faz"ın dayandığı belirli kozmolojik modeli incelemek öğretici olacaktır. Bu, *de Sitter* uzayının "kararlı durum" versiyonudur. Matematiksel olarak de Sitter uzayını açıklamanın en çabuk yolu onun, (+ − − − − imzalı) Minkowski 5–uzayındaki (+ − − − imzalı) bir Lorentzci 4–küre olduğunu söylemektir. Bu açıklama §18.4'ün geometrik "imza çevirme" fikirleriyle uyum içindedir fakat de Sitter uzayını Şekil 28.7'deki *hiperboloid* biçiminde resmedersek geometrik olarak daha açık olur. Bu noktada, + + − − − imzalı bir sözde Minkowski 5–uzayındaki bir Lorentzci 4–küre olup *karşı–de Sitter* uzayı olarak adlandırılan diğer bir modeli belirtmeye değer (Şekil 28.8).[28.4] Fiziki olarak karşı–de

[28.4] Ardalan 5–uzayındaki de Sitter ve karşı–de Sitter 4–uzaylarıyla ilgili denklemleri, şekiller 28.8 ve 28.9'da belirtilen t, w, x, y, z koordinatlarını kullanarak açık biçimde yazın. de Sitter uzayının "yarı"sı içinde, ona içkin metriğin bu bölümde daha sonra verilecek olan "kararlı durum" biçimini alacağı şekilde koordinatlar bulun.



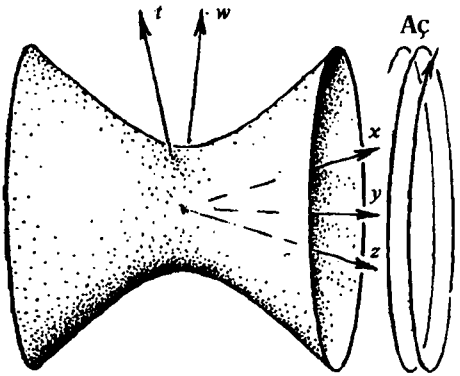
Şekil 28.6 Şişmenin temelinde yatan yönlendiricilerden biri, belki de 10^{50}'lik bir üstel genişlemenin (diyelim ki $10^{-35}s$ ve $10^{-32}s$ anları arasında) kendine özgü bir başlangıç durumunun sorunlarını, esasen düzenli, uzamsal olarak düz, şişme sonrası bir evren sağlayacak şekilde "giderme"ye hizmet edebilecek olmasıdır.



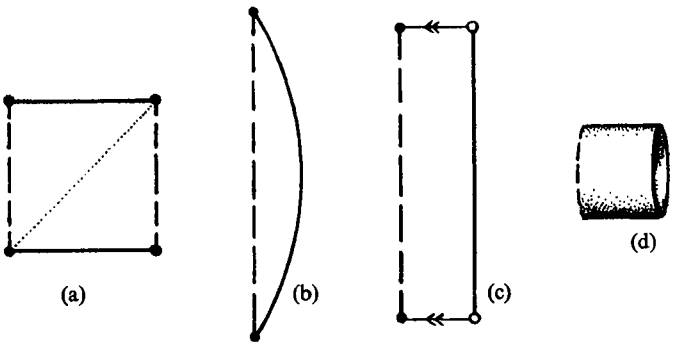
Şekil 28.7 (İki uzamsal boyutun baskılandığı bir hiperboloid biçiminde resmedilmiş) de Sitter uzayzamanı (metriği $\mathbf{ds^2 = dt^2 - dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ olan) $\mathbb{M}^5$ Minkowski 5–uzayındaki (içsel $+ - - -$ metrik imzasını veren sanal yarıçaplı) bir Lorentzci 4–küredir. Kararlı durum modelini elde etmek üzere hiperboloidi $t = w$ boyunca ikiye "kes"eriz. Sabit zaman $t - w$ pozitif sabitiyle verilir.

Sitter uzayının, (nedenselliği ihlal eden) *kapalı zamansal eğrilere* (örneğin t ve w eksenlerini kapsayan düzlemdeki çember) sahip olması nedeniyle çok da hassas bir uzayzaman olmadığına dikkat edin; *bkz.* §17.9 ve Şekil 17.18. Bazen "karşı–de Sitter uzayı" terimi, içinde sabit (x, y, z) düzlemindeki her çemberin bir çizgi biçimine açıldığı ve tüm uzayın basitçe bağlantılı hale geldiği (§12.1) "açılmış" versiyona atfedilir. Şekil 28.9a'da de Sitter uzayı, Şekil 28.9b'de onun, (noktalı sınır çizgisi kesiği belirtmek üzere) kararlı durum modelini temsil eden parçası Şekil 28.9c'de (diyagramın üst ve altı açıklanmak zorunda olmak üzere) nedensellik çiğneyen karşı–de Sitter uzayı ve Şekil 28.9d'de açılmış (nedensel) karşı–de Sitter uzayıyla ilgili katı konformal diyagramları çizdim.

Kararlı durum evrenini açık biçimde elde etmek üzere de Sitter uzayını, Şekil 28.8'de gösterilen Minkowski 5–uzayının $t = w$ 4–düzlemi boyun-



Şekil 28.8 (Uzamsal iki boyutu baskılanmış haldeki bir hiperboloid olarak resmedilmiş) karşı–de Sitter uzayzamanı, ($ds^2 = dt^2 - dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ metrikli) sözde Minkowskici 5–uzayındaki (içsel + – – – metrik imzasını veren pozitif yarıçaplı)Lorentzci bir "4–küre"dir. Tanımlandığı üzere, zamansal eğrileri kapattık fakat bunlar, (t, w)–düzlemindeki sonsuz biçimli bir "açma" yoluyla ortadan kaldırılabilirler.



Şekil 28.9 Katı konformal diyagramlar (Şekil 27.16a'daki uzlaşılarla birlikte): (a) iç noktalı çizginin üzerindeki bölgenin kararlı durum modelini verdiği de Sitter uzayı; (b) karşı–de Sitter uzayı (nedensellik ihlalleri olmaksızın tam açılmış versiyon); (c) nedensellik çiğneyen orijinal "hiperboloid" biçimindeki, üst ve alt kenarlarının açıklanması gereken karşı–de Sitter uzayı. (d) (c)'nin belirleme gerçekleşmiş haliyle aynısı, böylece diyagram bir silindir biçiminde görünür.

ca, yalnızca "üst" yarıyı muhafaza ederek "kes"eriz.[14] Tuhaf biçimde, bu modelde kesik (Şekil 28.10b'deki kesikli çizgi) nedeniyle bir "noksanlık" söz konusu olsa da bu noksanlık genellikle bir bozukluk olarak değerlendirilmez çünkü uzayzamana alttaki "silinmiş" kısımdan gerçek hiçbir parçacık girmez. Üst kısımla ilgili metrik (A sabit olmak üzere), §27.11'de verilmiş olan FLRW metriğinin, $K = 0$ düz uzay kesitleri ve üstel genişlemeyle ($e^{A\tau}$ katsayısı) birlikte belirli bir durumu olan

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{A\tau}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

[14] *Bkz.* Schrödinger, 1956.

biçiminde yeniden ifade edilebilir.[28.5] (Bu metrik, 1950'ler ve 1960'larda Hermann Bondi, Thomas Gold ve Fred Hoyle onun gerçek evrene ilişkin bir model, önemli bir estetik çekiciliğe sahip "kararlı durum" modeli, olduğunu şiddetle iddia ettiklerinde, özel öneme sahipti. Model, 1960'larda gözlemlerle, özellikle mikrodalga ardalan ölçümleri ve uzak galaksilerin sayımıyla, çelişki içinde olduğu açık hale geldiğinde gözden düştü.)

(Karşı–)de Sitter uzayıyla ilgili R_{ab} Ricci tensörü g_{ab} metriğiyle *orantılıdır*.[28.6] (Bu tensörün tanımı ve ayrıca Einstein alan denklemi vb için *bkz.* §19.6.) Madde enerji momentum tensörünün, izi çevrilmiş Ricci tensörünün $-(8\pi G)^{-1}$ katı olduğunu ileri süren orijinal $R_{ab} - 1/2Rg_{ab} = -8\pi G T_{ab}$ Einstein alan denklemini anımsayın. Böylece de Sitter ve karşı–de Sitter modelleriyle ilgili olarak, T_{ab} "madde tensörü"nün kendisi metrik tensörle orantılı olmak zorundadır. Aslında sıradan hiçbir madde bu özelliğe sahip olamaz (çünkü örneğin ona ait enerji momentum, hiçbir durağan çerçeve tanımlamaz). Normal bakış açısı karşı–de Sitter uzaylarını, Einstein denkleminin bir Λ *kozmolojik sabiti*nin dahil edildiği biçimde kabul edilmek zorunda olduğu kütlesiz vakumları temsil eder biçimde değerlendirmektir, böylece artık alan denklemleri bize

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab}$$

ifadesini verir. Burada, Λ üstteki kararlı durum metriğindeki üstel büyüme çarpanını ölçekleyen sabit olmak üzere $\Lambda = A^2$'dir. Şişme kozmolojisindeki şişen "malzeme" kendisiyle ilgili birazdan bir şeyler söyleyeceğim bir "yanlış vakum" olarak kabul edilir.

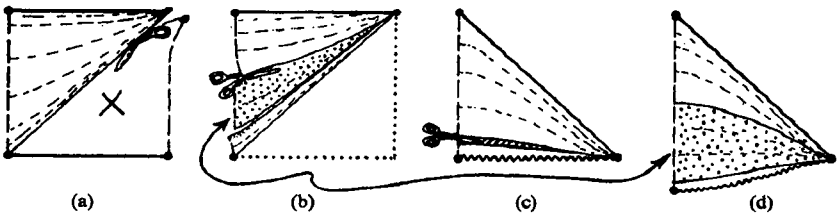
Bir şişen evren modeli oluşturmak üzere kararlı durum evreninin, τ sabitine ilişkin iki 3–yüzeyi arasında bir parça alırız ve onu standart bir $K = 0$ FLRW modelinin iki parçasına yapıştırırız. Bu işlem Şekil 28.10'da gösteriliyor. Şekil 28.10b'de kararlı durum modelinin büyük oranda şişen bir kısmı seçilir. Şekil 28.10c'de $K = 0$ FLRW modelinden bir parça kesilir ve böylece o Şekil 28.10d'de modeli tamamlamak üzere şişen kısmı alabilir. Eklenmiş kararlı durum parçası aslında Büyük Patlamayı (konformalden, diğer bir deyişle nedensel bakış açısından), parçacık ufkunun fazlasıyla genişleyeceği biçimde "geri iter"; *bkz.* Şekil 28.5b.

Bu şişen süreci gerçekleştirmek üzere, bilinen (ve varsayılan) fiziki parçacık/alan hayvanat bahçesine yeni bir φ skaler alanını sunmak gere-

---

[28.5] $ds^2 = dt^2 - (R(t))^2 d\Sigma^2$ FLRW biçiminin de Sitter ve karşı–de Sitter uzaylarıyla ilgili metrik formunu bulun. Buradaki $d\Sigma^2$, alştırma [27.18)'deki ikinci ifade uyarınca hiperbolik 3–metriği verir. Bu tam (karşı–)de Sitter uzayının hangi kısmını kapsar?

[28.6] Herhangi bir hesaplama yapmaksızın niçin böyle olması gerektiğini görebiliyor musunuz?

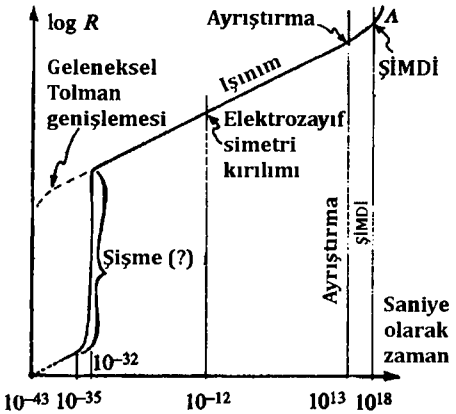


Şekil 28.10 Şişen bir evren modeli oluşturma takımı. (a) de Sitter uzayı kararlı durum modelini vermek üzere kesilir. (b) Kararlı durum modelinin iki sabit zaman çizgisi arasında büyük oranda şişen parçası seçilir. (c) $K = 0$ FLRW modelinden küçük sabit zaman aralığı çıkarılır. (d) Şişen evren modelini elde etmek üzere b'den gelen parça c'ye yerleştirilir. Bu, Büyük Patlamayı Şekil 28.5b'deki gibi geri hareket ettirir.

kir. Haberdar olduğum kadarıyla bu φ alanı, fiziğin bilinen herhangi diğer bir alanıyla dolaysız biçimde ilişkili olarak kabul edilmez fakat yalnızca erken evrendeki şişen bir fazı elde etmek üzere sunulur. Bazen "Higgs" alanı olarak anılır fakat elektrozayıf kuramla (§25.5) ilişkili "sıradan" bir alan gibi görünmez. Bazı modeller, her faz için farklı bir skaler alanın bulunmak zorunda olduğu, ayrı bir şişen fazdan fazlasına gerek duyar. Şişme işlemi, Şekil 28.1'deki "Meksika şapkası"nınkiyle, başlangıç simetrisi olmaksızın ilişkisi olan bir resim biçiminde açıklanır. Düşey eksenin "etkin enerji"yi temsil ettiği, Şekil 28.11'dekine benzer bir diyagram sıklıkla kullanılır. Bakış, şişme süreci öncesinde durumun –Şekil 28.1'deki "misket"imiz– kamburun tepesinde olup daha sonra azar azar aşağı yuvarlanması şeklindedir. Bu yuvarlanma süresince şişme ve "misket" dibe ulaştığında durur. Şişme aşaması süresince, bugün alışık olduğumuzdan farklı bir vakuma yönelik kuantum mekaniksel faz geçişini temsil eden bir "yanlış vakum" bölgesine sahip oluruz.

§27.11'de belirtildiği üzere, artık bu çağda pozitif bir Λ'yla ilgili sağlam kanıtlar mevcuttur fakat bu, olağan terimlerde suyun yalnızca yaklaşık

Şekil 28.11 Çok erken evrenin etkin enerji yoğunluğuna, şişme modeli uyarınca skaler "inflaton" ϕ kuantum alanıyla ilgili etkin $V(\phi)$ potansiyelince hâkim olunur. Grafik, şişme, durum ("yanlış bir vakum"un meydana geldiği varsayılmak üzere) soldan aşağıya doğru "yuvarlanır"ken ortaya çıkmak üzere, $V(\phi)$'nin genellikle varsayılan bir biçimini gösteriyor. Dibe ulaşıldığında şişme durur.



Şekil 28.12 Şişen bir faz içerip logaritmik bir grafik olarak ortak biçimde tanımlanan "evren tarihi". $\log R(t)$ burada $\log t$'ye karşı çizilir.

10^{-30}'da biri kadarlık bir yoğunluğa karşılık gelecek şekilde son derece küçüktür. Diğer taraftan şişen fazın yanlış vakumu suyunkini yaklaşık 10^{80} kat aşan bir yoğunluğa karşılık gelen etkin bir Λ'ya sahipti. Bu, sıradan herhangi bir maddenin enerji momentum tensörüne tümüyle hâkim olur ve işte bundan dolayı de Sitter modeli bu faz için kullanılabilir.

Şekil 28.12'de çok erken evren tarihinin, bize sıklıkla sunulup artık neredeyse "standart" hale gelmiş olan türdeki resmini gösterdim. Zaman ve uzaklık ölçülerinin 10'un farklı üsleriyle işaretlenmiş, bir saniye (düşey) ya da bir santimetre (yatay) birimlerindeki (Şekil 5.6'daki kaydırma kuralı gibi) "logaritmik" ölçüler olduğuna dikkat edin. "Yarıçap" §27.11'deki (§19.6'daki "R" skaler eğriliğiyle karıştırılmaması gereken) "$R(t)$"nin tarihini gösterir. Bana göre tablo, sıklıkla fiili olarak kurulu bir gerçek olarak sunulsa da, bir saniyenin yaklaşık onda birine kadar son derece kurgusal olarak değerlendirilmek zorundadır!

28.5 Şişmeyle ilgili yönlendiriciler geçerli midir?

Evrenle ilgili böylesi şişen bir tablonun gerçeğe yakın olma olasılığına inanmak üzere ortadaki neden nedir? Belirgin popülerliğine karşın tüm fikirle ilgili şüphe duyulması için kendi sebeplerimi ortaya koymak isterim! Yine okura meşru uyarımı yapmak zorundayım. Şişme kozmolojisi modern kozmolojik düşünüş bütününün temel bir parçası haline geldi. Şişme gerekliliğine henüz ikna olmayanlar arasında, aşağıdaki eleştiride benim kadar olumsuz yaklaşıma sahip bazılarının bulunduğunu göreceksiniz. Benim açıklamamla şişme fikrine daha fazla beğeni duyan bir diğerini "den-

geleme" gereği hissederseniz Alan Guth'un kolay erişilebilir *The Inflationary Universe* (Şişen Evren) kitabına bakın.[15] Kendi adıma şeyleri, onları gördüğüm gibi sunmak zorundayım ve şişme kozmolojisi temelinden şüphe duymak için güçlü nedenler olduğuna inandığımdan bunları okuyucuya sunmaktan kaçınmamam gerekir.

Kritik değerlendirmemi sunmadan önce uyarılarımın şişen evrenin yanlış olduğunu söyle*me*diğini açık hale getirmeliyim. Onlar yalnızca şişme fikrinin ardındaki başlangıç yönlendiricilerinin çoğundan kuşkulanmak üzere güçlü sebepler sunuyor. Sonuçta geçmişin çoğu önemli bilimsel fikrinin, kendisinden sonra gelen anlayışlar karşısında tutunamayan yönlendiricilere (kısmen) dayanmış olduğunu anımsayabiliriz. Bunların en önemlilerinden biri Einstein'ın, genel görelilikle ilgili nihai keşfine bir kılavuz olarak *Mach ilkesi*ne belirgin bağlılığıydı. Mach ilkesi fiziğin tümüyle bir cismin diğerine olan ilişkisi içinde tanımlanması ve ardalan uzayı kavramından vazgeçilmesi gerektiğini ileri sürer.[16] Bununla birlikte Einstein kuramına ilişkin sonraki analizler Mach ilkesinin, Mach'ın fikrinin yönlendirici belirleyiciliğinden bağımsız olarak,[17] genel görelilik tarafından desteklenmediğini gösterdi.[18] Diğer bir örnek Dirac'ın, temel olarak birinci derece bir denklemle ilgili olması gerektiğini algıladığı şeye dayandırdığı (*bkz.* §§24.5, 6), elektron dalga denklemi keşfidir. QFT'ye ilişkin sonraki anlayışlar bu gerekliliğin gerekli olmadığını gösterdi (§26.6).

Benzer biçimde şişme kozmolojisiyle ilgili gözleme dayalı öngörüler ikna edici biçimde onaylanırsa başlangıç yönlendiricilerindeki herhangi bir uygunsuzluk daha önemsiz olur ve kuram, Guth ve diğerlerini bu belirli düzene yönelten orijinal "merdiven" olmaksızın kendi ayakları üzerinde durabilir. Aslında şişme yanlıları son yıllarda bir miktar etkileyici yeni gözlemle dikkat çekici biçimde uyuşan belirli bazı öngörülerde bulundular.

Diğer pek çok bilim insanının aksine, özellikle evrenin başlangıcıyla ilişkili olan kozmoloji konularında belirli bir dikkatin öğütlenmesi gerektiğine inanıyorum. İnsanlar evrenin başlangıcıyla ilgili sorular karşısında sıklıkla güçlü duygusal tepkiler gösteriyor ve bunlar bazen dini tercihlerle

---

[15] *Bkz.* Guth, 1997. Dodelson, 2003 ya da Liddle ve Lyth, 2000 teknik kaynaklardır. Titiz ve önemli bir inceleme için Börner, 2003, büyük ölçüde önerilebilir geliyor.

[16] *Bkz.* Barbour, 2001a, 2001b; Sciama, 1959; Smolin, 2002. Tümüyle "Machcı" bir fiziki yaklaşıma ilişkin bir örnek §32.6'da kısaca açıklanacak olan *spin ağlarına* olan yaklaşımdır.

[17] *Bkz.* Ozsvath ve Schücking, 1962, 1969.

[18] Bununla birlikte bu konularla ilgili Einstein'ın kuramının sonuçta belki de "Machcı" olduğuna destek olarak yorumlanabilecek daha yeni bakış açıları söz konusudur. *Bkz.* Barbour, 2004; Barbour vd., 2000; Raine, 1975.

açık ya da kapalı biçimde ilintili oluyor. Bu durum yapmacık değildir çünkü aslında konu içinde yaşadığımız dünyanın tümünün yaratılışıdır. §27.13'te vurgulandığı üzere ikinci yasa nedeniyle, evrenin Büyük Patlamada başladığı biçimde olağanüstü bir kesinlik derecesi söz konusudur ve bu şüphesiz olarak derin bir bulmaca sunar. Şunu sorarız: günümüz bilimsel kavrayışımızın ötesinde bile olsa Büyük Patlamanın kesinliğine ilişkin bu bulmacanın çözümü, bir bilimsel gelecek kuramınca yanıtlanabilecek nitelikte bir şey midir? (Esasen bu benim iyimser konumudur; *bkz.* §§30.10–13.) Ya da ondan, bir tür "tanrı eylemi" olması nedeniyle vaz mı geçmemiz gerekir? Şişme yanlılarının bakışı, bu bilmecenin kendi kuramlarınca esasen "çözülmüş" olması anlamında farklıdır ve bu inanç şişme konumuna güçlü bir itilim kuvveti sağlıyor. Bununla birlikte ikinci yasa tarafından ortaya konmuş olan derin bulmacanın şişme yanlılarınca ciddi biçimde gündeme getirildiğine asla şahit olmadım!

Şişme yanlılarınca bunun yerine kozmolojinin standart modelinde belirli üç sorun, bunların tümü aslında erken evrendeki başlangıç kesinliğiyle ilgili konular olmak üzere, seçilip belirlenir. Bunlara özel olarak §28.4'te, ufuk sorunu, pürüzsüzlük sorunu ve düzlük sorunu biçiminde değinildi. Standart modelde bu konular başlangıç Büyük Patlama durumuna yönelik bir "ince ayar"la idare edilir ve bu, şişme yanlılarınca "çirkin" olarak değerlendirilir. İddia, başlangıç durumuna ilişkin böylesi bir ince ayar gereğinin şişme tablosunda ortadan kalktığıdır ve bu, estetik olarak çok daha memnuniyet verici fiziki bir tablo biçiminde değerlendirilir. Estetik bakış açısıyla, şişme yoluyla ortaya çıkan toplam uzamsal düzlükle ilgili sonuç da ayrıca pozitif bir özellik olarak değerlendirilir.[19]

Bana öyle geliyor ki, bu tür estetik temelli argümanlarla ilgili olarak büyük dikkate sahip olunması gerekir. Şişme tablosuna temel oluşturup estetik konumları bir biçimde sorgulanabilir olan, örneğin fizikte bilinen diğer alanlarla ilişkisiz ve yalnızca şişmeyi işler kılmak için tasarlanmış çok belirli özelliklere sahip skaler bir alan (ya da belki de, birden fazla şişme süreci hayal edilirse bağımsız birçok skaler alan) sunumu gibi bazı elemanlar kesinlikle söz konusudur. Ayrıca $K = 0$'a ilişkin estetik öncelik oldukça tartışmalıdır. Hiperbolik durumu ($K < 0$) belirgin biçimde daha güzel bulan (kendim de dahil) pek çok matematikçi tanıyorum! Yine de diğerleri uzamsal bir sonlu ($K > 0$) evrenin "rahatlığı"nı tercih ediyor. Güzelliğin, temel kuramsal fizikte bir kılavuz olarak rolü genel konusu bu kitapta, özellikle şişmeyle (§34.4) ve bilimsel modanın rolüyle (§ 34.3) ilgili

[19] Bu estetik boşluk özellikle Mario Livio'nun gözde açıklamasında savunulur. *Bkz.* Livio, 2000.

diğer konular gibi daha sonra tartışılacak (*bkz.* §34.9). Şişme günümüz kozmologları arasında kesinlikle son derece modadır. Modaya uygun bu konumun ne kadar haklı olduğunu görmek ve sınamak önemlidir.

Üstte belirtildiği üzere kozmik şişme fikrine ilişkin temel itirazlarım esasen onun ardında yatan yönlendiricilerle ilgilidir. İlk olarak ufuk sorununu ve bununla, örneğin, farklı yönlerdeki neredeyse eşit ardalan sıcaklıklarının *termalizasyon* sonucu olarak algılandığı şişme kozmolojisinde nasıl başa çıkıldığını ele alalım. Şişme, aksi durumda bu termalizasyonu önleyecek olan parçacık ufuklarını ortadan kaldırmak üzere devreye sokulur.

Bununla birlikte, erken evrenin bir termalizasyon işleminin sonucu olarak ortaya çıkan düzenliliği (§28.4) açıklamaya çalışmakla ilgili, bunun genel olarak ardalan sıcaklığı, madde yoğunluğu ya da uzayzaman geometrisindeki bir düzenlilik olup olmamasına ilişkin, temel olarak yanlış anlaşılmış olan bir şey söz konusudur. Aslında evrenin niçin, bir termalizasyon işlemine başvuran *herhangi* belirli bir anlamda özel olduğunu açıklamaya çalışmak temel bir yanlış anlamadır. Çünkü termalizasyon gerçekten bir şey yapıyorsa (örneğin farklı bölgelerdeki sıcaklıkları daha önce olduklarından daha eşit yapmak gibi), bu durumda bu entropideki belirli bir artışı gösterir (§27.2). Bu nedenle hatta evren, termalizasyondan önce, sonrasından daha özel olmuş olmalıdır. Bu yalnızca, evrenin başlangıçtaki olağanüstü özel doğasını (§27.13) kabullenmeye çalışırken daha önce sahip olmuş olabileceğimiz güçlükleri arttırmaya yarar. Erken evrenin alışılmış dışındaki sınırlı doğasıyla ilgili derin bilmeceler kesinlikle söz konusudur. Yine de bu sınırlılıklar 27. bölümde belirtildiği üzere, termodinamiğin ikinci yasasının varlığı için temeldir. Bu sınırlılıkları basit olarak ikinci yasanın *belirtmeleri*ne (termalizasyon bir örnek olmak üzere) başvurarak açıklayabilmeyi bekleyemeyiz!

Bu noktayı ayrıntılandırmak üzere, evrendeki belirli avantajlı konumumuzdan, farklı yönlerde oldukları görülen sıcaklıkların eşitliği konusunu ele alın. Erken bir kozmik t_1 anında birbirine uzak iki bölgedeki sıcaklığın aslında eşit olduğunun görüldüğünü ve bu "özgüllüğü" kafa karıştırıcı bulduğumuzu düşünün. İki olasılığı ele alalım. (a) Sıcaklıkların daha da önceki bir tarihte aslında eşit olmayıp t_0 ve t_1 anları arasında gerçekleşen bir termalizasyon işleminden hemen sonra eşit hale geldiğini düşünebiliriz. (b) Alternatif olarak daha önceki t_0 anında iki sıcaklığın aslında birbirine eşit olduğunu ve hiçbir termalizasyonun gerçekleşmediğini düşünebiliriz. (a) durumunda t_0 ve t_1 arasında bir entropi artışı olduğunu ve böylece t_0 anında t_1'dekinden bile daha büyük bir özgüllük derecesi bulunduğunu görürüz. Bu durumda, evrenin t_0 anındaki özel doğası tarafından,

t_1'deki özgüllüktekinden bile daha fazla kafa karışıklığına uğratılmış olmamız gerekir. Sorun daha da kötüleşti! Öte taraftan (b) durumunda t_0'daki özgüllük sorunu en azından t_1'dekinden daha kötü değildir. Her iki durumda da, şu veya bu anlamda, *evrenin niçin özel olduğuna ilişkin bilmeceyi* açıklamadık fakat bu konuya yönelmek üzere termalizasyondan argümanlar devşirmenin faydasız olmaktan da kötü olduğunu görüyoruz!

Evrenin düzenliliğinden (ve düzlüğü) ne haber öyleyse? Burada temel şişme argümanı farklıdır. İddia, evreni böylesine düzenli (uzamsal olarak düz) yapmaya yarayan şeyin şişme fazının üstel genişlemesi olduğudur. Fikrin, "kendine özgü" bir başlangıç durumuyla başladığımızda şişen fazın üstel genişlemesine ilişkin "germe etkisi"nin o başlangıç durumuna ilişkin düzensizlikleri gidermeye hizmet edeceğidir. Elbette böylesi işlemlerin şansı olup olmadığını bilmek üzere "kendine özgü" bir başlangıç geometrisinin neye benzeyebileceği üzerine bir fikre sahip olmaya gerek duyarız. Önemli bir varsayım, bu tür bir durumun, küçük bir ölçekte, pürüzsüz olmak zorunda oluşuna ilişkin olan varsayımdır. Bununla birlikte örneğin fraktal kümeler, ne kadar gerilirse gerilsin, asla kendi sorunlarını gidermez. Parçaları Şekil 1.2'de gösterilmiş olan Mandelbrot kümesini anımsayın. Mandelbrot'un daha az pürüzsüz hale gelir göründüğü herhangi bir şey olursa, o, daha fazla büyütülür.

Okuyucunun mırıldandığını duyuyorum: bu kesinlikle kaçamak bir yanıttır. Pekâlâ, belki germenin şeyleri pürüzsüzleştirmediği bazı patolojik durumlar mevcut olabilir fakat genel gerçekçi durumda böylesi şeyleri kesinlikle bekleyemeyiz. Ne yazık ki bu hiçbir biçimde böylesine açık değildir; kendine özgü bir başlangıç durumunda fraktal –ya da ondan da kötü– olan bir şey, neredeyse kesinlikle hazırlıklı olmamız gereken bir şeydir. Kuşkusuz bu kendine özgü tekil durum her neyse onu, şişen süreçlere izin veren bir fizik nedeniyle kolayca giderilecek bir şey olarak bekleyemeyiz. Peki niçin? Nedenler ayrıntılı teknik özelliklerle ilgili değildir ve basit olarak, gerçek evrenimizin, ikinci yasa nedeniyle yapamamış olacağı, *bkz.* §27.7, kendine özgü bir durumda başlamış olabileceğini varsaymaya çalışmakla ilgili yanlış anlamanın doğasına içkindir.[20] Böylesi bir "kendine özgü" durumun neye benzediğiyle ilgili bir fikir edinmek istersek çöken kapalı bir evrenin, şematik olarak Şekil 27.20a, b'de ve sonra zaman akışı-

[20] Bu bakışın, 1960'larda Charles W. Misner ve Yakov B. Zeldovich tarafından birbirlerinden bağımsız olarak ortaya koyulup, ikinci yasayla görünüşteki temel çelişkiye karşın evreni pürüzsüzleştirme girişiminde ısıl işlemler göreve çağrılmış olmak üzere, kendisi yoluyla rasgele bir başlangıç durumunun hayal edildiği "Kaotik kozmoloji" olarak anılmış şeyde var olan bir öncülü söz konusuydu. Orijinal tez için *bkz.* Misner, 1969.

nın tersine ilişkin Şekil 27.20c'deki (ya da Şekil 27.20d) gibi, son aşamalarını ele alırız. Katılaşan kara delik tekilliklerinin muazzam karışıklığı, *zamanda tersinmiş biçim*deki, kendine özgü bir Büyük Patlamadan beklememiz gereken türde bir şeydir.

Elbette okuyucudan, karmakarışık bir kendine özgü Büyük Çöküşte içerilen ayrıntılı karışık fraktal benzeri geometriyi hemen anlamasını beklemiyorum! Bununla ilgili ben de çok küçük bir gerçek algıya sahibim ve herhangi başka birinin de bu konuyla ilgili pek fazla şey bildiğini sanmıyorum.[21] Bununla birlikte bu geometriyle ilgili ayrıntılı herhangi bir şey bilmemiz gerekmiyor. Esas konuyu anlamak için son derece düzensiz, başlangıçta geniş bir durumdan başlayarak (*krş.* Şekil 27.20b) oluşturabileceğimiz herhangi bir çöken evren modelini ele alın. *Bir şeye* çökmek zorundadır; aslında çöküşü, kesin matematiksel teoremlerden makul biçimde çıkarsayabileceğimiz üzere bir tür kendine özgü *uzayzaman tekilliği*yle sonuçlanacaktır.[22] Şimdi modelimizdeki zamanı ters çevirirsek, genel görünümlü bir tekillikten başlayıp seçmeyi dilediğimiz düzensiz tipte herhangi bir evren haline gelen bir evrim elde ederiz. Zamanda tersinmiş ilgili fiziki yasalarımız bu olasılığa izin verse de durum bu evrimde herhangi bir şişmenin söz konusu olmaması da olabilir. Şişmeye sahip olsak da olmasak da konu, kendi özgü bir tekillik evriminin düzenli (ya da uzamsal olarak düz) bir evrene yol açmasını sağlamak üzere gerçekleştirilen girişimlerde ne bulunursa bulunsun, şişen bir süreçle ilgili fiziki olasılığın hiçbir yararı olmamasıdır.

Gerçek sorunun ne olduğunu anlamaya çalışalım. Bu, 27. bölümde uzunca tartışıldı. Evren Büyük Patlamada oldukça özel*di*. Orada, başlangıca dek geri genişleyen bir termodinamiğin ikinci yasasının olabilmesi için böyle olmak zorundaydı. Tüm termalizasyon işlemleri ikinci yasaya *bağlıdır*; bu nedenle ne niçin bir ikinci yasaya ne de başlangıçta niçin çok özel bir evrene sahip olduğumuzu açıklarlar. Dahası, kendiliğinden simetri kırılımı işlemlerinin ve faz geçişlerinin (bunlar şişme için gerekli olmak üzere) tümü ikinci yasanın şerefine gerçekleşir. Bu işlemler ikinci yasayı açıklamazlar; onu *kullanır*lar. Dahası, şişme kozmolojisindeki ciddi tüm hesaplamalar, kendine özgü durumda ne olduğuna ilişkin hiçbir kavrayış sunmayan FLRW ya da ona yakın bir uzayzaman geometrisi varsayar. Evrenin başlangıçta, olağanüstü düzenliliği içinde, niçin bu derece özel olduğunu bilmek istersek şişme kozmologların dayandıklarından bütünüyle farklı argümanlara başvurmak zorunda oluruz.

---

[21] Bu kendine özgü tekillikteki olasılıkla kaotik yapıyla ilgili en iyi önerme 1970 yılındaki Belinskii vd., 1970, çalışmasından gelir.

[22] *Bkz.* ilgili kaynakları sunan not 27.21.

28.6 Antropik ilke

Bu argümanlara gelmeden önce şişme bakış açısının bir parçası olarak sıklıkla anılan bir diğer konuya yönelmem gerekiyor. Bu, *antropik ilke*dir. Bu ilke, evrenin niçin onu bulduğumuz gibi olduğunu açıklayan pek çok başkaca argümanda da kullanılır. Kabaca söylersek, antropik argüman kendi başlangıç noktası olarak, etrafımızda algıladığımız evrenin, kendisini anlayabilecek varlıklar üretip barındıracak türde bir doğaya sahip olmak zorunda olduğu gerçeğini kabul eder. Bu argümanı, üzerinde yaşadığımız gezegenin niçin uygun aralıktaki sıcaklığa, atmosfere, su bolluğuna, vb sahip olduğunu açıklamak üzere kullanabiliriz. Bu gezegendeki koşullar böylesine uygun olmasaydı burada değil fakat başka bir yerde olurduk![23]

Antropik argümanın en etkileyici kullanımlarından biri, Robert Dicke (1957) ve Brandon Carter (1973)[24] tarafından, Planck birimleriyle ifade edildiği haliyle evrenin yaşıyla elektromanyetizma ve kütleçekim kuvvetleri arasındaki oran arasında görünüşte rastlantısal bir bağıntıyla ilgili, Dirac (1937) tarafından belirtilen bir bilmeceyi çözdüklerinde ileri sürülmüş olandır.[25] Bu rastlantı Doğanın parametreleri arasındaki temel bir ilişkiyi yansıtacak olsaydı bu durumda onun, evren tarihi boyunca sabit olarak kalması gerekirdi. Bununla birlikte evrenin yaşı zamanla artan bir şey olduğundan (kesinlikle!), böylece buradan hareketle kütleçekim kuvvetlerinin şiddeti, elektrik kuvvetlerininkine oranla azalmalıdır. Aslında bu önermeyi Dirac gerçekten yaptı fakat şimdiki kanıt, kütleçekim sabitindeki böylesi bir değişikliğin gerçeklerle uyuşmadığı yönündedir.[26] Dicke ve Carter'ın gösterdiği şey Dirac rastlantısıyla ilgili başka bir açıklamanın mevcut olduğuydu. Doğa sabitlerinin, sıradan bir yıldızın –bildiğimiz kadarıyla yaşama uygun bir yıldız– ömrünü belirlemekte oynadıkları bütünlüklü rolü incelerken bu zaman ölçeğinin Dirac rastlantısının, böylesi bir yıldız etrafında dolanan bir gezegende evrilmiş (ve yaşayan) varlıklarla ilgili olarak epey zorunlu biçimde geçerli olduğu bir düzende bulunduğunu gösterebildiler. Böylece Dirac rastlantısı antropik bir açıkla-

---

[23] Sanırım bu "zayıf" antropik ilke fikrini ilk olarak 1950'lerde Fred Hoyle'un BBC radyosundan verilen radyo sohbetlerinde duydum. Temel fiziki sabitlerin "antropik" rolü konusuna yönelen antropik ilkenin *daha güçlü* biçimiyle, Hoyle'un, birazdan açıklanacak olan, karbonda özel bir nükleer enerji seviyesine gerek duyan, yıldızlardaki ağır elementler yapısına değinen "Religion as a Science" (Bir Bilim olarak Din) adlı Cambridge derslerinde tanıştım.

[24] *Bkz.* Dicke, 1961ve Carter, 1974.

[25] *Bkz.* Dirac, 1937.

[26] *Bkz.* Dirac, 1938; Buckley ve Peat, 1996; Guenther vd., 1998. Yeni bir "değişen sabit" fikri Magueijo'da, 2003, eğlenceli bir açıklamayla veriliyor.

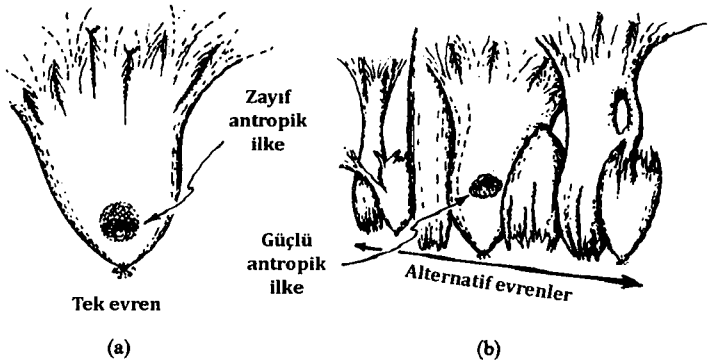
maya sahiptir. Bu durum, bilinçli yaşam üretiminde içerilen parametrelerin, bu tür bilinçli bir yaşamın dış dünyada gerçekten *gör*eceği türdeki o parametrelerle ilişkili olması nedeniyle ortaya çıkar!

Antropik ilkeden gelen argümanların, gerçek anlamlardan yoksun olsa da, belirsizliklerle dolu olması okuyucu için açık olmalı. Örneğin, bilinçli bir yaşam üretimi için gerçekten gerekli koşulların ne olduğuyla ilgili pek fazla fikre sahip değiliz. Yine de durum, fizik yasalarının ve evrenin toplam uzayzaman yapısının verili olduğunu kabul ettiğimiz, yukarıda verilmiş olan gibi örneklerle kullanıldığında o kadar da kötü değildir. Yalnızca evrendeki koşulların bilinçli yaşama neden olacak şekilde, ne zaman ya da nerede şu ve şu şekilde olacağı türünde sorular sorarız. Antropik ilkenin bu tür versiyonu Carter tarafından *zayıf* antropik ilke olarak adlandırılır (Şekil 28.13a).

Kendisi uyarınca antropik argümanı evrenin (örneğin elektron kütlesinin protonunkine oranı ya da ince yapı sabitinin değeri gibi, §26.9, §31.1) gerçek sabitlerini belirlemek üzere genişletmeye çalıştığımız ***güçlü*** antropik ilke çok daha sorunlu bir versiyondur. Bazı insanlar güçlü antropik ilkeyi, bizi "İlahi Amaç"taki, kendisi yoluyla evrenin Yaratıcı'sının, temel fiziki sabitlere bilinçli yaşamın olanaklı olmasını sağlayan belirli değerlere sahip olacakları şekilde önden papazlık rütbesi verildiğinden emin olduğu bir inanışa yöneltir biçimde değerlendirebilmektedir. Öte taraftan güçlü ilkeyi, "nerede" ve "ne zaman" sorularımızı yalnızca tekil bir uzayzamana değil fakat aynı zamanda olası uzayzamanlar topluluğunun tümüne uygulanacakları şekilde genişletmek üzere (Şekil 28.13b), zayıf olanın bir genişletilmesi olarak düşünebiliriz.[27] Topluluğun farklı üyelerinin, temel fiziki sabitlere ilişkin farklı değerlere sahip olmaları beklenebilir. Nerede/ne zaman sorusu artık ayrıca topluluk içinde bir evren seçimini de içerir, böylece kendimizi yine bilincin ortaya çıkmasına izin veren bir evrende bulmak zorunda oluruz.

Haberdar olduğum kadarıyla bu tür bir şeyin ilk örneği Fred Hoyle tarafından, karbonun, yıldızlarla ilgili çekirdek sentezi işleminde yıldızların karbondan daha ağır elementlerden oluşmasının olanaklı olabileceği şekilde, bugüne dek gözlemlenmemiş bir nükleer enerji seviyesinin var olmak zorunda oluşu sonucunu çıkardığında belirtilmişti. Bu, kendisi aracılığıyla daha ağır elementlerin (yıldızlarda; ve sonuçta süpernova patlamalarında gezegen oluşumlarıyla ilgili maddeleri sağlamak üzere dışarı püskürtüldü; *bkz* §27.8) üretildiği ve kendi vücutlarımızın bağlı olduğu işlem-

[27] Buradaki "güçlü antropik ilke" terimi kullanımım Carter'ı, 1974, izler. Barrow ve Tipler, 1988, bunu birçok farklı kategoriye ayırır.



Şekil 28.13 Antropik ilke. (a) Zayıf biçim: bilinçli varlıklar kendilerini evrende, bilinçli yaşama uygun koşulların bulunduğu, uzam zamansal bir konumda bulmak zorundadır. (b) Güçlü biçim: yalnızca bir evren yerine kafamızda, aralarında Doğanın temel sabitlerinin değişebileceği, bir olası evrenler topluluğu canlandırırız. Bilinçli varlıklar kendilerini (uzam zamansal konuma ek olarak) Doğanın sabitlerinin uygun olduğu bir evrende yerleşmiş olarak bulmak zorundadır.

di. O olmaksızın (bildiğimiz türde) canlı varlıklar olarak yaşayamayız! Hoyle'dan aldıkları ilhamla 1953'te William Fowler ve iş arkadaşları[28] sonradan Hoyle tarafından yapılmış etkileyici bir tahmini doğrulayarak Hoyle enerji seviyesini buldular. Doğa sabitlerinin, bu tür bir enerji seviyesinin tam da, bildiğimiz anlamdaki hayatın ortaya çıkabileceği doğru yerde olacağı biçimde ayarlanmış olması dikkat çekicidir. Belirgin kozmik iyi şansa ilişkin başka bir örnek nötronun kütlesinin protonunkinden (sırasıyla 1838 ve 1836 elektron kütlesi) çok hafif biçimde fazla olması gerçeğidir. Neredeyse tüm kimyanın kendisine dayandığı uygun bir kararlı çekirdek ailesinin varlığı görünüşteki bu tesadüfi gerçeğe dayanır.

Kendi konumum antropik ilkeyi, özellikle güçlü olanı kullanma konusunda son derece dikkatli olmaktır. İzlenimim odur ki, güçlü antropik ilke genellikle, gerçek kuramsal değerlendirmeler kendi sınırlarına ulaşmış göründüğünde, bir tür kaçamak olarak kullanılır. Kuramcıların şuna benzer bir şeyi söyleme yoluna gittiklerini seyrek biçimde işitmedim: "kuramımdaki bilinmeyen sabit parametre değerleri sonuçta antropik ilke tarafından belirlenir." Sonuçta "doğru kuram"daki belirli parametreleri saptamanın hiçbir matematiksel yolu olmadığı elbette ortaya çıkabilir. Aslında bu parametrelerin seçimi, içinde kendimizi bulduğumuz evrenin bilinçli yaşama izin vermek üzere böyle olmak zorunda olacağı şekildedir. Yine de itiraf etmeliyim ki bu fikirden pek hoşlanmıyorum!

[28] *Bkz.* Hoyle vd., 1956; Burbidge vd., 1957.

Bana öyle geliyor ki, uzamsal olarak sonsuz ve esasen düzenli bir evrende (örneğin $K \leq 0$ olan standart modellerde) güçlü antropik ilke, fiziki yasaların (bilinçlilikle ilgili ön şartları bilmediğimizden kendisi de epey kullanışsız olan) bilinçliliği olanaklı kılacağı şekilde olmasını talep etmenin ötesinde, fiziki parametreleri ayarlamakla ilgili olarak neredeyse faydasızdır. Çünkü bilinçli yaşam sonuç olarak olanaklıysa, ortaya çıkmasını, uzamsal olarak sonsuz bir evrende, bekleriz. Bu, evrende verili herhangi bir sonlu bölgede bilinçlilikle ilgili koşulların ortaya çıkması son derece olanak dışı bile olsa meydana gelecektir. Uzamsal olarak sonsuz bir evrende beklentimiz, gerekli bileşenlerin tümünün bir araya gelmesine ilişkin yalnızca tek bir şans bile olsa, onun sonsuz erimlerinde *bir yerlerde* bilinçliliğin meydana gelmesi gerektiğidir. Aslında bu, olağanüstü biçimde seyrek de olsa, yalnızca şans yoluyla ortaya çıkar.

Şu halde temel fiziki sabitlerin, belki de matematiksel kıstaslara göre saptanmış, şu ve şu olduğunu bilirsek bu durumda daha iyi bir soru sorabiliriz: "Bu fiziki sabit değerleri verildiğinde zeki yaşamın ortaya çıkması için *en olası koşullar* nelerdir?" Bildiğimiz evrende, sahip olduğumuz temel sabit parametre değerleriyle birlikte yanıt en azından şöyle *görünür*: "Güneşe oldukça benzer bir yıldız yakınında, dünyaya oldukça benzeyen ve uygun Darwinci evrimin gerçekleşmesine olanak tanıyacak yeterli süre olan yaklaşık 10^9 ya da 10^{10} yıllık bir gezegende." Bununla birlikte farklı sabit parametre değerlerine sahip bir evrenle ilgili olarak yanıt ortaya oldukça farklı biçimde çıkabilir.

Bu bölümü noktalamak üzere, orijinal olarak 1973'te John A. Wheeler tarafından ileri sürülmüş olan, temel fiziki sabitler bakımından ilişkili bir bakış açısına değinmeliyim. Antropik ilkeyle bir bağlantıya sahip olan bu bakış açısı uyarınca evren, her biri kendinden önceki bir çöküş fazından doğan yeni "büyük patlamalar"ın sürekli biçimde meydana geldiği döngülerden geçmektedir.

$K > 0$, $\Lambda = 0$ durumundaki Friedmann modelini anımsayın. Evren, başlangıç Büyük Patlama tekilliğiyle genişler ve daha sonra başka bir tekillik olan son Büyük Çöküşe büzülür. bununla birlikte kozmolojinin ilk günlerinde bu "salınım yapan" bir model olarak anılıyordu çünkü $R(t)$'nin t karşısında çizildiği eğri sınırsız sayıdaki genişleme ve büzülme döngüsüne boyun eğen bir sikloiddi (*bkz.* Şekil 27.15a, alıştırma [27.17]). Bununla birlikte durum artık, her "çöküş"ü sonraki "patlama"yla birleştiren tekilliği geleneksel klasik genel görelilik sınırları içinde "pürüzsüzleştirme"nin hiçbir yolunun bulunmadığı ilk günlerdekinden daha iyi değerlendirili-

yor.[29] Bu gerçek göz ardı edilir ya da "kuantum kütleçekim"in bir biçiminin bu tür bir "sıçrama"nın meydana gelmesine izin vereceği varsayımında bulunulursa bu durumda Friedmann sikloidinin gerçekten ortaya çıkabilecek olan şeye yönelik iyi bir yaklaşıklık tahmini olduğu yorumunda bulunulabilir. Wheeler'ın fikri, tekil dönüşte gerçekleşen aşırı kuantum fiziğinin Doğanın temel sabitlerinde bir değişiklik gerektirebileceğiydi. Buradan hareketle, güçlü antropik ilkeyle bağlantılı olarak tasarlanmış evrenler "toplamı" Wheeler önermesinde fiziki olarak gerçekleşir.

Lee Smolin 1997 tarihli *The Life of the Cosmos*[30] (Evrenin Yaşamı) adlı kitabında bu fikre ilişkin şaşırtıcı bir değişiklik önerir. Kendisine ait her şeyi sarmalayan Büyük Çöküşün kendisini sonraki evren fazının Büyük Patlamasına çevirdiği kapalı bir evrene gerek duymak yerine Smolin, kara delikler içindeki tekillikleri, her kara delik fazının bireysel olarak farklı bir evren fazı ürettiği[31] ve her durumda temel fiziki sabitlere ilişkin hafif bir yeniden ayarlamanın yapıldığı yeni evren fazının kaynakları olarak kabul eder. Smolin böylece, evrenlere ilişkin, temel sabitlerin yavaş yavaş "daha zinde" evren fazları elde etmek üzere evrimleştiği bir "doğal seçilim" biçiminin olabileceğine ilişkin yaratıcı fikrini ortaya koyar ve evrenlerin "zindeliği"ne ilişkin olarak kara deliklerin üremesini herhangi antropik değerlendirmeden daha iyi bir belirti olarak kabul eder (çünkü bu durum pek çok "çocuk" üretir. Bununla birlikte bana öyle geliyor ki, onlardan ne kadar çok sayıda olursa olsun kendimizi "bilinçlilik–olmayan" bir evren fazında bulamayacağımız için bu tartışmada antropik argüman da önemli bir role sahiptir!

Okuyucu tek bir kara deliğin kütle enerjisinin, kendisinden 10^{22} kat daha fazla kütleli olabilecek tüm bir evreninkine nasıl çevrilebildiğiyle ilgili olarak elbette kaygılanabilir. Aslında fakat tekilliğin üstesinden gelmek ve temel sabitleri değiştirmek üzere bilinmeyen bir fizik gerektiğinden geleneksel fiziğin standart korunum yasalarıyla ilgili "tüm bahisler kapanmıştır". Ne olursa olsun madde enerji korunum yasasının, genel görelilik bağlamında asimptotik düzlük varsayımı olmaksızın sorunlu olduğu iler sürülebilir; *bkz.* §19.8.

Hem Wheeler hem de Smolin önermesinde, oldukça fazla soruna sahibim. İlk olarak, halihazırda bilinmeyen bir fiziğin yalnızca, çöküşe ilişkin uzayzaman tekilliğini bir "sıçrama"ya çeviremekle kalmayıp bu olduğunda

---

[29] *Bkz.* Hawking ve Penrose, 1970.

[30] *Bkz.* Smolin, 1997.

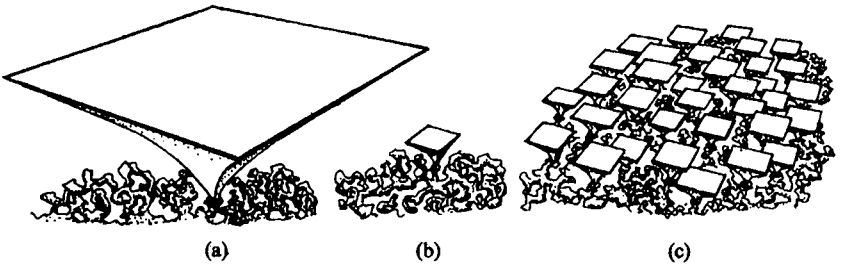
[31] 1966'daki Adams Ödülü makalemde, bkz Penrose, 1966, böylesi bir fikri, fiziki sabit yeniden ayarlamaları olmaksızın ciddi olmayan bir biçimde ortaya koymuştum! Belki diğerleri daha önce böyle yapmışlardır.

aynı zamanda temel fiziki sabitleri de hafif biçimde yeniden ayarlamasına ilişkin kilit fikrin son derece kurgusal doğası söz konusudur. Böylesi bir kestirim önermek üzere, bilinen fizikte bulunan hiçbir gerekçelendirme bilmiyorum. Yine de bana göre çöküşten kaynaklanan son derece düzensiz tekilliklerin kendilerini sihirli bir biçimde, bildiğimiz türde saygın bir ikinci yasa edinmesi gerekecekse her evrenin gerek duyacağı son derece pürüzsüz ve düzenli Büyük Patlamaya çevirmeleri (*bkz.* §27.13) geometrik olarak daha da mantıksızdır.

28.7 Büyük Patlamanın özel doğası: antropik bir anahtar?

Büyük Patlamanın oldukça özel doğasını açıklamak üzere antropik ilke çağrılabilir mi? Bu ilke, başlangıç olarak karmakarışık olan (maksimum entropili) bir durumun yine de, termodinamiğin ikinci yasasının sarsılmaz biçimde hüküm sürdüğü, içinde yaşadığımıza benzer bir evrene yol açabileceği şekilde şişen tablonun bir parçası olarak birleştirilebilir mi? Temel olarak genel argüman, ikinci yasanın bildiğimiz haliyle yaşam için zorunlu olduğunu söylemektir; dahası toplam yoğunluklar, sıcaklıklar, madde dağılımları ve bileşimleri, vb yaşama uygun olacak biçimde olmak zorundadır. Ek olarak evren evrimin işleyeceği kadar uzun var olmuş olmalıdır vb. Bazen bu argüman bir şişme argümanıyla karşıtlık içinde kullanılır. Buna göre yalnızca, tümüyle kendine özgü bir başlangıç durumu bize, gözlemlediğimize benzer pürüzsüzleştirilmiş bir evren vermek üzere şişmese de, Büyük Patlamadan hemen sonra, başlangıç uzayzaman "manifoldu"na ait küçük bir bölgenin, o bölgede şişmenin devreye girmesi için yeterince pürüzsüz olmasını aramamız gerekir; bugün gözlemlenebilir olan evrenin tümü o minik pürüzsüz bölgedeki şişmenin bir sonucu olarak ortaya çıkar (*bkz.* Şekil 28.14a). Bu argüman kabaca şöyle işler: "bilinçli yaşamın var olması için, evrimin uygun koşullarda gerçekleşebileceği kadar uzun zaman ölçeklerine sahip geniş bir evrene gerek duyarız, vb; bu, pürüzsüz, minik başlangıç bölgemizden başlayarak bir şişme gerektirir ve bu bir kez başlayınca ş işme bize, bildiğimiz mükemmel biçimde geniş, gözlemlenebilir evreni sağlamaya girişir."

Bu tablo, bilimsel saldırıya tümüyle bağışık olan böylesi harika biçimli romantik bir doğaya sahip gibi görünmesine rağmen böyle olduğuna inanmıyorum. Gözlemler göründüğümüz doğaya sahip bir Büyük Patlama için gerekli görünen olağanüstü kesinlik derecesine (ya da "ince ayar"a) geri dönelim. §27.13'te iddia edildiği üzere, gerekli kesinlik faz uzayı hacim terimleriyle en azından $10^{10^{123}}$'te birdir. "10^{123}" üssü, gözlemlenebilir evrendekininkine eşit kütleli bir kara deliğin entropisinden gelir.



Şekil 28.14 (a) Evrenle ilgili tümüyle genel bir başlangıç durumu şişmez fakat yalnızca, gözlemlediğimiz evrene şişmeye yetecek pürüzsüzlükte olan küçük bir başlangıç bölgesi isteyebiliriz (eder: $10^{10^{123}}$). (b) Fakat devasa evrenimizin gerçekten ne kadarı bilinçli varlığımız için gereklidir? Yaratıcı'nın, bilinçli yaşam yaratmak üzere, çizgisel boyutun onda biri kadarlık bir evren üretmesi komik biçimde "daha ucuz"dur (eder: $10^{10^{117}}$). (c) (a)'daki kadar çok bilinçli varlık yaratmak üzere Yaratıcı basit olarak (b)'deki "daha küçük" evrenlerden bağımsız 10^3 adedini çok daha ucuz biçimde üretebilir ("pazarlık" ederi: $(10^{10^{117}})^{1000} = 10^{10^{120}}$). Bu nedenle antropik ilke şişmeye ilişkin açık savurganlığı açıklamaz.

Peki ama bilinçli yaşamın ortaya çıkabilmesi için tüm gözlemlenebilir evrene gerçekten gerek duyar mıyız? Bu olası görünmemektedir. Galaksimiz dışındaki herhangi bir şeyin bile gerekli olduğunu düşünmek zor. Yine de zeki yaşam çok seyrek ve bundan bir miktar daha fazla alana sahip olduğunda biraz daha rahat olabilir. Gelin biraz cömert olalım ve gözlemlenebilir evrenin kıyısına kadar olan uzaklığın onda biri kadarlık bir yarıçaplı bölgenin bildiğimiz evreni andırmak zorunda olmasını talep edelim fakat bu yarıçap dışında olanları önemsemeyelim. Faz uzayı hacmi önceki gibi hesaplanabilir. O bölgedeki kütleyi daha önce sahip olduğumuzun binde biri olarak hesaplarız ve bu daha önce sahip olduğumuzun milyonda biri olan bir kara delik entropisi verir.[28.7] Bu durumda "Yaratıcı"mız tarafından bu küçük bölgeyi oluşturmak üzere gerek duyulacak kesinlik artık yalnızca:

$$10^{10^{117}}\text{'de birdir.}$$

Şekil 28.14b'ye bir göz atın. Yaratıcımız artık yalnızca, başlangıç "manifold"unun daha öncekinden *daha küçük* bir "minik pürüzsüz bölge"sine gerek duyar. Yaratıcı'nın bu daha küçük boyutlu bölgeyle karşılaşması daha önce ele aldığımız bir biçimde daha büyük olandan daha olasıdır. Şişmenin küçük bölge üzerine biraz daha büyük olanla aynı biçimde fakat orantılı olarak daha küçük bir şişmiş evren üreterek etkidiğini varsayarak Yaratıcı'nın büyük bölgelerden ziyade küçük olanlara ne sıklıkta rastladı-

[28.7] Niçin?

ğını tahmin edebiliriz. Rakam (en yüksek üsler tarafından ifade edilen kesinlikte)[28.8]

$$10^{-10^{117}} \div 10^{-10^{123}} = 10^{10^{123}}\text{'ten}$$

daha iyi değildir. Yaratıcı için evrenin, varlığımız için gerçekte gerek duymadığımız ve böylece antropik ilkenin de gerek duymadığı, bu ekstra uzak parçasını üretmeye zahmet etmenin nasıl inanılmaz bir savurganlık olduğunu görüyorsunuz!

Bazı okuyucular Yaratıcı'nın bu "tutumlu" davranışı nedeniyle nispeten daha az sayıda bilinçli varlık yaratıldığı endişesi taşıyabilirler. Konunun bu olmasından bağımsız olarak, gerçekleşen "savurganlığın" nedeni bu değildir. Yalnızca 1 adet büyük evren bölgesine sahip olmak yerine (bizi tek bir daha büyük olandakiyle aynı bilinçli varlık sayısına götüren) daha az şişmiş evren bölgelerinden 10^3 adedine sahip olmak –1'den yaklaşık $10^{10^{123}}$'e kadar olan bir çarpanla– olasılık terimleriyle (diğer bir deyişle faz uzayındaki kutu ebatlarının tersiyle; *bkz.* Şekil 27.2) çok çok daha "ucuz" olur (Şekil 28.14c).[28.9]

Antropik argümanın bu bağlamda ne kadar aciz olduğunu görmek üzere şu gerçekleri değerlendirin. Dünyadaki yaşam kesinlikle mikrodalga ardalan ışınımına dolaysız biçimde gerek duymaz. Aslında Darwin evrimine bile gerek duymayız! Gaz ve ışınımın rasgele biçimde bir araya gelişinden bilinçli yaşam üretmek "olasılık" terimleriyle çok "daha ucuz" olurdu. Güneş sisteminin barındırdığı canlılarla birlikte parçacıklar ve ışınımın rasgele çarpışmasından yaratılabilme olasılığının $10^{10^{60}}$'ta bir olduğu (ya da $10^{10^{60}}$'tan çok daha az olduğu) hesaplanabilir. Gözlemlenebilir evrene ilişkin Büyük Patlamada gereken $10^{10^{123}}$'le kıyaslandığında $10^{10^{60}}$ rakamı tam olarak "tavuk yemi"dir.[32] Bir Büyük Patlamanın, gözlemlenmiş düzenli biçiminde olmasına gerek duymayız. İkinci yasaya etrafta canlılığın bulunmadığı erken zamanlarda gerek duymayız. Yaratıcı için bununla ilgili zahmet etmemek çok "daha ucuz" olur ve şişmenin de pek yardımı olmaz. Yaratıcı'nın, yalnızca bilinçli yaşam üretmek üzere benimseyeceği "cimri" tutumluluk eğrisi, Şekil 27.8'de, gözlemlenen (c) şişme ya da şişme değilden ziyade (b) eğrisine benzer!

Tüm bunlar basit olarak, uygun evren koşullarının bir tür rasgele başlangıç seçiminden ortaya çıkması gerektiği üstteki doğada nedenler aramak üzere, aslında yanlış anlaşılmış argümanı sağlamlaştırmaktır. Aslında evrenin nasıl başladığıyla ilgili çok özel bir şey söz konusudur. Bana

[28.8] Bu rakamları açıklayın.

[28.9] Bu rakamları dikkatli biçimde açıklayın.

[32] *Bkz.* Penrose,1989.

bu soruna yönelmenin olası iki yolu varmış gibi görünüyor. İkisi arasındaki farklılık bilimsel davranışa ilişkin bir konudur. Başlangıç seçiminin (Şekil 27.21'de gösterilmiş hayali resme oldukça benzer) bir "tanrı eylemi" olduğuna ilişkin konumu kabul edebiliriz ya da Büyük Patlamanın olağanüstü özel doğasını açıklamak üzere bilimsel/matematiksel bir kuram arayabiliriz. Benim eğilimim kesinlikle, ikinci olasılıkla ne kadar ileriye gidebileceğimizi görmeye çalışmaktır. Fiziki dünyanın davranışlarını kontrol eden matematiksel yasalara –olağanüstü kesinlikteki yasalara– alıştık. Öyle görünüyor ki, yine fevkalade kesinliğe sahip bir şeye, Büyük Patlama doğasını belirleyen bir yasaya gerek duyuyoruz. Bununla birlikte Büyük Patlama bir uzayzaman tekilliğidir ve günümüz kuramları bu tür bir şeyi ele almaya elverişli değildir. Beklentimiz, yine de, gerekli olan şeyin *kuantum kütleçekime* ilişkin,[33] genel görelilik ilkeleri, kuantum mekaniği ilkeleri ve belki bazı bilinmeyen diğer fiziki bileşenlere ilişkin ilkelerin uygun şekilde bir araya gelmek zorunda olduğu, uygun bir biçim olmasıdır.

28.8 Weyl eğrilik hipotezi

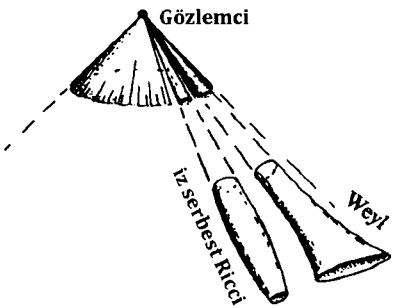
Kuantum kütleçekim alanındaki günümüz etkinlikleri üzerine temel değerlendirmelerimi 30–33. bölümlere erteleyeceğim. Şimdilik yalnızca, Büyük Patlama üzerindeki geometrik kısıtlamaların ne olduğunu anlamaya çalışmak üzerine yoğunlaşalım. Daha sonra bu türdeki geometriyi ciddi kuantum kütleçekim kuramı temelinde açıklamaya girişen, James Hartle ve Stephen Hawking'in bildiğim bir önermesini inceleyeceğiz.

§19.7'den, *kütleçekim*le ilgili serbestlik derecesinin C_{abcd} Weyl konformal tensörüyle açıklandığını anımsayın. Böylece (yerel fizikle ilgili olarak her durumda küçük olan olası bir Λ kozmolojik sabitinin şimdilik göz ardı edildiği) *boş uzay*da uzayzaman eğriliğinin tümüyle Weyl eğriliği olduğunu görürüz (Ricci eğriliği gözden kaybolur). Weyl eğriliği, etkisi, malzeme kaynaklarının hacim azaltıcı doğası yerine biçim bozucu ya da gelgitle ilgili bir doğaya sahip olan türdeki eğriliktir. Weyl eğriliğinin etkisi Şekil 17.8a'da gösterildi (ayrıca bu resmin orijinal olarak Newtoncı bir uzayzaman resmi olması hiçbir biçimde onun geçerliliğine gölge düşürmez). Bu resim, kendisinde maddenin hacim azaltıcı etkisini gördüğümüz Şekil

[33] Büyük Patlamanın olağanüstü biçimdeki özel doğasını saptayan "kuantum kütleçekim"den farklı bir şeyin söz konusu olabileceğine ilişkin bakış açısı bana Abhay Astekhar tarafından kuvvetle belirtildi. Belki de öyledir fakat Büyük Patlamada özel olanın kütleçekim ve açık biçimde yalnızca kütleçekim olduğu gerçeğince çarpılmaktan kaçamıyorum.

17.8b'yle, diğer bir deyişle Ricci tensörüyle karşılaştırılmalıdır. Bununla birlikte Weyl ve Ricci eğriliklerinin *zamansal* jeodeziler (serbestçe hareket eden kütleli parçacıklar) üzerindeki etkilerini ele aldığımızda, hacim azaltıcı etkisinin yanı sıra Ricci tensörü bazen biçim bozucu bir etkiye de sahip olabildiğinden, kafa karıştırıcı bazı konular söz konusu olur.

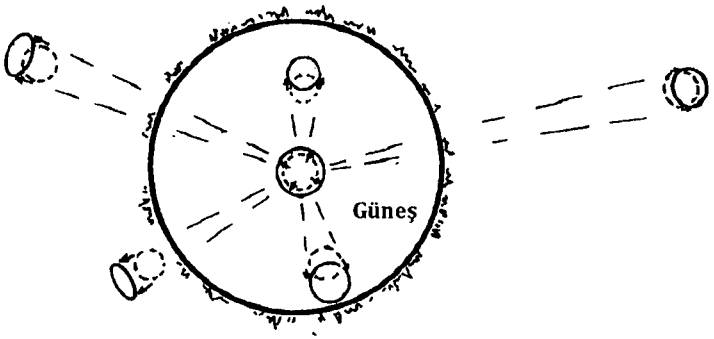
Bu kafa karıştırıcı konular böylesi eğriliklerin *boş* jeodeziler (ışık ışınları) üzerindeki eylemini düşünürsek giderilmiş olur. Dahası böylece, kozmolojik bir Λ sabitini, Λg_{ab} biçimindeki bir terim ışık ışınlarını odaklamadığı için[28.10] göreve geri çağırabiliriz. Şekil 17.9'daki jeodezileri bir ışık konisine ait ışık ışınları olarak (Şekil 17.16'daki gibi) düşünebiliriz. Aslında onları bir gözlemcinin geçmiş ışık konisine ait biçimde düşünürsek biçim bozucu etkiler oldukça şekilsel olarak, bir ışık kaynağıyla gözlemci arasına yerleştirilmiş mercekler biçiminde anlaşılabilir. Bir madde dağılımından kaynaklanan Ricci tensörü etkisi,[34] pozitif biçimli odaklayan bir merceğinki gibiyken serbest kütleçekim alanından kaynaklanan Weyl tensörününki, bir düzlemde dikey bir düzlemdeki negatif odaklama kadar pozitif odaklamaya sahip olan, saf astigmat bir merceğin etkisi gibidir (Şekil 28.15). Vakumun kırıcı indisine sahip büyük bir şeffaf, katı, kütleli, küresel bir cismin içinden basitçe bakmayı hayal edersek bu iki farklı türdeki eğriliğin (en düşük dereceli) etkilerine ilişkin oldukça iyi bir izlenim elde edebiliriz. (Belki de güneşin içinden, onun yalnızca kütleçekim alanına ilgi göstererek doğruca içinden geçen, *kütlesiz* parçacıklar olarak kabul edilen



Şekil 28.15 (İz serbest) Ricci tensörünün (bir madde dağılımından kaynaklanan) odaklama etkisi pozitif bir merceğinki gibiyken, (serbest kütleçekim alanından kaynaklanan) Weyl tensörününki, bir düzlemde dikey bir düzlemdeki negatif odaklama kadar pozitif odaklamaya sahip olan, saf astigmat bir merceğin etkisi gibidir.

[28.10] Niçin?

[34] Aslında burada Ricci tensörünün yalnızca iz serbest kısmı, $R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab}$, önemlidir ve kozmolojik sabitin herhangi bir rolü yoktur.



Şekil 28.16 Yıdız alanına (kütlesiz nötrinolardaki gibi) kırıcı olmayan şeffaf bir güneşten "bakarak", bu iki farklı türdeki eğriliğin (en düşük dereceli) etkilerine ilişkin iyi bir izlenim elde ederiz. Makul bir tahminle, Güneş içinden geçen ışınlar yalnızca bir büyütmeyle sonuçlanacak ş ekilde Ricci eğriliğince odaklanırken Güneş kenarının dışındaki yıldız alanında küçük bir çembersel örüntünün eliptik olarak görüneceği saf astigmat Weyl çarpıklıkları elde ederiz.

nötrinolarla "bakmayı" düşünmeliyiz!) Makul bir tahminle, güneş içinden geçen ışınları temel olarak Ricci eğriliğinden etkilenir biçimde göz önüne alabiliriz, böylece güneşin ardındaki yıldız alanına ilişkin belirgin bir büyütme (pozitif mercek) elde ederiz. Öte taraftan aslında, güneş kenarının ötesinde Weyl eğriliğine ilişkin, ardalan gökyüzündeki küçük bir çembersel örüntünün gözlemciye eliptik olarak görüneceği şekilde saf astigmat biçim bozucu şekiller elde ederiz. *Bkz.* Şekil 28.16.[28.11] Bu esasen güneşin kütleçekim alanının ardalan yıldız örüntüsünün biçimini bozduğu, ilk olarak Eddington'un 1919 yolculuğunda gördüğü yöntemdir (bkz §19.8).

Başlangıçta düzenli olan (bir miktar yoğunluk dalgalanmasına sahip) bir madde dağılımının kütleçekimsel olarak azar azar kümeleneceği ve böylece sonuç olarak bazı parçalarının kara delik şeklinde çökeceği biçimde evrimleşen bir evren düşünelim. Başlangıç düzenliliği temel olarak bir Ricci eğriliği (madde) dağılımına karşılık gelir fakat kütleçekimsel olarak git gide daha fazla malzeme bir araya toplandıkça temel olarak kümelenmiş maddeyi çevreleyen çarpık uzayzaman bölgelerinde bulunan artan miktarda Weyl eğriliği elde ederiz. Kara delik tekilliklerine ulaşıldığında Weyl eğriliği sonuç olarak sonsuza ıraksar. Malzemenin başlangıçta Büyük Patlamadan neredeyse bütünüyle düzenli biçimde püskürtüldüğünü düşünürsek bu durumda tüm niyet ve amaçlar için *sıfır* olan bir Weyl eğriliğiyle başlarız. Aslında FLRW modellerinin karakteristik bir özelliği

[28.11] Alanların, uzaklık arttıkça ters biçimde değişen dışa doğru sonsuz küçük bir yer değiştirmesiyle ilgili olarak korunduğunu gösterin.

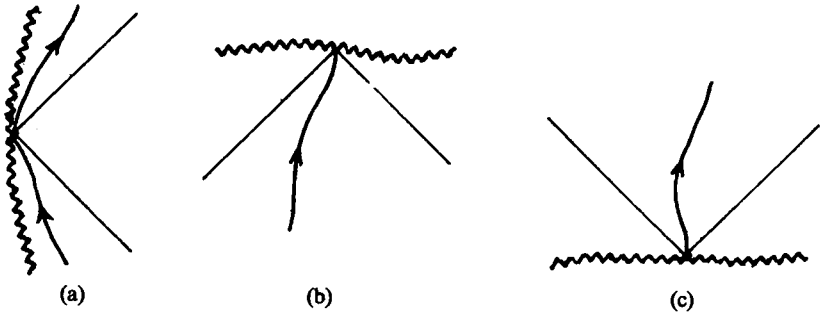
Weyl eğriliğinin (buradan hareketle modeller konformal olarak düz olmak üzere; *bkz.* §19.7) tümüyle gözden kaybolmasıdır. FLRW'ye *yakından benzer biçimde* başlayan bir evrenle ilgili olarak, Ricci eğriliğiyle kıyaslandığında Weyl eğriliğinin, gerçekte ilki Büyük Patlamada ıraksamak üzere, son derece küçük olmasını bekleriz.

Bu tablo, son derece düşük entropili başlangıç Büyük Patlama tekilliği ve çok yüksek entropili kendine özgü kara delik tekillikleri arasındaki geometrik farkın ne olduğunu güçlü biçimde belirtir. Weyl eğrili başlangıç tekilliğinde gözden kaybolur (ya da en azından ne olmuş olabileceğiyle kıyaslanırsa çok çok küçük, örneğin sırf sonlu) ve sonuç tekilliklerinde serbest bırakılır; şüphesiz şiddetli biçimde sonsuza ıraksar. Şekil 27.20a'yla Şekil 27.20d'yi ayırt eder görünen şey, örneğin ayrımı konformal diyagramlar biçiminde fark etmek zor olabilse de, bu geometrik nitelemedir.

Bu gözlem, uzayzaman tekilliklerine ilişkin, *kozmik sansür* olarak anılan diğer bir varsayımsal özellikle bağı içinde kabul edilmelidir. Kabaca söylersek bu, kütleçkimle ilgili durdurulamayan çöküşte sonucun, *çıplak tekillik* olarak bilinen daha kötü bir şey yerine bir kara delik olacağına ilişkin (henüz kanıtlanmamış) bir savdır. Çıplak tekillik, dış gözlemciler için görülebilir olan kütleçekimle ilgili bir çöküşten kaynaklanan bir uzayzaman tekilliğidir, bu durumda o, bir olay ufku tarafından "giydiril"memiştir. "Çıplak tekillik" terimiyle kastedileni belirtmenin hafif şekilde farklı pek çok teknik biçimi mevcuttur fakat bunların ayrımlarına burada girmeye niyetim yok.[35] Çıplak tekilliğin, Şekil 28.17a'da gösterildiği üzere sinyallerin tekilliğe hem girip hem de çıkabilmesi anlamında "zamansal" olduğunu söylemek amaçlarımız için yeterlidir. Kozmik sansür (olasılıkla, gerçek bir kütleçekim çöküşünde ortaya çıkmayacak belirli son derece uydurma ya da "özel" durumlar dışında) böylesi şeyleri yasaklar.

Kozmik sansür temel olarak Einstein denkleminin genel çözümleriyle ilgili, şimdiye dek ne kanıtlanmış ne de reddedilmiş olan, matematiksel bir varsayımdır. Bu varsayımı kabul edersek bu durumda fiziki uzayzaman tekillikleri asla "zamansal" değil fakat "uzaysal" (ya da belki "sıfır") olmak zorundadır. Zamansal eğrilerin tekillikten geleceğe doğru kaçabilmesi ya da ona geçmişten girebilmesine bağlı olarak, *bkz.* Şekil 28.17b, c, "başlangıç" ve "son" olmak üzere iki türde uzaysal tekillik (ya da sıfır) mevcuttur. *Weyl eğrilik hipotezi* olarak adlandırdığım fiziki varsayım, Weyl eğriliğinin gerçek fiziki evrendeki *başlangıç* tekilliklerinde sıfır (ya da en azından çok küçük) olmaya zorlandığını (uygun bir anlamda) ileri

[35] Kozmik sansüre ilişkin genel bir gözden geçirme için *bkz.* Penrose, 1998.



Şekil 28.17 (a) Nedensel sinyaller bir "çıplak tekilliğe" ya girer ya da ondan çıkarlar. Bunlar, Kozmik Sansür tarafından, dışlanırsa temel olarak nedensel sinyallerin girebildiği fakat çıkamadığı (b) "gelecek tekillikleri" ve nedensel sinyallerin çıkabildiği fakat giremediği (c) "geçmiş tekillikleri"yle baş başa kalırız. Weyl eğrilik hipotezi Weyl eğriliğinin gerçek fiziki evrendeki (c) başlangıç tekilliklerinde sıfır (ya da çok küçük) olmaya zorlandığını (uygun bir anlamda) ileri sürer.

sürer. Weyl eğrilik hipotezini sağlayacak biçimde bir evren yaratılışı, Şekil 27.20'de gösterilen işlemde Yaratıcı'nın seçimiyle ilgili mutlak biçimde devasa bir kısıtlılığı gösterir. Sonuç olarak bir termodinamiğin ikinci yasası söz konusu olur ve o aslında gözlemlediğimiz biçimi alır. Artık "Weyl eğrilik hipotezi"nin Büyük Patlamayı aslında, sonuçtaki evren modelinin erken dönemlerinde bulunan bir FLRW modeline yakından benzeyeceği bir biçimde, uygun şekilde kısıtladığına ilişkin sağlam matematiksel kanıtlar söz konusudur.[36]

28.9 Hartle–Hawking "sınır yok" önermesi

Basit bir sav olarak Weyl eğrilik hipotezi belki de fiziki bir kuramdan çok "tanrı eylemi"yle ilgili bir talebe benzer. Gerekli olan şey, bu hipotez doğasında olan bir şeye ilişkin kuramsal bir gerekçelendirmedir. Ne tür bir kurama başvurmak zorunda kalacağız? Uzayzaman tekillikleriyle ilgili alışıldık bakış açısı, bunun *kuantum kütleçekimi*n uzmanlık alanında olduğu yönündedir.

Buradaki güçlük, genel görelilik ve kuantum mekaniğini bir araya getirmeye ilişkin elli yılı aşan kararlı çabalara karşın, hâlâ konuya yönelik doğru yaklaşımla ilgili bir fikir birliğine bile yaklaşan hiçbir şeyin olma-

[36] *Bkz.* Newman, 1993; Claudel ve Newman, 1998; Tod ve Anguine, 1999a, 1999b; Anguine, 1999. Weyl eğriliği hipotezinin özel olarak ilgi çekici bir versiyonu, K. P. Tod tarafından ileri sürülmüş olup basit olarak herhangi bir başlangıç tekilliğinde sınıra sahip düzenli bir konformal geometri bulunduğunu ileri süren versiyondur.

yışıdır. Var olan bazı gözde taslaklara 31 ve 32. bölümlerde yöneleceğim fakat bunlar arasında bile Büyük Patlamanın belirli doğasını kabul edecek ciddi çok az girişim mevcuttur. Bununla birlikte 1983'te James Hartle ve Stephen Hawking tarafından kayda değer bir istisna ortaya kondu. Öyleyse onların temel fikirleriyle bağlantılı bazı yorumlarda bulunmam uygun olur.

Hartle–Hawking önermesinin bileşenlerinden biri, genellikle "Öklitçileştirme" olarak anılan şeydir. Temeldeki fikir, kendisi yoluyla t zaman koordinatının $\tau = it$'ye "döndürül"düğü Minkowski uzayına uygulanan bir *Wick döndürmesi*ninkiyle yakından ilişkilidir. Böylece $\mathrm{d}l^2$ (uzamsal) uzayzaman metriği $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ biçimini alır (*bkz.* §18.1). Başlangıçtaki (Gian Carlo Wick) fikir[37] (özel) görelilikçi bir kuantum alan kuramının, ilk olarak onu, kuramın artık $\mathbb{E}^4$ Öklitçi simetri grubu altında değişmez olarak kabul edildiği, Minkowski uzayzamanının yeri Öklitçi $\mathbb{E}^4$ 4–uzayıyla değiştirilmiş biçimde formüle etmek yoluyla oluşturulabileceğiydi. Kuramın Öklitçi versiyonunda elde edilen niteliklerin analitik koordinatlı olduğunu varsayarak, böylece artık Minkowski 4–uzayının Poincaré - grubu altında değişmez olan ilgili bir kuramı elde edeceğimiz şekilde, τ'nun sürekli biçimde t'ye geri döndürüldüğü Wick döndürmesi uygulanabilir. Bu işlem önemli iki avantaja sahiptir. İlk olarak Minkowski uzayında ıraksak olma eğilimindeki niceliklerin kuramın Öklitçi versiyonunda *yakın*sak oldukları ortaya çıkabilir. (Neden, Öklitçi döndürme grubu O(4) tıkız ve böylelikle sonlu hacimliyken görelilikçi O(3,1) Lorentz grubunun tıkız olmayıp sonsuz hacimli olmasına dek gider.) Özellikle, yol integralleri (*bkz.* §26.6) Minkowskici versiyondan ziyade Öklitçi versiyonda matematiksel olarak anlamlı bir tanıma sahip olmak üzere daha fazla şansa sahiptir. Diğer avantajsa, pozitif frekans gerekliliklerinin (*bkz.* §§9.3, 5, §24.3), Wick döndürmesinin dikkatlice doğru biçimde uygulanması yoluyla sağlanabileceğidir.

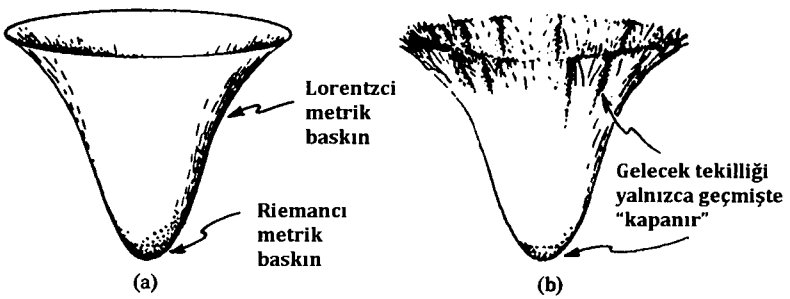
Hartle–Hawking düzeninde, Hawking'in Wick fikriyle ilgili, bir yol integralinde "döndürme"nin, genel fikir olarak, yolun *ardalanı* olan bir uzaya değil de kendileri yol integralinin her bir yolunu oluşturan bireysel uzayzamanlara uygulandığı yaratıcı değişikliğini kullanmak gerekir.[38] Buradan hareketle bu "uzayzamanlar"ın, normal bir uzayzamana uygulanan Lorentzci metrikler yerine pozitif belirli Riemannıcı metriklere sahip olmasına izin verilir. (Bu Riemannıcı metrikler kafa karıştırıcı biçimde sık-

[37] Önemli ve sık görülen bir etkiye sahip olarak Zinn–Justin'de, 1996, işe koşulmuş olan bu tekniğin ilk kullanımı için *bkz.* Wick, 1956.

[38] *Bkz.* Hartle ve Hawking, 1983.

lıkla, o ismin düz bir $\mathbb{E}^n$ Öklitçi uzayla ilgili standart kullanımına karşın, "Öklitçi" biçiminde anılır!) Bununla birlikte "Öklitçileştirme"ye ilişkin Hawking versiyonunda Wick'in orijinal fikrinden çok daha ileri giden bir "hayal gücü sıçraması"nın bulunduğu vurgulanmalıdır. Bunun genel görelilik ve kuantum mekaniğinin doğru birliğine giden verimli bir rota sunup sunmayacağı daha sonra görülmek üzere şimdilik kalır.[39]

Hartle ve Hawking'in çarpıcı önermesi, Hawking'in bu yol integrali yaklaşımının Büyük Patlamanın kendisine ilişkin ilgili kuantum kuramını açıklayabileceği ve gerçek bir tekil uzayzaman yerine, Lorentzci yerine Riemanncı metriğe sahip bir "uzayzamanlar" kuantum üst üste binmesinin (diğer bir deyişle "yol integrali"nin) mevcut olduğuydu. Fikirlerine "sınır yok" önermesi adını verdiler çünkü Büyük Patlamanın temsil ettiği klasik uzayzamandaki tekil sınıra sahip olmak yerine, alt ucu Şekil 28.18'de gösterildiği gibi basitçe "kapat"an Riemanncı uzayların baskın olduğu bir tekil *olmayan* üst üste binmiş uzaylar ailesi söz konusudur, böylece tekil sınır tümüyle yok olur. Büyük Patlamadan bir an "sonra" Riemanncı geometrinin baskınlığının Lorentzci geometriye geçtiği bir geçiş söz konusu olmak zorundadır. (Bunun, uygun *karmaşık* metrik katılımıyla gerçekleştiğini düşünebiliriz.) Lorentzci bölgede bile hâlâ (bazıları Riemanncı olan) bir "uzayzamanlar" üst üste binmesi söz konusudur. Bununla birlikte Bü-



Şekil 28.18 Hartle–Hawking "sınır yok" önermesi (a) Büyük Patlamanın, kendisi yoluyla klasik tekillik yakınlarındaki yol integraline (Lorentzci yerine) Riemanncı geometrilerin baskın olduğu bir kuantum kütleçekim işlemi uyarınca ele alınabileceğini ileri sürer ve tekil olmayan uzayzamanı kapatma yolları sunar. (b) Çöküşe ilişkin tekilliklerle ilgili olarak, "kapatma" yalnızca uzayzamanın "uzak ucu"nda gerekli görünür. Bu yolla, kara deliklere kütleçekimsel çökmede ortaya çıkması beklenen yüksek entropili kendine özgü tekilliklere izin verir.

[39] Renate Loll'ün yeni çalışması, Hawking önermesinde olduğu gibi, yol integralinde Riemanncı metriğin kullanımıyla çok daha dolaysız biçimde uygun olan Lorentzci metrik arasında derin farklar olabileceğini ileri sürer. *Bkz.* Ambjorn vd., 1999.

yük Patlama bölgesinin kendisinde Riemanncı "sınır yok" metriklerinin baskın olduğu kabul edilirken Büyük Patlamadan uzaklaştıkça klasik Lorentzci uzayzamanların baskın hale geldiği kabul edilir. Bu düzen yalnızca, görünüşteki inatçı bir sorunu belirsiz bir şekilde idare edilebilir görünen bir soruna çeviren, gerçek bir zarafete değil aynı zamanda Weyl eğrilik hipoteziyle uyumlu olabilecek "pürüzsüz bir erken evren"e, dolaysız bir destek veren bir görünüme de sahiptir.

Buraya kadar her şey yolunda. Yine de bu önermeyle ilgili önemli bazı sorunlarım var. İlk olarak, "Öklitçileştirme" fikri burada anlam kazanan türdeki bağlamlara ilişkin pek çok bakımdan sorunludur. Normalde bir düz uzay bağlamında bile bir yol integralini tam olarak hesaplaması olanaksızdır; pek çok yaklaşıklık tahmini yapılması gerekir. İntegrale hükmeder biçimde değerlendirilebilecek belirli özel terimlerin seçilip çıkarılması ve geri kalanın olduğu gibi bırakılması olağan olur. Bunun "Öklitçi" yol integraline makul bir yaklaşıklık tahmini vermesi beklenebilir fakat böylece uygun fiziki yanıtın elde edilmesi için bir analitik sürdürme işleminin uygulanması gerekeceğini anımsayın. Bu son derece güvenilmez bir işlemdir çünkü bir bölgede holomorfik bir fonksiyona yaklaşan bir şey diğer bir bölgede çılgınca uzaklaşır. Güçlüğün özünü anlamak üzere gerçel x değerleri için fakat yalnızca yaklaşık olarak, bildiğimiz gerçel bir analitik $f(x)$ fonksiyonuna sahip olduğumuzu ve yalnızca sanal x'lerle ilgili sonuç değerlerini bulmak istediğimizi düşünün. $f(x)$'e, ε ve A gerçel olup ε çok küçük ve A büyük olmak üzere, $\varepsilon\cos(Ax)$ biçiminde bir fonksiyon eklersek bu durumda $f(x)$, x gerçel ekseni boyunca pek de değişmez; yine de sanal eksen üzerindeki davranış, kendisi yoluyla analitik sürdürme işleminin aşırı kararsızlığını göstererek[28.12] tümüyle değişecektir. Görebildiğim kadarıyla "Öklitçileştirme hilesi" isabetli QFT modeli üretmekte oldukça kullanışlı olabilir fakat buradaki gibi yaklaşıklık tahminleriyle bağlantılı olarak kullanıldığında onunla ilgili ağır sorunlara sahip oluyorum. (Bununla birlikte Hartle–Hawking önermesinin bu analitik sürdürme basamağına ne kadar güçlü biçimde bağlı olduğu benim için pek de açık değil.)

Öklitçileştirmenin genelliğiyle ilgili de bazı teknik sorunlara sahibim. Görebildiğim kadarıyla bu, tutarlı QFT'ler üretmek (ve pozitif frekanslı bir koşul sağlamak) üzere zekice bir hiledir fakat ilgili herhangi belirli bir QFT'nin bu yolla elde edilebileceğini beklemek aşırı iyimserlik olur. Öklitçileştirme yoluyla elde edilen kuramlar aslında kendileriyle birleşik "yanlış imzalı" simetri grubundan kaynaklanan gizli yapılara sahiptir; *bkz.* §§9.3, 5, §13.8 ve §18.2. "Doğru" bir kuramın niçin bu özel niteliğe sahip olması gerektiğini anlamıyorum.

[28.12] Bunu, §5.3'ün sonuçlarını kullanarak açıklayın. *İpucu*: $e^{Aix} + e^{-Aix}$ nedir?

28.10 Kozmolojik parametreler: gözleme dayalı konum?

Ayrıca gözlemle uyum sorunu da söz konusudur. Hartle–Hawking sınır yok önermesi en azından orijinal biçiminde, kapalı bir evrene (aslında $K > 0$) işaret eder ve Hawking yıllarca bu tür modellere destek sundu. Bununla birlikte, hiperbolik ($K < 0$) durumu kayırır görünen artmakta olan kozmolojik kanıt karşısında Hawking daha sonra, Turok'la işbirliği içinde, argümanlarını, onların ayrıca hiperbolik durumla da bağdaşmasına olanak sağlayacak biçimde geliştirdi.[40] Yıllardan beri, gözlemlenmiş evrenin uzamsal olarak düz ($K = 0$) olduğunun ortaya çıkmak zorunda oluşuna ilişkin kararlı bir imaya sahip olduğu ileri sürülen şişme kozmolojisinin beklentileriyle ilginç bir paralellik söz konusudur. Bir miktar şişme yanlısı da ayrıca sonradan, $K < 0$ olasılığına[41] izin veren ve etkileyiciliği giderek bu kozmolojik veri karşısında argümanlarını değiştirdiler.

Şu anki gözleme dayalı konum nedir? İşler, var olduğu görülen belirgin bir *Λ pozitif kozmolojik sabiti*ne ilişkin (ve birden fazla kaynaktan gelen) şaşırtıcı kanıtla birlikte, yine oldukça önemli bir şekilde değişti. Bu, sonuç olarak $K = 0$'a sahip olabileceğimiz iması taşır. Gözleme dayalı kanıt $K = 0$ olmasına izin verirse bu durumda o, küçük bir pozitif uzamsal eğriliği (Hawking'in tercih ettiği $K > 0$) ya da küçük bir negatif uzamsal eğriliği (benim tercih ettiğim $K < 0$) dışlayamaz; yine tüm bahisler kapanmıştır!

Bu $\Lambda > 0$ buluşunun K değeriyle ilişkisi nedir? İlk olarak, kozmolojik kanıtın K'ye ilişkin negatif bir değeri kayırdığıyla ilgili daha önceki inanışın ardındaki nedenlere değinmeliyim. Temel konu evrenin toplam *kütle enerji içeriği*dir ve bu çok küçükse böylece o, evreni pozitif eğrilikle kapatamayacak ya da (Friedmann modellerinde) başlangıç genişlemesi sonrası bir çökme fazı üretmek üzere (*bkz.* Şekil 27.15a, b, c) yeniden geri çekemeyecektir. Galaksilerdeki görülebilir sıradan "baryonik" malzemenin yoğunluğunun bunun için yetersiz oluşu uzun zamandır bilinmekteydi. Bu yoğunluk pozitif ve negatif K değerleri arasındaki bölümü temsil eden *kritik* değerin, kritik yoğunluk bize $K = 0$'ı veren yoğunluk olmak üzere, yaklaşık yalnızca otuzda biridir. Ω_b genellikle kritik kütle enerji yoğunluğunun normal baryonik madde tarafından gerçekleştirilen o kesirini göstermek üzere kullanılır. Bu nedenle $\Omega_b = 1$ olursa baryonik madde esasen kritik yoğunluğu sağlar ve belirgin herhangi bir ek (pozitif) kütle enerji bir $K > 0$ evrene yol açar. Bununla birlikte üstte değinildiği üzere, daha çok, güçlü bir $K < 0$ belirtisi sağlamış olan $\Omega_b = 0{,}03$ gibi bir şeye sahip görünmekteyiz.

---

[40] *Bkz.* Hawking ve Turok, 1998.

[41] *Bkz.* Bucher vd., 1995 ve Linde, 1995.

Standart kuram uyarınca[42] galaksiler içindeki yıldızların dinamiğinin, bir galaksinin yakınlarında yıldızlardan dolaysız biçimde görüldüğünden çok daha fazla malzeme bulunmadıkça bir anlamının olmaması yıllar önce açığa çıkmıştı. Benzer bir yorum galaksi kümeleri içindeki bireysel galaksiler için de geçerlidir. Toplamda, sıradan baryonik formda algılanandan yaklaşık 10 kat daha fazla madde olduğu görülür. Bu, astronomlarca gerçek doğası üzerinde hâlâ bir anlaşmaya varılmamış ve hatta, bununla ilgili halihazırda çok fazla kurgu söz konusu olsa da, parçacık fizikçilerinin kesin olarak tanıdığı herhangi bir maddeden farklı bir madde olabilecek olan *kara madde*dir.[43] Kara madde, sıradan baryonik maddede bulunandan yaklaşık 10 kat daha fazla kütle enerji katkısında bulunur görründüğünden, kritik yoğunluğa ilişkin bir Ω_d kesiri olarak kara madde tarafından sağlanan yoğunluk kabaca $\Omega_d = 0{,}3$'le verilir (ve belirsizlikler, bu rakama dilersek baryonik $\Omega_b = 0{,}03$'ü dahil edebileceğimiz şekildedir). Kritik değerden yine de hâlâ önemli ölçüde uzağız. Dahası (kütlenin varlığının dolaysız bir ölçüsünü sunan, § 19.8'den anımsayacağımız, kütleçekimle ilgili kırma etkisini de içeren) çeşitli türdeki gözlemler evrende başkaca önemli kütle yoğunlukları olamayacağını, epeyce ikna edici biçimde göstermeye başladı. Böylece $K < 0$ sonucu artık oldukça kesin görünüyordu ve bu nedenle şişme yanlıları ve Hartle–Hawking'in devamcıları, bağlı oldukları kendi dünya görüşlerine $K < 0$'ı eklemlemenin yollarını aramaya başladılar.

Daha sonra bomba etkisi yapan kozmolojik sabit geldi. Einstein'ın, Λ'nın ortaya çıkışını, (belki de evrenin genişlemesini tahmin etmekteki başarısızlığında pay sahibi olduğu için) kendisinin yaptığı "en büyük hata" olarak değerlendirdiğini §19.7'den anımsarız. O zamandan sonra kozmologlar tarafından her zaman bir olasılık olarak kabul edilmiş olsa da, onların görece pek azı, Λ'yı gerçek evrenimizde sıfır dışında bir şey olarak bulmayı beklemiş görünür. Ek bir konu, kuantum alan kuramcıları tarafından gerçekleştirilen "vakum enerjisi" hesaplamalarının (temelde §26.9'unkilere benzer bir yeniden normalleştirme etkisi), aslında görülen-

[42] Mordehai Milgrom, 1994, kara meddenin olmadığı, bunun yerine Newtoncı kütleçekim dinamiğinin, kütleçekim etkisini çok düşük ivmeler için belirli özel bir biçimde arttırılmak üzere, Einstein'ınkinden farklı bir biçimde değiştirilmeye gerek duyduğuna ilişkin ilgi çekici fikrini ileri sürdü. Bu fikir gerçeklerle dikkat çekici biçimde uyuşur görünse de, buna ilişkin kuramsal olarak toplamda bir anlam ifade eden tutarlı bir kuram henüz mevcut değildir. Bana göre böylesi alışılmadık fikirler böyle hemen terk edilmemelidir. Bu taslağın daha geniş bir uyumlu bakış açısının bir parçası olup olamayacağını görmek üzere harcanacak çabaya değebilir. Kendim de bunu nasıl yapmak gerektiğini bilemedim!

[43] Kara madde ve ayrıca "kara enerji"ye, diğer bir deyişle olasılıkla değişen Λ, ilişkin kolay erişilebilir bir tartışma için *bkz.* Krauss, 2001.

den yaklaşık 10^{120} kat (ya da farklı varsayımlarda bulunulduysa en azından 10^{60}) kadar büyük bir *etkin* kozmolojik sabit bulunması gerektiğine ilişkin, saçma bir yanıt ortaya koyması gerçeğiydi. Bu "kozmolojik sabit sorunu" olarak bilinir hale geldi. Bilinmeyen bazı sadeleştirmeler ya da genel ilkelerin bu vakum enerjisiyle ilgili 0 değerini verebilmesi akla yatkın olmuş olabilirdi fakat bu çağda kozmolojiyle ilgisi olabilecek minicik bir kalıntı bulmak hiçbir biçimde beklenmiyordu. (Bu "vakum enerjisi"nin g_{ab} metriğiyle, yerel Lorentz değişmezliği yoluyla orantılı olması gerektiği belirtilmelidir, böylece sabit bir Λ'yla ilgili olarak, Λg_{ab} formunun, Einstein'ın 1917'de kesin biçimde öngördüğü üzere Einstein denklemine katılması beklenir. Tek sorun Λ değerinin ortaya büsbütün yanlış olarak çıkmasıdır!)

Yine de 1998'de, çok uzak süpernovaları gözlemleyen, biri Kaliforniya'da Saul Perlmutter tarafından, diğeri Avustralya'da Brian Schmidt ve Doğu ABD'de Robert Kirschner tarafından yönetilen iki ekip (*bkz.* §27.8), pozitif bir kozmolojik sabitin ayırt edici özelliği olan Şekil 27.15d'deki yukarı dönüşle uyumlu olarak, evrenin genişlemesinin ivmelenmeye başladığına ilişkin dikkat çekici sonuca ulaştı. Gözlemlenmiş görünen bu Λ ne kadar büyüktür? Bununla ilgili hâlâ bazı belirsizlikler mevcuttur (ve bazı kuramcılar pozitif bir Λ'ya ilişkin durumun hâlâ ikna edici biçimde ortaya konmamış olduğunu iddia ettiler)[44] fakat dikkat çekici sonuç odur ki, Λ'nın sağladığı etkin Ω_Λ kütle enerji yoğunluğu, bir kritik yoğunluk kesiri biçiminde, $\Omega_\Lambda = 0{,}7$'yle yaklaşık olarak verilir; böylece toplam etkin yoğunlukla ilgili olarak kritik

$$\Omega \approx \Omega_d + \Omega_\Lambda \approx 0{,}3 + 0{,}7 = 1$$

kesirine sahip görünmekteyiz. Diğer bir deyişle artık gözlemler $K = 0$'la uyumlu görünür.

Şişme yanlıları (en azından zeminlerini değiştirmeyecek kadar özgüvene sahip olanlar) elbette çok sevinçlidir ve bu kesinlikle kuramlarına ilişkin, görünüşte karşı tarafın lehindeki güçlü kanıtlar karşısında $K = 0$ tahmininin kazanmış göründüğü bir öngörülülük başarısı olarak sayılabilir. Bununla birlikte belirsizlikler, bu sonucun inançla taşınması için hâlâ çok büyüktür ve başka tip güncel gözlemin de bu sorunla güçlü bir ilişkiye sahip olduğu açıktır. §28.5'te değinildiği üzere, mikrodalga ardalanındaki sıcaklık değişimlerine ilişkin, 1989'da fırlatılan COBE uydusundan başlayarak ve (yazım anındaki) en güncel inceleme WMAP uzay kâşifi tarafın-

[44] *Bkz.* Blanchard vd., 2003. Daha "ana akım" yorumlama için *bkz.* Perlmutter vd., 1998; Bahcall vd., 1999.

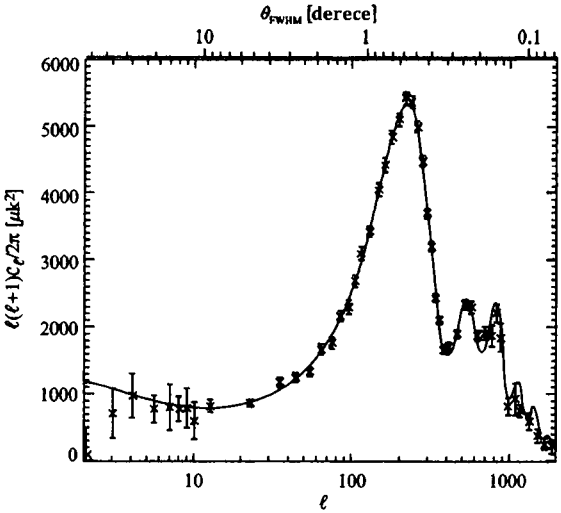
dan yapılmış olan olmak üzere, birçok ayrıntılı ölçüm söz konusu olmuştur.

Normalde bu sıcaklık değişimleri, §22.11'de tartışılmış olan yöntemler uyarınca gökyüzü dizilimini küresel harmoniklere ayrıştırmak yoluyla çözümlenir. Farklı küresel harmoniklerin, $-l$'den l'ye kadar olan aralıkta pozitif bir l tamsayısı ve bir m tamsayısıyla işaretlendiğini anımsarız. (Kuantum mekaniksel durumda, l normalde j olarak anılır ve hem j hem de m yarı–tek tamsayı olabilir.) m niceliği daha az önemlidir çünkü o gökyüzünde rasgele biçimde seçilmiş bir yöne bağlıdır, öyleyse l'nin her değeri için genel şiddet en çok ilgilenilen nicelik olarak değerlendirilir. Şekil 28.19'da bu analizin sonuçlarını gösterdim. Eğri $l = 200$ dolaylarında kendi maksimumuna ulaştıktan sonra salınıma başladığına ilişkin işarete dikkat edin. Bu yerel maksimumlar, evrenin erken bir aşamasında maddenin yerel derişiminin içeriye doğru düşerek başlayıp sonra ya geri sektiği ya da (kara delikler için beklenebilecek şey olan) kendine döndüğüne, bu durum sesle ilgili bir tür salınım olmak üzere, ilişkin açık bir kuramsal tahmini yansıttıklarından "akustik tepeler" olarak anılırlar. Bu salınımın meydana geldiği tipik ölçek ayrıştırmadaki ufuk boyutunca yönetilir (Şekil 28.5a'ya bakın ve u ile v noktalarının ayrıştırma yüzeyi üzerinde geçmişleri birbirine ancak temas edene kadar hareket ettirildiğini düşünün; bu, ufuk boyutudur).[45] Ana tepenin oluştuğu ölçek işte budur.

Bununla birlikte gökyüzündeki hangi açısal aralığın, yeniden birleşme anındaki evrende hangi yerel uzaklık aralığına karşılık geldiği sorusu orta yerdedir. Evrenin uzamsal eğriliğinin, akustik tepeler l'de, K'nin değerine bağlı olarak şu ya da bu şekilde (pozitif K için daha küçüğe, negatif K için daha büyüğe) değiştirilmiş olmak üzere, önemli bir rol oynadığı yer burasıdır. Yine de konu bu kadar açık değildir çünkü evrenin genişleme hızı burada her zaman bir rol oynar, öyleyse ayrıntılı hesaplama gerekecektir. Sonuç, kozmik mikrodalga ardalana ilişkin bu tür çözümlemenin, genel olarak, $K = 0$'la uyumlu olduğudur fakat gözlemle ilgili olarak önemli olan pozitif ya da negatif bir K değerine hâlâ yer vardır.

l'nin yüksek değerleriyle ilgili sonuçlar böylece şişmenin beklentileriyle uyumlu görünür (ve ayrıca bazı şişme modellerinin bulundukları öngörüler olarak gözlemlenmiş, sıcaklık dalgalanmalarındaki bir ölçek değişmezliği de söz konusudur). Peki ya l'nin küçük değerleri? Yalnızca toplam şiddeti açıkladığından $l = 0$ pek aydınlatıcı değildir. Öyleyse $l = 1$'e ne demeli ("çift kutup momenti")? Bu bize uzak evrenle ilgili hiçbir şey söylemez çünkü dünyanın mikrodalga ardalanı yoluyla hareketi, hareket yö-

[45] Dodelson, 2003, bunun ve ilgili CMN verisinin çözümlemesinin nasıl yapıldığını açıklar.



Şekil 28.19 Kozmik mikrodalga ardalana (koyu çizgi) ilişkin harmonik çözümlemede beklenen "akustik tepeler" ve gözlemlenmiş veri noktaları (hata çubuklarıyla birlikte çarpılar). Dört kutupludaki ($l = 2$), düşey eksen tarafından neredeyse gizlenmiş (kazara?) oldukça belirgin uyuşmazlığı fark ettiğinizden emin olun.

nünde algılanan hafifçe yüksek ve ters yönde algılanan hafifçe düşük bir sıcaklığın bulunduğu, $l = 1$ sıcaklık dağılımı ortaya çıkararak asimetrik bir Doppler etkisine (*bkz.* alıştırma [27.10]) yol açar. Kozmolojik olarak önemli ilk l değeri $l = 2$'dir ("dört kutuplu momenti"). Aslında burada şişmenin ölçek değişmez öngörüleriyle, sonraki birkaç harmonik tarafından onaylanan bir uyuşmazlık söz konusudur. Uyuşmazlık küçüktür fakat makul biçimde açık görünür. İma edilen ölçek değişmezliği kırılımı en büyük ölçeklerde düz $K = 0$ geometrisinden farklılık gösteren, "eğrilik yarıçapı" bu tür bir ölçek sağladığından olasılıkla $K > 0$ ya da $K < 0$'ı belirten bir şey olarak yorumlanabilir.

Bu yorumlar bizi ilgi çekici fakat bir biçimde oturmamış bir durumla baş başa bırakır. Yine de Şekil 28.19'un gerçekten, WMAP sıcaklık çizelgesinde içerilmiş olan bilginin yalnızca küçük bir miktarını kullandığı akılda tutulmalıdır. Her l değeri için $2l + 1$ adet farklı m değeri bulunur ve bunların her biri için gerçel bir parametre söz konusudur. O bilginin çoğu bu çözümlemede göz ardı edilir. Bize erken evrenle ilgili olasılıkla büyük önemde bir şeyler söyleyen muazzam miktarda saklı bilgi mevcut olmalıdır.

Burada, bu veriyi çözümlemenin yalnızca tek bir alternatif yoluna, temel olarak Vahe Gurzadyan'a (1992, 1994, 1997, 2002, 2003, 2004) atfedilip

ürkütücü imalara sahip görünen yola değineceğim. Bu yaklaşımda harmonik bir çözümleme kullanılmaz, bunun yerine belirli her sıcaklığın uzak bölgelerindeki, müdahaleci uzamsal eğrilikten kaynaklanan çarpıklıklar incelenir. Böylesi bir bölgenin bozulmamış şeklinin aslında çembersel olduğunu düşünürsek bu durumda eğrilik etkileri bunun eliptik hale gelmesine neden olabilir (Şekil 28.15'i anımsayın). Elbette pratikte, baktığımız bölgenin şeklini bilmemekteyiz fakat belirli sıcaklığa sahip bölgelerin daha (ya da daha az) gergin ya da diğer türlü olacakları durumdan daha cılız hale gelmesine neden olan istatistiksel etkiler söz konusu olabilir. Açıktır ki bu istatistiksel çözümlemenin hassas bir parçasıdır fakat Gurzadyan ve meslektaşlarının ulaştıkları sonuç aslında mikrodalga haritalarında (ilk olarak COBE, sonra BOOMERANG ve daha sonra WMAP) önemli miktarda eliptiklik bulunduğudur. Bu ne anlama gelir? Bu durumun kuramsal çözümlemesi bize, "jeodezik karıştırma"nın sonucu olarak yalnızca $K < 0$'la bu derecede bir eliptiklik bekleyebileceğimizi söyler. Bu sonuçlar yenidir, öyleyse bu dikkat çekici sonuçlara önemli itirazların yöneltilip yöneltilmeyeceğini görmek için beklenmek zorundadır.

Bu çözümleme ayrıca, yaklaşık olarak süpernova verisince ima edilen boyuttaki pozitif kozmolojik sabitle ilgili bağımsız bir kanıt da sunar. Bu nedenle negatif eğriliğin, $\Omega_d + \Omega_\Lambda$'nin, belki yaklaşık 0,9 değerine sahip olarak birden pek fazla farklılık gösteremeyeceği anlamında, küçük olduğu sonucu çıkarılır. Bu, pek çok kozmoloğu endişelendiren bir bilmeceyi vurgular. Ω_b, Ω_d ve Ω_Λ nicelikleri zamanda sabit değildir. Evrenin erken aşamalarında Ω_b ve Ω_d çk daha büyük ve Ω_Λ çok daha küçüktü. Çok geç aşamalarındaysa Ω_Λ etkin kütle enerji yoğunluğuna hükmederken Ω_b ve Ω_d göz ardı edilebilir hale geldi. Ω_b ve Ω_d'nin aynı genel düzende olmalarına ilişkin görünüşteki rastlantı kafa karıştırıcı bir rastlantıya benzer.

"Kozmolojik sabit" terimi, Einstein onu 1917'de kuramsal olarak sunduğundan beridir standart terminoloji olmasına karşın, Λ gözleme dayalı biçimde keşfedilir keşfedilmez ilginç biçimde gündemden düşmüş görünmektedir. Bunun yerine Λ artık, belki de soğuk "kozmolojik sabit" terimi kendinde yeterince gizemli hava barındırmadığından ya da belki de biraz daha gerçekçi biçimde "sabit" sözcüğünün varlığı daha çok Λ'nın zamanla değişemeyeceğini ima ettiğinden, "kara enerji" ya da "vakum enerjisi" ya da bazen "öz" olarak adlandırılır. Çoğu kozmolog değişen bir Λ'yla, belki de yeni "Λ"yı evrenin varsayılmış olan en erken şişen fazıyla benzerliğine işaret ettikleri "yeni bir şişen faz"ın başlangıcı biçiminde değerlendirerek, daha mutlu görünür. §28.4'ten bunun, içinde (şimdiden muazzam biçimde yoğun) sıradan maddenin tümüne hükmedecek kadar büyük olan etkin bir kozmolojik sabitin bulunduğu bir "yanlış vakum" tarafından hâkim olun-

muş biçimde kabul edildiğini anımsarız. O zamanlar evrenin, bugün bulduğumuz değerden olağanüstü biçimde farklı olan etkin bir "Λ"ya sahip olmasına izin verilseydi bu durumda kesinlikle bir "değişen Λ"ya izin vermemiz gerekirdi ve "kozmolojik sabit" terimi böylece uygunsuz olurdu.

Bununla birlikte bazılarına etkileyici bile görünse bu fikir, "kozmolojik sabit" terimi sağlam gerekçeyle sunulduğundan, kendine özgü matematiksel sorunlara sahiptir. Λ'nın sabitliği §§19.5, 7'deki $\nabla^a T_{ab} = 0$ enerji korunum denkleminin dolaysız bir sonucudur çünkü T_{ab}'ye g_{ab}'nin herhangi bir katını eklemek korunum denklemini o kat ancak bir sabitse[28.13] rahatsız edilmemiş halde bırakabilir. Bu nedenle "Λ"daki herhangi bir sabit olmayışa, maddenin kütle enerjisine ilişkin dengeleyici bir korunur olmayış eşlik etmek zorunda olur. Aslında gözlemle de uyumlu biçimde, sabit Λ'ya sahip olmak kuramsal olarak çok daha rahattır.

Bu bizi ne durumda bırakır? Kesinlikle ilginç olan bir durumda! Şişme kozmolojisinin bu gözlemlerle "doğrulandığını" sanmıyorum, öyle bile olsa bana göre bu, diğerlerinin tümünü gölgede bırakan kozmolojik sorunu, diğer bir deyişle ikinci yasayı temelleyen, en azından $10^{10^{123}}$'te bir derecesindeki, olağanüstü biçimde "özel" Büyük Patlamayı çözmez. Bazı kozmologlar bunda içerilmiş olan "ince ayarlama"yı (*bkz.* Şekil 27.20) kabul edilemez olarak değerlendirirler ve onu, gördüğümüz üzere bu tür yöntemlerin bizi son derece yanlış bir yere götürmelerine rağmen, şişme ya da antropik ilke (§§28.5, 7) biçiminde "açıklama"ya çalışırlar.

Aslında, belirgin biçimde *simetrik zamanlı* bir fizik içindeki uzayzaman tekillikleri sorununa yönelmeye girişen herhangi bir önermeyle (örneğin şişme ya da Hartle–Hawking önermesi) ilgili sahip olduğum temel bir sorun söz konusudur. Şişme fiziğinde ve anlayabildiğim kadarıyla Hartel–Hawking önermesinde de zaman asimetrisi yoktur, öyleyse bu önerme Büyük Patlamanın yanı sıra çökmeye ilişkin (kara deliklerdeki ya da varsa Büyük Çöküşteki) son tekilliklere de uygulanmalıdır. Hawking böyle ola*bil*eceğini iddia etti (1982) fakat kesinlikle tuhaf bir biçimde bir son tekilliğin komşuluğundaki uzay, "sınır olmaksızın kapanmış" olmak ve evren Büyük Patlamaya kadar olan tüm yol boyunca geri götürülerek "Öklitçileştirme" yalnızca orada uygulanmak üzere (Şekil 28.18)! Onun argümanı, sınır–yok önermesinin yalnızca, şeyleri sınır olmaksızın kapatmanın *bir* yolu olduğunu ileri sürmesi ve (evrenin zaman algısını belirleyen) "başlangıcı" kapanmanın meydana geldiği bitiş olarak *tanımla*dığımızdı. Bu argüman ve aslında fiziki yasaların kendilerinde açık zaman asimetrisinin bulunmadığı *herhangi bir* argümanla ilgili büyük sorunla-

[28.13] Niçin?

rım olduğunu belirtmek zorundayım. (Hawking'in "tuhaf" argümanında örneğin, çökmeyle ilgili son tekillikte, uzayzamanın yalnızca "diğer tarafında" sınır serbest pürüzsüz bir kapanma olmuş olsa bile hâlâ bir sınır bulunduğu görülür. Bana, sınır giderme sorununun yalnızca bir yarısıyla ilgilenilmiş gibi geliyor.)

Bu durumda, ısrar ettiğim gibi gerçekten *asimetrik zamanlı* bir temel fizik olasılığına mı yönelmek zorundayız? 30. bölümde doğrudan bu konuyla yüz yüze geleceğim! Bunun, kuantum mekaniğiyle ilgili bölümlerde havada bıraktığımız kafa karıştırıcı bir şey le ilgili olduğunu göreceğiz. Sonraki bölümde öyleyse, bu önemli kuantum mekaniksel muammaya geri dönmem gerekecek. Daha sonra 30. bölümde bunun çözümüne ve bunun sonucunda ayrıca asimetrik zaman tekilliğinin nihai çözümüne ilişkin doğru yolla ilgili kendi fikirlerimi sunacağım. Yine de okura resmi uyarımı yapmak zorundayım: çoğu fizikçi benimseyeceğim konumdan hoşnutsuz olabilir.

29

ÖLÇÜM PARADOKSU

29.1 Kuantum kuramının geleneksel ontolojileri

Kuantum mekaniğinin 20. yüzyılın en büyük başarılarından biri olduğuna kuşku yoktur. 19. yüzyılda son derece kafa karıştırıcı olmuş olan, örneğin spektral çizgilerin varlığı, atomların kararlılığı, kimyasal bağların doğası, malzemelerin kuvvet ve renkleri, ferromanyetizma, katı/sıvı/gaz faz geçişleri ve sıcak çevre ortamlarıyla dengedeki sıcak cisimlerin renkleri (kara cisim ışınımı) gibi pek çok olguyu açıklar. Hatta biyolojinin bile, örneğin kalıtımın olağanüstü güvenilirliği gibi bazı kafa karıştırıcı konularının artık kuantum mekaniksel ilkelerden kaynaklandığı görülmektedir. Bu olgular –sıvı kristaller, süper iletkenlik ve süper akışkanlık, lazer davranışı, Bose–Einstein yoğuşumu, EPR etkilerinin ve kuantum ışınlamasının tuhaf yerel olmayışı gibi 20. yüzyılda iyi bilinir hale gelmiş olan pek çoğunun yanı sıra– kuantum mekaniğinin matematiksel formalizmi temelinde artık iyi anlaşılmaktadır. Bu formalizm aslında bize Einstein genel göreliliğinin eğri uzayzamanınınkinden bile çok daha büyük olan gerçek fiziki dünya tablomuzda bir devrim sundu.

Sundu mu? Kuantum mekaniğinin bize "gerçekliğe" ilişkin *hiçbir* tablo sunmadığı fikri günümüz fizikçileri arasında yaygın bir bakıştır. Bu bakıştaki kuantum mekaniği formalizmi yalnızca ş öyle kabul edilmelidir: matematiksel bir formalizm. Pek çok kuantum fizikçisinin iddia ettiği üzere bu formalizm bize dünyanın asıl *kuantum gerçekliği*ne ilişkin esasen hiçbir şey söylemez fakat yalnızca ortaya çıkabilecek alternatif gerçeklik olasılıklarını hesaplamamıza izin verir. Kuantum fizikçilerinin bu tür ontolojisi, "ontoloji" konularıyla kaygılandıkları bir dereceye kadar, şu bakış olur, (a): kuantum formalizminde ifade edilen hiçbir gerçeklik söz konusu değildir. Diğer uçta (görünüşte) tümüyle ters olup pratik olarak tüm kuantum alternatiflerinin her zaman (üst üste binme halinde) bir arada bulunmaya devam etmek zorunda olduklarına ilişkin telaşlandırıcı imayı içeren şu bakışı kabul eden pek çok kuantum fizikçisi yer alır, (b): üniter olarak

evrimleşen kuantum durumu asıl gerçekliği tümüyle açıklar. §21.8'de değinildiği üzere, kuantum fizikçilerinin karşı karşıya geldikleri ve onları bu tür görüşlere yönelten temel zorluk, **U** (§ 22.1) üniter evrime ilişkin (Schrödinger denklemince açıklandığı üzere) belirlenimci işlem ve **R** bir "ölçüm" gerçekleştiğinde ortaya çıkan kuantum durum indirgenmesi olmak üzere, iki kuantum işlemi **U** ve **R** arasındaki çelişkidir. **U** işlemi, bulunduğunda, fizikçilere tanıdık gelen türde bir şeydi: bir (kısmi) diferansiyel denklem tarafından belirlenimci biçimde kontrol edilen belirli matematiksel bir niceliğin, diğer bir deyişle $|\psi\rangle$ durum vektörünün, Schrödinger denkleminin zamansal evrimi klasik Maxwell denklemlerininkinden (*bkz.* §21.3 ve alıştırma [19.2]) farklı olmamak üzere, belirgin zamansal evrimi. Öte taraftan **R** işlemi onlar için oldukça yeni bir şeydi: bu aynı $|\psi\rangle$'nin, yalnızca farklı sonuçlara ilişkin olasılıkların belirlendiği, süreksiz bir rasgele sıçraması. Gözlemlenen dünyayla ilgili fizik basit biçimde, **U** uyarınca yalnızca kendi üzerine etkiyen bir $|\psi\rangle$ niceliğince açıklansaydı bu durumda fizikçiler **U**'yu, "fiziki olarak gerçek" bir $|\psi\rangle$ için "fiziki olarak gerçek" bir evrim işlemi sağlar biçimde kabul etmekle ilgili herhangi ciddi bir sıkıntıya sahip olmazlardı. Ne yazık ki gözlemlenen dünyanın davranış biçimi bu değildir. Bunun yerine zaman zaman bir **R** algılar görünmekteyiz! (Şekil 22.1'i anımsayın.) Bu durum fizikçilerin, $|\psi\rangle$'nin sonuçta gerçekten fiziki gerçekliğe ilişkin bir açıklama olabileceğine inanmalarını çok daha zorlaştırdı. Durumun **U** evrimi uyarınca evrimleşmesi gerekirken **R** ne şekilde ortaya çıkabildiğiyle ilgili kafa karıştırıcı konu (§ 23.6'da kısaca tartışılmış olup § 21.8 ve 22.1'de üstü kapalı biçimde değinilmiş olan) kuantum mekaniğinin ölçüm sorunudur; ya da kendi tercihimle *ölçüm paradoksu*.

(a) bakış açısı temel olarak, $|\psi\rangle$'yi bir kuantum seviyesi gerçekliğini temsil eden değil fakat yalnızca deneycinin bir kuantum sistemine ilişkin "bilgi"sini açıkladığı kabul edilen bir şey olarak değerlendiren Niels Bohr tarafından özel olarak ifade edildiği üzere *Kopenhag yorumu* ontolojisidir. **R** uyarınca "sıçrama" böylece basit olarak deneycinin sistemle ilgili daha fazla bilgi edinmesi biçiminde anlaşılır, öyleyse sıçrayan sistemin fiziği değil *bilgi*dir. (a) uyarınca kuantum seviyesi olgusuna atanmış herhangi bir "gerçeklik", tek gerçeklik, deneycinin düzeneğine ev sahipliği yapan klasik dünyanınki olmak üzere, aranmamalıdır. (a)'nın farklı bir biçimi olarak bu "klasik dünya"nın, gözlemcinin ölçüm düzeneğini oluşturan "makroskopik mekanizma"nın bir parçası seviyesinde değil fakat gözlemcinin kendi *bilinci* seviyesinde devreye girdiğiyle ilgili bakış benimsenebilir. Bu alternatifleri kısa süre içinde daha ayrıntılı olarak tartışacağım.

Öte taraftan (b) alternatifinin destekçileri gerçekliği $|\psi\rangle$'nin temsil *ettiğini* kabul eder fakat **R**'nin meydana geldiğini reddederler. Bir ölçüm ger-

çekleştiğinde aslında alternatif tüm sonuçların gerçeklikte, alternatif evrenlerin temel bir kuantum doğrusal üst üste binmesinde *bir arada bulunduğunu* iddia ederler. Bu temel üst üste binme tüm evrenle ilgili bir $|\psi\rangle$ dalga fonksiyonunca açıklanır. Bu bazen "çoklu evrenler"[1] olarak adlandırılır fakat daha uygun olduğuna inandığım bir terim *omniyum*'dur.[2] Bu bakış açısı, genellikle günlük konuşma dilinde farklı alternatif dünyaların paralel bir arada varoluşlarına yönelik bir inanç olarak ifade edilse de, yanıltıcıdır. Alternatif dünyalar bu bakışta gerçekten, ayrı olarak "var olmaz"; yalnızca $|\psi\rangle$'yle ifade edilen geniş *özel üst üste binme* gerçek olarak kabul edilir.

Niçin (b) uyarınca omniyum, bir gözlemci tarafından asıl "gerçeklik" olarak *algılanmaz*? Fikir, deneycinin zihin durumlarının da, bu farklı bireysel zihin durumları gerçekleştirilen ölçümün olası farklı sonuçlarıyla dolanmış olmak üzere, kuantum üst üste binmesinde birlikte var olduğudur. Buradan hareketle görüş, ölçüme ilişkin olası farklı her sonuçla ilgili etkin olarak "farklı bir dünya", kuantum üst üste binmesinde bir arada bulunan tüm bu farklı dünyaların her birinde deneycinin ayrı bir "kopya"sı var olmak üzere, bulunduğudur. Deneyciye ait her kopya deneyle ilgili farklı bir sonuç elde eder fakat bu "kopyalar" farklı dünyalarda bulunduğundan aralarında herhangi bir iletişim yoktur ve her biri yalnızca bir sonuç ortaya çıktığını düşünür. (b) savunucuları genellikle, **R**'nin meydana gelir *göründüğü* yalnızca "tek bir dünya" olduğu izlenimini zorlayan şeyin, bir gözlemcinin tutarlı bir "farkındalık durumu"na sahip olma gerekliliği olduğunu iddia ederler. Böylesi bir bakış açısı (diğer pek çoklarının bu tarz bir görüşle daha önceden, açık olmaya cüret etmeksizin ve her zaman inanarak olmasa da, bireysel olarak –1950'lerin ortasında benim de yapmış olduğum gibi– oyalandığından kuşkulanmama rağmen!) açık biçimde ilk kez 1957'de III. Hugh Everett tarafından ortaya kondu.[3]

Büsbütün ters doğalarına karşın (a) ve (b) bakış açıları, $|\psi\rangle$'nin, kendisi yoluyla makroskopik ölçekte hepimizin deneyimlediği görünüşteki gerçek dünyayı kastettiğim gözlemlediğimiz "gerçeklik"le nasıl ilişkilenir kabul edileceğiyle ilgili olarak önemli bazı ortak noktalara sahiptir. Bu gözlemlenen dünyada bir deneye ilişkin yalnızca bir sonucun ortaya çıktığı kabul edilir ve aslında normal olarak "gerçeklik" biçiminde değindiğimiz şeyi açıklamak ya da modellemenin haklı olarak fiziğin görevi olduğunu düşünürüz. $|\psi\rangle$ durum vektörü ne (a) ne de (b) uyarınca gerçekliği açıklar bi-

---

[1] *Bkz.* Deutsch, 2000.

[2] Bu terimi klasik biçim yanlısı meslektaşım Peter Derow'a borçluyum. *Bkz.* Penrose, 1987a.

[3] *Bkz.* Everett, 1957; De Witt ve Graham, 1973.

çimde kabul edilir. Formalizmin bu gözlemlenen gerçek dünyayla nasıl ilişkilendiğine anlam kazandırmak üzere her seferinde deneyci bir insanın kavrayışını devreye sokmak zorundayız. (a) durumunda $|\psi\rangle$ durum vektörünün kendisi bu deneyci insanın kavrayışlarının bir aracı olarak kabul edilirken (b) durumunda, $|\psi\rangle$ durum vektörü artık doğrudan algılanmayan daha derin bir tür başat gerçekliği (omniyum) göstermek üzere, bir şekilde deneycinin kavrayışı olarak betimlenen şey "sıradan gerçeklik"tir. Her iki durumda da R'nin "sıçrama"sı, "tümüyle zihinde" olmak anlamında, fiziki biçimde gerçek olarak kabul edilmez!

(a) ve (b) konumlarının her ikisiyle ilgili kendi sorunlarımı zamanı gelince açıklayacağım fakat bundan önce geleneksel kuantum mekaniğini yorumlamaya ilişkin başka bir olasılığa değinmeliyim. Anlayabildiğim kadarıyla bu, belki de ontolojik bir duruştan daha çok pragmatik bir duruş olmasına rağmen, kuantum mekaniksel bakış açılarının en yaygın olanıdır; (c) *çevresel evre uyumsuzluk*. (c)'ye ilişkin fikir, ele alınan kuantum sisteminin herhangi bir ölçüm işleminde çevresindekilerden yalıtılmış biçimde kabul edilemeyeceğidir. Bu nedenle, bir ölçüm gerçekleştirildiğinde farklı her sonuç, kendi başına bir kuantum durumu oluşturmaz fakat kendisinin çevreye ilişkin farklı bir durumla karıştırıldığı karışık bir durumun (§23.3) parçası olarak ele alınmak zorundadır. Şu halde çevre, etkin biçimde rasgele hareket halindeki çok büyük miktardaki parçacıktan oluşacaktır ve bu parçacıklara ilişkin konum ve hareketlerin tüm ayrıntıları uygulamada tümüyle gözlemlenemez kabul edilmek zorundadır.[4] Bilginin esasen eksik olduğu bu tür durumu ele almak üzere iyi tanımlı matematiksel bir işlem söz konusudur: ele alınan fiziki sistemi açıklamak üzere *yoğunluk matrisi* olarak bilinen matematiksel nesneyi elde etmek için bilinmeyen çevresel durumlar "üst üste eklenir". Yoğunluk matrisleri kuantum mekaniğindeki ölçüm sorunuyla ilgili genel tartışma için önemlidir (ve ayrıca pek çok diğer bağlamda da önemlidir) fakat ontolojik konumları hemen hemen hiç açık değildir. Bir yoğunluk matrisinin ne olduğunu çok kısa süre içinde (§29.3'te) açıklayacağım. Bununla birlikte, yoğunluk matrisi ontolojisinin tümüyle açık hale *getirilmemesinin* (c) konumu için neden önemli olduğunu daha sonra göreceğiz! (c) bakış açısının savunucuları kendilerini her durumda, ontolojinin "değersiz" konularıyla ilişkileri ol-

[4] Bazı fizikçiler, §§29.7–9'da geleceğimiz Schrödinger'in üst üste binmiş ölü ve canlı kedileri gibi, makroskopik olarak farklı durumlara ilişkin kuantum üst üste binmesiyle ilgili "hiçbir sorun" olmadığını iddia eder çünkü ölü ve canlı durumlar arasında girişim algılamak üzere bir deney tasarlamak basit olarak "son derece masraflı" olur ya da pratik olarak olanaksızdır. Bu, yine, esasen burada ilgilendiğimiz ontolojik konulara yönelmeyen "pragmatik" bir duruşu benimsemektir. Böylesi fizikçileri genel olara (c) kategorisine dahil edeceğim.

mayan ve "gerçek" ile "gerçek olmayan"ın ne olduğuyla hiçbir ilgileri olmadığına inanmak isteyen "pozitivistler" olarak değerlendirme eğilimindeler. Stephen Hawking'in dediği gibi:[5]

> Bir kuramın gerçeklikte karşılığı olmasını talep etmem çünkü bunun ne olduğunu bilmiyorum. Gerçeklik turnusol kağıdıyla test edebileceğiniz bir nitelik değildir. Bunda ilgilendiğim tek şey kuramın, ölçümün sonuçlarını öngörmesi gerektiğidir.

Öte taraftan benim konumum ontoloji konusunun, günümüzde çözülmekten oldukça uzak bazı konulara neden olsa da, kuantum mekaniği için yaşamsal olduğudur.

29.2 Kuantum kuramıyla ilgili alışılmadık ontolojiler

Tüm bunlara ayrıntılı olarak girmeden önce kuantum mekaniğiyle ilgili genel üç bakış açısını daha değerlendireyim. Ne listemin her biçimde çok geniş kapsamlı olduğuna hükmedilmeli ne de bu yeni olanların önceki bölümde sunmuş olduklarımdan tümüyle bağımsız olduğu kabul edilmelidir. Burada ele alacağım (a), (b), (c), (d), (e), (f) listesi mevcut yazında en sık biçimde bulunacak türdeki bakış açıları dağılımını temsil eder fakat listemin tamlığı, bağımsızlığı ya da özgünlüğüne ilişkin herhangi bir iddiada bulunmuyorum. Burada ele alacağım üç ek ontoloji olağan kuantum formalizmindeki gerçek değişiklikleri gösterir fakat ikisinde, (d) ve (e), önerilen formalizmle standart kuantum mekaniği arasında deneysel bir ayrım oluşması beklenmez. (d) bakış açısı Griffiths, Omnès ve Gell-Mann/Hartle'a atfedilen "tutarlı geçmişler" yaklaşımı ve (e) de Broglie ve Bohm/Hiley'in "pilot-dalga" ontolojisidir.[6] Son olasılık (f), günümüz kuantum fiziğinin yalnızca daha iyi bir şeye yönelik yaklaşıklık tahminidir ve -bu ge-

---

[5] *Bkz.* Hawking ve Penrose, 1996, s. 121.

[6] Liste yalnızca semboliktir ve listelediklerim arasında pek çok ince bakış açısı farkı söz konusudur. Örneğin, Sorkin, 1994, gibi bazıları "kuantum gerçekliği"nin en iyi şekilde, §§26.6-11'de karşılaştığımız yol integralleri ve/ya da Feynman grafikleri biçiminde anlaşılacağını ifade etti. Anlayabildiğim kadarıyla bu belirli ontoloji ailesi, (d)'yle ortak bazı önemli elemanlara sahip olsa da, kendisi uyarınca "kuantum durumu"nu ya da "kuantum geçmişi"ni tanımlayan belirli bir üst üste binmenin "gerçeklik" konumuna atanacağı (b) tarafından kapsanan sınıfa aittir. Kendileri uyarınca, son ölçümden geleceğe yayılan bir Schrödinger dalga fonksiyonunun sonraki ölçümden geçmişe yayılan bir Schrödinger dalga fonksiyonuyla birlikte gerçekliğin açıklanmasında kaydedildikleri (*bkz.* §30.3) Aharonov ve Vaidman, 2001; Cramer, 1988; Costa de Beauregard, 1995; Werbos ve Dolmatova, 2000, "eylemsel" ontolojilerini de ayrıca belirtmeliyim. Bununla birlikte daha fazla bileşen olmaksızın ölçüm paradoksunun bu alternatif bakışların herhangi birinden daha iyi çözümleneceğini sanmıyorum.

lişmiş kuramda– **U** ve **R**'nin *nesnel olarak* gerçek işlemler biçiminde gerçekleşmesidir; dahası gelecek deneylerinin böylesi bir kuramı geleneksel kuantum mekaniğinden ayırt edebilme gerekliliği (f)'ye ilişkin perspektifin parçasıdır.

Gerekli araçlara sahip olduğumuz sürece çeşitli alternatiflerle ilgili, (a), ..., (f), değerlendirmelerimi sunmaya çalışacağım. Bununla birlikte okurun bu değerlendirmelerle ilgili uygun nesnel tutumu alabilmesi için bu aşamada açık olarak kendi konuma ilişkin "gerçeği söylemem" en iyisi olacak. Aslında ben, kuantum fiziğinin bütüncül biçimde tutarlı bir anlam ifade edebilmesi için (f) paralelinde bazı gelişmelerin gerektiğine güçlü biçimde inanıyorum. Sonraki bölümde esasen bana en doğal görünen belirli (f) versiyonunu ortaya koyacağım. Bu uyarıyla birlikte ilk olarak, okuyucunun zihninde açık biçimde tutmasını amaçladığım tüm alternatifleri listeleyerek devam edelim.

(a) "Kopenhag"
(b) çoklu dünyalar
(c) çevresel evre uyumsuzluk
(d) tutarlı geçmişler
(e) pilot dalga
(f) nesnel **R**'li yeni kuram

(d) ve (e) hakkında, henüz onları gerçekten açıklamadığım için birkaç uyarıda bulunmam gerekecek. (d) "tutarlı geçmişler" taslağı kuantum kuramının standart çerçevesine ilişkin bir genelleme sunar. Bazı yanlıları, bir bakımdan daha bile savurgan olmasına rağmen (d)'yi, (b) çoklu dünyalarınkine biraz benzer biçimde sundular fakat görebildiğim kadarıyla böylesi savurgan bir ontoloji gerekli olmayabilir de. (b) ve (d)'nin her ikisinde de temel bileşenler olarak bir **H** Hilbert uzayı, **H**'ye ait bir $|\psi_0\rangle$ başlangıç durumu ve bir $\mathcal{H}$ Hamiltonına sahip olduğumuz bir konumu benimseyebiliriz.[7] (b) çoklu dünyalar durumunda ontolojik konum (omniyuma ait) gerçekliği $t = 0$'da $|\psi_0\rangle$'la başlayıp $t > 0$ için tümüyle $\mathcal{H}$ tarafından belirlenen Schrödinger denkelmince yönetilen 1–parametreli sürekli bir durum ailesi (t zaman parametreli **H**'ye ait elemanlar) biçiminde açıklanmalıdır. Burada **R** değil, yalnızca **U** bulunur. Öte taraftan (d) tutarlı geçmişler durumu bunu, bunlar gerçek ölçümlerle herhangi bir biçimde zorunlu olarak birleşek şekilde değerlendirilmese de, "evrim"ine "**R** tipli işlemler"i de dahil etmek üzere genişletir.

[7] (d) formalizmi ayrıca, "başlangıç durumu"nun bir yoğunluk matrisi olabilmesine de izin verir, *Bkz.* §29.3.

Bu işlemlerin matematiksel doğasını anlamak üzere ilk olarak kuantum mekaniksel bir ölçümün, ((d)'ye ilişkin olarak bu işlemleri ölçümler biçiminde düşünmesek bile) matematiksel olarak Hermitsel (ya da normal) bir Q işlemcisinin eylemi biçiminde nasıl tanımlandığını §§22.5, 6'dan anımsamak zorundayız. Sistemin durumu hemen ölçümden önce $|\psi\rangle$'yse bu durumda onun, ölçümün hemen ardından ölçümün sağladığı Q öz değerine karşılık gelen Q öz durumuna "sıçra"dığı kabul edilir. Bununla birlikte onun $|\psi\rangle$ üzerindeki etkisiyle ilgilenildiği sürece Q'yu (**H** Hilbert uzayımızı uygunluk bakımından sonlu boyutlu kabul etmek üzere Q'nun yalnızca r adet ayrık öz değeri olduğunun varsayarak) "tüm bir ortogonal projektörler kümesi"yle de, $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_r$, değiştirebiliriz. Böylece ölçüm q_j öz değeri sonucunu verirse $|\psi\rangle$'nin $E_j|\psi\rangle$'yle orantılı bir duruma sıçradığını görürürüz (izdüşüm önermesi).

Buna biraz daha ayrıntılı bakalım. Bir *projektör*ün, §22.6'dan, kendi karesi ve Hermitseline eşit olan bir E işlemcisi, diğer bir deyişle

$$E^2 = E = E^*$$

olduğunu anımsarız. $E_1, \ldots, E_r$ projektörlerinin birbirlerine *ortogonal* oldukları savı

$$i \neq j \text{ olduğu her zaman } E_i E_j = 0\text{'dır}$$

ve tam oluşları toplamlarının H üzerindeki birim I'ya eşit olmasıdır:

$$E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_r = I.$$

Bu şartların tümünü yerine getiren E'ler kümesine basit olarak *projektör kümesi* diyelim. Q ve ilgili projektör kümesi arasındaki bağlantı, Q'ya ait her bir q_j öz değeri için ilgili öz vektör uzayının $E_j|\psi\rangle$ biçimindeki vektörlerden oluşmasıdır. E_j projektörünün rolü, q_j öz değeri için bu öz vektör uzayına iz düşürmesidir.[29.1]

Q'yla temsil edilen ölçümdeki **R** işlemiyle ilgili *izdüşüm önermesi* bize, ölçümün sonucu q_j'yse bu durumda $|\psi\rangle$'nin $E_j|\psi\rangle$'ye (orantılı bir şeye) sıçrayacağını söyler. Bu, $|\psi\rangle$'nin *normalleştiril*diğini, diğer bir deyişle $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ olduğunu varsayarsak,

---

[29.1] $E_j|\psi\rangle$'nin niçin $|\psi\rangle$'ye uygulanan $Q = q_1E_1 + q_2E_2 + q_3E_3 + \cdots + q_rE_r$'yle verilen bir ölçümün, normalleştirmenin göz ardı edildiği, sonucu olduğunu, q_j öz değer ve $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_r$ nicelikleri ayrık gerçel sayılar olmak üzere, açıklayın. Genel sonlu boyutlu Hermitsel işlemcisinin bu biçime sahip olduğunu kanıtlayabilir misiniz? Sonlu boyutlu herhangi bir Q Hermitsel matrisinin üniter dönüşüm yoluyla bir köşegen matrisine dönüştürüldüğünü varsayabilirsiniz. E'ler Q'ya ait *temel denkgüçlüler* olarak adlandırılır. Q *normal* işlemcisi için hangi değişiklikler gerekir?

$$\langle\psi|E_j|\psi\rangle$$

olasılığıyla verilir. Bu nedenle kuantum durumu üzerinde Q'ya karşılık gelen etkiyi açıklamak üzere yalnızca Q'yla tanımlanan projektör kümesini ele almamız gerekir.

Artık (d) tutarlı geçmişler yaklaşımına ilişkin ontolojiye dönelim. Kuram, her biri $\mathcal{H}$ Hamiltonı kullanarak (b) çoklu dünyalar yaklaşımındaki evrimleşen bir Schrödinger "omniyum"una büyük oranda benzeyen, *kalın taneli geçmişler*[8] olarak adlandırılan varlıklarla işler. Diğer taraftan (d)'yle birlikte, evrim süresince projektör kümelerinin çeşitli t değerlerine yerleştirilmesine de izin veririz.

Böylesi bir projektör kümesinin yerleştirilmesine ilişkin ontolojik konum benim için hâlâ yeterince açık değildir fakat bu tür bir projektör kümesinin rolünün, dünyada ne olmakta olduğuna ilişkin temel bir değişimi göstermek yerine geçmişin bir tür "arıtılma"sını sağlamak olduğuna ilişkin yaklaşımın benimsenmesi teşvik edilir. Projektörler kesinlikle bazı nesnel ölçümlerce verilen ontolojik konuma atanmamalıdır. Daha uygun bir benzetme projektör kümelerinin kalın taneli "kutular"la ilgili olarak, klasik faz uzayındaki gibi (*bkz.* §27.3), arıtım ya da değişiklikler sağlaması olabilir; burada kullanılan "kalın taneli geçmiş" teriminin sebebi budur. Bir projektör kümesiyle (ve benzer biçimde kuantum ölçümünde benimsenmiş olan standart işlemle) karşılaşılan noktadaki böylesi kalın taneli bir geçmişte mevcut $|\psi\rangle$ durumunun yeri, E_j projektör kümesinin bir üyesi olmak üzere, $E_j|\psi\rangle$ (buna orantılı bir şey) tarafından değiştirilir. Bu bir bilgi kaybı olarak düşünülebilir fakat kümedeki E_j'lerin tümü için $E_j|\psi\rangle$'nin *tüm aile*sini takip edersek, $|\psi\rangle$ basitçe bunların tümünün toplamı olduğundan herhangi bir kayıp söz konusu değildir.

Gerçekten algıladığımız türdeki klasik dünyaya benzeyen bir şeyin ortaya çıkmasıyla ilgili istek uyarınca, standart kuantum kurallarına göre hesaplanan olasılıkların olağan klasik olasılık kurallarını sağladığı koşul oluşursa, belirli bazı kalın taneli geçmiş aileleri seçilip ayrılır ve *tutarlı* (ya da bazen "evre uyumsuz") olarak adlandırılır.[9] Kalın taneli geçmişlerin

---

[8] Bu bazen basit biçimde "geçmiş" olarak adlandırılır fakat bu, o terimin §26.6'daki Feynman "geçmişler toplamı"ndaki kullanımıyla bir karışıklığa neden olabilir.

[9] Bu, şu tipte bir koşuldur. Verili, ardışık projektör kümelerine sahip olduğumuzu düşünün ve şimdilik $\mathcal{H} = 0$ olarak varsayın; bu durumda, $|\psi_0\rangle$ başlangıç durumu olmak ve "son durum" bir D_∞ yoğunluk matrisi biçiminde kabul edilebilmek üzere, *bkz.* §29.3, $X = \langle\psi_0|E\square F\square\ldots K\square L\square D_\infty LK\ldots FE|\psi_0\rangle$ ifadesini oluştururuz. $(E,E'),(F,F'),\ldots,(K,K'),(L,L')$ ardışık projektör çiftleri sırasıyla verili projektör kümeleri dizisine aittir. Tutarlılık koşulu, X'in gerçel kısmının, $(E,E'),(F,F'),\ldots,(K,K'),(L,L')$ çiftlerinden herhangi birinin eşit olmadığı her zaman yok olmasını talep eder. Bu tam olarak evrimin yalnızca Schrödinger kısmı göz

tutarlı bir kümesi, tutarlılığı yok etmeksizin (dahil edilmiş olanların hiçbirisiyle denk olmayan) diğer bir projektör kümesi yerleştirilemiyorsa *azami ölçüde arıtılmış* olarak adlandırılır. Azami ölçüde arıtılmış bir kümedeki bir geçmiş bana, (d) bakış açısı uyarınca ontolojik biçimde "gerçek" olarak değerlendirilen şeyin güçlü bir adayını sağlıyormuş gibi görünmektedir.

Yine de henüz bu bakış açısının açık biçimde ortaya konduğunu görmedim ve azami ölçüde arıtılmış bir kümedeki geçmişler *bütünlüğü*ne daha çok benzeyen bir şey, ifade edildiğini duyduğum "tutarlı geçmişler"le ilgili ontolojik bakış açısına daha yakın gibi görünüyor.[10] Belki de bu, (b) çoklu dünyalar bakış açısında gördüğümüz şeyle birlikte daha düzenlidir fakat projektör kümelerine ilişkin olası alternatif pek çok tutarlı toplamın varlığı bize alternatif "dünyalar"a ilişkin daha da geniş topluluk sağlar görünmektedir. Bununla birlikte ayrıca (b) çoklu dünyalar tablosunda da ontolojik karışıklık biçiminde bir şeyin ortaya çıkabildiğini anımsarız. Ontolojik biçimdeki ($|\psi\rangle$'yle açıklanan) "gerçek" omniyum çok sayıda farklı dünyanın bir *üst üste binme*sidir ve (yalnızca kendilerine ait belirli $|\psi\rangle$ üst üste binmesi yerine) bu bireysel dünyaların tümünün *derlemesi* "gerçek" olarak kabul edil*me*melidir. Bu tür karışıklığa karşı olan küme, (d) tutarlı geçmişler bakış açısında, doğru kuantum olasılıklarının kuram tarafından sağlanması anlamında avantajdır; (b)'yle ilgili olarak durum böyle görünmez.

(e) "Bohmcu" (pilot dalga) durumunda ontolojik konum, burada önemli bazı incelikler bulunsa bile çünkü bir anlamda gerçekliğe ilişkin olarak biri diğerinden daha katı olan *iki* seviye söz konusudur, ferahlatıcı biçimde dünyaya daha çok yöneliktir. Durumu ilk olarak yalnızca tekil bir spinsiz parçacıktan oluşan bir sisteme ilişkin olarak ortaya koymak en basitidir. Böylece gerçekliğe ilişkin bu katı düzey parçacığın gerçek konumu tarafından verilir. Parçacığın konumu iki yarık deneyinde (§21.4, Şekil 21.4) ontolojik olarak gerçek olduğundan aslında o, ya bir yarıktan ya da diğerinden gider fakat hareketi esasen ψ tarafından "yönlendirilir"; böylece

ardı edildiğindeki durumdur fakat önemsiz olmayan Schrödinger evrimi, bu evrimi projektörlerin uygulamaları arasına uygun biçimde sunmak yoluyla yeniden göreve getirilebilir. Kalın taneli geçmişlerle ilgili bu "tutarlılık koşulu" kıyaslanan geçmişler arasındaki "girişimsizlik" koşulu olarak yorumlanabilir.

[10] Aslında, tutarlı geçmişler yazınına gerçekten tasarlanmış *herhangi bir* "(d) ontolojisi"yle ilgili açık bir ifade yerleştirmedim. Burada sunduğum şey yalnızca, bu konuya hâkim olmakla ilgili, Jim Hartle'la yapılmış genişletilmiş bir tartışma ve daha özel olarak Fay Dowker'la gerçekleşmiş bazı faydalı yazışmalara dayanan kendi girişimimdir. Çabalarıma karşın "(d)" cemiyetinin temelde yatan niyet edilmiş bir ontolojisini hâlâ uygun biçimde sunamamış olmam olasıdır.

bu, ψ'ye ikincil fakat yine de ontolojik olarak hâlâ "gerçek" bir konum sağlar. Bu kuramda ψ'nin *modül* ve *argümanı*yla ilgili (§5.1), "kuantum potansiyeli" olarak anılan bir nicelik ilkinden oluşturulmak ve sonraki "pilot dalga" denilen şeyi tanımlamakta kullanılmak üzere, bir biçimde farklı tutum takınmak oldukça geneldir. Bununla birlikte böylesi bir ayrım gerekli değildir ve önemi daha karışık sistemlerde daha az belirgin bir hal alır görünür.

ψ'yi genellikle $\mathcal{C}$ düzenleme uzayı üzerinde tanımlanmış karmaşık bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. O, $\mathcal{C}$ üzerindeki bir P noktasının davranışını "yönlendirme" işleviyle hizmet eder. Sistemin gerçekliğine ilişkin katı parça esasen P tarafından tanımlanan klasik düzenleme olarak kabul edilir fakat ψ karmaşık fonksiyonuna ayrıca, P'nin davranışını yönlendirme rolünün üstünlüğü tarafından bir tür (daha zayıf) gerçeklik de atanır. Sonuç olarak tüm ölçümlerin, burada sistemin düzenlenişine ilişkin ölçümler anlamına gelen "konum" ölçümlerine indirgenebileceği düşünülür. $\mathcal{C}$ üzerindeki bir Q noktasındaki $|\psi|^2$ modül karesi sistemi Q'yla tanımlanan düzen içinde bulmaya ilişkin olasılık yoğunluğunu tanımlar fakat $\mathcal{C}$ üzerindeki P'nin konumu sistemin *gerçek* düzenlemesi olarak düşünülen şeyi belirler.

Şimdi, tüm bunlar "epey kolay" gibi görünür fakat incelikler söz konusudur. En belirgin olarak, tablo, ψ'nin (§21.7'de vurgulanmış olan dalga fonksiyonlarının holistik doğasıyla uyum sağlamak üzere olması gerektiği gibi) son derece "holistik" olduğu, epeyce yerel olmayan bir tablodur. Öte taraftan bu, kuantum mekaniğinde kaçınılmaz görünüyor. Daha da ciddi olan bir şey, $|\psi_0\rangle$ başlangıç durumuyla ilgili olasılık dağılımına, $|\psi|^2$ kuantum olasılık kuralının doğru kalacağı ve ardışık ölçümler sonrasında doğru kalmayı sürdüreceği biçimde yüklenmesi gereken önemli koşullar mevcuttur. Tüm ölçümlerin sonuç olarak her zaman konum ölçümlerine indirgenebileceği varsayımının doğruluğunun ve spin benzeri klasik olmayan parametreler ele alındığında düzenleme uzayı tablosunun uygun biçimde belirgin olup olmadığının sorgulanabileceği bir ek nokta daha söz konusudur. Yine de (e) ontolojik konumunun açıklığı (burada yüzleşmemiz gereken başkaca konular bulunduğunu §29.9'da görecek olsak da) büyük oranda kendi saygınlığına kazandırır.[11]

Son olarak (f)'ye uygun biçimde farklı pek çok önerme mevcuttur. Bunları burada tüm ayrıntılarıyla anlatmam uygun olmaz fakat onlarla ilgili bazı genel yorumlarda bulunabilirim. Bu önermelerin oldukça büyük bir

[11] *Bkz.* Bohm ve Hiley, 1995; Valentini, 2002. Antony Valentini ayrıca, atölyede, de Broglie–Bohm kuramıyla ilgili, yakında basılacağını umduğumuz bir kitaba da sahiptir.

kısmı evrimleşen bir $|\psi\rangle$ durum vektörüyle ilgili ontolojik olarak gerçek bir konumu (en azından geçici bir tutum olarak) kabul edecektir. Böylesi bir kuramdaki $|\psi\rangle$ zaman evrimi **U**'nun **R**'yle değişimli oluşuna yakından benzeyen, standart kuantum mekaniğinin bize pratikte benimsememizi söylediği bir şeydir; *bkz.* Şekil 22.1. (f) bakış açısıyla paralel kuramlar kuantum mekaniksel düşünüşe ilişkin olarak "ana akım dışı" biçiminde ele alınmasına karşın, (f)'nin gerçekte, **U** ve **R** kuantum mekaniksel evrim işlemlerinin *ikisinin de*, ontolojik olarak ciddi biçimde gerçekliğe ilişkin evrimi açıkladığı kabul edildiğinden, bugün uygulamada kullanıldığı haliyle kuantum mekaniğine ilişkin formalizmin gerçekliğini en çok *kabul eden* bakış açısı olduğu çok makul biçimde söylenebilir! Bununla birlikte sorun, (f)'nin sıradan üniter evrimde değişiklikler olması gerektiğine ilişkin talebi nedeniyle ve (f)'yi ana akımdan ayıran şey budur, **U** ve **R**'nin birbirleriyle matematiksel olarak *tutarsız* olmalarıdır.

R niçin matematiksel olarak **U**'yla tutarsızdır? Belki de en belirgin neden **R**, durum vektöründe (ölçümden önceki durumun gerçekte ölçüm işlemcisine ait bir öz durum olduğu istisnai hal dışında) süreksiz bir değişimi temsil ederken **U**'nun her zamanlı sürekli biçimde davranmasıdır. Bununla birlikte **R** tarafından harekete geçirilen "sıçrama"nın mutlak biçimde kendiliğinden olmadığını bile düşünsek, **R**'deki belirlenimcilik yoksunluğu nedeniyle üniterlikte sorun söz konusu olur. **U**'da asla meydana gelmeyecek bir şey olmak üzere, aynı girdiden farklı alternatif sonuçlar ortaya çıkabilir. Dahası, **R**'yi gerçek bir işlem haline getiren bir kuram, (önemsiz olmayan) bir kuantum sıçraması, **R**'yle uyumlu olarak, gerçekten ortaya çıktığında asla üniter olamaz. Buna karşın, **U**'nun bize olasılıkçı **R**'yi sağlamasını sekteye uğratan "modül karesi kuralı", bize **R**'yle ilgili olasılığa ilişkin bir korunum yasası (temel olarak kuantum olasılıklarının kendileri yoluyla hesaplandığı $\langle\phi|\psi\rangle$ skaler çarpımlarının üniter zaman evrimi altında korunması gerçeği, §§22.4, 5) vermek üzere **U**'nun üniterliğini işe koştuğundan **U** ve **R** işlemleri arasında kayda değer bir tür uyum mevcuttur. Bu, kuantum mekaniğine ilişkin mucizelerin tamamlayıcı bir parçasıdır ve insanların o kuramın ilkeleriyle ne şekilde olursa olsun oynamaya gönülsüz olmalarına ilişkin, (f)'nin günümüz kuantum fizikçileri arasında niçin özel olarak gözde olmadığını kısmen açıklayan iyi bir neden sunar.

Yine de bir değişiklik beklemek için güçlü nedenler bulunduğuna inanıyorum. Böylesi bir değişiklik bana göre temel bir devrimi temsil eder ve bu yalnızca kuantum mekaniği üzerinde "tamirat" yapmakla başarılamaz. Buna rağmen, gerekli değişikliklerin kendileri günümüz fiziğinin kalbinde bulunan merkezi ilkelere tümüyle saygılı olmak zorundadır. Önceki paragrafta belirtildiği üzere kuantum formalizminin mutlak katılığı bu gerekli-

liklerin ikisinin de sebebidir. Bir kıyaslama olarak Newton fiziğinin katılığını anımsayalım. Görelilik ve kuantum mekaniği onun üzerinde tamir yaparak değil fakat Newton kuramının son derece düzenli Lagrange denklemi/Hamilton/simplektik geometrik yapısına gerekli saygıyı yine de göstermiş olan devrimci bakış açısı değişikliği yoluyla elde edildi. Şu ana kadar çeşitli insanlar tarafından kuantum kuramına ilişkin olarak ileri sürülmüş değişiklikler[12] böylesi saygın bir devrimci karakterde midir yoksa yalnızca tamiratla mı uğraşmaktadır? Bu fikirlerin çoğunlukla tamirat biçiminde değerlendirilmek zorunda olduğu söylenmelidir; yine de bu fikirlerden bazıları gelişmiş bir kuantum kuramına giden doğru yola ilişkin işaretçileri sağlayabilir.

29.3 Yoğunluk matrisi

Peki ama niçin ne olursa olsun kuantum kuramını "geliştirme"ye yönelik bir gereklilik söz konusudur? Çoğu kuantum fizikçisi bu tür herhangi bir kuramın gerekli olmadığına, standart tabloların biri ya da diğeriyle (ya da bu tür bir tablonun yokluğuyla) ilgili görünüşteki çelişkiler ya da belirsiz ontolojiyle kendi barışlarını gerçekleştirerek, inanır görünmektedir. (a), (b) ve (c) "standart" tablolarının herhangi birinde var olabilecek herhangi bir güçlüğe yönelmeye girişmeden önce, yalnızca (c) bakış açısı için temel olmayıp aynı zamanda pek çok diğer kuantum mekaniksel değerlendirmede önemli bir role sahip olan yoğunluk matrisi kavramına gelmemiz gerekiyor. Dahası bu kavram gerçekliğin kuantum mekaniğinde nasıl temsil edilmesi gerektiğiyle ilgili ilgi çekici ve derin konulara neden olur.

Durumu bizim için tümüyle bilinir olmayan bir kuantum sistemine sahip olduğumuzu düşünün. Durum $|\psi\rangle$ olabilir ya da $|\phi\rangle$ olabilir ya da ... olabilir ya da $|\chi\rangle$ olabilir. Liste sonsuz olabilir fakat amaçlarımızla ilgili olarak yalnızca sınırlı bir olanaklar listesini ele almak yeterli olacaktır. Bu olanakların her birine bir olasılık, diyelim ki sırasıyla $p, q, \ldots, s$ atanmak zorundadır. Olanaklar geniş kapsamlı olmalıdır, öyleyse olasılıkların, 0 ve 1 arasındaki (bunlar da dahil) gerçel sayılar, toplamı bire eşit olmak zorundadır:

$$p + q + \cdots + s = 1.$$

[12] *Bkz.* Károlyházy, 1974; Frenkel, 2000; Ghirardi vd., 1986; Ghirardi vd., 1990; Komar, 1964; Pearle, 1985; Pearle ve Squires, 1995; Kibble, 1981; Weinberg, 1989; Diósi, 1984, 1989; Percival, 1994, 1995; Gisin, 1989, 1990; Penrose, 1986a, 1989, 1996a, 2000a, Leggett, 2002. Bunlar belirli bir düzende sıralanmamıştır.

$|\psi\rangle, |\phi\rangle, \ldots, |\chi\rangle$'nin her birinin *normalleştiril*diğini varsayarız:

$$\|\psi\| = 1, \|\phi\| = 1, \ldots, \|\chi\| = 1.$$

(§22.3'ten $\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle$, vb olduğunu anımsayın.) Bu durumda *yoğunluk matrisi*ni

$$\boldsymbol{D} = p|\psi\rangle\langle\psi| + q|\phi\rangle\langle\phi| + \cdots + s|\chi\rangle\langle\chi|$$

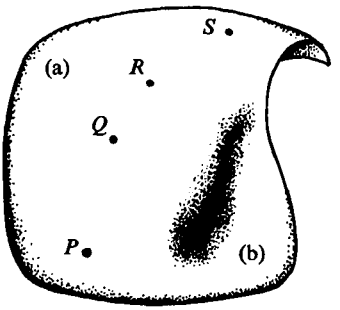
niceliği olarak tanımlarız. §22.3'ten $\langle\psi|$ bra vektörünün $|\psi\rangle$ ket vektörünün Hermitsel eşleniği olduğunu anımsayın. Böylece $|\psi\rangle\langle\psi|$ niceliği $|\psi\rangle$'nin $\langle\psi|$'yle, vb tensör çarpımı (ya da dış çarpım) olur. ψ^α'nın $|\psi\rangle$ yerine kullanıldığı §23.8'in indis notasyonunda $\langle\psi|$'yi $\bar{\psi}_\alpha$ olarak yazabiliriz. Böylece $|\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi^\alpha\bar{\psi}_\beta$, vb olarak yazılabilir. Buradan hareketle $\boldsymbol{D}$'nin kendisi D^α_β indis yapısına sahip olur. Yoğunluk matrisi, Hermitsel, negatif olmayan belirli (*bkz.* §§13.8, 9) ve birim izde olma cebirsel özelliklerine, $\langle\boldsymbol{D}\rangle =$ iz $\boldsymbol{D} = D^\alpha_\alpha$ olmak üzere (*bkz.* §13.4),[29.2] sahiptir:

$$\boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D}, \text{ tüm } |\xi\rangle\text{'ler için } \langle\xi|\boldsymbol{D}|\xi\rangle \geq 0, \langle\boldsymbol{D}\rangle = 1.$$

Yoğunluk matrisi, bir sistemin kesin (klasik) durumuyla özel olarak ilgilenmeyip fakat klasik alternatiflere ilişkin bir olasılık dağılımı elde etmekten hoşnut olduğumuz klasik istatistiksel mekanikte sıklıkla kullanılana benzer bir rol oynar. Bu en kolay şekilde olası klasik alternatiflere ilişkin $\mathcal{P}$ faz uzayı biçiminde düşünülür. Sistem $\mathcal{P}$'deki bir P noktası olarak gösterilmek yerine $\mathcal{P}$ üzerindeki bir olasılık dağılımı biçiminde düşünülür. Sistemle ilgili olarak yalnızca sonlu sayıda alternatife sahipsek[13] bu durumda bunu, her biri kendisiyle ilgili $p, q, \ldots, s$ olasılık değerine atanan $\mathcal{P}$'deki $P, Q, \ldots, S$ noktalarının sonlu bir kümesi olarak gösteririz; *bkz.* Şekil 29.1. Aslında tam olarak aynı şeyi kuantum fiziğinde, $\mathcal{P}$ faz uzayının rolünü oynayan, kuantum sistemine ilişkin $\mathbf{H}$ Hilbert uzayıyla yapmayı hayal edebiliriz; böylece $\mathbf{H}$'de bir olasılık dağılımına sahip oluruz. Henüz ele almakta olduğumuz $\boldsymbol{D}$ yoğunluk matrisiyle ilgili olarak bu dağılım yalnızca, her biri kendisiyle ilgili $p, q, \ldots, s$ olasılık değerine atanan $\mathbf{H}$'deki sonlu sayıdaki $P, Q, \ldots, S$ noktalarından oluşur.

[29.2] Bu özellikleri türetin.

[13] Bir sürekli olasılık dağılımı için $\mathcal{P}$ üzerinde, "integrali 1 olan", negatif olmayan gerçel değerli bir f fonksiyonuna gerek duyarız. $\mathcal{P}$ uzayı, $f\Sigma$'nın integralinin $\mathcal{P}$ üzerinde yasal bir biçimde alınabileceği şekilde, gerekli koşulumuz esasen $\int f\Sigma = 1$ olmak üzere, doğal bir hacim biçimine –Liouville kuramında başrolde olan, §20.4'teki Σ $2N$–biçimlisi– sahip olur.



Şekil 29.1 $\mathcal{P}$ faz uzayında gösterilen klasik olasılık dağılımları. (a) $\mathcal{P}$'deki sonlu bir $P, Q, \ldots, S$ noktalar kümesi için her noktaya, $p + q + \cdots + s = 1$ olmak üzere, bir $p, q, \ldots, s$ (0 ve 1 arasındaki gerçel sayılar) olasılık değeri atanır. (b) İntegrali 1 olan bir olasılık ölçüsüyle birlikte $\mathcal{P}$'nin bir bölgesine atanmış sürekli bir dağılım.

Öte taraftan bu, kuantum mekaniğinde normalde yapılan bir şey *değil*dir; bunun yerine yoğunluk matrisi kullanılır.[14] Peki neden? Neden, kuantum mekaniğinde bir kuantum sistemine sorulan soru biçimine sahip –ilgiyi bir EVET/HAYIR sorusuyla sınırlayalım– bir *ölçüm*ün (normalleştirilmiş) $|\xi\rangle$ durum vektörüne uygulanan bir $\boldsymbol{E}$ projektörünün eylemi biçiminde ifade edilir. Böylece EVET yanıtı olasılığı

$$\text{EVET olasılığı} = \langle\xi|\boldsymbol{E}|\xi\rangle$$

ifadesiyle verilir.[29.3] Buradan, $\boldsymbol{D}$ yoğunluk matrisiyle birlikte üstte açıklanan olası alternatif $|\psi\rangle, |\phi\rangle, \ldots, |\chi\rangle$ durumlarının olasılık karışımıyla ilgili

$$\text{EVET olasılığı} = \langle\boldsymbol{ED}\rangle$$

yanıtını elde ederiz.

Bunun önemi, kuantum mekaniğindeki standart bir EVET/HAYIR sorusuyla (ya da aslında herhangi bir diğer kuantum mekaniksel gözlemlenebilire ilişkin beklenti değeriyle) ilgili olasılıkları hesaplayabilmek üzere,[29.4] alternatif $|\psi\rangle, \ldots, |\chi\rangle$ durumlarıyla ilgili olasılık dağılımına ilişkin tüm bilgiyi bilmemizin gerekmemesidir. Gerekli tüm bilgi yoğunluk matrisinde depolanır; kısa süre içinde göreceğimiz üzere verili bir yoğunluk matrisi, durumlarla ilgili pek çok *farklı* olasılık dağılımından oluşabilir. Bu dikkat çekici matematiksel kavram (seçkin Macar/Amerikalı matematikçi John von Neumann tarafından 1932'de ileri sürülmüştür), hatırı sayılır bir tutumluluk ve zarafet bulunur. Bu, olasılıkla ilgili oldukça ayrık görünen iki kavramı tek bir ifadede birleştirir. Bir taraftan alternatif $|\psi\rangle, |\phi\rangle, \ldots, |\chi\rangle$ durumlarıyla ilgili sıradan klasik olasılıklar olan $p, q, \ldots, s$ sayılarına diğer taraftan §21.9'un modül karesi kuralından elde edilen ku-

[14] *Bkz.* Brody ve Hughston, 1998b. Nielsen ve Chuang, 2000, eylem halindeki yoğunluk matrisine ilişkin iyi bir kavramsal kapsam sunar.

[29.3] Nedenini açıklayın ve ayrıca alttaki $\langle\boldsymbol{ED}\rangle$ ifadesini türetin.

[29.4] Bunun niçin böyle olması gerektiğini görebiliyor musunuz?

antum olasılıklarına sahibiz. Yoğunluk matrisi ikisini birleştirir ve bir çeşidi diğerinden dolaysız biçimde ayırmaz.

29.4 $\frac{1}{2}$ spini için yoğunluk matrisleri: Bloch küresi

Bu noktayı basit bir örnekle göstereyim. Spin durumunun $|\uparrow\rangle$ ya da $|\downarrow\rangle$ olduğunu bildiğimiz $\frac{1}{2}$-spinli bir parçacığa, her alternatif için $\frac{1}{2}$ olasılığıyla birlikte sahip olduğumuzu düşünelim. Bu spini bir yukarı/aşağı yönünde ölçmek istersek, durum $|\uparrow\rangle$ ise basit olarak "yukarı" ve $|\downarrow\rangle$ ise "aşağı" elde ederiz. Her durumda olasılık $\frac{1}{2}$'dir. Bunlar yalnızca kestirme klasik olasılıklardır ve burada bir kuantum gizemi söz konusu değildir fakat spini bunun yerine sol/sağ yönünde ölçtüğümüzü düşünün. Böylece durum $|\uparrow\rangle$ ise R kuantum kuralları bize spinin "sol" olmasına ilişkin bir $\frac{1}{2}$ ve "sağ" olması için de yine $\frac{1}{2}$ olasılığı elde edeceğimizi söyler. Böylece $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$'ya ilişkin eşit olasılık karışımıyla ilgili olarak "sol" ve "sağ" için hâlâ $\frac{1}{2}$ olasılıklarını elde ederiz. Bununla birlikte artık olasılıklar tümüyle kuantum mekaniksel "modül karesi" kuralından elde edilir. Spini herhangi başka yönde ölçmeyi de seçebiliriz. Olasılıkların her yanıtla ilgili olarak yine $\frac{1}{2}$ olduğu ortaya çıkar fakat genellikle bu olasılık klasik ve kuantum olasılıklarının bir karışımından oluşur.[29.5]

Alternatif biçimde ölçüm düzeneği yerine durum karışımını döndürmeyi düşünebiliriz. Böylece $|\leftarrow\rangle$ ve $|\rightarrow\rangle$'a ilişkin bir eşit olasılık karışımı üstteki $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$'ya ilişkin eşit olasılık karışımıyla ve ayrıca $|\nwarrow\rangle$ ve $|\searrow\rangle$ eşit olasılık karışımıyla da (her durumda bu durum çiftlerini ortogonal ve normalleştirilmiş kabul ederiz: $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\leftarrow|\rightarrow\rangle = \langle\nwarrow|\searrow\rangle = 0$ ve $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = \ldots = \langle\searrow|\searrow\rangle = 1$) aynı yanıtı verir. $\boldsymbol{D}$ yoğunluk matrisiyle ilgili olarak her durumda, tüm bu $\boldsymbol{D}$'lerin aynı olması yoğunluk matrisiyle ilgili dikkat çekici bir özellik olmak üzere,[29.6]

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|,$$
$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow| + \frac{1}{2}|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|,$$
$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}|\nwarrow\rangle\langle\nwarrow| + \frac{1}{2}|\searrow\rangle\langle\searrow|,$$

ifadelerini elde ederiz. Değinilen spin ölçümleriyle ilgili tüm olasılıklar üstteki $\langle\boldsymbol{ED}\rangle$ denkleminin kullanımı yoluyla elde edilebilir; böylece $\boldsymbol{D}$'ler

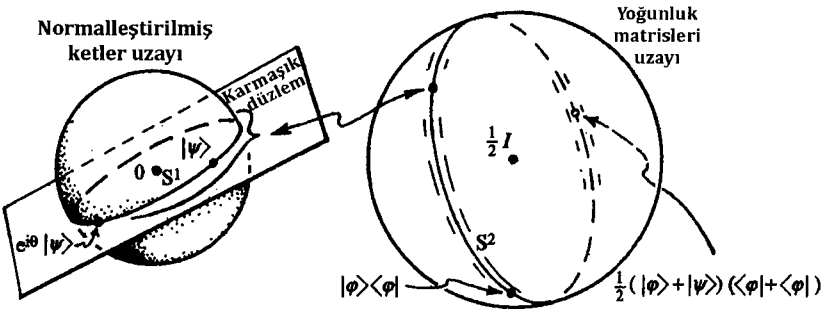
[29.5] Bunu, ölçüm yönüne ilişkin genel bir θ açısı için, olasılıkla ilgili §22.9'daki $\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$ ifadesini kullanarak çözün.

[29.6] Bunu, §§22.8, 9 ve alıştırma [22.25]'in sonuçlarını kullanarak açık biçimde gösterin.

aynı olduğundan ilgili olasılıklar da, gördüğümüz üzere, aynı olarak ortaya çıkmak zorundadır.

Peki durumlara ilişkin bu olasılık karışımlarının *ontoloji*sini nasıl değerlendirmeliyiz? Kuantum durumunun bir tür fiziki gerçekliğe sahip olduğunu kabul edersek böylece bu üç durum ontolojik olarak kesinlikle ayrı olur. Durumun (fiziki olarak gerçek) $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ alternatiflerinden biri ya da diğeri olmasına ilişkin eşit bir olasılık bulunduğunu söylemek onun $\langle\nwarrow|$ ya da $|\searrow\rangle$ olmasına ilişkin eşit olasılık bulunduğunu söylemekten oldukça farklıdır. Bununla birlikte bu ontolojik konu çoğu kuantum mekaniksel yazında epeyce karıştırılan bir konudur. Çoğu kez, kuantum fizikçileri de, yoğunluk matrisinin kendisinin bireysel durumlardan daha iyi bir gerçeklik açıklaması sunduğunu değerlendirerek üstte açıklanandan oldukça farklı bir ontolojik konumu kabul eder görünürler. ***D***'yle ilgili üstteki görünüşe göre üç ayrı ontolojinin (diğer bir deyişle alternatif kuantum durumlarına ilişkin olasılık ağırlıklı üç farklı toplam) fiziki olarak ayırt edilemez olduğuna ilişkin bakışı kabul edebilirler. Buradan hareketle böylesi fizikçiler, çoğu kez (c) çevresel evre uyumsuzluk bakış açısı yanlıları, bu alternatifler arasında ayrım yapmanın bir anlamı olmadığına ilişkin pozitivist ya da pragmatik konumu benimseyebilir. Bu insanlar kuantum gerçekliğini en iyi açıklayanın yoğunluk matrisi olduğuyla ilgili görüşü benimseyebilir.

Aslında "durum" sözcüğü pek çok bağlamda, bu noktaya kadar "kuantum durumu", diğer bir deyişle örneğin $|\psi\rangle$ gibi bir ketle açıklanabilir bir nicelik, olarak adlandırdığım daha ilkel kavram yerine sıklıkla yoğunluk matrisine atfedilir biçimde kabul edilir. "Durum" sözcüğü bir yoğunluk matrisi anlamında kullanılırsa böylece "saf durum" terimi $|\psi\rangle\langle\psi|$ özel biçimine ilişkin yoğunluk matrisi ve "karışık durum" bu biçimde gösterilemeyecek çok daha genel bir yoğunluk matrisiyle ilgili olarak kullanılır. Bu anlamda "saf durumlar" basit olarak bir "durum" biçiminde adlandırdığım şeye karşılık gelir. Kişisel olarak (saf ya da diğer türlü) bir yoğunluk matrisine bir "durum" şekline atıfta bulunmayı oldukça kafa karıştırıcı buluyorum. Burada bu terminolojiyi kullanmaktan kaçınacağım. Bir "kuantum durumu" bana göre bir yoğunluk matrisi değil etkin biçimde bir $|\psi\rangle$ durum vektörüdür. Yine de bazıları "kuantum durumu" ve "kuantum durum vektörü" terimlerini, sonuncusu $|\psi\rangle$ ket ve önceki $|\psi\rangle$'nin sıfır olmayan karmaşık katlarının eşdeğerlik sınıfı, diğer bir deyişle **H**'ye ait $|\psi\rangle$ elemanına karşılık gelen $\mathbb{P}\mathbf{H}$ *izdüşümsel* Hilbert uzayının elemanı (*bkz.* §15.6) olarak gösterilmek üzere, ayırt etmeyi seçebilir. $|\psi\rangle$'yi $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ yoluyla normalleştirmeyi seçersek bu durumda ($\mathbb{P}\mathbf{H}$'de verili bir nokta için) $|\psi\rangle$'de kalan tek serbestlik (gerçel θ'lı) $|\psi\rangle \longmapsto e^{i\theta}|\psi\rangle$ faz serbestliği olur; *bkz.* Şekil



Şekil 29.2 Saf bir kuantum durumunu nasıl gösteririz? (a) $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ tarafından normalleştirilmiş $|\psi\rangle$ ketler uzayı. (b) $|\psi\rangle\langle\psi|$ yoğunluk matrisi $|\psi\rangle \mapsto e^{i\theta}|\psi\rangle$ faz uzayına kadar $|\psi\rangle$'ye ve $|\psi\rangle$'yle orantılı olan sıfır olmayan ketler ailesine (karmaşık orantılılık çarpanları) "denk"tir. Yine de esas kuantum doğrusallığı, yoğunluk matrisi açıklamasında gizlenir.

29.2. "Saf durum" yoğunluk matrisi kavramı, $|\psi\rangle\langle\psi|$ bu faz serbestliği altında değişmez olduğundan bu "izdüşümsel" kuantum durumu kavramına etkin biçimde denktir. Böylece makul şekilde, bir saf durum yoğunluk matrisinin fiziki kuantum durumunu uygun biçimde açıkladığına ilişkin konumu kabul edebiliriz.

Yine de kendimi, bu tür bir "saf durum yoğunluk matrisi"ni bir "fiziki durum"a ilişkin uygun matematiksel gösterim olarak değerlendirmekle ilgili rahatsız hissediyorum. $e^{i\theta}$ faz çarpanı yalnızca, ele alınan durum ilgili nesnenin tümünü temsil ediyorsa "gözlemlenemez"dir. Bir durumu daha büyük bir sistemin parçası olarak ele alırken bu fazların izini sürmek önemlidir. Dahası, ket vektörleriyle ilgili Hilbert uzayının esas yapısına ilişkin temel karmaşık doğrusallık, matematiksel olarak daha basit $|\psi\rangle$'ler yerine her zaman $|\psi\rangle\langle\psi|$'lerle çalışmak zorunda olunursa matematiksel olarak gereksiz biçimde çetrefilleşir.[29.7] Kısmen böylesi nedenlerden dolayı kendi konumum yoğunluk matrisini "gerçeklik" olarak değil fakat yalnızca kullanışlı bir araç olarak kabul etmektir. Bununla birlikte burada ve §29.5'te göreceğimiz üzere yoğunluk matrisinin kafa karıştırıcı ontolojik konumuna yönelik olarak bazı ilgi çekici görünümler söz konusudur.

Buna gelmeden önce, 2–durumlu bir sisteme ilişkin yoğunluk matrisleri uzayını temsil eden *Bloch küresi*yle tanışmamız faydalı olacaktır. Bu, Öklitçi 3–uzayda bulunan kapalı B^3 katı küresidir (ya da matematikçi ter-

[29.7] Rasgele bir $|\psi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ sabit durum çiftinyle ilgili olarak $w|\psi\rangle + z|\varphi\rangle$ çizgisel birleşimlerine karşılık gelen "saf durum" yoğunluk matrisleri ailesini betimleyebilecek misiniz bakın.

minolojisiyle *3–top* ya da *3–disk*). Bu, $\frac{1}{2}$ spiniyle (herhangi başka bir 2–durumlu sistemle) ilgili yoğunluk matrisini temsil eder; *bkz.* §22.9. İz birimine ilişkin genel 2×2 Hermitsel matrisini, a, b ve c gerçel sayılar olmak üzere,

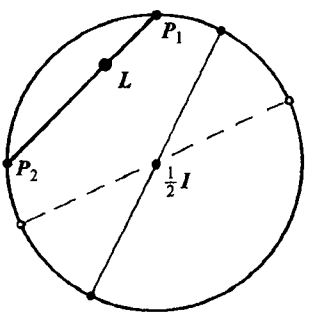
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & b+\mathrm{i}c \\ b-\mathrm{i}c & 1-a \end{pmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz. Bir yoğunluk matrisi olabilmek için bu,

$$a^2+b^2+c^2 \leq 1$$

koşulunu sağlamak üzere, negatif olmayan belirli olmak zorundadır.[29.8] Bu, B^3 Bloch küresinde S^2 *sınırı* $a^2+b^2+c^2=1$ 2–küresi olan genel bir noktadır. Burada S^2 2–durumlu (örneğin $\frac{1}{2}$–spinli) sistemdeki saf durumları gösterir ve bu uzay §22.9'da açıklanmış olan S^2 *Riemann* küresiyle tanımlanır.[15]

Henüz ele almakta olduğumuz belirli $\boldsymbol{D}=(\frac{1}{2}\boldsymbol{I})$ yoğunluk matrisi, Bloch küresinin *orijin*iyle gösterilir ve bütünüyle belirsiz ontolojik yorumu şeklin simetrisinden son derece açıktır (Şekil 29.3). Bununla birlikte B^3 içindeki *herhangi bir* $\boldsymbol{L}$ noktası (saf olmayan yoğunluk matrisi) eşit derecede belirsiz bir ontolojik yoruma sahip olan bir yoğunluk matrisini temsil eder. Bunu görmek üzere, $\boldsymbol{P}_1$ ve $\boldsymbol{P}_2$ noktalarındaki S^2 sınırıyla buluşmak için basit olarak $\boldsymbol{L}$ üzerinden geçen rasgele bir düz çizgi (kiriş) çizeriz. Bu



Şekil 29.3 2–durumlu bir sisteme ilişkin, merkezi $\frac{1}{2}\boldsymbol{I}$'da bulunan B^3 Bloch küresi. Herhangi bir (saf olmayan) $\boldsymbol{L}$ yoğunluk matrisi belirsiz bir ontolojik yoruma sahiptir. $\boldsymbol{L}$'den geçen rasgele bir kiriş S^2 sınırıyla $\boldsymbol{P}_1$ ve $\boldsymbol{P}_2$'de buluşur; bu durumda $\boldsymbol{L}$ saf $\boldsymbol{P}_1$ ve $\boldsymbol{P}_2$ durumlarına ilişkin olasılık karışımı biçiminde bir yoruma sahip olur.

[29.8] Bunu gösterin. *İpucu*: Öz değerlerin a, b ve c biçiminde çarpımı nedir? Bu çarpımın negatif olmayışı ne anlama gelir?

[15] $n>2$ olan n–durumlu bir sistemle ilgili olarak tablo daha da karışıktır. Yoğunluk matrislerine ilişkin (n^2-1)–boyutlu uzaya ait sınırın yalnızca bir kısmı, bu kısım $(n-1)$–uzaylı karmaşık bir izdüşümsel $\mathbb{CP}^{n-1}$ olmak üzere, saf durum uzayıdır. *Bkz.* §21.9 ve §22.9.

noktalar iki saf durumu gösterir ve $\boldsymbol{L}$ yoğunluk matrisi böylece bu ikisine ilişkin bir olasılık karışımı biçiminde yorumlanabilir.[29.9] Bloch küresinin $\boldsymbol{D}$ orijinine özel olan tek şey, $\boldsymbol{D}$ biçiminde gösterilebilen tüm bu saf durum çiftlerinin *ortogonal* çiftler olmasıdır. Bununla birlikte olasılığın karşılıklı olarak ortogonal olan durumlar arasında olmasına gerek duyan yoğunluk matrisinin tanımına ilişkin hiçbir şey söz konusu değildir. §29.5'te ortogonal olmayan karışımların tam olarak nasıl ortaya çıktığını göreceğiz.

29.5 EPR durumlarındaki yoğunluk matrisleri

Olası durum vektörlerine ilişkin olasılık ağırlıklı bir toplamın doğal bir biçimde ortaya çıktığı, özellikle belirgin bir durumu ele alalım. Bu EPR–Bohm etkisinde ortaya çıkar (§23.4). Dünya ve Satürn'ün uydusu Titan arasında fakat diyelim ki dünyadan Titan'dan olduğunun iki katı uzaklıktaki bir yerden $\frac{1}{2}$–spinli bir çift EPR parçacığının 0–spinli birleşik bir durumda yayıldığını düşünün. Titan'daki meslektaşımın (§§23.4, 5'ten eski bir tanıdık) oraya ulaşan parçacığın spinini bir yukarı/aşağı yönünde ölçtüğünü ve ben dünyaya ulaşan parçacığımı algılamadan kabaca yarım saat kadar önce bir yanıt elde ettiğini varsayıyorum. Parçacığım ulaştığında, bu erken ölçüme ilişkin sonuç hakkında meslektaşımdan gelecek herhangi bir sinyal elde etmeye zaman olmadığını düşünün. (Titan dünyadan yaklaşık üç ışık saati uzaklıktadır.) Bildiğim kadarıyla parçacığım ya $|\uparrow\rangle$ ya da $|\downarrow\rangle$ spine sahip olur. Meslektaşım $|\downarrow\rangle$ durumunu bulduysa bu $|\uparrow\rangle$ ve gerçekte $|\uparrow\rangle$ durumunu bulduysa $|\downarrow\rangle$ olacaktır. Meslektaşımın $|\downarrow\rangle$ ya da $|\uparrow\rangle$ bulma şansı eşit olduğundan algıladığım parçacığın durumunun, $|\uparrow\rangle$ olmak üzere $\frac{1}{2}$ ve $|\downarrow\rangle$ olmak üzere yine $\frac{1}{2}$'lik bir olasılığa sahip olduğu bakışını kabul etmek zorundayım. O halde bu (iki durum $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ ortogonal ve normalleştirilmiş kabul edilmek üzere: $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0$ ve $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1 = \langle\downarrow|\downarrow\rangle$),

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$$

yoğunluk matrisini kullanır.

Bununla birlikte durum, bir son dakika değişikliğiyle, meslektaşımın Titan'a ulaşan parçacığın spinini bir yukarı/aşağı değil fakat sol/sağ biçiminde ölçmeye karar vermiş olması olabilir. Meslektaşım $|\leftarrow\rangle$ yanıtını elde ederse bu durumda dünyaya ulaşan parçacığımla ilgili ben $|\rightarrow\rangle$ sonucunu bulmak zorundayım; meslektaşım $|\rightarrow\rangle$ elde ederse ben $|\leftarrow\rangle$ bulmak zorunda

[29.9] Karışımdaki iki olasılığın, $\boldsymbol{L}$'nin kirişi böldüğü iki uzunluk gibi aynı orana sahip olduğunu göstererek bunun nedenini açıklayın.

olurum. Meslektaşımın iki alternatifiyle ilgili olasılık her durumda yine $\frac{1}{2}$ olmaktadır; böylece meslektaşımın bu sonuçlardan hangisini elde ettiğini bilmememe rağmen parçacığımın her durumda $\frac{1}{2}$ olasılığına sahip $|\rightarrow\rangle$ ya da $|\leftarrow\rangle$ olabileceğini çıkarsamak zorundayım. Bu nedenle parçacığıma ($\langle\leftarrow|\rightarrow\rangle = 0$ ve $\langle\rightarrow|\rightarrow\rangle = 1 = \langle\leftarrow|\leftarrow\rangle$ olmak üzere)

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle + \frac{1}{2}|\leftarrow\rangle|\leftarrow\rangle$$

yoğunluk matrisini atarım. Elbette bu daha önce gördüğümüz aynı $\boldsymbol{D}$'dir. Bu, olması gerektiği gibidir çünkü meslektaşımın Titan'daki parçacığı ölçmek üzere hangi yolu seçtiğine ilişkin karar burada, Dünya üzerindeki olasılıkları etkilememelidir (aksi halde Titan'dan dünyaya sinyal göndermenin ışıktan hızlı bir yöntemi söz konusu olur).[29.10] Böylece ele alınan türde durumla ilgili olarak, yoğunluk matrisi, fiziki duruma ilişkin mükemmel bir matematiksel açıklama sağlar görünür. Burada, dünyada algıladığım parçacığın spin durumu, Titan'daki işlemlerle, ne spini ölçmek üzere meslektaşımın seçtiği yön ne de bu ölçümün sonucuyla ilgili hiçbir şey bilmemem koşuluyla, üstteki $\boldsymbol{D}$ yoğunluk matrisi tarafından oldukça iyi biçimde açıklanır.

Elbette bu, yalnızca Titan'dan herhangi bir bilgi almazsam iyi işler. Meşlektaşımın gerçekleştirdiği ölçüm tipini bilirsem algıladığım spin durumunun ontolojisiyle ilgili bakışımı etkileyecek fakat burada, dünya üzerinde gerçekleştirdiğim ölçümlere ilişkin olasılık beklentilerine etki etmeyecektir.[16] Meslektaşımın ölçümünün sağ/sol olduğunu bilirsem parçacığımın spin durumuna ilişkin ontolojinin sağ ya da sol olduğu fakat bunlardan hangisi olduğunu bilmediğim bakışı kabul edebilirim; meslektaşımın ölçümüne ilişkin yönü bilmesem kabul edemeyeceğim bir bakış açısı. Yine de bu ontolojik bilgi, dünya üzerinde gerçekleştirdiğim spin ölçümlerinin sonuçlarına ilişkin olasılık hesaplamalarımı etkilemeyecektir, böylece "ontoloji"nin hiçbir öneme sahip olmayıp hatta belki de bilimsel olarak anlamsız olduğuna ilişkin alternatif konumu benimseyebilirim; bu durumda bilimsel olarak tüm gerekli şey yoğunluk matrisi*dir*. Öte taraftan Titan'dan gerçekten, meslektaşımın ölçüm sonuçlarını ileten bir mesaj alırsam bu durumda olasılık hesaplamalarım etkilenebilir. Daha da fazla-

[29.10] Nasıl olduğunu açıklayın.

[16] Okuyucu, §23.10'da sunulmuş olan *kudolanıklık* kavramının bu ontolojik konuları nasıl etkileyebileceğini merak ediyor olabilir. Bu ilgi çekici bir sorudur ve bir kuantum bağlamında, tüm "ontoloji" konusuna sonuç olarak yeni bir ışık altında bakılması gerekecek bir şey olabilir. Şimdilik fakat basitçe, gerçekliğe yönelik, görelilikten kaynaklanan konulara girilmeyecek olan daha "sağduyulu" tutumu benimseyelim.

sı, birleşik ölçümlerimizin sonuçlarını kısıtlayan tutarlılık gereklilikleri gerçekten söz konusu olacaktır (örneğin meslektaşım $\langle\leftarrow|$ elde ederse ben $\langle\leftarrow|$ sonucu elde edemem). *Şu halde,* yoğunluk matrisi açıklamasının epey uygunsuz olduğu açıktır. Tüm karışık çifti açıklayan gerçek bir kuantum durumu (vektörü) biçiminde bir açıklamaya dönmek zorundayız: $|\Omega\rangle = |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ $(= |\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle - |\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle$, vb).

Üstteki örnekte (§29.4'te değerlendirilmiş olan) ortaya çıkan belirli yoğunluk matrisi oldukça özeldir. Herhangi bir ortonormal taban biçiminde

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

formuna sahiptir. Bununla ilgili özel olan şey, kendisine ait tüm öz değerlerin (köşegen boyunca olan iki $\frac{1}{2}$ sayısı) eşit olmasıdır. Özdeşlik matrisinin yalnızca bir katı olduğu için bu, onun, hangi (ortonormal) taban kullanılırsa kullanılsın aynı forma sahip olacağı anlamını içerir. Bu nedenle yukarı/aşağı tabanını sol/sağ tabanından, vb, ayırt edecek hiçbir şey söz konusu değildir.

Bunun, yalnızca bu örnekte ele aldığımız özel olarak basit durumun bir sonucu olduğunu belirtmek önemlidir. §29.4'te zaten gördüğümüz üzere belirli (eşit öz değerli) $\boldsymbol{D}$ yoğunluk matrisi hakkında, kendisine ilişkin ontoloji karışıklığıyla ilgili olarak, özel hiçbir şey söz konusu değildir. Örneğe ilişkin çok hafif bir değişiklikle dilediğimiz 2×2 yoğunluk matrisini elde ederiz. Henüz ele alınmış olan durumdaki gibi, bir 0 spin durumunda üretilmiş $\frac{1}{2}$–spinli parçacık çifti yerine, bunları başlangıçta 1 spin durumunda bulunur biçimde kabul ederiz. Belirli bir durumda bunun nasıl işlediğini görmek üzere §23.5'te çalışılmış olan Lucien Hardy örneğini ele alalım. Burada başlangıç durumu (§22.10'daki Majorana tanımlamasında, $\rightarrow$ ve $\nearrow$ arasındaki açının tanjantı $\frac{4}{3}$ olmak üzere) $|\leftarrow\nearrow\rangle = |\leftarrow\rangle|\nearrow\rangle + |\nearrow\rangle|\leftarrow\rangle$'dur ve meslektaşımın Titan'a ulaşan parçacık üzerinde bir sağ/sol ölçümü yapmayı seçtiğini varsayacağım. §23.5'in sonuçlarından, meslektaşım $|\rightarrow\rangle$ elde ettiğinde benim burada, dünyada algıladığım durum $|\leftarrow\rangle$ olurken meslektaşım $|\leftarrow\rangle$ elde ederse benim algıladığım durumun $|\uparrow\rangle$ olacağını görürüz.[29.11] Böylece, meslektaşımın bir sağ/sol ölçümü gerçekleştirdiğini (ve başlangıç durumunun $|\leftarrow\nearrow\rangle$ olduğunu) bilirsem bu durumda dünyada algıladığım parçacığın spin durumunun $|\leftarrow\rangle$ ve $|\uparrow\rangle$'ya ilişkin bir olasılık karışımı olduğu sonucunu çıkarırım. $|\leftarrow\rangle$ ve $|\uparrow\rangle$'ün *ortogonal olmadıkları-*

[29.11] Niçin?

na dikkat edin. Ortogonallik, bir yoğunluk matrisi oluşturan durumların olasılık karışımıyla ilgili bir gereklilik değildir ve bunu bu örnekte açık olarak görmekteyiz.

Parçacığım için kullandığım yoğunluk matrisi nedir? Meslektaşımın elde edebileceği alternatif iki sonuçla, $|\rightarrow\rangle$ ve $|\leftarrow\rangle$, ilgili olasılık değerini bilirsek bunu çözebiliriz. Aslında bu olasılıkların sırasıyla $\frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{3}$ olduğu ortaya çıkar, böylece $|\leftarrow\rangle$ durumunu algılamak üzere $\frac{1}{3}$ ve $|\uparrow\rangle$'yı algılamak üzere $\frac{2}{3}$ olasılığına sahip olurum. Bu nedenle yoğunluk matrisim artık

$$L = \frac{1}{3}|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow| + \frac{2}{3}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

olur. Yukarı/aşağı taban çerçevesi biçiminde bu matris ($|\leftarrow\rangle = (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ olduğunu kabul ederek)

$$L = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

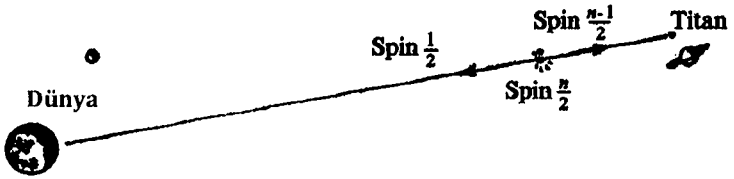
gibi görünür. Kendisine ait öz değerler gerçekte $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{5}$ ve $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{5}$ olmak üzere bu, kesinlikle eşit öz değerlere sahip değildir.[29.12] Bu yoğunluk matrisiyle ilgili belirli "$\frac{1}{3}$ olasılığına sahip $|\leftarrow\rangle$ ve $\frac{2}{3}$ olasılığına sahip $|\uparrow\rangle$" ontolojisi yine de benzersizlikten uzaktır. Örneğin $\leftarrow$ ve $\nearrow$ arasındaki simetriden, $|\leftarrow\nearrow\rangle$ başlangıç durumunda, meslektaşım ($\leftarrow$'un yönü) sol/sağ yerine $\nearrow$ yönünde ölçmeyi seçerse, $\boldsymbol{D}$ yoğunluk matrisiyle ilgili kendi ontolojimin, $|\nearrow\rangle$ ve buna dik olan başka bir durumu da içererek çok büyük oranda değişeceği açıktır. Aslında Titan'daki meslektaşımın seçebileceği olası her ölçüm yönüyle ilgili farklı bir ontoloji elde edilir.[29.13]

Belirli herhangi bir yoğunluk matrisi verildiğinde olasılık karışımının üç ya da daha fazla durum içermesine izin verirsek çok sayıda daha karmaşık ontoloji elde edilebilir. Böylesi bir durum, meslektaşımın spin ölçümü her biri kendi olasılığına sahip n farklı sonuca (§22.10), başlangıç durumu, $n > 2$ için, dünyaya yönelen $\frac{1}{2}$–spinli bir parçacıkla Titan'a yönelen $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$–spinli bir parçacığa bozunan $\frac{1}{2}n$ spine sahip olması halinde, izin

---

[29.12] L'ye ilişkin bu matris formunu türetin, bunların onun öz değerleri olduğunu doğrulayın ve öz vektörleri bulun. Şekil 29.3'ün Bloch küresindeki L noktası bununla uyumlu olmak üzere seçilir. Bu nokta merkezden ne kadar uzaktadır?

[29.13] Önden atanmış herhangi bir 2×2 matrisin, başlangıç durumunun EPR çiftiyle ilgili olarak 1 spinine sahip olduğu üstteki işlemle elde edilebileceğini gösterin. Yoğunluk matrisinin öz vektör spin yönleri başlangıç durumuna ilişkin Majorana tanımlamasıyla nasıl ilişkilenir?



Şekil 29.4 Bir yoğunluk matrisi, uzay boyutundan daha fazla duruma ilişkin olasılık karışımını temsil edebilir. Bu örnekte, dünya ve Titan arasında Titan'a daha yakın bir noktada, $\frac{n}{2}$–spinli, bilinen bir başlangıç durumu ($n > 2$), dünyaya yönelen $\frac{1}{2}$–spinli bir parçacıkla Titan'a yönelen $\frac{1}{2}(n-1)$–spinli bir parçacığa bölünür. Titan'daki bir meslektaş ikincisinin m spin değerini ölçer. Olası n ölçüm sonucundan her birine ilişkin olasılık, başlangıç durumu bilinerek (dünyada) hesaplanabilecek belirli bir sayıdır. Böylece n durumun bir olasılık karışımı biçiminde birleşmiş belirli bir 2×2 yoğunluk matrisi dünyaya ulaşır. Bu ayrıca açık biçimde 2–boyuttan daha büyük Hilbert uzayına da genellenir.

verecek olması nedeniyle ortaya çıkar; *bkz.* Şekil 29.4. Bu ayrıca açık şekilde, dünyaya ulaştığında parçacığım için kullandığım durumlara ait Hilbert uzayının 2–boyutludan daha büyük olduğu durumlara da genellenir. Tüm bunlar, ne tür yoğunluk matrisi kullanılırsa kullanılsın "olasılık ağırlıklı alternatif durumlar"a ilişkin benzersiz hiçbir ontoloji olmadığını vurgulamaya hizmet eder.[17] Kısa süre içerisinde bu gerçeğin (c) bakış açısına ilişkin çevresel evre uyumsuzluk felsefesiyle ilgili bir tersliğe neden olduğunu göreceğiz.

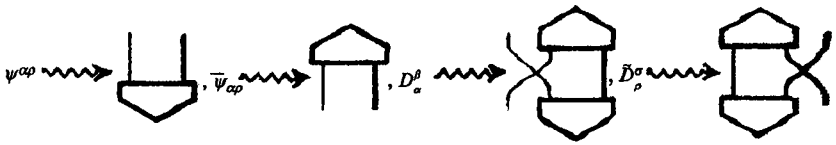
Burada, üstte olduğu gibi karışık bir durumdaki bilginin bir kısmı gizli olmak üzere (örneğin Titan'da), bir yoğunluk matrisinin gerçek hesaplanışıyla ilgili bir uyarı yapılmalıdır. "Bilinmeyen durumları toplama" olarak anılan oldukça verimli bir yöntem mevcuttur. Bu en kolay olarak indis notasyonuyla ifade edilir. Başlangıç durumumuzu, α *burada* (diyelim ki dünya) ve ρ *orada* (Titan diyelim) anlamına gelmek üzere, karışık bir durum olarak düşünülmesi gereken $\psi^{\alpha\rho}$ biçiminde yazalım; *bkz.* §§23.4, 5. Bu durumun karmaşık eşleniği ($\langle\psi|$ bra vektörü) $\bar{\psi}_{\alpha\rho}$'dur. Durumun normalleştirilmesi

$$\bar{\psi}_{\alpha\rho}\psi^{\alpha\rho} = 1$$

koşuludur. Böylece Titan'dan kaynaklanan bilgi yoksunluğunda burada dünya üzerinde kullanacağım yoğunluk matrisi (ρ indisi üzerindeki bir büzülmeyle)

$$D_{\alpha}^{\beta} = \bar{\psi}_{\alpha\rho}\psi^{\beta\rho}$$

[17] Nielsen ve Chuang, 2000, bu noktayı tartışır; ayrıca *bkz.* Hughston vd., 1993.



Şekil 29.5 "Bilinmeyen durumları toplayarak" yoluyla oluşturulan yoğunluk matrislerine ilişkin diyagram biçimli notasyon. Normalleştirilmiş $|\psi\rangle$ ket vektörü, "α" "burada" (Dünya) ve "σ" orada (Titan) anlamına gelmek üzere, $\psi^{\alpha\rho}$ biçiminde ifade edilir. Hermitsel eşlenik ($\langle\psi|$ bra vektörü) $\bar{\psi}_{\alpha\rho}$ ve normalleştirme $\bar{\psi}_{\alpha\rho}\psi^{\alpha\rho} = 1$'dir. "Burada" kullanılan yoğunluk matrisi $D^{\beta}_{\alpha} = \psi_{\alpha\rho}\psi^{\beta\rho}$ iken "orada" kullanılan $\bar{D}^{\sigma}_{\rho} = \bar{\psi}_{\alpha\rho}\psi^{\alpha\sigma}$'dır.

niceliği olur. Buna bağlı olarak meslektaşımın yoğunluk matrisi $\bar{\psi}_{\alpha\rho}\psi^{\alpha\sigma}$ olur.[29.14] Bunun diyagram biçimli versiyonuyla ilgili olarak Şekil 29.5'e bakın.

29.6 FAPP çevresel evre uyumsuzluk felsefesi

Üstteki değerlendirmeler, **R** durum indirgenmesinin, ele alınan kuantum sisteminin çevresiyle çözülemez biçimde karışmış hale gelmesi nedeniyle ortaya çıkar biçimde anlaşılabilmesini koruyan (c) çevresel evre uyumsuzluk bakış açısı araştırmamıza bir "giriş" olarak değerlendirilebilir. Bu fikirleri uygulamak üzere sistemin kendisini *burada* ve çevresini *orada* kısmı olarak düşünürüz. Çevreyi son derece karışık ve esasen "rasgele" biçimli olarak kabul ederiz, böylece uygulamada çevrenin toplam kuantum durumuyla ilgili bilginin *orada* kısmını çıkarmanın hayal edilebilir herhangi bir yolu mevcut değildir. Buradan hareketle, durumun *burada* kısmıyla ilgili olarak bir yoğunluk matrisi tanımlaması elde etmek üzere çevredeki "bilinmeyen durumları toplarız". Bu konuyla ilgili pek çok çalışma, çevre "makul" bir biçimde modellenirse bu durumda yoğunluk matrisi çok kısa bir zaman zarfında (hafif biçimde "yaygaracı" bir çevre için bile), özel öneme sahip belirli bir $|1\rangle, |2\rangle, \ldots, |n\rangle$ tabanı biçiminde ifade edildiğinde yüksek bir yaklaşıklık seviyesiyle köşegen haline gelir:[29.15]

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

[29.14] Bunun niçin işlediğini gösterin. *İpucu*: *burada* ve *orada* için ayrı bir ortonormal taban seçin ve iki yerdeki ölçümlerin olası çeşitli sonuçlarıyla ilgili birleşik olasılıklar biçiminde çalışın. Üstte ele alınmış $|\psi\rangle = |\leftarrow\nearrow\rangle$ durumuyla ilgili olarak $\frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{3}$ olasılıklarını doğrulayın.

[29.15] Aslında her yoğunluk matrisi *bir* tabanda köşegen halindedir! Hiçbir öz değerin eşit olmadığı bu belirli durumda bunun nedenini görebiliyor musunuz?

Böylece bu köşegen terimlerine karşılık gelen o belirli taban durumlarına ilişkin

$$\boldsymbol{D} = p_1|1\rangle\langle 1| + p_2|2\rangle\langle 2| + \cdots p_n|n\rangle\langle n|$$

olasılık karışımı biçiminde yorumlanır. Bu olasılık karışımının **R** durum indirgenmesi işleminde meydana gelen alternatifleri, her bir sonuçla ilgili olasılık sırasıyla $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sayıları olmak üzere, yansıttığı kabul edilir.

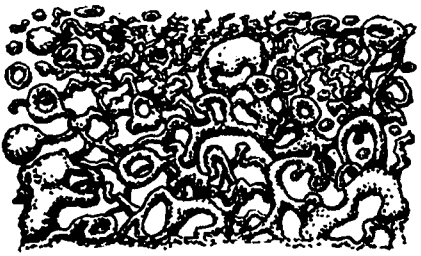
Yine de üstte gördüğümüz üzere, herhangi bir yoğunluk matrisi çok sayıda ontolojik yoruma sahiptir. Bu yorumların herhangi birinin bize "gerçek" ilişkiler durumunu sunup sunmadığını, tek başına bu tür bir argümandan asla öğrenemeyiz. Ayrıca, durumun ilgili $p_1, p_2, \ldots, p_n$ olasılıklarına sahip $|1\rangle, |2\rangle, \ldots$ ya da $|n\rangle$'den herhangi biri olduğu sonucunu bile çıkarsayamayız.

Dahası normal şartlar altında yoğunluk matrisi tüm kuantum gerçeğine yönelik bir tür *yaklaşıklık tahmini* olarak değerlendirilmek zorundadır. Çünkü çevreden ayrıntılı bilgi çıkarmak üzere mutlak bir kalıp sunan herhangi bir genel kural mevcut değildir. Belki gelecek teknolojisi, günümüz teknolojisinin basit şekilde "vazgeçtiği" koşullar altında, kuantum faz ilişkilerinin kendileri yoluyla gözlenebileceği araçlar sunabilir. Öyle görünüyor ki bir yoğunluk matrisi tanımlamasına başvurmak teknoloji bağımlı bir reçetedir! Daha iyi teknolojiyle durum–vektör tanımlaması daha uzun süre korunabilir ve yoğunluk matrisine başvuru, işler gerçekten *umutsuz biçimde* keşmekeş hale gelene kadar ertelenir! Bunu "gerçekten" bir yoğunluk matrisince tanımlanır biçimde değerlendirmek fiziki gerçekliğe ilişkin tuhaf bir bakış gibi görünür. Bundan dolayı böylesi tanımlamalar bazen, (ünlü Bell eşitsizlikleri kâşifi; *bkz.* §23.3) John Bell tarafından "pratik tüm amaçlar için"* yerine kullanılan bir kısaltma olarak ileri sürülmüş olan FAPP biçiminde adlandırılır. Böylece yoğunluk matrisi tanımlaması pragmatik bir şey olarak değerlendirilebilir: temel fiziki gerçekliğe ilişkin "doğru" bir tablo sunmak yerine FAPP bir şey.

Bununla birlikte bazı ağır basan kurallar nedeniyle, ayrıntılı faz ilişkilerinin aslında *gerçekten* kaybolduğu bir düzey söz konusu olabilir. Bu yöne doğru yönelen fikirler sıklıkla, bizi olasılıkla böylesi bir kurala yönelten *kütleçekime* başvurur. Bazen, kendisi uyarınca uzayzaman yapısının 10^{-35}m'lik bir "Planck ölçeği"ndeki pürüzsüz bir manifolda (Şekil 29.6) benzemek yerine "köpük benzeri" bir hale geldiği "kütleçekim alanındaki kuantum dalgalanmaları" fikrine başvurulabilir.[18] (Böylesi fikirlere §31.1

* for all practical purposes, –çn.

[18] Fikir orijinal olarak, pek çok şey gibi, Wheeler'a aittir, modern bir perspektif için *bkz.* Ng, 2004.



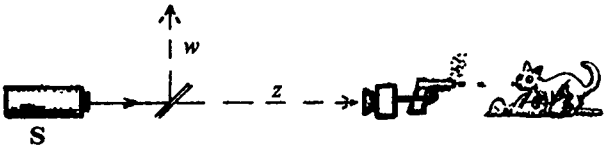
Şekil 29.6 Uzayzamanın 10^{-33}cm ya da 10^{-43}s'lik Planck ölçeğindeki doğası nedir? Kütleçekim alanındaki kuantum dalgalanmalarının çoklu topoloji değişikliklerine sahip fokurdayan bir "köpük" belasıyla sonuçlanabileceği ve ayrıntılı kuantum faz ilişkilerinin aslında bu seviyede olasılıkla kaybolacağı iddia edilmiştir.

ve §33.1'de değineceğim.) Faz ilişkilerinin böylesi bir ölçekte aslında içinden çıkılamayacak bir biçimde "köpük içinde kayıp" hale gelebileceği düşünülebilir. Stephen Hawking'e ait bir diğer öneri, bir kara deliğin varlığında kuantum durumuyla ilgili bilginin delik tarafından "yutulabileceği" ve *kuralda* onarılamaz biçimde kayıp hale gelebileceğidir. Böylesi koşullarda, delik içine düşmüş bir parçayla karışmış dışsal bir fiziğe ilişkin, bir kuantum sisteminin gerçekte "saf bir durum" yerine bir yoğunluk matrisi tarafından tanımlanması düşünülebilir.[19] Bu fikirlere daha sonra §30.4'te döneceğim.

29.7 "Kopenhag" ontolojisiyle Schrödinger'in kedisi

R'nin, kuantum durumunun "gerçekte" belirlenimci **U** işlemi uyarınca evrimleştiği varsayıldığında nasıl ortaya çıkabildiğiyle, ya da çıkar görünebildiğiyle, ilgili kuantum mekaniksel *ölçüm sorunu*na geri dönelim (§21.8, §§22.1, 2, §23.10). Bu sorun çoğu kez, çok şekilsel olarak, *Schrödinger'in kedisi paradoksu* biçiminde gösterilir. Burada sunduğum versiyon Schrödinger'in orijinal versiyonundan, yalnızca önemsiz bir biçimde, farklılık gösterir. Foton durumunun iki parçaya ayrılacağı bir huzme ayırıcı ("yarı gümüşlenmiş" ayna) yönünde tekil foton yayan bir S foton kaynağının mevcut olduğunu düşünelim. Ortaya çıkan iki huzmeden birinde, foton, zavallı kediyi öldürecek ölümcül bir alete bağlanmış bir algılayıcıyla karşılaşırken diğerinde, foton kaçar ve kedi sağ kalır. *Bkz.* Şekil 29.7. (Bu elbette yalnızca bir "düşünce deneyi"dir. Örneğin §30.13'te gelecek olduğumuz türde gerçek bir deneyde canlı bir varlığı dahil etmek gerekmez. Kedi yalnızca dramatik bir etki için kullanılmaktadır!) Fotonla ilgili bu iki alternatif kuantum doğrusal üst üste binmede bir arada bulunmak zorunda olduğundan ve Schrödinger denkleminin (diğer bir deyişle **U**'nun) doğrusallığı sonraki iki zaman evriminin sabit karmaşık sayı ağırlıklı üst üste

[19] *Bkz.* Hawking, 1975; Preskill, 1992; ayrıca *bkz.* §30.14.



Şekil 29.7 Schrödinger'in kedisi (orijinalinin değişik hali). Bir *S* foton kaynağı, foton durumunun kendisinden sonra 2 parçalı bir çakışmaya ayrılacağı bir huzme ayırıcıya yönelen tekil fotonlar yayar. Bunların birinde foton, kediyi öldüren ölümcül bir silahı ateşleyen bir algılayıcıyla karşılaşır; diğerindeyse kaçar ve kedi yaşar. U evrimi bir ölü ve bir de canlı kedi üst üste binme sonucunu verir.

te binmede ısrar etmek zorunda olduğundan, zaman ilerledikçe kuantum durumu sonuç olarak bir ölü ve bir canlı kediye ilişkin böylesi bir karmaşık sayı üst üste binmesini içermek zorunda olur; böylece kedi aynı anda hem ölü hem de canlıdır!

Elbette böyle bir durum, deneyimlediğimiz gerçek hayattaki kedi boyutundaki bir nesnenin davranışıyla ilgili olarak bir saçmalıktır. Bu paradoksla, kuantum mekaniğinin çeşitli "standart" yorumları uyarınca nasıl ilgilenilir? Kopenhag bakış açısı (a)'yı ele alın. Anlayabildiğim kadarıyla bu yorum foton algılayıcısını basit biçimde, kendisine kuantum üst üste binme kurallarının uygulanmadığı "klasik bir ölçüm aleti" olarak değerlendirir. Yayınımı ve alet tarafından algılanışı arasında foton durumu, bir dalga fonksiyonunca (durum vektörü) açıklanır fakat kendisine herhangi bir "fiziki gerçeklik" atfedilmez. Dalga fonksiyonu tek başına, olasılıkları hesaplamakta kullanılan bir matematiksel ifade olarak kullanılır. Huzme ayırıcı foton genliğinin eşit biçimde ikiye bölüneceği biçimdeyse bu durumda hesaplama bize, algılayıcının foton alımını hem kaydetmek hem de kaydetmemek üzere %50'lik olasılıklara sahip olduğunu söyler. Bu durumda kedi %50 olasılıkla ölecek ve %50'lik olasılıkla da canlı kalacaktır.

Doğru yanıt fiziki olarak, "fiziki olarak" ifadesi gerçekte deneyimlediğimiz dünya davranışına ait olmak üzere, budur. Yine de bu açıklama bize, fiziki olayları çok daha ayrıntılı biçimde izlemek istediğimizde hiç de tatmin edici bir tablo sunmaz. Bir algılayıcı içerisinde gerçekleşen aslında nedir? Onu niçin, sonuç olarak o da, büyük ya da küçük, fiziki herhangi başka bir malzeme parçası gibi aynı kuantum bileşenlerinden (proton, elektron, nötron, sanal foton, vb) oluşturulduysa, "klasik bir alet" gibi ele alma iznimiz olsun? Diyebilirim ki, kuantum mekaniğinin ilk zamanlarında Niels Bohr'un konuyla ilgili bakış açısının doğasına ilişkin bir şey aslında kuramın kullanılabilmesi ve kuantum fiziğinde ilerleme kaydedilebilmesi için neredeyse bir gereklilikti. Yine de görebildiğim kadarıyla böylesi bir bakış açısı yalnızca geçici olabilir ve "algılayıcılar" gibi büyük ve

karışık yapılarla ilgili "klasik davramış"ın niçin ve hangi aşamada ortaya çıkabileceği sorusunu çözümlemez. (a) bakış açısı, kendi kuantum mekaniği yorumuyla ilgili böyle "klasik yapılar"a gerek duyduğundan yalnızca, bir ölçümü gerçekten oluşturan şeylerle ilgili daha derin konulara pek de girişilmeyen "geçici" bir konum olabilir.

(a)'nın başka bir şekli, aslında, "klasik ölçüm düzeneği"nin sonuç olarak gözlemcinin bilinci olmasını talep eder. Buna göre klasiklik, kediyi (kedinin kendi bilincini dikkate almazsak) yalnızca bilinçli bir deneyci incelediğinde gerçekleşmektedir. Bana öyle görünüyor ki bir kez bu konuma ulaştığımızda (b) ya da (f)'ye daha paralel olan bir konumu kabul etmeye zorlanırız. Kuantum doğrusal üst üste binmeyle ilgili **U** kurallarının bilinçli bir varlık seviyesine dek geçerli olmayı sürdürdüğüne ilişkin bakışı kabul edersek bu durumda (b) çoklu dünyalar bakış açısı diyarında oluruz fakat **U**'nun bilinçli varlıklarla ilgili olarak başarısız olduğu duruşu kabul edersek böylece (f)'nin, kendisi uyarınca, kuantum mekaniğinin olağan öngörüleri dışında yeni türde bir davranışın bilinç sahibi varlıklarla birlikte oyuna dahil olduğu bir versiyonuna sürükleniriz. Bu hat üzerindeki bir öneri esasen, 1961'de seçkin kuantum fizikçisi Eugene Wigner tarafından ortaya kondu.[20]

Bununla birlikte bana öyle geliyor ki, **R**'nin etkileneceği biçimde bilinçli bir gözlemci varlığını talep eden herhangi bir kuram oldukça orantısız (ve iddia ederim ki son derece mantıksız) bir evren tablosuna yol açar. Bilinçli yaşamın olmadığı ve kendisinden her yönde, pek çok ışık yılı uzaklıkta da bilincin mevcut olmadığı uzak bir dünya benzeri gezegen düşünün. Bu gezegendeki hava durumu nasıldır? Hava durumu modelleri, gelişen belirli herhangi bir modelin kritik biçimde daha önce olan şeyin en küçük ayrıntılarına bağlı olmak anlamında "kaotik sistemler" olma özelliğine sahiptir (*bkz.* §27.2). Aslında, minik kuantum etkilerinin, diyelim ki bir ay içerisinde, gezegendeki hava durumu modelinin tümüyle kendilerine bağlı olacağı kadar büyümüş hale gelmeleri olasıdır. Bilinç yokluğu, (f)'nin ele alınan belirli versiyonu uyarınca, böylesi bir gezegende **R**'nin *asla ortaya çıkma*yacağını ima eder böylece hava durumu aslında yalnızca, onu tanıdığımız anlamdaki gerçek bir hava durumuna benzemediği üst üste binmeli bir kuantum karışıklığı olur. Yine de bilinçli yolcuların bulunduğu bir uzay gemisi ya da bilinçli bir varlığa mesaj aktarma ka-

[20] Sonuç olarak, yaşamı boyunca evrimleşmiş olabilecek bu bakış açısının Wigner'in kuantum mekaniğiyle ilgili gerçek konumunu temsil edip etmediğinden emin değilim. Konumumun, burada anılan, durumu indirgeyen şeyin bilinç olduğunu ileri süren konuma benzer olanlardan temel olarak farklı olduğunu da belirtmeliyim. Bu bakımdan görüşüm diğer yorumcular tarafından zaman zaman yanlış sunuldu. *Bkz.* §§30.9–12.

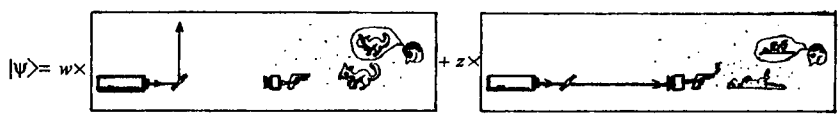
pasitesine sahip bir sonda algılayıcılarını bu gezegen üzerine doğrultabilirse bu durumda gezegendeki hava durumu aniden, sanki her zaman tam olarak öyleymiş gibi sıradan bir hava durumu haline gelir! Burada, deneyimle herhangi gerçek bir çelişki bulunmaz fakat bu "Wigner gerçekliği" gerçek bir fiziki evrenin davranışına ilişkin güvenilir bir tablo mudur? Benim için değil fakat ona daha fazla güven duyan diğerlerini (neredeyse) anlayabiliyorum.

29.8 Diğer geleneksel ontolojiler "kedi"yi çözümleyebilir mi?

Öyleyse, (b) dünyalar bakış açısından ne haber? Burada, ölü ve canlı birer kediyle ilgili kuantum üst üste binmesi "gerçeği" (önceki paragraftaki kuantum üst üste binmeli hava durumu modellerinde olduğu gibi) basitçe *kabul edilir* fakat bu bize kediye (ya da hava durumuna) bakan bir gözlemcinin gerçekte ne "algıladığını" söylemez. Gözlemcinin algı durumu kedinin durumuyla karışmış olarak kabul edilir. "Canlı bir kedi algılıyorum" algı durumu "canlı kedi" durumuna ve "ölü bir kedi algılıyorum" algı durumu "ölü kedi" durumuna eşlik eder. *Bkz.* Şekil 29.8. Böylece algılayan bir varlığın, kendi algı durumunu her zaman bu ikisinden birinde olarak bulduğu düşünülür; buradan hareketle kedi, algılanan dünyada, ya canlı ya da ölüdür. Bu iki olasılık "gerçeklikte", dolanık üst üste binme içinde bir arada bulunur:

$$|\psi\rangle = w|\text{algılanan canlı kedi}\rangle|\text{canlı kedi}\rangle + z|\text{algılanan ölü kedi}\rangle|\text{ölü kedi}\rangle.$$

Şu haliyle bunun kedi paradoksuna ilişkin bir çözüm olmaktan uzak olduğunu belirginleştirmek isterim. Çünkü kuantum mekaniği formalizminde, bir bilinç durumunun canlı ve ölü birer kedinin eşzamanlı biçimde

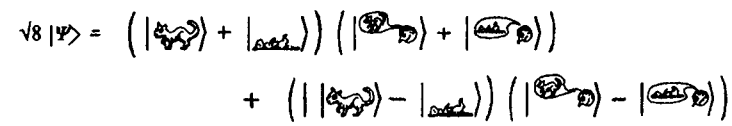


Şekil 29.8 Şekil 29.7'nin sonucu kedi durumlarıyla karışmış farklı çevrelerin varlığı ya da bir gözlemcinin farklı tepkilerinden etkilenmemiş biçimde kalır. Böylece durum

$$|\psi\rangle = w\times|\textbf{canlı kedi}\rangle|\textbf{canlı kedinin çevresi}\rangle|\textbf{algılanan canlı kedi}\rangle +$$

$$z\times|\textbf{ölü kedi}\rangle|\textbf{ölü kedinin çevresi}\rangle|\textbf{algılanan ölü kedi}\rangle$$

biçimini alır. U evrimi gerçekliği ((b) çoklu dünyalar bakış açısı) gösterecekse bu durumda bir gözlemcinin farkındalığının yalnızca bu ya da öteki alternatifi deneyimleyebileceği ve bu aşamada ayrık dünya deneyimlerine "bölüneceği"ne ilişkin bakışı kabul etmek zorunda oluruz.



Şekil 29.9 Şekil 29.8'in ($z = w = \frac{1}{\sqrt{2}}$ durumunda ve çevre durumunu kedininkiyle birleştirerek) yeniden ifade edilişi şu biçimdedir:

$$2|\psi\rangle = \{|\textbf{algılanan canlı kedi}\rangle + |\textbf{algılanan ölü kedi}\rangle\}\{|\textbf{canlı kedi}\rangle + |\textbf{ölü kedi}\rangle\}$$
$$+\{|\textbf{algılanan canlı kedi}\rangle - |\textbf{algılanan ölü kedi}\rangle\}\{|\textbf{canlı kedi}\rangle - |\textbf{ölü kedi}\rangle\}.$$

algılanışını içeremeyeceğini talep eden hiçbir şey söz konusu değildir. Şekil 29.9'da, huzme ayırıcıdaki yansıma ve aktarmayla ilgili iki genliğin, z ve w, eşit olduğu basit durumu ele aldığım bu konuyu gösterdim. 0–spinli bir başlangıç durumuyla yayılan $\frac{1}{2}$–spinli iki parçacıklı basit EPR–Bohm örneğinde olduğu gibi sonuçtaki karışık durumu çeşitli pek çok biçimde yazabiliriz. Şekil 29.9'da gösterilen örnekte |canlı kedi⟩ + |ölü kedi⟩ durumuna |algılanan canlı kedi⟩ + |algılanan ölü kedi⟩'yle ve |canlı kedi⟩ − |ölü kedi⟩ durumuna |algılanan canlı kedi⟩ − |algılanan ölü kedi⟩'yle eşlik edilir. Bu, §23.4'teki gibi, $|\Omega\rangle = |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ durumunu $|\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle - |\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle$ olarak yeniden yazmakla tam olarak benzerdir. Bu üst üste binmiş algı durumlarına niçin izin vermemekteyiz? Bir kuantum durumunun "algı" olarak ele alınmasına izin veren şeyin ne olduğunu tam olarak bilene ve bunun sonucunda böylesi üst üste binmelere "izin verilmediğini" görene kadar gerçek dünyaya ilişkin deneyimlerimizin niçin canlı ve ölü kedilerle ilgili üst üste binmeleri içeremeyeceğini açıklamakta gerçekten hiçbir bir yere varmadık.

İnsanlar bazen bu örneğe, iki alternatifle ilgili genliklerin eşitliğinin çok özel bir durum olması ve karışık durumları genel olarak bu biçimde ifade etme özgürlüğünün bulunmaması temelinde itiraz ederler. Bununla birlikte bu duruma biraz daha derin biçimde göz attığımızda bu belirli örneğe ilişkin "eşit genlik" görünümünün gerçekten o kadar da önemli olmadığını görürüz. Üstte, §29.5'te ele alınmış olan $\frac{1}{2}$–spinli bir EPR parçacık çiftine ilişkin örneği akılda tutmak faydalı olur. "Genliklerin eşitliği" (esasen "genlik modüllerinin eşitliği", $|z| = |w|$), eşit öz değerlere sahip bir yoğunluk matrisine neden olan şeydir. §§29.4, 5'te, eşit olmayan öz değerlere sahip 2×2'lik bir yoğunluk matrisinin, bir durum çiftine ilişkin olasılık karışımı kadar çok gösterime sahip olduğunu fakat çiftin genel olarak ortogonal olmayacağını açık biçimde gördük. Aslında ortogonallik yalnızca, iki durum yoğunluk matrisinin öz vektörleri olduğunda ortaya çıkar.[29.16] "Eşit genlikler" (açıkçası $|z| = |w|$) durumunda, |canlı kedi⟩ ve |ölü kedi⟩ du-

[29.16] Bunu gösterin.

rumlarını ve aslında eşlik eden |algılanan canlı kedi⟩ ve |algılanan ölü kedi⟩ durumlarını da ortogonal ("öz vektörler") olarak kabul edebiliriz. Bununla birlikte $|z| \neq |w|$ durumunda, üst üste binmiş kedi durumlarının belirli bir ortogonal çiftine eşlik eden algı durumları çifti ve ortogonal algı durumlarının belirli bir çiftine eşlik eden kedi durumları çifti genellikle ortogonal olmaz. Algı durumlarının, çoklu dünyalar bakışındaki gerçeklik görünümünü yönlendirmesi gereken şeyler bu durumlarsa, ortogonal olması gerektiğiyle ilgili bakış kabul edilebilmesine rağmen toplam $|\psi\rangle$ durumuna ilişkin bu gösterimlerin ikisinin kullanımında da hiçbir sorun yoktur. Bununla birlikte (b) konumu uyarınca **R** esasen pek de gerçekleşmediğinden ortogonal alternatiflerle ilgili herhangi özel bir konum (ne olursa olsun onlara hiçbir şey "indirgenmediği" için) söz konusu değildir.

Gerçekte, genel durumda, ortogonal kedi durumlarının bir çiftine eşlik eden, ortogonal algı durumlarına ilişkin tek bir çift olacağı açığa çıkar. Bu, karışık bir duruma ilişkin *Schmidt ayrıştırması* olarak bilinen şeydir.[21] Bununla birlikte bu, (kuantum bilgi kuramıyla bağlantılı Schmidt ayrıştırmasının popülerliğine karşın)[22] ölçüm paradoksunu çözmekte pek kullanışlı değildir çünkü bu "matematiksel olarak tercih edilen" kedi durumları çifti (kedinin yoğunluk matrisine ilişkin öz durumlar) pek de istenen |canlı kedi⟩ ve |ölü kedi⟩ değil fakat bunlarla ilgili istenmeyen bazı üst üste binmeler olur! Bir Schmidt ayrıştırmasında ortaya çıkan bu yoğunluk matrisi öz durumlarının, yine §29.5'te ele alınmış olan Lucien Hardy örneğine bakarak, "ontolojik olarak gerçek" olması gereken şeye ilişkin beklenenlerle hiçbir ilgisinin olması gerekmediğini görürüz. Yoğunluk matrisine ilişkin (burada, dünyada algıladığım parçacıkla ilgili) öz vektörlerin, Titan'daki meslektaşımın ölçümleri uyarınca "makroskopik olarak ayırt edilebilir alternatifler" olan $|\leftarrow\rangle$ ve $|\uparrow\rangle$ alternatiflerinden epeyce farklı olduğunu görürüz (*bkz.* alıştırma [29.13]).

Matematik, "|canlı kedi⟩" ve "|ölü kedi⟩" durumlarını herhangi bir biçimde "tercih edilen" olarak tek başına seçip ayıramayacağı için (b)'yi anlamlı kılabilmek üzere hâlâ bir kurama gerek duyarız ve böylesi bir kuram eksiktir.[23] Dahası, böylesi bir kuram üzerindeki sorumluluk yalnızca ölü ve canlı kedilerin üst üste binmelerinin niçin algılanan dünyada ortaya çıkmadığını değil fakat aynı zamanda mükemmel ve olağanüstü kesin modül

---

[21] $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{H}^2$'ye ait genel bir ψ karışık durumuna ilişkin Schmidt –ya da *kutupsal*– ayrıştırması bunu, ilk $\mathbf{H}^2$'ye ait $|\alpha\rangle$ ve $|\rho\rangle$ ortogonal –yoğunluk matrisinin normalleştirilmiş öz durumları– ve $|\beta\rangle$ ve $|\sigma\rangle$ benzer biçimde ikinci $\mathbf{H}^2$'ye tekabül etmek üzere, esas olarak eşsiz biçimde, $|\psi\rangle = \lambda|\alpha\rangle|\beta\rangle + \mu|\rho\rangle|\sigma\rangle$ olarak ifade eder. $\bar{\lambda}\lambda$ ve $\bar{\mu}\mu$ yoğunluk matrisi öz değerleridir. Benzer bir ifade $|\psi\rangle$'deki toplam n terime sahip olmak üzere $\mathbf{H}^n \times \mathbf{H}^n$'de de geçerlidir. *Bkz.* Nielsen ve Chuang, 2000.

[22] Sonuç olarak kuantum bilgi kuramıyla ilgili olan Nielsen ve Chuang'a, 2000, bakın.

[23] Bu konularla ilgili tartışma için *bkz.* Page, 1995.

karesi kuralının aslında niçin kuantum mekaniğindeki olasılıklarla ilgili doğru yanıtları verdiğini de açıklamaktır! Bunu yapabilen bir algı kuramının kendisi kuantum kuramı kadar kesin olmaya gerek duyar. (b) yanlıları bu tür bir taslak önermenin yakınına bile yaklaşmadılar.[24]

Şimdi kedi paradoksunun (c) çevresel evre uyumsuzluk yoluyla çözümündeki girişimlere dönelim. Fotonun başlangıç yayınımını ontolojik olarak gerçek kabul edelim. (Kaynak bu olayı makroskopik bir biçimde kaydetmek üzere ayarlanabilir.) Böylece huzme ayırıcıyla karşılaşıldıktan sonra, iki huzme içinde, fotona ait ontolojik olarak gerçek bir üst üste binmeye sahip oluruz. Foton durumunun aktarılan parçası kendi çevresiyle birlikte ölü bir kediye ve yansıyan parçası farklı bir çevreyle birlikte canlı bir kediye evrilir. Şimdilik ontoloji hâlâ bu ikisinin üst üste binmesidir. Daha sonra çevresel alternatifler "gözlemlenemezler" olarak, bizi 2×2'lik bir yoğunluk matrisiyle baş başa bırakarak toplanır. Ontolojik konum artık sinsi biçimde kayar ve "gerçeklik" yoğunluk matrisinin kendisiyle açıklanır hale gelir. Çevresel evre uyumsuzluk argümanı artık bu matrisin tabanda (|canlı kedi⟩, |ölü kedi⟩) son derece yakın biçimde çapraz olduğu sonucunu ileri sürer, böylece ontolojide başka bir kaçamak kayma daha söz konusu olur ve durum |canlı kedi⟩ ve |ölü kedi⟩'nin bir olasılık karışımı haline gelir. Bu,

$$w|\text{canlı kedi}\rangle|\text{canlı kedinin çevresi}\rangle + z|\text{ölü kedi}\rangle|\text{ölü kedinin çevresi}\rangle$$

üst üste binmesinden |canlı kedi⟩ ya da |ölü kedi⟩ alternatiflerine yönelik bu ontoloji kaymasından kurtulmamıza "izin veriliş" biçimidir! Bir yoğunluk matrisinin durumlara ilişkin bir olasılık karışımı biçiminde ontolojik olarak yorumlanmasında (öz değerler eşit olsun olmasın) benzersiz hiçbir şeyin bulunmadığını anımsayalım. Aslında |canlı kedi⟩ ve |ölü kedi⟩ karışımına geçmek orijinal üst üste binmeden bir (çift) ontoloji kaymasını gösterir. (c) konumu esasen FAPP'dir ve bize fiziki gerçekliğe ilişkin tutarlı hiçbir ontoloji vermez.

29.9 Geleneksel olmayan hangi ontolojiler yardım edebilir?

(d) ve (e)'yle ilgili kısaca yorumda bulunmalıyım. Gerçekliğin azami biçimde arıtılmış tutarlı geçmiş kümelerinin bir bütünlüğü biçiminde gösterildiği (d) tutarlı geçmişler yaklaşımıyla ilgili "savurgan" ontoloji benimsenirse bu durumda (b) çoklu dünyalar durumundakine bir biçimde benzer bir eleştiri ileri sürülebilir. (d), bildiğimiz fiziki dünyayla ilgili tutarlı bir tablo anımsatabilmek üzere, (b)'de olduğu gibi, bilinçli algılayıcıların

[24] *Bkz.* Gell-Mann, 1994; bu tür düşüncelerin on yıllık bir dilimi için *bkz.* Hartle, 2004.

ayrıntılı ve kesin bir kuramına gerek duyar görünür. Bu yönde (IGUS* kavramıyla sunulan; "bilgi toplama ve kullanma sistemi") girişimler olmuştur fakat bunlar şimdiye kadar, yeterli olmaktan uzak görünmektedir.[25] Alternatif olarak §29.2'de üstü kapalı biçimde değinilmiş olan, azami biçimde arıtılmış tek bir tutarlı geçmiş kümesinin "gerçek dünya" ontolojisiyle ilgili makul bir aday olarak değerlendirilebileceği daha tutumlu ontoloji biçiminde bir şey tercih edilebilir. Bununla birlikte (üstteki daha savurgan ontolojinin yanı sıra) bu, "tutarlı geçmiş" kriterinin tasarlandığı amacı, diğer bir deyişle esasen içinde yaşadığımız türdeki dünyaya benzeyen geçmişleri seçip ayırmayı, gerçekten başarmasına bağlıdır. Öte taraftan 1961'de Dowker ve Kent tarafından gösterildiği üzere tek başına bu "tutarlılık" koşulu yeterli olmaktan uzaktır. Bazı ek kriterlerin gerekli olduğu görülüyor.

Bana göre (d)'ye ilişkin temel bir sakınca, **R** benzeri işlemlerin sunulmuş olmasına karşın onun bizi fiziki bir ölçümün gerçekten ne olduğuna ilişkin bir anlayışa, daha geleneksel (a) ya da (b) ontolojilerinden daha yakına getirir görünmemesidir. Gerçekte **R** benzeri işlemlerin, (d)'de, gerçek fiziki ölçümlerle doğrudan hiçbir ilgisinin olmadığı açık biçimde belirtilir. Bununla ilgili sorunum, bu **R** tipi yer değişiklikleri ve fiziki ölçümler arasındaki ilişkiyi ortadan kaldırarak fiziki bir ölçümü gerçekte neyin oluşturduğuyla ilgili hiçbir kavrayış edinmeyecek olmamızdır. (d) uyarınca niçin şeylere aslında, Schrödinger kedileri gibi yaşamla ölüm arasındaki üst üste binmiş belirsizlikte tanıklık etmemekteyiz? Kuram, nötron ya da fotonlar öyle davranmazken hangi sistemlerin (fiziki düzenek parçaları ya da kediler gibi) klasik biçimde davranmaları gerektiğini açıklamakta standart (a) Kopenhag konumuna yönelik herhangi bir gelişme sunar görünmez. Kalın taneli geçmişlerle (azami biçimde arıtılmış) ilgili "tutarlılık" gereksinimi, gözlemlenmiş fiziki gerçeklikle ilgili bir model[26] sunmak üzere gerekli olan şeyden bir hayli uzak görünür.

---

* information gathering and using system, –çn.

[25] *Bkz.* Dowker ve Kent, 1996.

[26] Adrian Kent'e ait çarpıcı bir örnek, "gerçekliğin" fiziki olarak akla yatkın bir tablosunu sunmakla ilgili "tutarlılık" koşulunun yeterli olmaktan ne kadar uzak olduğunu açıkça gösterir. Bu örnekte bir p parçacığı, normalleştirilmiş ilgili ortogonal $|A\rangle$, $|B\rangle$ ve $|C\rangle$ durumlarınca açıklandığı üzere, üç A, B, C kutusundan birinde bulunabilir. Sabit bir üniter evrim veren Hamiltonı sıfır olarak kabul edin. Başlangıç durumu $|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle$ olmalıdır ve son durumun $|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle$ olarak ölçüldüğünü düşünün. Bu, $|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle$ ve $|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle$ ortogonal olmadığından olasıdır. İkisi arasındaki $\{|A\rangle\langle A|, I - |A\rangle\langle A|\}$ projektör kümesinin yerleştirilmesinin "tutarlı" olduğu ortaya çıkar ve bu ara aşamada, temel olarak $|B\rangle + |C\rangle$ ve $|B\rangle - |C\rangle$ ortogonal *ol*duğundan, p'nin A kutusunda bulunmak zorunda olduğu sonucunu çıkarmış görünürüz. A yerine B'nin kullanıldığı aynı argüman, ara aşamada p'nin B kutusunda bulunmak zorunda olduğu eşit sonucunu verir! Bu örnek Yakir Aharanov'un "Kral sorunu"ndan evrimleşmiş görünüyor. *Bkz.* Albert *vd.*, 1985, s.5.

R benzeri işlemleri temel bir düzeyde birleştirmeye yönelik ciddi bir girişimde bulunması (d)'ye ilişkin pozitif bir özellik olsa da şimdiye dek ortaya konmuş ölçütler modelin davranışını, bildiğimiz dünyaya benzeyen bir şeye ilişkin açık bir tablonun ortaya çıkabileceği şekilde yeterince daraltmaz. Bunun hem (daha önce değindiğim gibi "tutarlı geçmiş" ölçütüne ilişkin Dowker–Kent çözümlemesiyle bağlantılı olarak) makroskopik "klasik benzeri" seviyede ve hem de ayrıca rahatsız edilmemiş üniter evrimi görmenin umulabileceği "kuantum seviyesi"nde doğru olduğu görülür. Ölçüm paradoksu bu iki seviyedeki fiziki davranışlar arasındaki görünüşteki çelişkiyle ilgilendiğinden (d) tutarlı geçmiş bakış açısının yine de bu paradoksa nasıl daha fazla ışık tutacak bir konumda bulunduğunu görmek güçtür.

(e)'den ne haber? §29.2'de belirtildiği üzere (e) de Broglie–Bohm "pilot dalga" bakış açısı, aslında kuantum kuramına ait öngörüleri değiştirmeyen tüm o diğerleri arasında en açık ontolojiye sahip görünür. Yine de bana göre aslında, ölçüm paradoksuna diğerlerinin yaptığından açık şekilde daha tatmin edici bir biçimde yönelmez. Gördüğüm kadarıyla aslında (e) kendisine ait iki gerçeklik düzeyinden, sistemin düzenlenişine ilişkin gerçekliğin daha sıkı bir "parçacık" düzeyine sahip olmanın yanı sıra rolü sıkı düzeyin davranışına yön vermek olan ψ dalga fonksiyonunca tanımlanan, gerçekliğe ilişkin ikinci bir "dalga" düzeyinden, kavramsal çıkar sağlayabilir. Yine de gerçek deneyle ilgili herhangi bir durumda başvurmamız gerekenin hangi düzey olacağından nasıl emin olabildiğimiz benim için açık değildir. Benim sorunum, uygun bir anlamda hangi sistemlerin, daha klasik "parçacık benzeri" ya da "düzenlenme benzeri" tablolarla uyumlu olacakları şekilde "büyük" ve hangi sistemlerin "dalga fonksiyon benzeri" davranışın önemli hale geleceği şekilde "küçük" olduklarını tanımlamak üzere hiçbir parametrenin bulunmamasıdır (ve bu eleştiri ayrıca (d) için de geçerlidir). §23.4 vb'den, kuantum davranışının en azından onlarca kilometre uzaklıklara genişletilebildiğini, böylece bir sistemin kuantum mekaniksel görünmekten ne zaman vazgeçip klasik bir nesne gibi davranmaya başlayacağını söyleyen tek şeyin yalnızca fiziki uzaklık olmadığını bilmekteyiz. Yine de (bir kedi gibi) büyük bir nesnenin küçük ölçekli üniter kuantum yasalarıyla uyumlu görünmediği bir anlam mevcuttur. (§30.11'de, gerekli olacak olan "ölçüm oranı" türüyle ilgili belirli görüşlerimi açıklamaya başlayacağım.) Bununla birlikte böylesi belirli herhangi bir ölçünün uygun olduğuna inanılsa da inanılmasa da bana öyle geliyor ki klasik benzeri davranışın görevi küçük ölçekli kuantum etkinliğinden ne zaman devralacağını tanımlamak üzere aslında *bir* ölçüm oranı gereklidir. Standart kuantum mekaniğinden, ölçülebilir herhangi bir sap-

manın beklenmediği diğer kuantum ontolojileriyle ortak biçimde (e) bakış açısı bu tür bir ölçüm oranına sahip değildir, bu nedenle onun Schrödinger'in kedisi paradoksuna uygun biçimde yönelebileceğini sanmıyorum.

Bu konuyla bağlantılı olarak, **R**'nin (diyelim ki) **U** dinamiğinden açık ortaya çıkışını "türetme" girişimleriyle ilgili genel bir yorum uygun olabilir. Sıradan (belirlenimci) dinamiğin bunu tek başına asla başaramayacağını, yalnızca, bu tür dinamik bir denklemde Schrödinger denklemindeki gibi hiçbir olasılık bulunmaması nedeninden de açık olduğu üzere, görebiliriz. (Okura §27.1'deki tartışmayı öneririm.) Ayrıca olasılıkçı bir ilkeye de zorunlu biçimde gerek duyulur. Sonuçta **R** olasılıkçı bir kuraldır. Bu nedenle §29.2'de belirtildiği üzere, ölçümlerin uygun ardışık olasılıklarının başlangıç durumunda doğru biçimde şifrelenmiş olması (e)'nin temel bir bileşenidir.

Bu bizi (f)'yle baş başa bırakır. Farklı pek çok önermenin çoğundaki temel (çoğu kez güçlü) sorunlar, onların doğal olmayan görünümleri, esasen görelilikçi olmayan karakterleri bilinen fizikten güdülenmeyen rasgele parametrelerin sunumuna yönelik gereksinimleri, enerjinin korunumun yasasını çiğnemeleri ve bazı durumlarda gözlemle olan dolaysız çelişkilerinde bulunur. Bu önermelerin tümünü burada tartışmak benim için pek uygun değildir ve diğerlerini harcamak pahasına bazılarını seçip ayırmak adil olmaz. Aslında 30. bölümde, diğerlerinin okuyucuya dayatarak ortaya koydukları, tüm önermelere düzenli biçimde haksız davranma yöntemini, benim de doğru olmasının en olası olduğuna inandığım bir (bazı bakımlardan asgarici) önermeyi (pek çok arkadaşımdan özür dileyerek) benimseyeceğim! Gerçekte diğerlerince daha önce ortaya konmuş olan çeşitli önermelerden kaynaklanan çok önemli bir teşvik ve kazanım söz konusu oldu ve aslında bunlara (yerinde bir minnettarlıkla) başvuracağım fakat yalnızca savunmak istediğim özgün fikirlerle ilişkileri içinde.

30

KUANTUM DURUM İNDİRGENMESİNDE KÜTLEÇEKİMİN ROLÜ

30.1 Bugünün kuantum kuramı kalıcı mıdır?

Bu bölümde okuyucuya, önceki bölümde ortaya konmuş negatif olanlara ek olarak, günümüz kuantum fiziğinin (olasılıkla incelikli fakat) temel bir değişime gerek duyduğuna inanmak üzere güçlü pozitif nedenler bulunduğuna ilişkin durumu sunacağım. Bu nedenler kabul edilmiş fiziki kurallar dahilinde ve evrenle ilgili gözlemlenmiş gerçekler yoluyla gelir. Yine de bugünkü kuantum fizikçilerinin çok azının, konularıyla ilgili temel kurallarda gerçek bir değişim fikrini ciddi biçimde ağırlamaya hazırlıklı olmasını dikkat çekici buluyorum. İstisnadan muaf olağanüstü deneysel desteği ve çarpıcı biçimde doğrulanan tahminlerine karşın kuantum mekaniği, yalnızca yaklaşık üç çeyrek yüzyıllık bir geçmişe sahip olmak üzere (bu tarihi hemen 1925'i izleyen yıllarda Heisenberg ve Schrödinger düzenlerine dayanan, Dirac ve diğerlerince kurulmuş olan matematiksel kuramdan başlatmaktayız), görece genç bir konudur. "Görece" derken, kuramı, özel ve sonra genel görelilik ve kuantum mekaniği biçimindeki ciddi değişikliklere gerek duymadan önce yaklaşık üç kat daha uzun hüküm sürmüş olan Newton kuramıyla kıyaslıyorum. Newton kuramını, Maxwell alanlarının sunumu yoluyla ilk değişikliğinden acı çekmiş olarak saymamız gerekse bile yine de bu ona iki yüz yıla yakın istisnasız bir saltanat dönemi vermiştir!

Dahası Newton kuramı bir *ölçüm paradoksu*na sahip değildi. Kuantum kuramındaki **U** işleminin doğrusallığı kurama belirli bir zarafet verirken bizi ölçüm paradoksuna (§22.2) yönelten şey tam da bu doğrusallıktır (ya da üniterlik). Bu doğrusallığın daha kesin (fakat incelikli) bir doğrusal olmayışa yönelik bir yaklaşıklık tahmini olabileceğine inanmak bu kadar mantıksız mıdır?

Açık bir benzer örneğe sahibiz. Newton kütleçekim kuramı, kütleçekim kuvvetlerinin her zaman tümüyle doğrusal bir biçimde toplanmalarıyla il-

gili belirli matematiksel zarafete sahiptir; yine de Einstein'ın daha kesin kuramında bunun yeri, farklı cisimlerin kütleçekim etkilerinin bir araya toplandığı, belirgin biçimde incelikli bir tür doğrusal olmayış tarafından alınır. Einstein kuramı da, Newton'ınkinden oldukça farklı bir türde olarak, zarafette kesinlikle geri kalır değildir. Ayrıca Newton kuramında gerek duyulmuş olan, Einstein kuramınca yapılan değişikliklerin hiçbir biçimde §29.2'de değindiğim "tamirat" benzeri şeyler olmadığını da görürüz. Newton kuramına ilişkin, örneğin Newton'ın GmM/r^2 (*bkz.* §17.3) ters kare denklemindeki 2 üssünün, Merkür'ün güneş etrafındaki hareketine ilişkin Newtoncı öngörülen 1894'te doğrulanan o çok hafif sapmaları bağdaştırmak üzere 2,00000016'yla yerinin değiştirilmesinin 1894'te Aspeth Hall tarafından önerilmesi gibi (ve Simon Newcombe tarafından gösterildiği üzere Hall'un önerisi diğer gezegenlerden de beslenir), böylesi tamiratlar aslında çeşitli zamanlarda düşünülmüştü.[1] Einstein kuramı bu sapmaları daha sonradan telaşa kapılmaksızın açıkladı fakat yeni kuram hiçbir biçimde eskisi üzerindeki tadilat yoluyla elde edilmedi; o, bakış açısında bütünüyle radikal bir değişiklik içerdi. Bana öyle geliyor ki bu, kuantum mekaniğinin yapısıyla ilgili olarak, günümüz geleneksel kuantum kuramını değiştirmek üzere gerekli doğrusal olmayan kuramı elde edeceksek (benim görüşüm), bakmak zorunda olduğumuz genel türdeki değişikliktir.

Aslında, gerek duyulan değişikliklerle ilgili olarak Einstein'ın genel göreliliğinin kendisinin gerekli bazı ipuçlarını sunacak olması benim kendi bakış açımdır. 20. yüzyıl bize fiziki düşünceyle ilgili iki temel devrim sundu. Bana göre genel görelilik, kuantum kuramının (ya da kuantum alan kuramının) sunduğu kadar etkileyici bir devrim sunmuştur. Yine de dünyaya ilişkin bu iki önemli düzen, birbiriyle en rahatsız biçimde bir arada bulunan kurallara dayanır. Bu kuramlar arasında yapılması önerilen evlilikle ilgili genel bakış açısı birinin, genel görelilik, kendisini diğerinin arzusuna sunmasıdır. Kuantum alan kuramı kurallarının değişmez olduğuna ve kendisini kuantum kalıbına uydurmak üzere uygun biçimde bükmesi gerekenin Einstein'ın kuramı olduğuna ilişkin genel bir görüş bulunduğu görülüyor. Pek azları, kuantum kurallarının kendilerinin, uygun biçimde ahenkli bir evliliği sağlama almak üzere değişikliği kabul etmek zorunda olduğunu ileri sürer. Aslında, normalde önerilmiş olan birliğe atanmış "kuantum kütleçekim" ismi, aranan şeyin standart bir *kuantum* (alan) kuramı olduğu örtük çağrışımını taşır. Yine de, Doğanın bu birliğe ilişkin bakışının bundan oldukça farklı olduğuyla ilgili gözleme dayalı bir kanıtın mevcut olduğunu iddia ediyorum! Onun bu birliğe ilişkin tasarımının,

[1] *Bkz.* Roseveare, 1982.

bizim gözümüzde, belirgin biçimde standart olmayan bir şey ve nesnel durum indirgemesinin bu şeye ait önemli bir özellik olmak zorunda olduğunu iddia ediyorum.

30.2 Kozmolojik zaman asimetrisinden ipuçları

Ne kanıtıdır bu? İlk olarak Doğanın, kuantum kütleçekim birliğine ilişkin seçiminin kendisini en açık biçimde ortaya koyduğu yerlere bakalım. Büyük Patlama ve kara deliklerdeki (böylesi olacaksa ayrıca Büyük Çöküşteki) uzayzaman *tekilliklerini* kastediyorum. 27. bölümde Büyük Patlamanın olağanüstü özel biçimdeki doğası, çöküş tekilliklerinin görünüşteki "kendine özgü" doğasıyla tümüyle zıt biçimde sunuldu. Hawking–Hartle önermesiyle (§28.9'da tartışıldığı üzere) uyumlu biçimde yapılmış cesur önerilere karşın Doğanın kuantum kütleçekim birliğinin gerekli bir özelliği olarak bütün bir zaman asimetrisinden kaçış göremiyorum.

Bu tür zamansal bir asimetri, herhangi bir standart kuantum alan kuramının anlatımlarıyla tümüyle farklılık içinde görünür. Örneğin §25.4'te belirtilmiş olan CPT kuramını ele alalım. ("T" zaman ters çevrimi yerine kullanılırken "P" ve "C"nin sırasıyla uzay ters çevrimi ve parçacıkları kendi karşı–parçacıklarıyla yer değiştirmesi yerine kullanıldığını anımsayın.) CPT kuramının kuantum kütleçekim birliğiyle ilgili arayışımıza uygulanacağına inanırsak tehlikedeyiz demektir. CPT'yi, kütleçekimsel çöküşle ilgili izin verilmiş "kendine özgü" herhangi bir sonuç tekilliğine uygularsak bu durumda Büyük Patlamaya (ya da bir kısmına) ilişkin olasılık biçiminde bir başlangıç tipi tekillik elde ederiz. Kullanılabilir faz uzayının, §27.13'te açıklanmış (ve grafik biçiminde Şekil 27.22'de gösterilmiş) olan devasa büyüklüğünü anımsayın. Bu tür başlangıç tekillikleri bir kez *kullanılabilir* hale gelirse bu durumda Yaratıcı'nın iğnesini, evrenimizin gerçek başlangıç noktası olduğu görülen bu saçma biçimdeki (ve "antropik" bakış açısından, *bkz.* Şekil 28.13, gereksiz biçimde) küçük $\mathcal{B}$ bölgesine yönlendirecek hiçbir şey söz konusu olmaz. Büyük Patlamanın olağanüstü özel doğasıyla ilgili gizemin, kuantum alan kuramına ilişkin standart çerçevede çözülemeyeceği bana açık görünüyor.

Bu en azından "standart" sözcüğünün CPT teoreminin (§25.4) geçerliliğini gerektirdiği herhangi bir kurama ilişkin durumdur. Açık konuşmak gerekirse bu teorem Einstein genel göreliliğinin eğik uzayzaman temeline tümüyle saygı gösteren bir kurama hemen uygulanabilir değildir. CPT teoreminin öncüllerinden biri, ardalandaki uzayzamanın düz Minkowski uzayı olmasıdır. Yine de çoğu fizikçinin bunu, Einstein kuramının, bir ko-

laylık olarak Minkowski ardalanının sunulması yoluyla "Poincaré değişmez alan kuramı" biçiminde yeniden ifade edilebileceği görüşünü kabul ederek, önemsiz bir "teknik ayrıntı" biçiminde değerlendireceği kuşkusunu taşıyorum. Kişisel olarak bu tür işlemle ilgili güçlü ön koşullara sahibim;[2] yine de, tümüyle simetrik zamanlı klasik Einstein genel görelilik kuramının, kuantum alan kuramının standart simetrik zamanlı işlemlerine sunulduğunda böylesine *a*simetrik zamanlı hale gelme gerekliliğinin olası görünmediğine katılma eğilimindeyim.

Öte taraftan §25.5, §§26.5, 11'de, kuantum kuramına geçtiğimizde klasik kurama ilişkin bir simetrinin kırılmış hale geldiği durumlarla karşılaştığımızı anımsayalım. Einstein kuramı standart QFT kurallarının sınırları içine dahil edilmiş hale geldiğinde ortaya çıkan şey bu olabilir mi? Bunun akla yatkın olduğunu sanıyorum fakat bunun, diyelim ki $|\Theta\rangle$ "vakum durumu"nun, kuantum dinamiğine ilişkin simetrileri paylaşır kabul edilmediği elektrozayıf kuramda ortaya çıkan türdeki simetriye nasıl bu derece benzeyebildiğini görmek güçtür. Bu fikir işlerse böylece $|\Theta\rangle$ "asimetrik zamanlı" olmak zorundadır. Böylesi bir fikrin nasıl anlamlı kılınabileceğinden emin değilim. $|\Theta\rangle$ ketinin, §26.11'de açıklandığı biçimde, tüm alan işlemcilerinin en sağ tarafına yerleştirilen şey olduğu ve burada çok belirli Büyük Patlama durumu anlamına gelmek üzere evrenin başlangıç durumunu temsil eder biçimde düşünülebileceği doğrudur. Bununla birlikte standart QFT'de $|\Theta\rangle$'nın karmaşık eşleniği ayrıca, diğer bir deyişle bra $\langle\Theta|$, $\langle\Theta|A|\Theta\rangle$ benzeri ifadeler üzerinden olasılıkların formülasyonunda gerekli olmak üzere, formalizmde de yer alır ve $|\Theta\rangle$'ya tümüyle simetrik fakat zaman çevrilmiş halde bir rol oynar. Bu nedenle $\langle\Theta|$, evrenin sonuç durumunu temsil etmek zorundadır ve 27. bölümün tüm mesajıyla bütünlüklü bir çelişki içinde, başlangıçtakine benzer yapıda bir sonuç durumuna sahip oluruz.

Ayrıca "kuantizasyon" işleminde ortaya çıkan, kuantum kuramının kendileri yoluyla, klasik kuramın *anomaliler* olarak bilinen simetrilerini paylaşmayabileceği başka özellikler de söz konusudur. Bunlar, klasik simetri sağlayan (Poisson parantezlerince verilen, *bkz.* §14.8) klasik yer değiştirme kuralları kuantum çeviriciler yoluyla tümüyle gerçekleştirilemediğinde, yalnızca, kuantum kuramında yaşamaya devam eden klasik simetri grubunun tümüne ilişkin bir alt grupla birlikte ortaya çıkar. Anomalilerin, normalde kaçınılabilecek şeyler olarak ele alındığı görülür (ve sonraki bölümde sicim kuramını değerlendirmeye geldiğimizde kuramcıların bazen böylesi şey leri ortadan kaldırmak üzere gerçekleştirdikleri

[2] *Bkz.* Penrose, 1980.

çarpıtmaları göreceğiz). Yine de farklı bir bakış benimsenmesi ve bir anomalinin, daha büyük simetrinin sahip olmak istenmeyecek bir şey olduğu koşullarda "iyi" bir şey olarak değerlendirilmesi düşünülebilir. Bununla birlikte elimizdeki durumda bu, engellenmesi istenecek ayrık bir simetridir, diğer bir deyişle T, CT ve PT'ye ek olarak CPT, aslında içinde bir "T" bulunan herhangi bir şeydir ve genellikle (fakat her zaman değil), yalnızca, Poisson parantezleri biçiminde gerçekleştirilebilecek sürekli simetrilerle ilgili olan olağan anomali fikrinin önemini görmek güçtür.

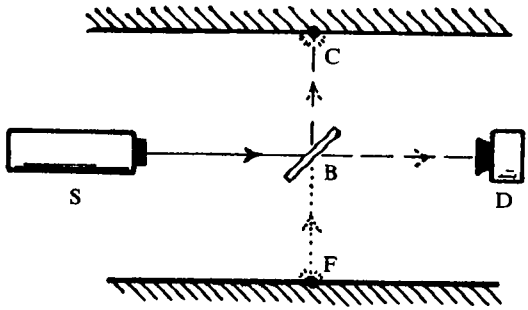
Nasıl bakılırsa bakılsın, kuantum etkileri ve kütleçekim etkilerinin ikisinin de, Büyük Patlama ve kütleçekimle ilgili çöküşteki uzayzaman tekilliklerinde, bir araya gelmek zorunda olacağı (olduğu) o uç koşullarda kütleçekim diğer alanlardan tam olarak *farklı biçimde* davranır. 27. bölümdeki sondan bir önceki paragrafın bu konuyla ilgili sonuç vargısını anımsayın. Ne sebeple olursa olsun Doğa, böylesi uç koşullarda kütleçekim davranışına bütünlüklü bir zamansal asimetri yüklemiştir.

30.3 Kuantum durum indirgemesinde zaman asimetrisi

Bunun, kütleçekim ve kuantum mekaniği arasındaki olası iç ilişkiyle ilgili herhangi başka ipuçlarıyla ilgisi bulunur mu? Güçlü biçimde bulunduğunu sanıyorum. Kuantum kuramının **U** parçasında (§27.1) hiçbir zaman asimetrisi algılanmazken **R**'de temel bir zaman asimetrisi söz konusu*dur*. Bunu basit bir kurgusal kuantum deneyinde kolayca görebiliriz. Zaman zaman tekil fotonlar yayan bir S foton kaynağının mevcut olduğunu ve ne zaman böyle yapsa bu olayın kaydedildiğini düşünün.[3] Olasılıkla X–ışını fotonları bile olmak üzere fotonların yüksek enerjiye sahip olduğunu varsayacağım. Fotonlar bir B huzme ayırıcıya ("yarı gümüşlenmiş aynı") 45°'lik bir açıyla, iletildiğinde diğer taraftaki bir D algılayıcısını çalıştıracakken yansıtıldığında C tavanı tarafından emilecek şekilde yönlendirilir (*bkz.* Şekil 30.1). Bu iki alternatif için, algılayıcının foton alımını, fotonun kaynaktan yayılmış olarak kaydedildiği durumların tam olarak yarısı biçiminde kaydedeceği şekilde, eşit genlikler varsayıyorum.

Bu yalnızca, **R** işleminin basit bir uygulamasıdır. SBD foton geçmişiyle ilgili olarak (olası faz çarpanlarının göz ardı ederek) bir $\frac{1}{\sqrt{2}}$ genliği ve SBC foton geçmişi için de bir $\frac{1}{\sqrt{2}}$ genliği söz konusudur. **R** modül karesi kuralı-

[3] Bununla ilgili kuramsal ya da teknik hiçbir engel, en azından %100 isabet talep etmediğimiz sürece, yoktur. Örneğin sonuçtaki fotonun her zaman, diyelim ki parametrik aşağı dönüşüm yoluyla üretilmiş olan çiftin, *bkz.* §23.10, bir üyesi olması, diğer üyenin kaydedici aygıtı tetiklemesiyle birlikte ayarlanabilir.



Şekil 30.1 Bir S kaynağı bir B huzme ayırıcısına 45°'lik bir açıyla yönelen (böylesi her bir olay kaydedilmek üzere) yüksek enerjili tekil fotonlar yayar. Foton B'den aktarılırsa bir D algılayıcısını harekete geçirir (SBD rotası); yansıtılırsa C tavanında emilir (SBC rotası). Kuantum modül karesi kuralı olasılıkları doğru biçimde $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ olarak tahmin eder. Öte taraftan, D'nin kaydettiği verili olmak üzere, foton S'den (SBD rotası) ya da F tabanından (FBD rotası) gelmiş olabilir. Ters çevrilmiş zaman yönünde kullanıldığında modül karesi kuralı 1, 0 olması gereken geçmişe yönelik olasılık tahminlerini yanlış biçimde $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ olarak verir.

nın uygulanması böylece, ne zaman S'de bir foton yayınımı olayı olsa D'de bir algılama olayının %50 ve C'ye foton ulaşmasının da %50 olasılığının söz konusu olduğuna ilişkin (doğru) yanıtı verir. Bu basitçe doğru yanıttır.

Şimdi bu belirli deneyi zamanda geriye doğru okuduğumuzu düşünelim. "Geriye doğru zamanlı" bir kaynak ya da algılayıcı yapmaya çalıştığımızı ileri sürmüyorum. Hayır, fiziki işlemlerin ne olursa olsun değiştirilmemesi gerekir. Bu yalnızca, onlarla ilgili *sorular*ımı tersinmiş bir zaman biçiminde önermeyi ifade etmektir. D'de bir algılama olayı verildiğinde *sonuç* olasılıkları yerine *başlangıç* olasılıklarının ne olduğuna bakalım. İlgili genlikler artık, F zemindeki, kendisinden bir foton yayılacak olsa D'de algılanmak üzere B'de yansıtılabilme özelliğine sahip bir nokta yerine kullanılmak üzere, alternatif SBD ve FBD geçmişlerine aittir. Genlikler iki geçmişin her biri için yine (fazları göz ardı ederek) $\frac{1}{\sqrt{2}}$'dir. Bu, böyle olmak zorundadır çünkü bir yöne ya da diğerine gitmekle ilgili genliklerin (modülleri) oranı yalnızca huzme ayırıcının bir özelliğidir. Burada hiçbir zaman asimetrisi yoktur. Öyleyse bu iki alternatifle ilgili olasılıkları elde etmek üzere "modül karesi kuralı"nı uygulayacak olsaydık, D'de ne zaman bir algılama olayı olsa S'deki yayınımla ilgili %50'lik ve fotonun F zemininden gelmesiyle ilgili olarak da (çıkarım yoluyla) %50'lik bir olasılık bulurduk.

Bu elbette bir saçmalıktır. Gerçekte bir X ışını fotonunun zeminden sıçrayıp huzme ayırıcıya yönelme olasılığı sıfırdır. D'de ne zaman bir algı-

lama olayı olsa olasılıklar daha çok S'deki bir yayınım olayıyla ilgili %100 ve fotonun F'den gelmesiyle ilgili %0'a benzer. Geçmiş yönünde uygulanan modül karesi kuralı basitçe bize bütünüyle yanlış yanıtı verdi![4]

Elbette bu kural geçmişe uygulanmak üzere tasarlanmadı fakat öyle yapmanın nasıl da bütünüyle yanlış olduğunu görmek bakımından öğreticidir. İnsanlar bazen bu çıkarıma, tersinmiş zaman açıklamama ait olan, örneğin termodinamiğin ikinci yasasının yalnızca tek yönde işediği gerçeği ya da zemin sıcaklığının kaynağınkinden çok daha düşük olması gerçeği, vb gibi belirli koşulların tümünü hesaba katmakta başarısız olduğumu işaret ederek itiraz etmişlerdir. Bununla birlikte kuantum mekaniksel modül karesi kuralının mükemmel özelliği, belirli koşulların ne olabileceği hakkında asla endişe etmek zorunda olmamamızdır! Mucize, ölçüm işleminde ortaya çıkan gelecek tahminleriyle ilgili kuantum olasılıklarının, belirli sıcaklıklar ya da geometriler ya da herhangi bir şeyle ilgili değerlendirmelere pek de bağlı görünmemesidir.[5] Genlikleri bilirsek gelecek olasılıklarını hesaplayabiliriz. Tüm bilmemiz gereken genliklerdir. Durum, geçmişe yönelik tahminlerle ilgili olarak tümüyle farklıdır. Bu durumda koşullarla ilgili her türlü ayrıntılı şeyi bilmemiz gerekir. Tek başına genlikler, geçmiş olasılıklarını hesaplamakla ilgili olarak oldukça yetersizdir.

Bununla birlikte kuantum olasılıklarının, zamanda tümüyle simetrik biçimde hesaplanabileceği durumlar mevcuttur ve bunlara göz atmak belki de öğretici olabilir. Bunlar, kuantum durumu ara bir ölçümün hem öncesi hem de sonrasında bilinen bir şey olarak ölçüldüğünde ortaya çıkar. Daha açık olmak için, ilkinin durumu $|\psi\rangle$'ye ve üçüncüsünün $|\phi\rangle$'ye yansıttığı, bu ikisi arasında $\boldsymbol{E}$ projektörünce tanımlanan bir EVET/HAYIR ölçümü (§22.6) bulunmak üzere, ardışık üç ölçüm düşünün. Bu durumda ortadaki ölçümle ilgili EVET olasılığı, kesinlikle simetrik zamanlı olan (normalleştirmelerin $\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \langle\phi|\phi\rangle$ olduğunu düşündüğümüz şekilde)

---

[4] İnsanların bu argümanla ilgili olarak sıklıkla çok fazla soruna sahip olmalarını dikkat çekici buluyorum. Konu belki bu deneyin uzayzaman boyunca çeşitli konumlarda gerçekleşecek sayısız yinelenmesine niyetlenirsek aydınlatılabilir. Ele alınması gereken alternatif dört foton rotası mevcuttur; SBD, SBC, FBD ve FBC. Çeşitli olasılıkların neler olduğunu görmek üzere, S, ileri yönlü zaman durumu, verili olmak üzere SBD oranını ya da D, geri yönlü zaman durumu, verili olmak üzere SBD oranını ararız. Modül karesi kuralı gerçek yanıtı, %50, ilk durumda doğru biçimde verirken fakat ikinci durumda gerçek yanıtı, yaklaşık %100, ver*mez*.

[5] Bununla birlikte, olması gerektiği gibi başlangıç durumuna bağlıdırlar, algılayıcıda da bir şey içerebilecek olan karışık bir durumun, §23.3, bir parçasına değil. Tümüyle yanlış yanıtlar veren ters çevrili zaman modül karesi kuralından, böylesi karışıklıklara ilişkin zaman ters çevrilmesinin sorumlu olup olmadığı sorusunu sorabiliriz. Bununla birlikte bu çizgi doğrultusunda mantıklı herhangi bir açıklamanın nasıl oluşturulacağını anlamaya gücüm yetmiyor. Belki bazı girişken okurlar daha iyisini yapabilir.

$$|\langle\phi|E|\psi\rangle|^2$$

ifadesiyle verilir.[30.1] (Bu tür bir durumu kurmak üzere ardışık üç ölçüm defalarca gerçekleştirilir ve incelemek için yalnızca, ilk ölçümün $|\psi\rangle$ ve üçüncü ölçümün $|\phi\rangle$ sonucunu verdiği durumlar seçilir. Bu durumda üstteki olasılık ortadaki ölçümün EVET sonucunu verdiği durumların kesirleriyle ilgilidir.)[6] Bu, bazı insanları kuantum ölçümünün kökeninde herhangi bir zaman asimetrisi bulunmadığı sonucunu çıkarmaya yöneltmiştir.[7]

Bununla birlikte çoğu kuantum ölçümü bu türde değildir. Modül karesi kuralının normal ileri zamanlı kullanımıyla ilgili olarak bir $|\phi\rangle$ ve üstte denenmiş olan geri yönlü zaman kullanımıyla ilgili olarak da bir $|\psi\rangle$ belirtmeyiz. Kuantum olasılıklarını, $|\phi\rangle$'yi belirtmezken mükemmel derecede iyi biçimde hesaplayabildiğimizi görmekteyiz fakat $|\psi\rangle$'yi belirtmekten kaçamayız. Gelecek olasılıklarıyla ilgili kuantum kurallarının iyi işlemesinin nedeninin $|\phi\rangle$'nin bir anlamda, termodinamiğin ikinci yasasıyla ilişkili biçimde "rasgele" oluşuyla ilgili olduğu bakışı kabul edilebilir. Belki bunda bir şey mevcuttur fakat $|\phi\rangle$'yle ilgili bu gerekliliği oldukça belirsiz buluyorum. Bu bağlamda "rasgele"nin anlamı nedir? Ölçüm sorununda, ikinci yasayla bir bağlantının söz konusu olduğu yine de kesinlikle görülmektedir. Gerçek ölçüm aletlerinin, işlemlerinin bir parçasında, bu yasadan yararlanmaya eğilimli oldukları gerçeğini not edebiliriz. **R**'yle ikinci yasa arasında bir bağlantı olması aslında konuyla ilgili bakış açımın bir parçasıdır. İkinci yasanın kayıp kuantum/kütleçekim birliğiyle çok yakından ilişkili olduğunu gördüğümüzden ayrıca bu umulan birlikle **R** arasında da yakın bir ilişki beklemek zorunda oluruz.

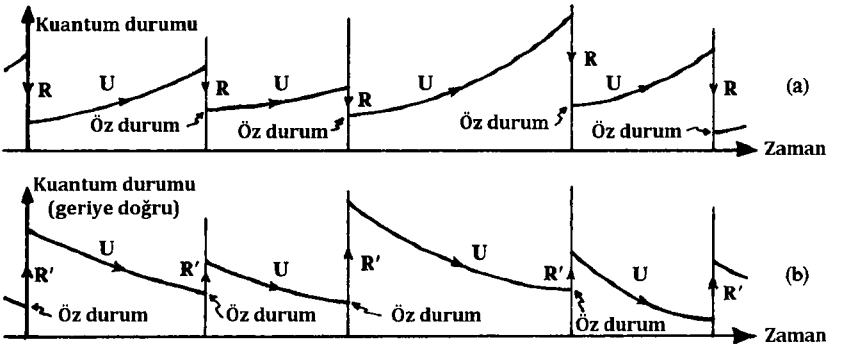
Bu konuya daha açık biçimde gelmeden önce, olasılıkların modül karesi kuralı üzerinden hesaplanmasının aksine, **R**'nin diğer görünümünün, diğer bir deyişle kuantum durumuna ilişkin "sıçrama"nın ileri yönlü zaman biçiminde olduğu gibi geri yönlü bir zaman bakış açısı uyarınca da (görünen o ki) aynı nitelikte ifade edilebileceğini belirtmeye değer. Şematik olarak bu Şekil 30.2a, b'de gösterilir. Durumun, ölçüm gerçekleştikten *sonra* ona ait bir öz durum olduğu Şekil 30.2a'da ..., **U**, **R**, **U**, **R**, **U**, ... değişimine ilişkin (Şekil 22.1) "normal" bakışı gösterdim. 30.2b'deyse durumun ölçümden hemen *önce* bir öz durum olduğu "tersinmiş zaman" bakışını gösterdim. Hangi bakış açısı benimsenirse benimsensin genlik hesaplama sonuçlarının aynı olduğu açığa çıkar[30.2] fakat ters çevrilmiş zamanlı olan

[30.1] Niçin? Bu denklemi türetebilir misiniz?

6 *Bkz.* Aharonov ve Vaidman, 1990.

7 Bu konuyla ilgili bir tartışma için *bkz.* Aharonov vd. 1964.

[30.2] Bunun niçin temel olarak **U**'nun "üniter" doğasına ilişkin bir ifade olduğunu açıklayın; *bkz.* §22.4.



Şekil 30.2 Kuantum mekaniği uygulamasında (a) evrimin, işlemci öz durumlarının **U** evrimine ilişkin her genişleminin geçmiş ucunda meydana geldiği standart zaman yönü uyarınca ve (b) evrimin, işlemci öz durumlarının **U** evrimine ilişkin her genişleminin gelecek ucunda meydana geldiği zamanda tersinme bakış açısı uyarınca kullanıldığı üzere iki **U** ve **R** işlemiyle ilgili ..., **U**, **R**, **U**, **R**, **U**, ... değişimine ilişkin şematik gösterim. Kuantum mekaniğinin "eylemsel" yorumunda biri (a)'ya ve diğeri (b)'ye göre evrimleşen iki durum vektörü bulunur.

rahatsız edici bulunabilecek "teleolojik" bir görünüme sahiptir. Ayrıca kendisi uyarınca her iki tablonun da eşzamanlı olarak ele alındığı bir bakış açısı, (bağımsız biçimde birkaç kuantum kuramcısına ait olan)[8] "eylemsel" yorum, söz konusudur ve kuantum sistemini herhangi bir zamanda açıklayan, eşzamanlı biçimde üniter olarak evrimleşen, biri Şekil 30.2a'ya ve diğeri 30.2b'ye benzeyen iki durum vektörü mevcuttur. Bunun, 23. bölümdeki EPR olgusunu yorumlamakla ilgili olarak avantaja sahip olduğu kabul edilir. Bana göre bu açıklama biraz haddinden fazladır. Durum "yayılımı"nın zaman yönünün önemli olmadığı bir *kudolanık* bakış açısını benimsemek, kudolanıklık yoluyla basit olarak farklı zamanlardaki durumlar arasında bağlantılar sunmak üzere, daha iyi olabilir (§23.10).

30.4 Hawking'in kara delik sıcaklığı

R'yi (asimetrik zamanlı) kuantum kütleçekim birliğine yönelik arayışla bağlantılandırmanın, tek başına **R**'deki zamansal asimetri gerçeğinden daha dolaysız herhangi başkaca yollar mevcut mudur? Bana göre mevcuttur ve böylesi iki bağlantıyı açıklayacağım. Bunların ilki önceki bölümün tartışması sonucu ortaya çıkar ve dikkat çekici "kara delik buharlaşması" olgusuyla ilgilidir. Argüman kısmen akıl çelici ve kesinlikle eksiktir; daha-

[8] *Bkz.* Aharonov ve Vaidman, 2001; Cramer, 1988; Costa de Beauregard, 1995; ve Werbos ve Dolmatova, 2000.

sı belirli merkezi bakımlardan tartışmalıdır. Bu tartışmanın bileşenleri bu bölümün ve (bir ara söz gibi değerlendirilebilecek olan §§30.5, 6'yı dışta tutarak) §30.9'a kadarki bölümlerin konusu olacak. Genel göreliliğin temel ilkeleri ve kuantum mekaniği arasındaki temel bir gerilimden ortaya çıkan ikinci argüman çok daha açıktır ve bazı belirgin nicelikle ilgili ön görülere yol açar. Bu gerekçelendirme dizisi §§30.10–13'te verilecek. Bununla birlikte, kara delik entropisine ilişkin belirli anlatımlarla ilgili, ilk argüman bizim için önemli başkaca bazı kuramsal konuları, bunlar mevcut kuramsal tartışmalarda sıkça değinilmiş olmak üzere, gündeme getirir ve bunlara ilişkin bir kavrayış elde etmek faydalı olacaktır.

§27.10'dan olay ufku A yüzey alanına sahip bir kara deliğin S_{BH} entropisiyle ilgili ($k = c = g = \hbar$ olmak üzere doğal birimlerdeki) $S_{BH} = \frac{1}{4}A$ Bekenstein–Hawking ifadesini anımsarız. Kendi tartışmasının bir parçası olarak Hawking (1973), bir kara deliğin ayrıca, deliğe ait "yüzey kütleçekimi" olarak adlandırılan şeyle orantılı olduğu açığa çıkan bir *sıcaklığa* sahip olmak zorunda olduğunu gösterdi. Durağan biçimde dönen bir delikle ilgili olarak (Kerr geometrisi, *bkz.* §27.10), §27.10'da olduğu gibi m kara deliğin kütlesi ve am ona ait açısal momentum olmak üzere,

$$T_{BH} = \frac{1}{4\pi m[1 + (1 - a^2/m^2)^{-\frac{1}{2}}]}$$

ifadesini buluruz. Bu sıcaklık termodinamiğe ilişkin standart bir formülden elde edilebilir:

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E.$$

Burada E enerjisi değişirken korunan açısal momentumu sabit tutarız.[30.3] Buradan hareketle kara delik T_{BH} sıcaklığı için, ısıl dengedeki fiziki bir nesneymişçesine karakteristik (Planckçı) "kara cisim" spektrumuyla birlikte §21.4'te açıklandığı gibi (*bkz.* Şekil 21.3b) enerji ışınımı yaparak foton yayacaktır. Bir kara deliğe ilişkin Bekenstein–Hawking entropisi devasa olmasına ve §27.13'te tartışılmış olağanüstü şekillere neden olmasına rağmen Hawking sıcaklığı makul boyutlu kara delikler için komik biçimde küçüktür. Örneğin güneş kütleli bir kara delik için Hawking sıcaklığı yalnızca, burada dünya üzerinde insan eliyle gerçekleştirilmiş en düşük sıcaklıktan (yaklaşık 10^{-9}K) çok da fazla büyük olmayan, yaklaşık 10^{-7}K kadardır.

[30.3] §27.10'da verilmiş olan bir Kerr deliği ufkunun alanıyla ilgili ifadeyi göz önüne alarak T_{BH}'yle ilgili bu denklemi elde edin.

Jacob Bekenstein (1972) kara delik entropisi ifadesini (termodinamiğin ikinci yasasının kuantum parçacıklarının yavaş yavaş deliğe doğru alçaltıldığı durumlara uygulanmasına dayanan) fiziki bir argüman kullanarak birkaç yıl önce bulmuş fakat ne şimdi ifadede görünen "$\frac{1}{4}$"le ilgili açık bir değer ne de bir kara delik sıcaklığı elde etmişti. Entropi denklemindeki "$\frac{1}{4}$" ve sıcaklığı, eğik bir uzayzaman ardalanında QFT tekniklerini işe koşmak yoluyla ilk olarak Stephen Hawking sundu. Burada ardalan, uzak geçmişteki bir malzemenin (bir yıldız diyelim) çökmesiyle ortaya çıkmış bir kara deliği tanımlar. Durum Şekil 27.16b'deki konformal diyagram yoluyla (bu, çökme küresel olarak simetrikse sıkı olmak üzere) açıklanır.

Bana göre Hawking'in bir kara deliğin entropi ve sıcaklığına ilişkin dikkat çekici hesaplaması (bağlantılı "Unruh etkisi"yle birlikte)[9] bugüne kadarki herhangi bir kuantum–kütleçekim kuramından elde edilmiş olan makul biçimde güvenilir tek çıkarımdır. Hawking'in çıkarımları dahi tam olarak kuantum kütleçekimden değil fakat daha çok eğik bir ardalan uzayzamanındaki QFT değerlendirmelerinden elde edilmiştir. Genelde kuantum kuramı eğik bir ardalan dahilinde formüle edilmeye çalışıldığında ağır sorunların ortaya çıkması söz konusu olur ve Hawking'in yine de bazı sağlam sonuçlara ulaşamamış olması çarpıcıdır.

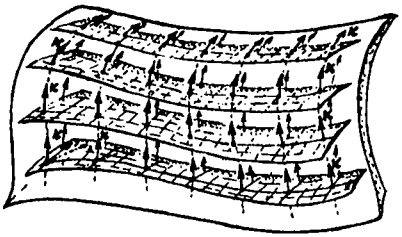
En yakıcı sorunlardan biri eğik bir ardalanda uygun bir "pozitif frekans" kavramı bulmaktır. §24.3 ve §26.2'de gördüğümüz üzere bu kavram kuantum parçacıkları ve QFT'yle ilgili standart bakışın kilit bileşenlerinden biridir. Bu konuyu genel bir eğik uzayzamanda formüle etme sorunu, "pozitif frekans" kavramının kendisi biçiminde formüle edilebileceği doğal şekilde tanımlanmış bir "zaman parametresi"nin yokluğunda bulunmaktadır.

Dikkatli okur elbette, düz Minkowski uzayında da doğal biçimde tanımlanmış hiçbir zaman parametresi bulunmadığını belirtebilir! Bununla birlikte çarpıcı bir gerçek burada bize, (bölümler 19, 24–26'da çalışılmış olanlar gibi) görelilikçi dalga denklemlerinin çözümleriyle ilgili olarak t Minkowski zaman parametresine ilişkin bir seçimdeki pozitif frekansın, zamansal yönelimin kendisiyle ilgili olarak ters çevrilmediği böylesi herhangi diğer bir parametredeki seçime denk olduğunu söylemek üzere yardımımıza gelir. Kütlesiz alanlarla ilgili olarak, daha da ileri gidilebilir ve standart Minkowski zaman parametresinden, (burgaç kuramında önemli olan, *bkz.* §§33.3, 10) zaman yönelimini koruyucu bir konformal dönüşüm yoluyla elde edilen bir "zaman parametresi" kullanılarak aynı pozitif frekans koşulu elde edilebilir.[10]

---

[9] *Bkz.* Unruh, 1976; ayrıca *bkz.* Wald, 1994.

[10] *Bkz.* Penrose, 1968b, 1987b ve Bailey vd, 1982.



Şekil 30.3 Bir uzayzamana ilişkin durağanlık zamansal bir κ Killing vektörünün varlığı biçiminde ifade edilir. Bu, metriği koruyan sürekli bir zaman yer değikliği ailesi üretir. t bir (t,x,y,z) koordinat sistemine ilişkin "zaman parametresi" olmak üzere, κ = ∂/∂t'yse, bu durumda x, y ve z, κ'ya ilişkin integral eğrileri boyunca sabit olmak zorundadır.

Genel bir uzayzamanda bu tür bir parametrenin doğal hiçbir benzeri mevcut değildir ve genellikle, pozitif frekans kavramı, zaman parametresine ilişkin farklı seçimlerle ilgili olarak kesinlikle farklı biçimlerde ortaya çıkar. Hawking sıcaklığı durumundan ayrı olarak en akla yatkın sonuçlar, kendileriyle ilgili olarak uzayzaman geometrisini koruyan sürekli bir zaman yer değişikliği ailesinin bulunduğu, *durağan* uzayzamanlara ilişkin değerlendirmelerden gelir (*bkz.* Şekil 30.3). Böylesi uzayzaman hareketleri bir *κ zamansal Killing vektörü* (*bkz.* §14.7 ve §30.6) yoluyla üretilir. κ vektörünün üzerlerinde uç verdiği eğriler (κ'nın integral eğrileri), üzerlerinde mantıklı bir doğal *t* "zaman parametresi"nin, kalan üç x, y, z koordinatı eğriler boyunca sabit kabul edilmek üzere,

$$\kappa = \frac{\partial}{\partial t}$$

olacak şekilde belirtilebileceği eğrilerdir. Böylece artık "pozitif frekans" kavramı bu parametreye göre tanımlanabilir.

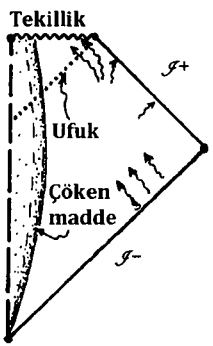
Birden fazla zamansal Killing vektörü söz konusu olduğunda tuhaf bir durum ortaya çıkabilir çünkü bu durumda birden fazla "pozitif frekans" kavramı ortaya çıkabilir. Bu zamansal Killing vektörlerine ilişkin çokluk elbette $\mathbb{M}$ Minkowski uzayıyla birlikte ortaya çıkar fakat üstte söylenmiş olan şeye göre, Minkowskici bir eylemsizlik çerçevesinden bir diğerine geçtiğimizde pozitif frekans kavramları birbiriyle uyum gösterir. Bununla birlikte eylemsiz bir çerçeveden ivmelenen bir çerçeveye geçtiğimizde durum bu değildir. Bu durumda ayrık bir "pozitif frekans" kavramı elde ederiz ve sonuçtaki QFT'nin, ivmelenen bir gözlemcinin kendisi uyarınca, herhangi makul bir ivme için komik biçimde düşük olsa da, sıfır olmayan bir sıcaklığı deneyimlediği *ısıl vakum* olarak adlandırılan şeyin içinde olduğu açığa çıkar.

Bu, şaşırtıcı bir etki olmasına rağmen, bu "ivme sıcaklığı" sıradan (gerçi idealleştirilmiş) bir termometre tarafından ölçüleceği üzere yalnızca olağan türde bir sıcaklıktır. Bu durumda termometre düzenli ivmelenmeye maruz kalır ve ivmelenmeyen bir termometre tarafından sıfır sıcaklığına

sahip biçimde ölçülen bir vakum ortamında bulunduğu kabul edilir. (Bu "ısıl vakum" kavramı §§26.5, 11'deki "alternatif vakumlar" ve §§28.1, 4'teki "yanlış vakum" QFT kavramlarıyla bağlantıya sahiptir.) Bu, "Unruh etkisi" olarak adlandırılır ve bir kara deliğe ilişkin Hawking ısıl durumuyla uyumludur. Çok büyük bir kara delik yakınında durağan konumda tutulan bir gözlemci, eşdeğerlik ilkesi uyarınca (§17.4) etkin bir ivmeye maruz kalır ve bu ivmeye ilişkin Unruh sıcaklığı Hawking sıcaklığıyla, kendi işlemlerince elde ettiği üzere, uyum gösterir.

Genelde doğal bir "pozitif frekans" tanımı yoksunluğuyla sergilenen güçlük, bazı yaklaşımlarda "parçacık" kavramından vazgeçilip kuantum mekaniksel işlemciler cebirine yoğunlaşılarak alt edilir.[11] İlk bakışta bu oldukça büyük bir özveri gibi görünebilir ve aslında böylesi bir yaklaşımdaki ilgili pek çok sorunun formülasyonunda bir miktar ustalık gerekir. Yazım esnasında, ben de, bu ilgi çekici ve umut vaat eder görünen türdeki kuramın hakkını tam olarak verebilmiş değilim. Bununla birlikte onun, belirli zamansal vektör alanlarına dayanan yaklaşımlardan üstün olduğundan kuşkulanıyorum. Ne olursa olsun yine de, sabit bir ardalandaki QFT'nin niçin zorunlu biçimde bütünlüklü bir fiziki anlam ifade etmesi gerektiğini ben de anlamıyorum. Bu yalnızca, kütleçekim alanındaki, diğer bir deyişle uzayzamanın kendisinin geometrisinde, serbestlik derecesinin de kuantum fiziğinde yer almak zorunda olduğu çok daha tam bir düzene yönelik bir yaklaşıklık tahminidir.

Bir kara deliğe ilişkin sıcaklık ve entropi hesaplamasında Hawking, yalnızca sonsuzda bölünen bir pozitif/negatif frekans kavramına gerek duymak yoluyla bu konuların çoğundan kaçınmayı başarır. Böylesi bir kavram $\mathscr{I}^-$'de (geçmiş boş sonsuz) ve bir diğeri de $\mathscr{I}^+$'da mevcuttur (*bkz.*



Şekil 30.4 Hawking'in bir maddenin uzak geçmişte bir kara deliğe çökmesini içeren kara delik sıcaklığıyla ilgili hesaplaması (standart) pozitif/negatif frekans kavramının yalnızca $\mathscr{I}^+$ ve $\mathscr{I}^-$ üzerinde bölünmesini gerektirir. Kara deliğin vakumu bir ısıl durum (yoğunluk matrisi) haline gelir çünkü $\mathscr{I}^+$ üzerindeki başlangıç bilgisi $\mathscr{I}^+$'daki ve sonuç tekilliğindeki arasında, sonuncusu kaybolmak üzere, bölünür.

[11] *Bkz.* Kay, 2000; Kay ve Wald, 1991; Haag, 1992.

§27.12). Bu fark, kara delik tarafından Hawking'in, kendisine ait *Hawking ışınımı* olarak adlandırılan şeyle sonuçlanan "ısıl durum"unun üretimine yol açar. Bu etkinin, varlığını $\mathcal{I}^-$'de tanımlanan bilginin bir kısmının tekillikte *kaybolması* ve $\mathcal{I}^+$'ya dek ortaya çıkmaması gerçeğine borçlu olması dikkate değerdir (*bkz.* Şekil 30.4). Bu gerçeğin önemini §30.8'de göreceğiz.

30.5 Karmaşık periyodiklik yoluyla kara delik sıcaklığı

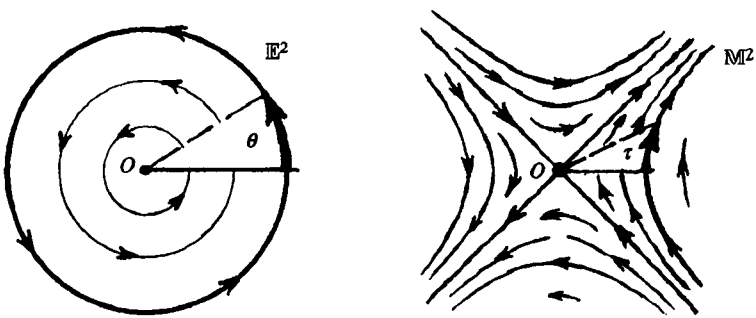
Bu noktada Hawking sıcaklığının, 1976'da Gibbons ve Perry tarafından gerçekleştirilmiş olan daha sonraki zekice bir türetimini ele almak, bu bölümdeki gerekçelendirmenin ana hatlarından hafifçe ayrılma anlamına gelmesine rağmen, öğretici olur. (Bu gerekçelendirmeyi §30.8'de sürdüreceğim.) Gibbons–Perry argümanı gerçek fiziki olguların türetimindeki zarif matematiksel fikirlerin rolüyle ilgili bazı ilginç konuları ortaya koyar. Fark ettikleri şey, kara deliği oturmuş sonuç durumunda gösteren Einstein denkleminin çözümü (diğer bir deyişle Schwarzschild ya da Kerr çözümü, *bkz.* §27.10) "karmaşıklaştırılmış"sa (diğer bir deyişle gerçel değerli koordinatlardan karmaşık değerlilere genişletilmişse, *bkz.* §18.1), bu durumda, bu karmaşıklaştırılmış uzayda tanımlı niceliklerle ilgili temel bir düzenlilik koşulunun, bu niceliklerin karmaşıklaştırılmış zamanda zorunlu olarak tümüyle sanal $2\pi T_{BH}$ periyodunda bir periyodiklik edinmesi (*bkz.* §9.1, Şekil 9.1a) anlamına geldiğidir. İstatistiksel termodinamiğe ilişkin değerlendirmeler bize, böylesi karmaşık bir periyodikliğin aslında tam olarak §30.4'te verilmiş T_{BH} sıcaklığına karşılık geldiğini söyler. Bu, bir kara delikle ilgili Hawking sıcaklığına götüren çarpıcı biçimde dolaysız bir yol sağlar.

Peki fiziki bir türetim olarak bu tür bir işlemden ne anlamalıyız? Bu kesinlikle dikkat çekici biçimde zarif bir argümandır ve Hawking kara delik sıcaklığını, Hawking'in kendi orijinal tartışmasının halihazırda uygulanamadığı farklı pek çok durumda elde etmek üzere dolaysız biçimde kullanılabilir. Öte taraftan bu argümanı Hawking sıcaklığına gerçek bir fiziki gerekçelendirme sağlar biçimde kabul etmekte sıkıntı yaşıyorum. Aslında o, bu yeni argüman içine giren bazı "fiziki" varsayımların kuşkulu bir geçerliliğe sahip biçimde değerlendirilebilmesi gerçeğine karşın, doğru yanıtı veren ("doğruluğu" fiziki olarak daha kabul edilebilir kriterlerden, burada Hawking'in üstte değinilmiş olan orijinal argümanı, elde edilen yanıtla uyumluluğu sonucu gerekçelendirilmek üzere) güzel bir matematiksel ifadeye ait iyi bir örnektir.

Bu "karmaşıklaştırma"nın matematiksel bileşenlerine biraz daha yakından bakalım. Kapsam dahilinde olan şeyi anlamanın iyi bir yolu ilk

olarak 2–boyutlu olağan Öklitçi $\mathbb{E}^2$ düzlemini ve onun $\mathbb{CE}^2$'ye ($= \mathbb{C}^2$) yapılan standart karmaşıklaştırmasını düşünmektir. Bu $\mathbb{E}^2$ gerçel uzayı bazen $\mathbb{CE}^2$'nin *gerçel kesiti* olarak adlandırılır (Şekil 30.5a, b; ayrıca *bkz.* Şekil 18.2b). Bu Öklitçi bir gerçel kesittir çünkü olağan bir Öklitçi metriğe sahiptir. Bununla birlikte $\mathbb{CE}^2$ ayrıca *Lorentzci* gerçel kesitlere de sahiptir (*bkz.* Şekil 18.2, §18.2) ve bunlardan birini, $\mathbb{M}^2$, $\mathbb{E}^2$'yle ilgili (gerçel sayı parametreleri olan) standart bir Kartezyen (x, y) koordinat çiftinin y koordinatını alıp bunun gerçel değerler yerine tümüyle sanal değerler almasını talep ederek oluşturabiliriz. Böylece $t = \mathrm{i}y$, $\mathbb{M}^2$ için bir zaman koordinatı işlevini görür.(Bu §18.1'de yapmış olduğumuz şeyin yalnızca 2–boyutlu durumla ilgili bir yinelenmesidir.) Şimdi $\mathbb{E}^2$'yle ilgili olarak, Kartezyen (x, y) koordinatları yerine *kutupsal* (r, θ) koordinatlarını ele alalım; *bkz.* §5.1 ve Şekil 30.5a. Negatif olmayan r gerçel sayısı orijine olan uzaklığı ölçer ve yarıçap vektörüyle x–ekseni arasındaki gerçel sayılı θ açısı saat yönünün tersi yönde ölçülür. Bu koordinatlar Lorentzci $\mathbb{M}^2$ kesitimize nasıl genişler? İlgimizi, Şekil 30.5b'de gösterildiği üzere, sağ taraftaki $\mathbb{M}^R$ çeyrek çemberiyle sınırlandırmak koşuluyla r niceliği hâlâ gerçeldir ve negatif değildir fakat θ artık tümüyle sanaldır ve böylece

$$\tau = \mathrm{i}\theta$$



Şekil 30.5 $\mathbb{CM}^2 = \mathbb{CE}^2$'ye karmaşıklaştırılmış, $\mathbb{M}^2$ Minkowski 2–uzayıyla gösterilen sanal zamandaki periyodiklik. (a) Öklitçi $\mathbb{E}^2$ düzlemi $\mathbb{CM}^2$ karmaşık uzayının gerçel bir kesitidir. $\partial/\partial\theta$ Killing vektörü, kutupsal (r, θ) koordinatlarını aldığımız $\mathbb{E}^2$'de döndürmeler üretir. $\mathbb{E}^2$ üzerindeki tek değerli herhangi bir fonksiyon 2π periyoduna sahip biçimde θ'da periyodik olmak zorundadır. (b) $\mathbb{CM}^2$'ye ilişkin $\mathbb{M}^2$ Lorentzci gerçel kesitinde "Rindler" (düzenli ivmelenen) zaman koordinatı $\tau = \mathrm{i}\theta$'dır (bir kara delik için doğal olan Schwarzschild zamanının bir benzeri) ve O orijininde analitik olan bir fonksiyon $2\pi\mathrm{i}$ periyoduna sahip olarak τ'da sanal bir periyoda sahip olmak zorundadır. ($\kappa = \partial/\partial\tau = -\mathrm{i}\partial/\partial\theta$ Killing vektörü.)

gerçeldir. r koordinatı artık orijine olan Lorentzci uzamsal uzaklığı ölçer ve τ "yatayla olan hiperbolik açı"dır.[30.4]

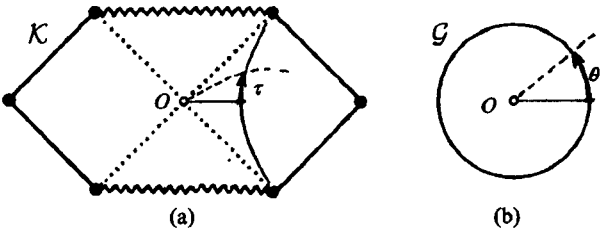
τ koordinatını (bir r_0 sabitiyle çarpılmış olan), merkezden dışa doğru "düzgün biçimde ivmelen"en ve dünya çizgisi $r = r_0$'la verilen (bu 2–boyutlu düz uzayzaman geometrisindeki) bir gözlemci için, olağan uzayzaman anlamındaki "zaman"ı ölçer biçimde yorumlayacağız. ("Rindler koordinatları".)[12] Uzayzamanın kendisi, gözlemcinin "zaman"ının yalnızca $\mathbb{M}^R$'ye uygulanması gerçeğine karşın, tüm $\mathbb{M}^2$ olarak kabul edilir. Bu tür nicelikler uzayzamanın karmaşıklaştırılmasına yönelik holomorfik bir genişlemeye sahip olacaktır (*bkz.* §7.4 ve §12.9) fakat bu yalnızca, bu durumda Lorentzci kesit anlamına gelen "gerçel kesit"in yakın bir komşuluğu için garanti edilebilir. Bununla birlikte bu tür bir nicelik gerçekte, bu kesite ait O orijininde analitikse Öklitçi kesitin orijininde de (her iki durumda da bu tam olarak aynı O noktası olduğundan) analitik olmak zorundadır. Öte taraftan Öklitçi orijinde düzenli olan bir nicelik, θ'yı (küçük bir $r = \varepsilon$ değerinde) 2π kadar artırırsak kesin olarak başladığımız aynı noktaya varmak üzere basit biçimde orijin etrafında bir kez dolanacağımızdan, 2π periyoduna sahip olarak θ'da periyodik olmak zorundadır. Bu nedenle orijinal Lorentzci uzayzaman koordinatlarıyla ilgili τ niceliği, τ'da (karmaşıklaştırılmış) 2πi'lik bir *sanal periyoda* sahip olur.

Bu, kendisini şimdi basitleştirilmiş 2–boyutlu $\mathbb{M}^2$ uzayımız yerine bütünlüklü bir 4–uzaylı kara delik geometrisine uyguladığımız Gibbons–Perry argümanının temelidir. İlgili geometri artık (spin yapmayan küresel olarak simetrik durumla ilgili) Scwarzschild'inkidir (dönen bir delikle ilgili olarak Kerr geometrisini de kullanabiliriz). Argümanın işlemesi için $\mathbb{M}^2$'deki O orijininin bir benzerine gerek duyarız. Bunu, "azami biçimde genişletilmiş" $\mathcal{K}$ Schwarzschild uzayzamanı olarak adlandırılan şeyle ilgili katı bir konformal diyagram sunduğum Şekil 30.6a'da görürüz.[13] $\mathcal{K}$ uzayzamanı bazen "ölümsüz kara delik" olarak da adlandırılır çünkü o kütleçekimle ilgili çökmeden yaratılmadı fakat "hep orada"ydı. Diyagramın merkezindeki O noktası katı konformal diyagramlara ilişkin uzlaşılar uyarınca bir *2–küre*yi temsil eder. $\mathcal{K}$, $\mathbb{M}^2$'nin benzeridir fakat Öklitçi $\mathbb{E}^2$ uzayı için de bir benzere gerek duyarız. Zaman zaman "Öklitçileşmiş" $\mathcal{G}$ Schwarzschild uzayı olarak adlandırılan (beni şaşırtıcı biçimde fena halde etkileyecek şekilde sıklıkla "Öklitçi uzay" da denir!), θ niceliği $\mathcal{G}$'de, $\boxtimes$ çevre-

[30.4] Bu (r, τ) koordinatlarını Lorentzci Kartezyen (x, t) koordinatları biçiminde yazın; θ'nın gerçel kısmının $\mathbb{M}^2$ üzerinde esasen niçin yok olduğuna bakın.

[12] *Bkz.* Wald, 1984.

[13] *Bkz.* Wald, 1984; Kruskal, 1960; Szekeres, 1960.



Şekil 30.6 Sanal zaman periyodikliği üzerinden Hawking sıcaklığı (Gibbons–Perry argümanı). (a) "Ölümsüz bir kara delik"le ilgili, τ Schwarzschild zamanı ve $\kappa = \partial/\partial\tau$ Killing vektörüyle birlikte "azami biçimde genişletilmiş" $\mathcal{K}$ Schwarzschild uzayzamanı olan katı bir konformal diyagram. Merkez O noktası bir 2–küreyi temsil eder. (b) O yakınındaki "Öklitçileşmiş" $\mathcal{G}$ Schwarzschild uzayı gerçel bir θ açısal koordinatına sahiptir, böylece τ "zamanı", β gerçel sabit sayısı deliğin "yüzey kütleçekimi" olmak üzere, tümüyle sanal $\tau = i\beta\theta$ değerlerini alır. Burada O çevresinde bir kez dolandığımızda θ, 2π kadar artar, böylece $\mathcal{K}$ üzerinde O'da analitik olan (bu yolla $\mathcal{G}$'ye genişleyen) herhangi bir fonksiyon θ'da 2π periyoduna, diğer bir deyişle β kara deliğin Hawking sıcaklığı olarak yorumlanmak üzere (O yakınındaki) τ'da $2\pi i\beta$ periyoduna, sahiptir.

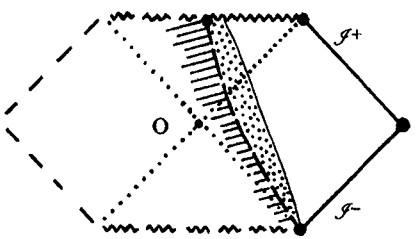
sinde pozitif bir yönde dolanılan her defasında 2π kadar artırılan açısal bir koordinat (Şekil 30.6b) ve β "yüzey kütleçekimi" denilen (sabit r'de sabit) gerçel bir sayı olmak üzere, $\mathcal{K}$'deki Schwarzschild τ "zamam"nın[14] $\mathcal{G}$'de tümüyle sanal $\tau = i\beta\theta$ değerleri aldığı, böylesi bir uzay mevcut*tur*. $\mathcal{K}$'deki O'da düzenli (diğer bir deyişle analitik; *bkz.* § 7.4) olan herhangi bir nicelik ayrıca $\mathcal{G}$'deki O'da da (bu, karmaşıklaştırılmış Schwarzschild uzayında gerçel iki $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{G}$ kesitlerinin her biri için tam olarak aynı "O" konumu olduğundan) düzenli olmak zorundadır. Bu tür bir nicelik $\mathcal{G}$'deki O'da düzenli olmakla, τ'da $2\pi i\beta$ periyotlu olarak periyodik olmak zorundadır çünkü θ, 2π (= 360°) kadar artırıldığında bizi basit biçimde uzay(zaman)da başladığımız aynı konuma getiren sıradan bir açısal koordinattır. Bu *sanal periyodiklik* istatistiksel termodinamiğin ilkeleri uyarınca "β sıcaklığına ilişkin ısıl durum"un bir karakteristiğidir.

Buradaki amacım bu termodinamik ilkeleri tartışmak değil. Bu bizi yolumuzdan epeyce saptırırdı. Burada ilgilenilen tek nokta karmaşık periyodiklikle ilgili bu argümana güvenip güvenemeyeceğimizdir. Bu, O bölgesini ciddi biçimde ele almaya bağlıdır. Peki doğrulanmış mıdır? Hiçbir biçimde açık değil. Gerçek bir fiziki kara delikle ilgili olarak bu "ölümsüz" tablonun tümü kesinlikle uygunsuzdur. Fiziki bir delik, Büyük Patlamanın kendisiyle ilgili bir anlamda "başlangıçta var olan" bir yaratım olmadıkça kütleçekimle ilgili bir çökme (diyelim ki galaktik bir merkezdeki süper

[14] Burada ele alman Schwarzschild durumunda *gerçek* zaman biçiminde yorumlanan "τ"yken, bunun Şekil 30.5a, b'nin düz (Rindler) durumunda ivmelenen gözlemcinin zamanını ölçen $r_0\tau$ olması arasında hafifçe kafa karıştıran bir uyuşmazlık söz konusudur.

kütleli bir yıldız ya da malzeme kümesi) yoluyla yaratılmış olmak zorundadır. Başlangıçta var olan bir delik, kendisine ilişkin zamanda ters çevrilmiş biçimli bir *beyaz delik* yerine kara delik, bile yine de bir anlamda bir "çökme"yi temsil eder ve kara ya da beyaz, Şekil 30.6a'daki bütünlüklü model tarafından iyi bir biçimde tanımlanmaz. Bununla birlikte bu modelin belirli bir *dış* kısmı, diğer bir deyişle Şekil 30.6a'nın üst kısmında ve çökmeye boyun eğen gerçek malzemeye ilişkin belirtilmiş olan sınır çizgisinin sağ tarafında kalan kısmı, bir kara deliğin çökmesiyle ilgili açıklama için uygundur. Altta ve bu sınırın sol tarafında uzayzaman metriği maddenin metriği olur ve ölümsüz kara deliğinkinden farklıdır. Toplam çökme, Şekil 27.16c'nin belli belirsiz bir yeniden çizimine karşılık gelen Şekil 30.7'de çizilmiştir. Şu halde *O*'nun her zaman, (genişletilmiş) Schwarzschild metriğinin geçerli olduğu bölge dışında kaldığını belirtelim. Uzayzamanda tanımlı fiziki niceliklerin *O*'da bir düzenliliğe sahip olduklarını varsaymak için hiçbir fiziki gerekçelendirme olmadığı görülür ve argümanın, matematiksel zarafetine karşın, niçin Hawking sıcaklığıyla ilgili bir gerekçelendirme sunduğunu anlamak güçtür. (Kara delikle ilgili fiziki olarak herhangi bir gerçekçi model bütünlüklü Schwarzschild, ya da Kerr, metriğinden sapmalara sahip olur ve bu sapmaların git gide daha büyük hale gelerek sonuçta "*O*"ya doğru daha da yakın biçimde genişlediğimiz ölçüde sonsuza ıraksaması, makul bir biçimde beklenebilir.)[30.5]

Yine de tam durağan kara delik modeli gerçekçi bir çökmeye ilişkin, zaman ilerledikçe tüm düzensizliklerin sorunlarını giderdikleri kabul edilen nihai sınırı temsil eder. Bu düzenliliğe ve böylece gerekli karmaşık periyodikliğe ve bu nedenle de gerekli sıcaklığa sahip olan şey sınırlayıcı



Şekil 30.7 Şekil 30.6a'nın azami $\mathcal{K}$ Schwarzschild uzayzamanı biçiminde gösterilmiş olan kütleçekimle ilgili küresel bir çökmeye ilişkin geçmiş; Şekil 27.16c'nin belli belirsiz bir yeniden çizimi. Eğik çizgilerle taranmış bölge silinmelidir ve noktalarla gölgelenmiş metrik madde varlığı nedeniyle $\mathcal{K}$'ninkinden farklılık gösterir. O'nun her zaman $\mathcal{K}$ metriğinin geçerli olduğu bölgenin dışında bulunduğuna dikkat edin.

[30.5] Bu iddiayı gerekçelendirebilen bir argüman sunabilir misiniz bakın. *İpucu*: Küçük doğrusal tedirgemeleri düşünün. Zamanda şu ya da bu yönde bir üstel davranış bekler misiniz?

uzayzamandır. Bu argümanı (genellikle öyle kabul edilmesine karşın) nasıl Hawking sıcaklığına ilişkin herhangi gerçek bir fiziki *türetim* olarak değerlendirebileceğimizi anlamasam da o, tüm bu "kara delik sıcaklığı" fikriyle ilgili gizli bir iç tutarlılığa ilişkin bir tür "güçlü belirti" sağlar.

Bu kavşakta, daha önce herhangi bir şeye ilişkin bir "türetim" biçiminde sunulmamış olmasına rağmen üstte verilen argümanla farklı bir bağlamda önemli bir benzerliğe sahip olan, orijinal olarak Brandon Carter'a ait diğer bir gözlemle kıyaslama yapmaya karşı koyamıyorum. Yüksüz bir durağan kara deliğin, m deliğin kütlesi ve am ona ait açısal momentum olmak üzere (ve uyumlu olması açısından §27.10'daki Planck birimleri gibi $c = G = 1$ olan birimleri seçiyorum), m ve a Kerr parametreleriyle tanımlandığını anımsayalım. Kerr metriğine ilişkin Ezra T. Newman[15] tarafından bulunan bir genelleme (genellikle *Kerr–Newman metriği* biçiminde anılır) elektriksel olarak *yüklü*, dönen bir durağan kara deliği temsil eder. Şu halde üç parametreye sahibiz: m, a ve e. Kütle ve açısal momentum önceden oldukları gibiler fakat artık toplam bir e elektrik yükü söz konusudur. Ayrıca yönü açısal momentum yönüyle uyumlu olan manyetik bir moment de, $M = ae$, mevcuttur. Carter, *dönermıknatıslık oranının* (kütlenin iki katının manyetik momentle çarpımının yükle açısal momentum çarpımına bölümü; yüklü bir kara delik için $2m \times ae/e \times am = 2$) aslında, bir kara delik için tümüyle sabitlenmiş (diğer bir deyişle m, a ve e'den bağımsız) olmak üzere, kesin biçimde Dirac'ın başlangıçta elektron için tahmin ettiği değeri (Dirac elektronu için açısal momentum $\frac{1}{2}\hbar$ ve manyetik moment $\frac{1}{2}\hbar e/mc$ olup $c = 1$ kabul edildiğinde yine 2 olan bir dönermıknatıslık oranı vermek üzere), diğer bir deyişle 2 değerini alır. *Bkz.* §24.7. Newman (2001) bu "rastlantı"ya ilişkin, uzaydaki karmaşık bir yöndeki bir yer değiştirme biçiminde bir yorumunu sundu.

Bu argümanı, Dirac'ın orijinal argümanından bağımsız olarak elektronun dönermıknatıslık oranına ilişkin bir *türetim* sağlar biçimde değerlendirebilir miyiz? "Türetim" terimine ilişkin herhangi olağan bir anlamda kesinlikle sağla*maz*. Bu yalnızca, bir elektron bir biçimde bir "kara delik" olarak değerlendirilebilirse geçerli olabilir. Gerçekte, elektronla ilgili bir durumda, a, m ve e parametrelerinin asıl değerleri, ilgili Kerr–Newman metriğinin bir kara deliği temsil edebilmesi için gerekli olan

$$m^2 \geq a^2 + e^2$$

eşitsizliğini fena halde bozar. Dolayısıyla bu argüman, Dirac elektronuna ilişkin dönermıknatıslık oranıyla ilgili gerçek bir türetimden oldukça

[15] *Bkz.* Newman vd, 1965.

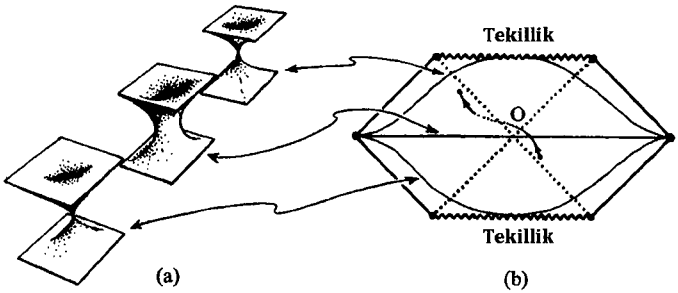
uzaktır. Yine de, bu değerle ilgili belirli bir "doğallığı", karmaşığa yönelik genişlemeler yoluyla ortaya çıkarmakta, kara delik sıcaklığına ilişkin Gibbons–Perry argümanına bir biçimde benzer.[16] Gibbons–Perry argümanı kendi yararına, yalnızca Schwarzschild/Kerr uzayzaman metrikleri ailesinin değerlendirmeleriyle sınırlı olmamak gibi ek bir noktaya daha sahiptir. Yine de bana göre bu, onun gerçek bir türetim biçimindeki genel kabulünü pek de gerekçelendirmez.

30.6 Killing vektörleri, enerji akışı ve zaman yolculuğu!

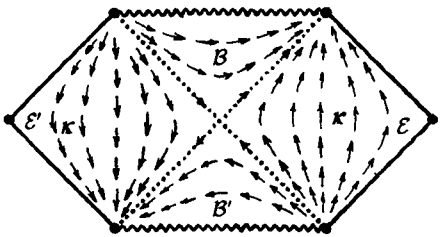
"Ölümsüz kara delik", kendisinin kabul edilebilir fiziki bir evren modeli biçiminde ciddiye alınmasını güçleştiren bazı ilginç evrensel özelliklere sahip olması gerçeğine karşın, insanların ilgisini sıklıkla başka nedenlerden dolayı çekmiştir. Bu nedenlerden bazıları gerçeklik yerine bilim kurgu dünyasıyla daha çok ilintili görünse de kara deliğin bizim için geometrik bir değeri bulunur çünkü o, §§30.7, 10'da önemli olacak ilginç matematiksel özellikler gösterir. Onun iki adet geçmiş boş sonsuzla ($\mathcal{I}^-$ ve $\mathcal{I}^-$) iki adet de gelecek boş sonsuza ($\mathcal{I}^+$ ve $\mathcal{I}^+$) sahip olduğunu görürüz. Bu uzayzaman sıkça, sonrasında bir tekilliğe "daralan" bir "solucan deliği" yoluyla bağlı hale gelen farklı iki evrenle ilgili bir zaman evrimini gösterir biçimde düşünülür; *bkz.* Şekil 30.8.

İki "dış" bölgenin her biriyle ilgili olarak her evrenin bir kara delik barındırdığı görülür fakat kara delik, ayrıca aynı zamanda bir "beyaz delik" de olması anlamında tuhaftır. Her bir dış $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ evreninden, gelecek $\mathcal{B}^+$ iç bölgesine yayılabilmenin yanı sıra ("kara delik" davranışı) sinyaller, *geçmiş* $\mathcal{B}^-$ iç bölgesinden yine her bir dış $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ evrenine kaçabilir ("beyaz delik" davranışı). Uzayzamanın durağan olması gerçeği bir $\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektörünün varlığında ifadesini bulur (*bkz.* §14.7, §19.5 ve §30.4). Bu Killing vektörünü Şekil 30.9'da çizdim. Killing vektörünün iki dış $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ bölgesinde zamansal fakat $\mathcal{B}^-$ ve $\mathcal{B}^+$ bölgelerinde uzaysal olduğunu görürüz. $\boldsymbol{\kappa}$'nın dış bölgelerdeki zamansal doğası $\boldsymbol{\kappa}$'nın kara/beyaz deliğe ilişkin durağanlığı ifade etmesi anlamına gelir. Dünya çizgileri $\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektör alanına tanjant olan bir gözlemci ailesi değişmeyen bir evren algılayacaktır. Aynısı $\mathcal{E}''$nde de geçerlidir. Bununla birlikte $\mathcal{E}''$nde bu özelliğe sahip gözlemci

[16] Bu dönermıknatıslık oranı, elektronun, kendisine yönelik mükemmel bir yaklaşıklık tahmini olduğu bir "saf Dirac parçacığı"yla ilgilidir. Bununla birlikte gerçek bir elektron kuantum alan kuramından gelen *ışınımla ilgili düzeltmelere* bağlıdır, §24.7'nin sonuna bakın. Proton ya da nötron bir Dirac parçacığı olmaktan daha da uzaktır fakat bu kavram onlara ilişkin oluşturucu kuarklarda daha yakından geçerlidir.



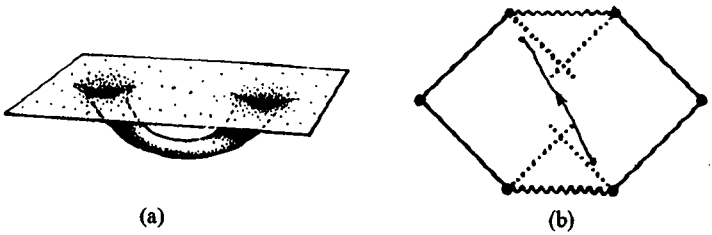
Şekil 30.8 $\mathcal{K}$ uzayzamanı evrensel olarak, asimptotik olarak iki düz bölgeyi birleştiren bir "solucan deliği"ni temsil eden, "zamanda evrimleşen" bir 3–uzay biçiminde görülür. Solucan deliği hem geleceğe hem de geçmişe tek bir yönde daralır. Bir bölgeden diğerine solucan deliği içinden yolculuk etmeyi öneren herhangi bir uzay yolcusu, konformal diyagramdan da açık olmak üzere, delik "daralıp" kapanmadan önce diğer tarafa geçemez çünkü bu, yolcunun dünya çizgisinin (noktalı gösterilmiş olan) uzaysal (ışık ötesi hızda) bir parçaya sahip olmasını talep eder.



Şekil 30.9 $\boldsymbol{\kappa}$ *Killing vektörü iki dış* $\mathcal{E}$ *ve* $\mathcal{E}'$ *bölgesinde zamansaldır fakat* $\mathcal{B}$ *ve* $\mathcal{B}'$ *iç bölgelerinde uzaysaldır.* $\mathcal{E}'$*deki ve* $\mathcal{E}''$*ndeki* $\boldsymbol{\kappa}$*'ları kıyaslayarak onun zaman yönelimini,* $T_{ab}\kappa^b$ *korunan enerji yoğunluğu kavramının kendi işaretini ters çevireceği şekilde ters çevirdiğini görürüz.*

ailesi bu değerlendirmeleri $\boldsymbol{\kappa}$ yerine $-\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektörüne uygulamak zorundadır çünkü gelecek/geçmiş ayrımlarının tutarlılığını yerel gözlemciler için uzayzaman boyunca korumamız gerekir. "Zaman yönü", $\mathcal{E}'$den $\mathcal{E}''$ne geçerken bir anlamda ters çevrilmiştir. Enerji momentum tensörünün $\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektörüyle birlikte büzülmesinden elde edilen korunmuş enerji yoğunluk niceliği, $T_{ab}\kappa^b$, (§19.5) $\mathcal{E}'$de (normal bir madde için) pozitif bir enerji yoğunluğu fakat $\mathcal{E}''$nde normal maddeye ilişkin negatif bir enerji yoğunluğu sağlar (çünkü $\boldsymbol{\kappa}$ $\mathcal{E}''$nde geçmişi işaret eder ve $-\boldsymbol{\kappa}$ artık durağanlığı ifade eden olağan Killing vektörüdür). Bu tam olarak bir çelişki değildir fakat ele alınan uzayzamanın tuhaf doğasını gösterir.

Aslında fiziki bir gözlemci için $\mathcal{E}'$den $\mathcal{E}''$ne "geçmek" gerçekte, bu durum her yerde zamansal olmayan bir "dünya çizgisi" içereceğinden olası değildir (Şekil 30.8). Yine de kuramcıların, uzayzamanı görünüşte "önemsiz" bir biçimde değiştirmeye çalışmak yoluyla bu gerçeğin etrafından dolaşma girişimlerine sıkça rastlanır. Bununla ilgili gerekçeleri, evrenler arasında –ya da (tabloda Şekil 30.10'daki gibi hafif bir değişiklikle) uzay-



Şekil 30.10 Değişik bir solucan deliği uzayzamanına dayanan ışık ötesi hızda uzay yolculuğuna ilişkin bir bilim kurgu önerisi. (a) Şekil 30.8'in iki dış uzamsal bölgesinin uzak kısımlarını "saptamak" yoluyla aynı uzayın uzak bölgelerini bağlayan bir solucan deliği elde edilebilir fakat bir bölgeden diğerine solucan deliği içinden yolculuk zamansal bir eğriyle gerçekleştirilemez. (b) Bunun olanaklı olması için, burada gösterildiği gibi, $\mathcal{K}$'nin "gerilmiş" bir versiyonunun doğasında olan bir şeye gerek duyulur (fakat bu tür bir model negatif enerji yoğunlukları gerektirir).

zamanın bir bölgesinden uzak bir yerine– bir tür bilim kurgusal "solucan deliği" yolculuğunun gelecekteki bir teknoloji aracılığıyla gerçekleştirilebileceğini göstermeye ilişkin (bana göre yanlış yönlendirilmiş) bir niyetten kaynaklanır. Böylesi bir öneri başarıya ulaşabilseydi, bu, göreliliğin normal sınırlılıklarının aşıldığı bir tür uzay yolculuğuna sahip olma potansiyel olasılığına kapı aralardı. Gerçek "Uzay Yolu" geleneklerinde, uzay gemisine, solucan deliği yoluyla uzak bir bölgeye, uzay gemisinin solucan deliğine girdiği durumdakinden bile "daha erken" olabilecek bir yolculuk etme olanağı sağlayan "bükme-motoru"* işlemi zihinde canlandırılır.

Tuhaf görünse bile, genel görelilik konusunun birinci sınıf profesyonelleri dahi böylesi bir "zaman yolculuğu" olasılığıyla oyalanmışlardır.[17] Bunun ciddi sebeplerinden biri (herhalde en azından bazen), zaman yolculuğunun günümüz fiziğinin (ya da hayal edilebilir fiziğin) sınırları dahilinde gerçekten gerçekleşebilir olma olasılığı değil fakat fiziki olarak bunun gerçekleş*me*mesi gerektiği gerçeğinden bir şeyler öğrenebilecek olmamızdır.[30.6] Şekil 30.8'deki "uzamsal açıklama"da solucan deliği, uzay yolcusu yolculuğunu bitirmeden önce "sıfır boyuta daralır". Fikir, negatif enerji yoğunluklarına izin verilirse, "solucan deliği"nin yolcunun diğer tarafa geçmesine yetecek kadar uzun süre "açık kalması"nın, kuramın sınırları dahilinde, olanaklı olabilmesi olasılığının akılda tutulmasıdır. Bu tür

* warp-drive -yn.

[17] *Bkz.* Novikov, 2001; Thorne, 1995; Davies, 2003.

[30.6] Özel görelilik öğretileriyle uyumlu olarak, uzaysal biçimde ayrılmış p ve q olayları arasındaki yolculuk olanağının niçin p'den p'nin dolaysız geçmişindeki bir olaya, p'den geçen zamansal bir dünya çizgisi üzerinde yapılacak yolculuk olanağını gerektirdiğini açıklayın.

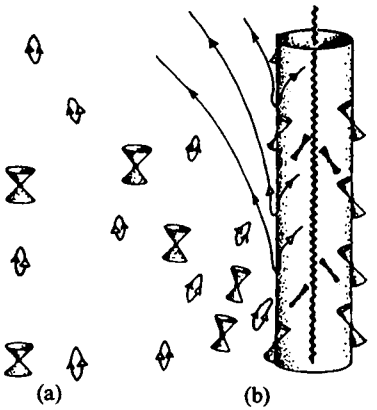
negatif enerji yoğunlukları klasik kuramda normalde yasaklı olarak değerlendirilir fakat uygun kuantum alan kuramındaki özel koşullar çerçevesinde izinli sayılabilir.

Bazı görelilik fizikçileri böylesi hayal ürünü değerlendirmelerin bizi, evrenin uzak bir kısmına bu tür QFT destekli bir solucan deliği yoluyla yolculuk etmenin gerçekleştirilebileceği bir "bükme-motoru" kavramına yönlendirebileceğini gerçekten umarlar mı? Sanırım, çok azı.[18] Bu değerlendirmelerin, birinin kuantum kütleçekim hakkındaki fikirleriyle ilgili bir "test" sağlayabilmesi daha ciddi bir konu gibi görünür. Bu QFT fikirleri gerçekten bu tür bir "açık kalma"ya olanak sağlarsa böylece bu, kuantum kütleçekimle ilgili o belirli fikirler için bir kötü işaret olarak değerlendirilebilir; bu durumda yeniden düşünmek gerekir. Bu yolla, ele alınan belirli kuantum kütleçekim kuramının akla yatkınlığıyla ilgili faydalı bir kılavuz elde edilebilir. (En azından bu tür önermeleri kendi okumam böyledir. Bununla ilgili oldukça "cömert" davranıyor olabilirim. Hayal ettiğimden daha fazla kuramcı bu tür bir "bükme-motoru"nun gerçekten ciddiye alınması gerektiğini düşünmekte!)

30.7 Negatif enerji yörüngelerinden enerji çıkışı

Bir kara deliğe ilişkin Hawking sıcaklığının anlatımlarını değerlendirmekle ilgili olan eldeki görevden bir hayli uzaklaştım. Kuantum mekaniği bağlamında, daha fiziki nedenler üzerinden, bir kara deliğin, sıfır olmayan bir sıcaklığa sahip oluşuyla uyumlu olarak niçin ışınım yayması gerektiğini görebiliyor muyuz? Aslında Hawking ayrıca, bu Hawking ışınımının varlığına ilişkin "sezgisel" bir türetim de sundu. Bu, Şekil 30.11'de gösteriliyor. Deliğin ufku çevresinde, sanal parçacık karşı–parçacık çiftleri vakumdan, yalnızca birbirlerini çok kısa bir zaman zarfında yok etmek üzere, sürekli biçimde üretilir. (Bu, §26.9'da ele alınıp şekiller 26.9 ve 26.10'da gösterilen işlemdir.) Bununla birlikte bir kara deliğin varlığı bu etkinliği değiştirir çünkü bir andan diğerine, çiftteki parçacıklardan biri delik içine düşerken diğeri kaçar. Bu yalnızca, kaçan parçacık *gerçek* bir parçacık haline geldiğinde (diğer bir deyişle kendisinden başladığı "kabuk–dışı" parçacığın karşıtı olarak "kabukta" olduğunda, *bkz.* §26.8 ve Şekil 26.6) ortaya çıkar. Böylelikle kaçan parçacık, delik içine düşen parçacığın (enerjinin korunumu nedeniyle) negatif enerjili gerçek bir parçacık haline gelmek zorunda olacağı şekilde pozitif enerjiye (bu enerjilerin değeri

[18] Davies, 2003, bu tür olasılıklara ilişkin eğlenceli ve rahat okunan bir tartışma sunar.



Şekil 30.11 Hawking'in Hawking ışınımını "sezgisel" türetimi. (a) Delikten uzakta sanal parçacık karşı–parçacık çiftleri sürekli biçimde vakumdan üretilir fakat sonra çok kısa bir zaman zarfında yok edilir (bkz. Şekil 26.9a). (b) Delik ufkunun çok yakınında, çiftlerden birini kafamızda deliğe düşerken ve diğerini de dış sonsuza kaçarken canlandırabiliriz. Bunun için sanal parçacıkların ikisi de gerçek hale gelir ve enerji korunumu içeriye giden parçacıkların negatif enerjiye sahip olmasını talep eder. Bunu yapabilir çünkü $\boldsymbol{\kappa}$ *Killing vektörü ufuk içinde uzaysal hale gelir. (*$\boldsymbol{\kappa}^a$ *uzaysalsa,* $\mathbf{p}_a$ *parçacığın 4–momentumu olmak üzere korunan* $\mathbf{p}_a\boldsymbol{\kappa}^a$ *enerjisi negatif olabilir.*

sonsuzdan belirlenmiş olmak üzere) sahip olmak zorundadır. Aslında negatif enerjiler kara delik içindeki gerçek parçacıklarla ilgili olarak ortaya çıkabilir. Bu olasılık κ^a Killing vektörünün $\mathcal{B}^+$ iç bölgesinde uzaysal hale gelebilmesi ve geleceği işaret eden zamansal bir p_a 4–momentumunun negatif bir $p_a\kappa^a$ skaler çarpımına, bu parçacığın (korunan) enerjisi olmak üzere, sahip olabilmesi nedeniyle ortaya çıkar; *bkz* .Şekil 30.11b.[30.7] Hawking işlemi, (sanalın aksine) gerçek bir parçacığın, parçacık deliğin olay ufku içindeyse negatif enerjiye sahip olabilmesi nedeniyle meydana gelir. Böylesi bir parçacığın gerçek eşi pozitif enerjiye sahip olmak zorundadır, böylece enerji delikten dışarı taşınabilir.

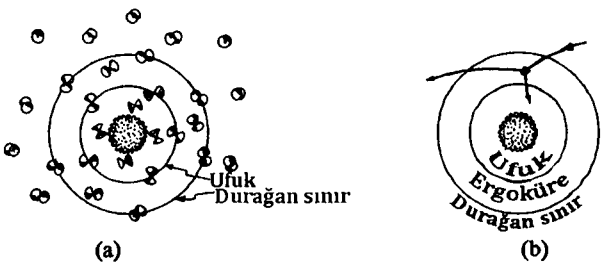
Bu noktada, *klasik* kara delik kuramında delik *dönerken* oldukça benzer bir şeyin meydana geldiğini belirtmeye değer. Kendisine ilişkin enerji yayınımının, makul boyutlardaki bir kara delik için, saçma biçimde küçük olduğu ve ilgisi tümüyle kuramsal olan Hawking ışınımı durumuna karşıt olarak klasik bir dönen delikte meydana çıkan şeyin devasa astrofiziksel anlamlar içerdiği görülür. Aslında evrende bilinen en güçlü enerji kaynaklarının (kuasarlar ve radyo galaksileri) yakıtlarını engin kara deliklerin dönme enerjisinden aldığı görülür.

İşlem, Hawking ışınımına yol açan işlemle, negatif enerjili parçacık ya da alanlardan gelen enerjinin delik tarafından, delikten sonsuza kaçan pozitif enerji sonucunu vereceği şekilde yutulması anlamında bir benzerliğe sahiptir. Bununla birlikte dönen bir kara delikle ilgili olarak önemli farklılık şudur ki, $\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektörünün içerisinde uzaysal hale geldiği uzayzaman parçası, kara deliğin ufkunun *dışı*ndaki bir bölgeye genişler. Bu bölge *ergoküre* biçiminde anılır (Şekil 30.12a). Böylece, ergoküre içerisindeki

[30.7] Uzaysal bir κ^a'nın nasıl bir $p_a\kappa^a$ negatif "enerji" değeri verebildiğini açıklayın.

parçacıklar, evrenin uzak parçalarıyla iletişim kurabilirken hâlâ negatif enerjiye (sonsuzdan ölçüldüğü haliyle) sahip olabilirler. Bir parçacığın örneğin, ergoküreye dışarıdan girip ikiye bölünmesi, sonuçtaki parçacıklardan biri, diğerinin başlangıçta getirilmiş olan parçacıktan daha fazla enerji taşıyarak dışarı kaçacağı şekilde negatif enerjiye sahip olmak üzere, olasıdır.[19] Net sonuç, deliğin dönme hareketinde depolanmış enerjide hafif bir düşüşe yol açarak delik dışına enerji taşınmasıdır (Şekil 30.12b). Parçacıklar yerine (elektromanyetik) alanlar dahil edildiğinde de benzer bir sonuç elde edilebilir.[20]

Yerel biçimde bakıldığında deliğe düşen "negatif enerjili parçacığın" (§18.7'de açıklandığı türde olağan bir zamansal 4–momentuma sahip) mükemmel şekilde olağan bir parçacık olduğu vurgulanmalıdır. Durum, korunan enerjiyi ölçen $p_a\kappa^a$ niceliğinin, sonsuzdan bakıldığında, parçacık ergoküre içinde bulunduğunda mükemmel biçimde meydana gelebilecek şekilde, negatif hale gelmesidir. Bu, kara deliklere ilişkin dikkat çekici ve oldukça önemli bir gerçektir fakat bununla ilgili matematiksel olarak tutarsız ya da fiziki olarak mantık dışı hiçbir şey söz konusu değildir. Öte yandan bir kara deliğin devasa dönme enerjisinin sıklıkla dış dünyaya savrulmasına izin veren şey işte bu gerçektir.



Şekil 30.12 Dönen bir (Kerr) kara deliğin zaman ekseninden "aşağı" doğru olan görünümler. (a) Bir Kerr kara deliğiyle ilgili olarak, κ Killing vektörüne ilişkin durağanlığın içerisinde, kara deliğin ufku *dışında* uzaysal hale geldiği, "ergoküre" denen, bir bölge söz konusudur. Ergoküre içinde parçacıklar korunan negatif enerjiye (sonsuzdan ölçüldüğü haliyle) sahiptir ve onların karşılaştıkları diğer parçacıklar fazla enerjiyi taşıyarak sonsuza kaçabilir. (b) "Penrose işlemi" denen şey uyarınca bu gerçek kullanılabilir ve kara deliğin dönme enerjisi çıkartılır. Bu işlemlerin en basitinde, bir parçacık ergoküreye girer, biri negatif enerji taşıyarak deliğe giren ve diğeri orijinal parçacığın getirdiği enerjiden fazlasını taşıyarak sonsuza kaçan iki parçacığa ayrılır.

[19] *Bkz.* Penrose, 1969; Floyd ve Penrose, 1971.

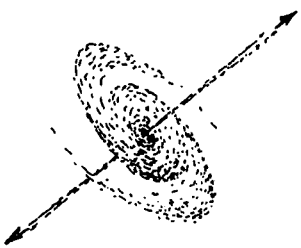
[20] *Bkz.* Blanford ve Znajek, 1977; Begelman vd, 1984. Ayrıca *bkz.* Williams, 1995, 2002, 2004.

Aslında, bir *kuasar*la ilgili (*bkz.* §27.9) muazzam enerji çıktısına ilişkin en akla yatkın açıklama, bu enerjinin devasa bir kara deliğin dönmesinden kaynaklanmasıdır. Deliğin engin dönme enerjisi esasen üstte değinilen işlem tarafından derece derece çıkarılıp dış uzaya savrulur; *bkz.* Şekil 30.12c. Delik tarafından yutulan enerjinin genelde, gerçek parçacıklar yerine öncelikle elektromanyetik alan biçiminde olduğu ileri sürülmüştür (*örn.* Blanford ve Znajek, 1977; Begelman vd., 1984). Bununla birlikte her durumdaki temel neden aynıdır.

30.8 Hawking patlamaları

Şimdi kuantum mekaniksel Hawking işlemine dönelim. 1 $M_\odot$ güneşsel kütleli bir kara deliğin sıcaklığı üstte §30.4'te belirtildiği üzere son derece düşüktür (yaklaşık 10^{-7}K). Daha büyük delikler için bu sıcaklık, delik kütlesiyle ters orantılı biçimde (verili bir $a : m$ oranı için; *bkz.* §27.10) daha da küçük olur. Kütlesi 1 $M_\odot$'den küçük herhangi bir kara delik olduğuna ilişkin hiçbir astrofiziki kanıt yoktur, bu durumda kara delik sıcaklılıklarının dolaysız astrofiziki anlama sahip olduğu düşünülmez.

Yine de Hawking'in 1974'te çarpıcı biçimde belirttiği gibi bu sıcaklıkta dikkate değer bir *kuramsal* anlam bulunur.[21] Örneğin evren sürekli genişler türdeyse (blz. §27.11 ve §28.10) bu durumda ortam sıcaklığının, verili herhangi bir kara delik sıcaklığı değerinden düşük olacağı bir nokta ortaya çıkacaktır. ($K = 0 = \Lambda$ olan bir evrendeki 1 $M_\odot$ kütleli bir kara delik için bu yaklaşık 10^{16} yıl alır ki bu, evrenin şimdiki yaşının yaklaşık 10^6 katıdır.) Daha sonra kara delik ardalandan soğurduğu enerjiden fazlasını ışınım yoluyla kaybetmeye başlar. Enerji kaybettikçe kütle de kaybeder, böylece yarıçapı küçülür ve buradan hareketle daha sıcak hale gelir. 1 $M_\odot$



Şekil 30.13 Bir kuasarın devasa enerji çıktısının, galaksi merkezindeki muazzam bir kara deliğin dönme enerjisinden kaynaklandığı görülür. Bu, Şekil 30.12'de açıklanmış genel doğaya sahip bir işlem yoluyla fakat esasen olasılıkla kara deliğin parçacıklar yerine negatif enerjili elektromanyetik alanları yutması yoluyla gerçekleşir görünür.

[21] *Bkz.* Hawking, 1974, 1975, 1976a, 1976b; Kapusta, 2001.

kütleli bir kara delikle başladığımızı düşünelim. Yaklaşık 10^{64} yıl boyunca derece derece kütle kaybedecek biçimde oldukça düşük bir hızla ışımaya devam eder. Sıcaklık başlangıçta yavaşça, daha sonra sürekli ivmelenen bir biçimde 10^9 K ya da 10^{10} K'ya ulaşana dek artar (belirsizlik, devasa biçimde yüksek enerjierde parçacık fiziğine ilişkin bilgi eksikliğimizden kaynaklanır). Bu noktada bir kararsızlık sızıntısı söz konusu olur ve neredeyse ansızın, delik içinde kalan kütle enerjinin tümüyle ışınıma çevrildiği bir patlama meydana gelir! *Bkz.* Şekil 30.14.

En azından bu, başlangıçta Hawking tarafından ortaya konduğu haliyle en basit ve en doğal görünümlü varsayım olarak görünüyor. (Hawking başlangıçta bu doğadaki patlamaların, Büyük Patlama bizi önemli sayıda "minik delik"le, diyelim ki bir dağ kütlesine sahip bir proton yarıçapındaki deliklerle, donatacak kadar kibarsa bugün bile algılanabilir olabileceğini ileri sürmüştü. Bununla birlikte günümüz bakış açısından bu olanaksız görünür ve henüz böylesi patlamalar saptanmamıştır.) Diğer fizikçiler,[22] bu tür bir son patlama gerçekleşmiş olmasına rağmen deliğin tümüyle kaybolmayıp bir "kalıntı" ya da "külçe" bırakmış olduğunu ileri sürdüler. Bunu tercih etmelerinin sebebi, kara delik tarafından yutulup sistem için kayıp olan "bilgi"den rahatsız olmalarıdır, böylece onun bu arta kalan külçede "depolanmış" olmasını tercih ederler.[23] Sorun, başlangıçta *ısıl* (ve böylelikle "bilgi–siz") ışınım, delik kütlesinin neredeyse tümünü götürmeden önce belki de yıldız boyutlu ve hatta galaktik bir kara delik olmuş olabilecek deliğe çöken maddenin ayrıntılarıyla ilgili bilginin tümünün bu tür bir kalıntıda nasıl depolanabileceğini görmenin zorluğudur. Bir alternatif olarak bazı araştırmacılar, son patlamada tüm bilginin "son dakikada" yine dışarıya çıktığına ilişkin bakışı benimserler.

Bu üç alternatif şunlardır:

KAYIP: delik buharlaştığında bilgi *kaybol*ur

DEPO: bilgi sonuç külçesinde *depolan*ır

DÖNÜŞ: tüm bilgi son patlamada *geri döner*

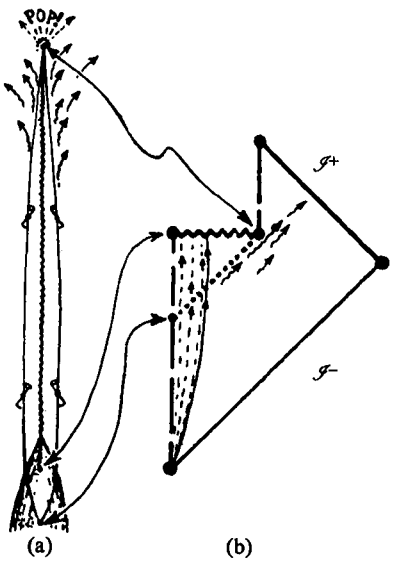
Okur, en belirgin alternatif KAYIP olarak görünürken insanların neden DEPO ya da DÖNÜŞ için gerekli tüm mesafeyi alma gereği hissettiğini merak edebilir. Sebep, KAYIP'ın üniterliğin, diğer bir deyişle **U** işleminin, çiğnenmesini ima eder görünmesidir. Birinin benimsediği kuantum mekaniği felsefesi üniterliğin değişmezliğini talep ederse bu durumda KAYIP'la sorun yaşanacak demektir. Bu nedenle, görünüşteki yapmacık görünümleri-

[22] *Bkz.* Preskill, 1992.

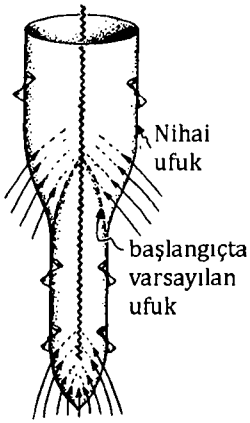
[23] *Bkz.* Preskill, 1992, ya da diğer bir çıkış yolu için Kat, 1998a, 1998b.

ne karşın DEPO ve DÖNÜŞ olasılıklarının, pek çok parçacık fizikçisi arasında rağbet gördüğünü görürüz.

Benim görüşüm bilgi KAYIP'ının kesinlikle en olası olduğudur. Şekil 30.14'ün incelenmesi, çöken fiziki malzemenin, tüm "bilgi"sini sonuç olarak tekillikte yok edilmek üzere yanına alarak, basit biçimde ufkun karşısına düşüşüyle ilgili açık tabloyu aktarır. Ufukta, yerel fiziki öneme sahip özel hiçbir şey meydana gelmemelidir. Madde, ufku ne zaman geçtiğini dahi "bilmez". Başlangıçta çok büyük olan, belki de galaktik merkezlerde bulunduğuna inanılıp güneş kütlesinden bir milyon kat ya da daha büyük olabilecek delikler gibi bir kara deliği ele alabileceğimizi aklımızda tutmalıyız. Ufuk geçildiğinde özel hiçbir şey olmaz. Uzayzaman eğriliği ve malzeme yoğunluğu büyük değildir: yalnızca kendi güneş sistemimizde gördüğümüz türdedir. Ufkun konumu bile yerel değerlendirmeler tarafından saptanmaz çünkü o konum delik içine daha sonradan ne kadar malzeme düşeceğine bağlıdır. Sonradan daha fazla malzeme düşerse bu durumda ufuk aslında daha önce geçilmiş olur! *Bkz.* Şekil 30.15. "Ufuk geçilmeden hemen önceki bir anda", çöken malzemede içerilmiş olan tüm bilgiyi ayrıntılı biçimde dışarıya taşıyan bir tür sinyalin bir biçimde dış dünyaya yayılmasını anlaşılmaz buluyorum. Aslında basitçe kendi başına olan bir sinyal, ilgilenilen "bilgi" bir anlamda gerçekten malzemenin kendisi *olduğu*ndan, yeterli değildir. Malzeme bir kez ufuk içine düştüğünde hapsedilir ve tekilliğin kendisinde kaçınılmaz biçimde yok edilir.



Şekil 30.14 Hawking kara delik buharlaşması. (a) Klasik kütleçekim çökmesi yoluyla bir kara delik oluşur. Son derece uzun bir süre boyunca Hawking ışınımı yoluyla çok düşük bir hızla madde enerji kaybına uğrar ve madde kaybettikçe azar azar ısınır. Sonuç olarak patlayarak (deliğin başlangıç kütlesinden bağımsız biçimde, astrofiziki standartlara göre küçük bir patlamayla) gözden kaybolduğu görülür. (b) Bu işleme ilişkin katı konformal bir diyagram (küresel olarak simetrik durum). Bu, çöken malzemenin, kendisine ait tüm "bilgi"yi tekillikte yok edilmek üzere yanına alarak basit biçimde ufkun karşısına düştüğü, KAYIP'la uyumlu belirgin bir tabloyu aktarır görünür.



Şekil 30.15 Bir kara delik ufkunun kesin konumu, sonuç olarak delik içinde ne kadar malzeme düştüğüne bağlı olduğundan, "teleolojik olarak" belirlenir.

En azından bu, kozmik sansürü (§28.8) kabul ediyorsak açık sonuçtur. Kabul etmiyorsak bile bununla rahat hareket edilecek pek fazla alan bulunduğunu sanmıyorum. Tablo esasen Şekil 30.14'teki gibidir. Bu tabloya göre, çökmedeki malzeme (ve "bilgi"si) ufku geçtiğinde değil yalnızca tekilliğe girdiğinde yok edilir. Şekil 30.14'te "POP" sözcüğüyle gösterildiği üzere, çöken malzemeye ilişkin tüm bilginin son patlama olayında bir biçimde yeniden geri geldiğine ilişkin DÖNÜŞ bakış açısı benimsenecekse[24] bu bilginin, (kozmik sansürün makul bir biçimi uyarınca esasen uzaysal olması gereken; *bkz.* §28.8) tekilliğin hemen karşısından, bu noktaya gelmeyi sezdirmeden nasıl başaracağı bir biçimde açıklanmak zorundadır. Bunu pek de mantıklı bulmuyorum.

DEPO'daki durum daha iyi değildir. Külçe oluştur*ul*sa bile aslında yararı yoktur çünkü bilgi sonsuza dek onun "içine kilitlenmiş"tir bana öyle geliyor ki bu her durumda kaybolmak kadar iyidir. Külçenin tek amacı "üniterliği kurtarmak"sa, bu durumda külçelerden oluşan tutarlı bir QFT formüle edilmek zorunda olur; bunu yapmakla ilgili ağır sorunlar söz konusudur.[25] Gördüğüm kadarıyla Hawking argümanı bize, genel görelilik kuantum mekaniksel işlemlerle bağlantılı olarak tabloya girdiğinde, KAYIP'la uyumlu biçimde, üniterliğin belirli durumlarda basitçe çiğnenmesinin beklenmek zorunda olduğu güçlü bir durum sunar.

Bu konularla ilgili Stephen Hawking'in kendi bakış açısı nedir? Başından itibaren o, ısrarla KAYIP'ı savundu. Bana öyle geliyor ki buna ilişkin durum şimdi, Hawking bu fikirleri ilk olarak ortaya sunduğu zamanki ka-

[24] *Bkz.* Preskill, 1992; Susskind vd., 1993.

[25] Horowitz ve Maldacena, 2003, eleştirisi için *bkz.* Gottesman ve Preskill, 2003. Ayrıca *bkz.* Susskind, 2003.

dar güçlüdür. Elbette kara delik buharlaşması tümüyle kuramsal bir kavramdır ve Doğanın kendisi kara deliklerin uzak geleceğiyle ilgili başkaca fikirlere sahip olabilir. Bununla birlikte, QFT ya da makroskopik genel göreliliğin (ya da her ikisinin) yapısında radikal değişiklikler olmaksızın bu tür herhangi bir alternatifin ortaya çıkabilmesini görmek güçtür. Hawking'in konumu, en azından 2003'teki konumu, aslında üniterliğin fakat yalnızca, benim görece ılımlı bir anlama sahip olacak şekilde değerlendirdiğim biçimde çiğnenmesi gerektiğiydi. Hawking, kara deliklerin varlığında, bir sisteme ilişkin kuantum durumunun esasen (saf olmayan duruma ilişkin) bir yoğunluk matrisine evrimleşeceğini ileri sürdü. Aslında bu fikre §29.6'da, karışık bir kuantum durumunun bir parçası, yalnızca FAPP biçiminde kaybolmaya karşıt olarak, gerçekten –burada bir kısmı bir kara deliğe düşerek– kaybolabilirse bu durumda kuantum gerçekliğinin aslında (saf) bir durum yerine bir yoğunluk matrisi tarafından açıklanacağına ilişkin ontolojik konumun kabul edilmesinin makul olabileceği gerçeğini belirttiğimde üstü kapalı biçimde kısaca değinilmişti. Hawking kafasında, yoğunluk matrislerine dolaysızca uygulanan ve "saf durumlar"ın "karışık durumlar"a evrilmesine olanak sağlayan bir tür "süper üniter" evrim canlandırdı.[26, [30.8]]

30.9 Daha radikal bir bakış açısı

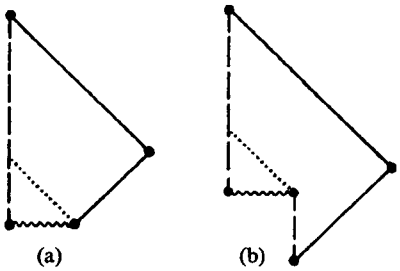
Hawking'e KAYIP'a ilişkin biçimin aslında olasılıkla doğru olduğu konusunda katılırken daha da radikal bir şeyin gerektiğine inanıyorum. Önceki paragrafta özetlendiği haliyle örneğin Hawking'in önermesi herhangi bir asimetrik zamanlı özelliği kapsamaz.[27] Bununla birlikte zaman simetrisinde Şekil 30.4'ün zamanda tersinmiş hali olan Şekil 30.16a'daki "beyaz delik" tablosuna, Şekil 30.16b'de gösterildiği üzere Şekil 30.14'te verilmiş buharlaşan kara deliğin zamanda tersinmiş halinde olduğu gibi, izin veri-

---

[26] Hawking üniter evrime ilişkin, olağan QFT'ye ilişkin, §26.8, S–matrisi açıklamasının, onun, süpersimetriyle bağlantısı olmayan, *bkz.* §26.8, bir "süper saçılım" işlemcisi olarak adlandırıp "$" sembolüyle gösterdiği şeye genellendiği bir genelleme sundu. Bu, S–matrisince ele alınan saf durumlar arasında işlemek yerine yoğunluk matrisleri arasında işler. *Bkz.* Hawking, 1976b.

[30.8] Bunu gerçekleştirecek türdeki dönüşümü belirtmek üzere indis notasyonunu (*örn.* $|\psi\rangle$ için ψ^a) kullanın. *İpucu*: Şekil 29.5'e bir göz atın.

[27] Stephen Hawking ile benim aramdaki temel anlaşmazlık, yaklaşık 20 yıldır, bu zamansal asimetri sorunu üzerinde odaklanıyor. Bu tartışmalar süresince o, kararlı biçimde simetrik zamanlı bir fiziğe ve ya U kuantum mekaniğine ilişkin değişmezlik ya da üstte değinilmiş olan, not 30.26, ılımlı genellemeye tutundu. Açıklayacağım üzere bu konularla ilgili kendi konumum oldukça farklıdır.



Şekil 30.16 Beyaz delikler: zamanda ters çevrili kara delikler. Bunlar Weyl eğrilik hipotezini çiğner. (a) Şekiller 27.11 ve 27.16'daki gibi, kara delik oluşumunun zamanda ters çevrili hali biçimindeki konformal diyagram. (b) Şekil 30.14'teki gibi, kara delik oluşumunun zamanda ters çevrilmiş hali ve Hawking ışınımı yoluyla daha sonraki yok oluşuna ilişkin konformal diyagram.

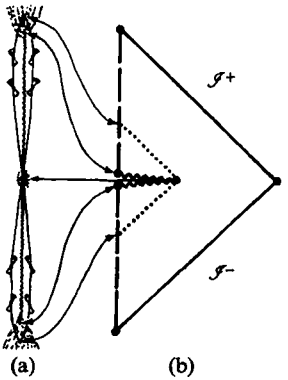
lir. "Yeni bilgi" yaratımı kadar bilgi yok edilmesinin söz konusu olduğu "genel simetrik zamanlı durum" Şekil 30.17'de gösterilir. Tüm bunlar Weyl eğrilik hipotezini (§28.8) çiğner. Şekil 30.16c'deki simetrik durum başlangıçtaki kara deliğin son buharlaşması anında yeni bir beyaz deliğin yaratılmasını, beyaz delik kara deliğin daha önce sahip olduğu boyuta erişene dek büyümek üzere, içerir; *bkz.* Şekil 30.17. Böylesi saçma görünümlü bir modelin daha önce ciddi biçimde önerildiğini hiç görmedim! Şekil 30.16'dakine benzer durumlara bir kez izin verilirse bunların niçin Büyük Patlamada, 27. bölümün aktardığı mesajla bütünlüklü bir çelişkiye yol açarak, çoğalmadıklarını kavramakta başarısız oluyorum.

Burada tüm argümanlarımı yinelemeye niyetli değilim[28] fakat açık konuşmak gerekirse bunlar, Doğanın bize, kendi evreninde gerçekten izin verdiği o uzayzaman tekilliklerinin fiziki yapısıyla ilgili olarak, Weyl eğrilik hipotezinin geçerli oluşuna yakın biçimde benzeyen bir şey söyler görünmesi gerçeğine dayanır.[29] Bunu kabul edersek böylece kara delik tekilliklerinde gerçekten geri kazanılamayan açık seçik bir "bilgi kaybı" söz konusu olur. Bunun sebebi, bu hipotez uyarınca, serbestlik derecesi herhangi bir başlangıç tekilliğinde yasakken çökmeye ait sonuç tekilliklerinin devasa miktarda serbestlik derecesi (bunlar Weyl eğriliğinde bulunmak üzere) içerebilmesi ve böylelikle soğurabilmesidir.

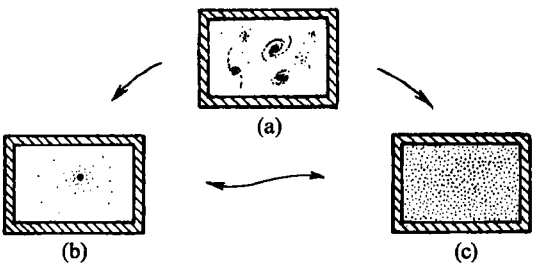
Bu argümanı, kara deliklerin oluşumu ve buharlaşmasını içeren bir sistemin *faz uzayı* biçiminde ortaya koymaya çalışalım. Açıkçası, faz uzayı argümanımızı işler kılmak üzere, sonlu bir sabit enerji niceliği içeren kapalı bir sistemi ele almamız gerekir. Hayal edişimizi desteklemek üzere kafamızda, hiçbir bilginin ya da maddi paçacığın içeriye ya da dışarıya geçemeyeceği şekilde, mükemmel aynalar biçiminde ele alınan duvarlara

[28] *Bkz.* Hawking, 1976b; Preskill, 1992; Penrose, 1979a.

[29] Weyl eğrilik hipotezi *klasik* geometriye aittir, böylece "kuantum geometrisi"nin tam olarak klasik bir uzayzamana kristalize olduğu noktada ne olduğu hakkında bir şey söyler.



Şekil 30.17 (a) Daha önceden kütleçekim çökmesi tarafından oluşturulmuş bir kara deliğin son buharlaşması anında bir beyaz deliğin yaratıldığı simetrik zamanlı durum. Yeni beyaz delik büyük miktarda malzemenin dışarı atılmasıyla yok olmadan önce daha önceki kara delik boyutuna ulaşana dek büyür. (b) Buna ilişkin konformal diyagram.

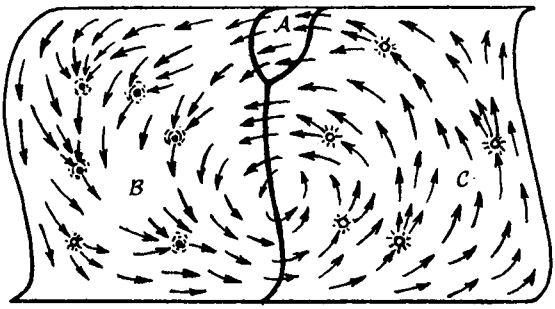


Şekil 30.18 Hawking'in "kutu" düşünce deneyi. (a) Duvarları mükemmel aynalar olup hiçbir bilgi ya da malzeme geçişine izin vermeyen engin (galaktik ölçekte) bir maddi "kutu" düşünün. (b) Yerel bir entropi maksimumu kütlenin çoğunu sağlayan bir kara deliktir; delikle ısıl denge içinde küçük bir miktar çevre ışınımı mevcttur. (c) Diğer bir entropi maksimumu kara deliksiz ısıl ışınımdır (ve biraz parçacık).

sahip, galaktik boyutlardan daha büyük engin bir kutu canlandırmayı deneyelim; *bkz.* Şekil 30.18. Elbette bu pratikte saçmalıktır fakat okuyucuyu sistemimizin gerçek değil, yalnızca bir "düşünce deneyi"nden oluştuğuna inandırmak için acele ediyorum. Bu, faz uzayı gerekçelendirmesinin yalnızca, Hawking ışınımı işleminde (belirgin) serbestlik derecesi kaybı içeren bir sisteme uygulanmasını sağlamak üzere tasarlanmaktadır.[30] Ele alınan $\mathcal{P}$ faz uzayı, verili tüm enerjiyle birlikte, kurgusal kutumuz içindeki olası tüm fiziki durumları açıklar. Şekil 30.19'daki dinamik evrim $\mathcal{P}$ üzerindeki bir ok ailesi tarafından Şekil 20.5'teki gibi açıklanır.

Zaman ilerledikçe bu durumda ("düşünce"), kara delik tekillikleri içine soğurulduklarından serbestlik dereceleri yok olur. Bu serbestlik dereceleri, Weyl eğrilik hipotezince (beyaz delik türündeki) başlangıç tekilliklerinde yeniden belirmekten alıkoyulur fakat benim iddiam onların **R** işlemi

[30] *Bkz.* Hawking, 1976a, 1976b, ve Gibbons ve Perry, 1978.



Şekil 30.19 (Şekil 30.18'de içerilen işlemlere ilişkin) evrimi (Hamilton) açıklayan oklarla birlikte Hawking kutusuna ilişkin faz uzayı açıklaması. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ bölgeleri sırasıyla Şekil 30.18'deki (a), (b), (c)'ye karşılık gelir. Buradan hareketle $\mathcal{C}$ bölgesi için değil ama $\mathcal{B}$ bölgesi için bir kara delik mevcuttur. Bir kara delik varlığı, KAYIP uyarınca kara delik (gelecek) tekilliğindeki bilginin yok edilmesi nedeniyle, bir arada akmakta olan akış çizgileri sonucunu (faz uzayı hacmi indirgenmesi) verir. (Nesnel olarak gerçek varsayılan) **R** işlemine ilişkin zaman asimetrisinde içerilmiş akış çizgilerinin dengeleyici bir yaratımı (faz uzayı hacminde artış) söz konusudur. Öneri, işlemleri çiğneyen bu iki Liouville teoremi arasında, akışta nihai faz uzay hacmi korunumunu veren, toplam bir denge olması gerektiğidir.

yoluyla yeniden belireceğidir. Fikir, kara deliklerdeki asimetrik zamanlı "bilgi kaybı"yla §30.3'te değinilmiş olan kuantum mekaniksel **R** işlemlerindeki olasılıkların asimetrik zamanlı davranışları arasında toplam bir dengenin söz konusu olduğudur. **R** işleminin belirlenimci olmayan doğası bize aynı girdilere ilişkin pek çok alternatif olabileceğini söyler ve bu, kara deliklerde aynı çıktıyı, tekilliklerde soğurulan çeşitli girdileri ayırt eden "bilgi"yi, veren farklı pek çok girdi olabilmesi gerçeğini dengelemelidir. §30.3'ün kurgusal deneyinde (Şekil 30.1), verili bir çıktı için (D'ye ulaşan foton) temelde yalnızca bir girdi (S'den yayılan foton) söz konusuyken verili tekil bir çıktı için iki farklı sonuca (D'ye ulaşan foton ve C'ye ulaşan foton) sahip olduğumuzu anımsayın. Bu nedenle, uzayzaman tekillik yapısındaki asimetri faz uzayı hacminin etkin bir daralmasına neden olurken **R** işlemi uyarınca faz uzayı hacminin etkin bir dağılımını elde ederiz; yine *bkz.* şeki 30.19. İddia şu ki bu iki etki ortalamada birbirini dengelemelidir.

Bu dengelemenin, fiziki işlemlerin yalnızca *toplam* bir özelliği olma gerekliliği açık hale getirilmelidir. Elbette, kuantum durum indirgenmesinin her örneğine eşlik eden bir kara deliğin eşzamanlı olarak var olma zorunluluğu iddia edilmemektedir. Fikir yalnızca, tüm faz uzayı boyunca bu iki etki arasında bir denge bulunduğudur. Bu nedenle, **R**'deki gelecek rasgeleliğini dengeleyen şey, bilgi soğurma yeteneğiyle birlikte, kara delik oluşumuna ilişkin *potansiyel olanak*tır.

Bu etkilerin ikisinin de, faz uzayı hacminin dinamik evrimde korunmak zorunda olduğuna ilişkin teoremi (Liouville teoremi; *bkz.* §20.4, Şekil

20.7) çiğnediğini belirtebiliriz. Bununla birlikte her durumda, o teoreme ilişkin kapsamı sunan sıradan klasik dinamiğin ötesine geçen bir şeye sahip oluruz. Aslında klasik faz uzayı kavramı burada, kuantum ve klasik etkileri birlikte ele alırken tümüyle uygun değildir. Tümüyle kuantum olan bir sistemle ilgili olarak, daha çok tümüyle bir *Hilbert uzayı* biçiminde düşünmemiz gerekir. **U** kuantum evriminin tüm hikaye olduğuna inananlar için Hilbert uzayı açıklaması doğru olandır. Bu durumda fakat kara delik buharlaşmasında, bilginin yok edilişi ciddi bir sorun doğurur. Kendi bakış açım, tabloların hiçbirinin tümüyle uygun olmayıp her birinin henüz nasıl açıklamak gerektiğini bilmediğimiz başka bir şeye yönelik bir yaklaşıklık tahmini biçiminde değerlendirilmesi gerektiği şeklindedir.[31]

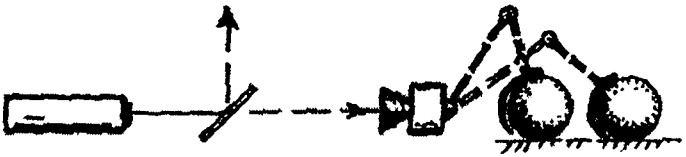
Uzunca bir süredir niyetim, üstte özetlenen argümanda olduğu (ve Şekil 30.19'da gösterildiği) üzere, bu iki işlem arasındaki dengenin ayrıntılarını araştırmak yoluyla kuantum durum indirgemesinin hızına ilişkin dolaysız bir nicel hesaplama elde etmekti fakat şimdiye dek bu argümanı sonuçlandırmakta başarısız oldum. Bu durumda uygun bir hesaplama elde etmek üzere kullanabilen oldukça farklı bir genel gerekçelendirme hattının var olması şanstır. Bu bölümün kalanının konusu budur.

30.10 Schrödinger öbeği

§29.7'de ele alınmış, "Schrödinger'in kedisi" olarak anılan türdeki duruma dönelim. Şekil 29.7'de, bir foton durumunu üst üste binmeye yerleştirmek üzere, fotonun aktarılan kısmı kediyi öldürecek bir aleti tetiklerken yansıtılan kısmının kediyi sağ bıraktığı bir huzme ayırıcı kullanmak yoluyla, canlı bir kediyle ölü bir kedinin kuantum üst üste binmesine ilişkin düzeneğin nasıl kurulabileceğini gösterdim. Gerçek bir kedi kullanmak elbette yalnızca insanlık dışı olmakla kalmaz fakat gereksiz biçimde karışık bir fiziki sistem elde etmek olurdu. Öyleyse gelin bunun yerine, aktarılan foton durumu basit biçimde, bir malzeme öbeğini yatay biçimde küçük bir miktar hareket ettiren bir aleti çalıştırırken yansıtılan kısmın öbeği kendi haline bırakması durumunu ele alalım; *bkz.* Şekil 30.20. Üst üste binmiş öbek artık, önceki kadar dramatik olmasa da Schrödinger'in kedisi rolünü oynar!

Şimdi ortaya koymak istediğim soru şu: iki öbek konumunun kuantum üst üste binmesi durağan bir durum mudur? Geleneksel kuantum mekani-

[31] Burada belki de, eğik bir faz uzayının bazı özelliklerini de alabilecek olan genellenmiş bir Hilbert uzayı kavramına gerek duyulmaktadır, *örn.* Mielnik, 1974; Kibble, 1979; Chernoff ve Marsden, 1974; Page, 1987; ve Brody ve Hughston, 2001.



Şekil 30.20 Şekil 29.7'deki Schrödinger'in kedisi fakat artık sonuçtaki kuantum üst üste binmesi yalnızca bir madde öbeğinin hafifçe farklılık gösteren iki konumu arasındadır.

ğinde durum, her öbek konumunun ayrı ayrı duğan bir durumu temsil ettiğini ve her durumdaki enerjinin aynı olduğunu (yeri değiştirilmiş öbeğin bulunduğu yer başlangıç konumuyla bağlantılı olarak ne yükseltilmiş ne de alçaltılmıştır) düşünürsek kesinlikle budur. Bu yalnızca, 21. bölümde öğrendiğimiz kuralların (ayrıca *bkz.* § 24.3) temel bir uygulamasıdır. Başlangıç öbek konumunu $|\chi\rangle$ ve yer değiştirilmiş olanı $|\varphi\rangle$'yle göstererek iki öbek konumunun her birine ilişkin durağanlığı açıklayıp her biri bize E enerji öz değeriyle birlikte bir enerji öz durumu veren iki Schrödinger denklemine,

$$i\hbar\frac{\partial|\chi\rangle}{\partial t} = E|\chi\rangle, i\hbar\frac{\partial|\varphi\rangle}{\partial t} = E|\varphi\rangle,$$

sahip oluruz. Üst üste binme

$$|\Psi\rangle = w|\chi\rangle + z|\varphi\rangle$$

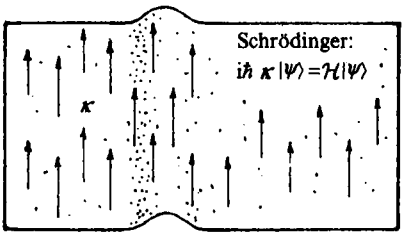
durumu biçiminde gösterilirse böylece w ve z (sabit) genliklerinin hangi değerlere sahip olduklarından bağımsız olarak

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = E|\Psi\rangle$$

ifadesini elde ederiz.[30.9] Bu nedenle her $|\Psi\rangle$ kuantum üst üste binmesi ayrıca durağan bir durumdur. $|\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ durumlarının her biri sonsuza dek orada bulunacak olsa, onlara ilişkin her $|\Psi\rangle$ kuantum durumu da aynı şekilde orada bulunur. Bu yalnızca standart kuantum mekaniğine ilişkin bir beklentidir.

Şimdi, Einstein'ın bize öğrettiği muhteşem ve artık mükemmel biçimde doğrulanmış olan genel görelilik kuramına ilişkin dersleri gündeme getirmeye başlayalım. İlk olarak, ardalan uzayzaman geometrisinde ifade edilmiş olan kütleçekim alanını ele almayı önemli bulabiliriz. Deneyin dünya üzerinde, yatay bir platform üzerinde bulunan iki öbek örneğiyle birlikte

[30.9] Niçin? Bu sonucu alttaki, durağan bir ardalan uzayzamanı durumunda yinelersek bir κvektör alanına ilişkin hangi özelliklerin kullanılacağını açıklayın.



Şekil 30.21 Schrödinger denklemindeki "$\partial/\partial t$" türev işlemcisi, uzayzamanın durağanlığı (zamansal) bir Killing alanı ($\mathcal{L}_{\boldsymbol{\kappa}}\mathbf{g} = \mathbf{0}$; bkz. §14.7) olarak $\boldsymbol{\kappa}$ ($= \partial/\partial t$) biçiminde ifade edilmek üzere, manifold (uzayzaman) üzerindeki (değişmez biçimdeki) bir $\boldsymbol{\kappa}$ vektör alanı biçiminde düşünülmelidir bkz. Şekil 30.3).

gerçekleştirildiğini düşünebiliriz. Dünyanın uzayzaman geometrisi pek de düz değildir ve bu uzayzaman eğriliğinin üstteki değerlendirmelerle ilgili ne gibi etkilere sahip olabileceğini düşünmek zorundayız. Aslında Schrödinger denkleminde beliren "$\partial/\partial t$" işlemcisinin anlamıyla ilgili olarak bir miktar kaygılanmamız gerekir. Genel görelilikte genellikle, "$\partial/\partial t$" kavramının kendisine göre tanımlandığı doğal biçimde sunulmuş bir koordinat sistemine sahip olmayız. §10.3 ve §12.3'ten, ($\partial/\partial t$ benzeri) kısmi bir türev işlemcisiyle ilgili "değişmez" düşünüş biçiminin onu manifold (uzayzaman) üzerindeki bir vektör alanı biçiminde ele almak olduğunu anımsayın; Şekil 30.21. Bu nedenle gerekli "$\partial/\partial t$" kavramımızı ifade etmek üzere uzayzamanımız üzerinde bir vektör alanına gerek duyacağız.

Durumumuz o kadar da kötü değil çünkü "durağan durumlar" konusunu ele almaktayız, öyleyse en azından kendisi durağan olan bir ardalan uzayzamanına sahip olmalıyız. Aslında dünyanın alanını durağan olarak değerlendiririz. Üstte (§§30.4, 6, Şekil 30.3) gördüğümüz üzere, durağan bir uzayzaman bir $\boldsymbol{\kappa}$ *zamansal Killing vektörü*nün varlığı yoluyla nitelendirilir. Tartışmada bu belirli vektör alanı nasıl bir rol oynar? Önceki formüllerde basit olarak

$$\frac{\partial}{\partial t} \longmapsto \boldsymbol{\kappa}$$

değişikliğini yapabileceğimizi söyleyen uzayzamanımız "t'den bağımsız" olmak anlamında durağandır. Toplam bir sabit ölçek çarpanına ilişkin bir nokta söz konusu olabilir fakat bunun bizim için burada pek bir önemi yoktur. Bu toplam çarpanı belirlemenin genel yolu, kütleçekim alanı sıfıra doğru azalır biçimde kabul edilmek üzere, $\boldsymbol{\kappa}$'nın büyük uzaklıklarda "sıradan" bir zaman yer değişikliği halini almasını talep etmektir. Bununla birlikte yerel olarak $\boldsymbol{\kappa}$'nın büyüklüğü, dünyanın kütleçekim alanının "saat yavaşlatıcı" etkilerinin (§19.8) hesaba katıldığı bir biçimde konumdan konuma değişebilir.[30.10] $\boldsymbol{\kappa}$ artık $\partial/\partial t$'nin rolünü üstlendiğinden, ayrı $|\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$

[30.10] Buna ilişkin bir açıklamayı, §30.6'da açıklandığı üzere bir $\boldsymbol{\kappa}$ Killing vektörünce sağlanan korunum yasasını kullanarak ve $\kappa_a\kappa^a$ normunun kütleçekim etkisi gösteren bir cisim

durumlarının her birine ilişkin durağanlığı tanımlayan bireysel Schrödinger denklemlerimiz

$$i\hbar\boldsymbol{\kappa}|\chi\rangle = E|\chi\rangle \text{ ve } i\hbar\boldsymbol{\kappa}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

olur ve tıpkı önceki gibi herhangi bir $|\Psi\rangle$ üst üste binmesiyle ilgili olarak hâlâ

$$i\hbar\boldsymbol{\kappa}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

ifadesine sahip olduğumuz sonucunu çıkarırız. Bu nedenle, bir ardalan olarak durağan bir kütleçekim alanının varlığı, $|\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ durağan durumlarına ilişkin herhangi bir kuantum üst üste binmesinin kendisinin durağan olması gerçeğini değiştirmez.

Şimdi öbeğin *kendi* kütleçekim alanını hesaba kattığımızda ne olduğuna bakalım. $|\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ durumlarının her birini bireysel olarak ele alırsak gerçek herhangi bir sorunumuz olmadığı görülür. Elbette hem $|\chi\rangle$ hem de $|\varphi\rangle$ birer kuantum durumudur ve kabul edilmiş olan bir kuantum kütleçekim kuramı yokluğunda ona ilişkin kütleçekim alanının nasıl ele alınacağını bilemeyebiliriz. Yine de bunu ayrıntılı biçimde bilmememiz aslında pek önemli değildir. Geleneksel bakış açısı, doğru kuantum kütleçekim kuramının, Einstein'ın klasik genel göreliliğinin ilkeleri uyarınca pek kesin olmasa da, oldukça tam biçimde açıklanmış olan kütleçekim alanlarıyla klasik malzeme öbeklerine benzer görünen şeyleri birbiriyle bağdaştırabileceğini ileri sürer. (Bana göre bu "geleneksel bakış açısı"nın geçerliliği de sorgulanabilir fakat –kuantum formalizminin herhangi bir değişikliğe gerek duymadığı ve klasik genel göreliliğin makroskopik cisimler için de geçerli olduğuyla ilgili– standart ikiz varsayımına inanacak olursak bu durumda onu kabul etmek zorunda kalırız. Sonuçta var olan argümanın doğası bu iki varsayımın uyumluluk sınırlarını araştırmak durumundadır.) Buradan hareketle, dünya üzerindeki yatay platform üzerinde, her bir öbek olayına kendisine ait neredeyse klasik Einsteincı kütleçekim alanı tarafından eşlik edildiği iki ayrı konumda bulunup malzeme öbeğini oldukça tam biçimde açıklayan bir $|\chi\rangle$ kuantum durumu ve bir $|\varphi\rangle$ kuantum durumu olmak zorundadır.[32] Bu iki öbek konumu durumlarının her biri kendisine eşlik eden uzayzamanda durağan kabul edildiğinden her biri kendisine ait ilgili birleşik Killing vektörüne sahip olacak,[33] $\boldsymbol{\kappa}_\chi$ ve $\boldsymbol{\kappa}_\varphi$, ve kendisine ilişkin E öz değerine sahip uygun Schrödinger denklemini sağlayacaktır:

---

etrafında, cisimden çok uzakta birime normalleştirilse bile ondan farklılık gösterebileceği gerçeğini not ederek verebilecek misiniz bakın. Bu, zamanın ölçümünü nasıl etkiler?

[32] Bunlar §26.6'da değinildiği üzere *uyumlu durumlar* olabilir.

[33] $\boldsymbol{\kappa}_\chi$ ve $\boldsymbol{\kappa}_\varphi$'deki indislerin yalnızca işaret olup §12.8'dekik anlamda "tensör indisleri" olmadığını aklınızda tutun. Aynısı $\boldsymbol{g}_\chi$ ve $\boldsymbol{g}_\varphi$ için de geçerlidir.

$$i\hbar\boldsymbol{\kappa}_\chi|\chi\rangle = E|\chi\rangle \text{ ve } i\hbar\boldsymbol{\kappa}_\varphi|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle.$$

Önceki durumda öbeklere ilişkin kütleçekim alanlarını göz ardı ettiğimizde herhangi bir $w|\chi\rangle + z|\varphi\rangle$ üst üste binmesiyle ilgili Schrödinger denklemini yazabildik ve tüm bunların durağan olduklarını saptadık. Bununla birlikte şimdi bir sorun söz konusu çünkü bu $\boldsymbol{\kappa}_\chi$ ve $\boldsymbol{\kappa}_\varphi$ Killing vektörleri farklıdır. Ne yapmalıyız? Öyle görünüyor ki üst üste binmiş uzayzamanlara uygulanan değişmez bir "$\partial/\partial t$" kavramına gerek duymaktayız fakat ne $\boldsymbol{\kappa}_\chi$ ne de $\boldsymbol{\kappa}_\varphi$ bu gereği yerine getirir görünmektedir. Sonraki bölümde bu sorunun önemsiz olmayıp bize temel bir zorluk çıkardığını, bizi doğruca kuantum mekaniğinin temel ilkeleriyle genel göreliliğinkiler arasındaki bir çarpışmaya yönlendirdiğini göreceğiz.

30.11 Einstein ilkeleriyle ilgili temel çelişki

Bu iki Killing vektörünün farklılık göstermesi gerçeğini görece daha derin biçimde ayrıntılandırmak önemlidir. $\boldsymbol{\kappa}_\chi$ ve $\boldsymbol{\kappa}_\varphi$ Killing vektörlerinin farklı olduğunu söylediğimde bunu derin bir anlamda kastediyorum. Esasen onlar farklı uzayzamanlardaki vektör alanlarıdır! Bu iki uzayzamanın yalnızca hafif biçimde farklı bir metriğe sahip olmaları anlamında farklılık gösterdiklerine ilişkin bakışı kabul etmek denenebilir. Buradan hareketle onları gerçekten bir ve aynı uzayda fakat hafif biçimde farklı metrik tensör alanlarıyla, diyelim ki $\boldsymbol{g}_\chi$ ve $\boldsymbol{g}_\varphi$'yle, belirtilmiş olarak düşünebiliriz. Bununla birlikte bu konumu benimsemek Einstein'ın çok temel ilkelerinden biriyle, diğer bir deyişle *genel kovaryans ilkesi*yle (*bkz.* §19.6) yolları ayırmaktır. Bu iki uzayzamana ait nokta kümelerini bir anlamda "aynı" nokta kümeleri biçiminde değerlendirmek aslında, bu iki uzayzaman arasında noktasal bir belirleme tespit etmek olur. Bu, bir uzayzamandaki bir noktanın bir diğerindeki noktayla aynı koordinat işaretlerine sahip olduğunu belirlemeye benzer. Bununla birlikte genel kovaryans ilkesi belirli koordinat sistemlerine yönelik herhangi bir anlamı reddeder. Aslında o, farklı iki uzayzaman arasında tercih edilen noktasal hiçbir belirleme olmaması gerektiğini ileri sürer.

İki öbek konumunun uzayzamanları arasındaki bu belirleme yoksunluğu niçin sorunlara sebep olur? Schrödinger denklemini yazabilmemiz gerekir fakat tekil bir "$\boldsymbol{\kappa}$" olmaksızın bunu nasıl yapmalıyız? En dolaysız öneri $\boldsymbol{\kappa}_\chi$ ve $\boldsymbol{\kappa}_\varphi$'yi saptamaya çalışmak olabilir fakat bu, iki Killing vektörünün aynı uzayda bulunduğunu düşünmemiz anlamına geleceğinden, ki bu bir hiledir, Einstein kuramının temel ilkesinin kesinlikle çiğnenmesi anlamına gelir. Bana öyle geliyor ki bu durumda, kuantum mekaniğinin temel ilkeleriyle genel göreliliğinkiler arasında gerçekten bir çarpışmaya tanıklık etmeye başlıyoruz.

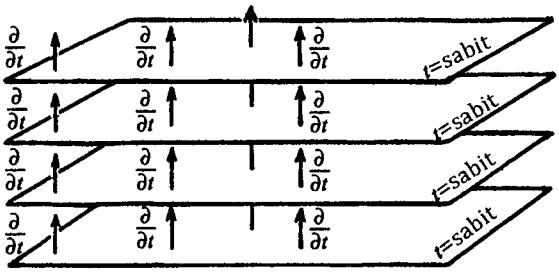
Yine de bu noktada hemen "vazgeçmemeliyiz". Açık konuşmak gerekirse, şimdi ne yapmak gerektiğini bilmek üzere uygun bir yeni kurama gerek duyma gereksinimimize rağmen bana öyle geliyor ki şimdilik bu çarpışmayı kabullenmeye hazırlanır ve yalnızca yaptığımız "hile"de bulunan *hata*ya ilişkin bir ölçü ararsak bazı gerçek ilerlemeler kaydedebiliriz. Bir anlamda Doğanın yapmaya hazırlandığı şeyin, "serbest düşme" kavramının her birinde aynı olması koşuluyla iki uzayzamanın yerel biçimde belirlenmesine izin vermek olduğuna ilişkin konumu benimseyelim. Bu, eşdeğerlik ilkesinin bir tür yansımasıdır; *bkz.* §17.4. Denediğimiz belirleme bir uzayda, diğer bir uzaydaki jeodezi kavramıyla örtüşen bir jeodezi kavramına sahip olmaya çalışır. Bu, normalde bir noktanın yakın komşuluğu dışında ayarlanamaz; o halde iki uzayzamanı belirleyeceksek bunun yerine burada bulunan hatayı hesaplamaya çalışacağız. Böylesi bir şeyi gerçekleştirmek tam genel görelilikte güçtür fakat bu fikirlerin çoğunu ayrıca, bir taraftan yine de Einstein kuramının temel felsefesinin çoğunu koruyarak, c ışık hızının sonsuz kabul edildiği sınırlayıcı durumda da uygulayabiliriz. Bu durum bizi, §17.5'te tartışıldığı üzere, Newtoncı kütleçekime ilişkin Cartan denklemine yöneltir.[34]

17. bölümden, Newton/Cartan kütleçekim düzeninde uzayzamanın gerçekten, kabul edilebilir farklı t "zamanlar"ına ilişkin 1–boyutlu Öklitçi $\mathbb{E}^1$ uzayı üzerindeki bir lif demeti olduğunu anımsarız. Lifler, her biri verili bir zamandaki "uzay"a atfedilen Öklitçi farklı $\mathbb{E}^3$ 3–uzaylarıdır. Böylece aslında t zaman koordinatı tarafından tanımlanan bir "mutlak zamana" sahip oluruz. Okuyucu belki, artık her iki öbek konumuna ilişkin uzayzamanlarla ilgili (t'yle ölçüldüğü üzere) aynı zaman kavramına sahip olmamız nedeniyle sorunlarımızın ortadan kalkması gerektiğini düşündüğü için mazur görülebilir. Bununla birlikte acı gerçek şudur ki, t'yi bilmek $\partial/\partial t$'yi bilmemize olanak sağlamaz. $\partial/\partial t$ işlemcisi, kalan koordinat değişkenlerinin (x, y, z diyelim) sabit tutulduğunu bilmeyi gerektirir. Bu §10.3'te ele alınmış olan "kalkülüsün ikinci temel kafa karışıklığı" konusudur (*bkz.* Şekil 10.7). Konuyu, içerilmiş olan geometriye başvurarak açık biçimde görebiliriz. t'yi bilmek bize $\mathbb{E}^3$ kesitlerinin nerede bulunduğunu söyler fakat $\partial/\partial t$, bu 3–yüzey ailesini boydan boya kesen bir eğri ailesini tanımlayan bir Killing vektör alanını verir; *bkz.* Şekil 30.22. Aslında Schrödinger'in $\partial/\partial t$'sini saptayamamakla ilgili bu geniş konu, kuantum kütleçekime yönelik daha "geleneksel" yaklaşımlarda bile derin bir konu olarak ele alınır. Konu, kuantum kozmolojisindeki "zaman sorunu"yla bağlantı kurar.[35]

---

[34] *Bkz.* Christian, 1995.

[35] *Bkz.* Isham, 1992; Kuchar, 1992; Rovelli, 1991; Smolin, 1991; Barbour, 1992.



Şekil 30.22 t'yi bilmek bize $\partial/\partial t$'yi vermez ("kalkülüsün ikinci temel kafa karışıklığı", *bkz.* Şekil 10.7, §10.3); t bize $\mathbb{E}^3$ kesitlerinin nerede bulunduğunu söyler fakat $\partial/\partial t$, bu 3–yüzey ailesini boydan boya kesen bir eğri ailesini tanımlar.

Mevcut kapsamda, tüm bu konuları çözümlemekle ilgili çok hevesli olmaya çalışmıyorum. Farklı $\boldsymbol{\kappa}_\chi$ ve $\boldsymbol{\kappa}_\varphi$ vektörlerine ilişkin "yasa dışı" bir belirleme yapmaya çalışacaksak tüm yapmamız gereken içerilmiş olan hataya ilişkin bir hesaplamadır. Bunu esasen $\mathbb{E}^3$'leri belirleyerek fakat daha sonra iki uzaydaki kütleçekim ivmeleri arasındaki farkta bulunan toplam hatayı (serbest düşmeler arasındaki farklar, diğer bir deyişle jeodeziler) alarak yaparız. Kütleçekim ivmelerinin sırasıyla $\boldsymbol{\Gamma}_\chi$ ve $\boldsymbol{\Gamma}_\varphi$ 3–vektörlerince verildiğini düşünün. Böylece hatamızı bunların farkının uzunluk karesini, $(\boldsymbol{\Gamma}_\chi - \boldsymbol{\Gamma}_\varphi)^2$, oluşturup tüm $\mathbb{E}^3$ üzerinde bunun integralini alarak hesaplarız. Bu integrali alınmış hata, Schrödinger denkleminde, o belirli $\mathbb{E}^3$ seçimini saptayan t zamanında gerekli "$\partial/\partial t$" işlemcisinin tanımındaki mutlak belirsizliğin bir ölçüsü olarak yorumlanır. Bu belirsizlik, Schrödinger denklemi üzerinden dolaysızca, ele alınan üst üste binmiş durumların enerjisindeki E_G mutlak belirsizliğine yönlendirir. Sonraki adım E_G'yle ilgili bu ifadeyi, şu şekilde yorumlayabileceğimiz başka bir (denk) matematiksel biçime çevirmektir:[30.11]

$E_G = |\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$ durumlarındaki iki kütle dağılımı arasındaki kütleçekimle ilgili öz enerji farkı.

Bir kütle dağılımındaki *kütleçekimle ilgili öz enerji*, o kütle dağılımını tümüyle sonsuza dağıtılmış olan noktasal kütlelerden bir araya getirmekte edinilen enerjidir. Üstteki fark $|\chi\rangle$'de pozitif biçimde kabul edilen kütle dağılımıyla birlikte $|\varphi\rangle$'de negatif biçimde kabul edilen kütle dağılımı ola-

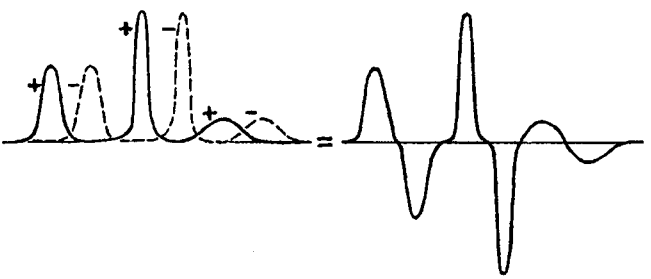
[30.11] Bunu doğrulayabilir misiniz bakın. Kanıt, §24.3'teki alıştırma [24.3]'e ilişkin aynı hattan elde edilir. Φ Newtoncı (skaler) kütleçekim potansiyeli olmak üzere, $\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$ Poisson denkleminden faydalanırız. Buradaki hata hesaplamamız $|\nabla\Phi_1 - \nabla\Phi_2|^2$ uzay integralidir.

rak düşünülebilir (*bkz.* Şekil 30.23). (Bunun bize sıfır sonucu vermemesinin sebebi enerjinin, her bir kütle dağılımına ilişkin kütleçekim alanının diğeri üzerindeki etkisiyle ilgilidir.)

Bunu sıradan terimlerle değerlendirmek, özellikle de dahil olan negatif kütle dağılımları nedeniyle biraz güçtür. En genel biçimde ele alınan, diğer bir deyişle $|\varphi\rangle$ durumunun $|\chi\rangle$ durumuna ilişkin olarak yalnızca katı bir yer değiştirme olduğu, durumda E_G niceliğinin diğer şekilde daha dolaysız olarak yorumlanabilmesi bir şanstır. Enerjinin, öbeğimize ait, başlangıçta $|\chi\rangle$ konumunda olup $|\varphi\rangle$ konumuna hareket ettirilen bir örneğin, $|\chi\rangle$ konumunda sabitlenmiş olarak değerlendirilen diğerinin kütleçekim alanından uzak olarak, yer değiştirmesine mal olacağını düşünürüz. Bu enerjinin daha önceki, katı bir yer değişikliği durumundaki E_G'yle aynı[30.12] fakat her zaman başkaca koşullarda olmayan enerji olduğu açığa çıkar.

Aslında bu ikinci enerji ölçüsünü (diğer bir deyişle kütleçekimle ilgili *etkileşim* enerjisi) E_G'ye ilişkin alternatif bir tanımlama biçiminde benimsemek düşünülebilir. Kütleçekim öz enerjisi biçimindeki ilk önerme, görebildiğim kadarıyla, daha iyi temellenmiş görünür fakat mevcut kavrayış düzeyinde diğer olasılıklar yadsınmamalıdır. Diósi (1989) üstteki önermelerin ikisini de, vermek üzere olduğuma benzer bir amaca ekleyerek fakat ayrıca burada değinmediğim (stokastik) bir dinamik önererek ele almıştı.

Bu farklı öneriler (ve bazı diğerleri), kısa süre içinde geleceğim türdeki deneylerde, deneysel olarak ayırt edilebilir olmak zorundadır. Bununla



Şekil 30.23 Çakışmadaki durağan iki durumdan, $|\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$, her biri kendisine ait kütle yoğunluk dağılımıyla ilgili bir "beklenti değeri" tanımlar. Bu ikisi arasındaki (diğer bir deyişle biri pozitif diğeri negatif biçimde kabul edilen) fark, pozitif ve negatif kütle yoğunluklarına ilişkin, kütleçekim öz enerjisi E_G niceliği olan, bir dağılım oluşturur.

[30.12] Bunun, bu belirli durumda niçin E_G'yle ilgili önceki aynı yanıtı vediğini görebiliyor musunuz? Yer değiştirilen öbeğin son konumu ilk konumuna göre hafif biçimde yükseltilirse ne olur? Sıkıştırılırsa ne olur?

birlikte bu önermelerin en iyi temellenmiş olanı bile bir biçimde eksik güdülenmiştir ve çelişkiden tümüyle bağımsız değildir.[36]

Öyleyse temel E_G "enerji belirsizliği"mizle ne yapmalıyız? Sonraki adım Heisenberg belirsizlik ilkesinin (zaman/enerji belirsizlik bağıntısı; *bkz.* §21.11) bir biçimini yardıma çağırmaktır. Kararsız parçacıklar ya da (örneğin uranyum U_{238} gibi) kararsız çekirdekler çalışmasında, içkin bir zaman belirsizliğine sahip T ortalama *ömrü*nün, $\hbar/2T$'yle verilen bir enerji belirsizliğiyle ters orantılı biçimde ilişkili oluşu bilindik bir gerçektir. Örneğin, §21.11'de belirtildiği üzere, bir U_{238} çekirdeğinin ömrü yaklaşık 10^9 yıldır, böylece her bir çekirdekte Einstein'ın $E = mc^2$'si yoluyla kendi kütlesinin yaklaşık 10^{-44}'ü kadarlık bir kütle belirsizliğine çevrilen yaklaşık 10^{-51} joules kadar temel bir enerji belirsizliği söz konusudur. Şu halde üst üste binmiş $|\Psi\rangle = w|\chi\rangle + z|\varphi\rangle$ durumumuzu, kendisi de, üstte tartışılan E_G temel enerji belirsizliğiyle Heisenberg denklemi yoluyla bağlantılandırılan bir T_G ömrüyle birlikte kararsız olmak üzere, bunun benzeri olarak düşüneceğiz. Bu tablo uyarınca[37] $|\Psi\rangle$ benzeri herhangi bir üst üste binme $|\chi\rangle$ ya da $|\varphi\rangle$ durumlarından biri ya da diğerine ortalama bir

$$T_G \approx \hbar/E_G$$

zaman ölçeğinde bozunur.

30.12 Tercih edilmiş Schrödinger–Newton durumları?

Üstteki argümanın sonucu, iki duruma ilişkin bir kuantum üst üste binmesinin aslında, bileşenlerinden biri ya da diğerine $\hbar/E_G$ düzenindeki bir zaman ölçeğinde bozunmak zorunda oluşu olarak görünür. Bununla birlikte algıları güçlü olan okur bu noktada, *herhangi bir* $|\psi\rangle$ kuantum durumunun, diğer durumlara ilişkin bir çiftin doğrusal bir üst üste binmesi (*örn.* herhangi bir $|\alpha\rangle$ için $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + (|\psi\rangle - |\alpha\rangle)$) biçiminde ifade edilebileceği şikâyetinde bulunabilir. Tüm bu durumları bu tür "bileşenler"e bozu-

---

[36] Nesnel durum indirgenmesi kuramlarının pak çoğu için *bkz.* not 29.12. Diósi, Percival, Kibble, Pearle, Squires ve benimki geniş bir biçimde kütleçekim içermektedir.

[37] Oldukça yakın bir zamanda, kütleçekimle ilgili OR'ye ilişkin bu tür bir önermenin daha titiz bir gerekçelendirilmesiyle ilgili bir fikir ortaya çıktı. Alıştırma [21.6]'dan, kuantum kuramını eşdeğerlik ilkesiyle daha tutarlı hale getirmek üzere, serbest düşme halindeki bir çerçeveden bir kütleçekim alanında bulunan sabit birine geçerken, t zamanında küplü bir terim içeren bir faz çarpanına gerek duyulduğunu anımsarız. Buna göre, iki çerçeve kesin biçimde farklı vakumlar tanımlar, *bkz.* §26.5; bu durum §30.4'te belirtilen, Galileci sınırlarda yaşamaya devam eden Unruh etkisinin kalıntısıdır. Böylece eşdeğerlik ilkesine tümüyle saygı gösterilecekse iki kütleçekim alanının çakışması, farklı vakumların çakışmasını içerecektir; böylece Galileci sınırda bile kararsız olmalıdır. Bu argümanın ayrıntıları daha sonra yayımlanacak.

nur biçimde değerlendirmek, özellikle de, verili bir $|\psi\rangle$ için $|\alpha\rangle$'yı, bu alternatiflerdeki kütle dağılımının, bozunumun neredeyse aniden olmak zorunda kalmaya yetecek biçimde farklılık göstereceği şekilde seçersek, pek de anlam ifade etmez!

Bu doğadaki bir saçmalık, $|\Psi\rangle = w|\chi\rangle + z|\varphi\rangle$ üst üste binmemizi yalnızca tekil bir elektron içerecek biçimde ele almamız gerekse bile üstteki tartışmanın sonucu olarak değerlendirilebilir. Çünkü elektronu (neredeyse) kesin bir konumda göstermek üzere $|\chi\rangle = |\alpha\rangle$ olduğunu kabul edebiliriz. Kütle dağılımı, E_G'yle ilgili, $|\Psi\rangle$ durumunun $|\chi\rangle$ ya da $|\varphi\rangle$'den biri ya da diğerine neredeyse ani bir indirgenmesini ima eder görünen, esasen sonsuz bir değere yol açan neredeyse bir delta fonksiyonudur (§21.10). Aynısı nokta benzeri parçacıklardan (*örn.* kuarklar) oluşan bir sistem için de geçerlidir. Açıktır ki bu bir anlam ifade etmez; böylesi davranış doğru olsaydı hiçbir kuantum mekaniği söz konusu olmazdı.

Yapmamız gereken şey $|\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$'mizin ne gibi durumlar olmasına izin verilmesi gerektiği hakkında çok daha dikkatli olmaktır. Üstteki argümanda $|\chi\rangle$ ve $|\varphi\rangle$'yi durağan durumlar olarak ele aldığımızı anımsayın. (Neredeyse) sabit konumdaki bir elektron kesinlikle durağan değildir. Heisenberg konum/momentum belirsizlik ilkesi (§21.11) yoluyla o, çok büyük momentumlar içerecek ve ansızın dağılacaktır. Öte taraftan, hem $|\chi\rangle$ hem de $|\varphi\rangle$'yle ilgili *tam* durağanlığa gerek duyduğumuzda argümanı tekil parçacıklara uygulamakta bir soruna sahip olduğumuz görülmektedir. Çünkü uzamsal sonsuza doğru azalan serbest bir (pozitif kütleli) tekil parçacıkla ilgili olarak sıradan Schrödinger denklemine ilişkin hiçbir durağan çözüm söz konusu değildir.[30.13] Yanıtla ilgili muamma, parçacığa ilişkin Schrödinger denklemini yazarken ona ait kütleçekim alanını hesaba katmaya gerek duymamız gerçeğinde yatar. Bu açıklamada kütleçekim alanının kendisinin kuantize olmasını değil fakat yalnızca etkilerinin, kaynağı dalga fonksiyonundaki kütle dağılımına ilişkin "beklenti değeri" olarak adlandırılan şey olması gereken Newtoncı kütleçekimle ilgili bir Φ potansiyel fonksiyonunda kapsanmasını talep ediyorum. Burada içerilen şeyin bütünlüklü açıklamasını sunmam belki de bu kitap için uygun olmaz.[38] Bununla birlikte bu reçetenin makul yanıtlar verdiği görülüyor. Buna ilişkin ayrıntılar etken araştırma konusudur. sonsuza doğru uygun biçimde azalan tekil bir parçacıkla ilgili olarak bu değiştirilmiş Schrödinger denkleminin –bu denkleme (Newtoncı bir kütleçekim alanına eşlik etmesi nedeniyle) *Schrödinger–Newton* denklemi olarak atıfta bulunuyorum– aslında

[30.13] Niçin? *İpucu*: Alıştırma [24.3]'e yeniden göz atın.

[38] *Bkz* §22.5 ve Moroz vd., 1998.

iyi huylu durağan çözümlere sahip olduğu sonucu çıkarılabilir. (Bununla birlikte tekil bir elektron için, dalga fonksiyonundaki yayılım gözlemlenebilir evren genişliğini aşar; bir hidrojen atomu için, yayılım parçacık kütlesinin küpünün tersi biçiminde azalmak üzere, gözlemlenebilir evrenden biraz küçük olur.)

Artık, en azından bir kuantum durumunun, her biri durağan olan diğer iki duruma ilişkin bir üst üste binme olduğu (adı geçen Schrödinger–Newton anlamındaki) durumlarda uygulanan nesnel bir durum indirgemesiyle ilgili mantıklı bir önerme gibi görünen şeye sahibiz. Bu önermeye göre, bu tür üst üste binmiş bir durum ansızın durağan bileşenlerinden biri ya da diğerine, E_G iki kütle dağılımı arasındaki farka ilişkn kütleçekim öz enerjisi olmak üzere, ortalama yaklaşık $\hbar/E_G$'lik bir zaman ölçeğinde indirgenecektir. Bu önermeyi (OR kütleçekime ilişkin "nesnel indirgenme"* yerine geçmek üzere) *kütleçekimle ilgili OR* olarak adlandırıyorum. Böylesi durağan durum bileşenerinin herhangi bir çiftiyle ilgili olarak, kütleçekimle ilgili E_G öz enerji niceliği aslında iyi tanımlıdır. O, iki kütle dağılımı arasındaki farkın, bu dağılımların her biri Schrödinger–Newton denkleminde kullanılmış olan "beklenti değeri" ifadesiyle aynı olmak üzere, karşılığıdır.

Bunların *enerji korunumu*yla ilgili zorluklarla karşılaşması bir OR düzenine ilişkin tüm diğer önermelere ait bir özelliktir. Özellikle Giancarlo Ghirardi, Alberto Rimini ve Tullio Weber tarafından ortaya konmuş olan yaratıcı ve zemin kırıcı önerme, pek çok diğer önermede olduğu gibi, 1986'da tam olarak bu tür bir sorunla karşı karşıya kaldı.[39] Bu sorunla "birlikte yaşamak", enerji korunumunun olmayışı kabul edilebilir derecede küçük bir seviyeye indirgenebilmek koşuşuyla, genel bir davranış halini aldı. Bu konuya ilişkin kendi bakış açım onu daha ciddiye almaktır. Üstte ileri sürülmüş olan kütleçekimle ilgili OR düzeninde, E_G'deki enerji belirsizliğinin böylesi bir potansiyel korunur olmayışın üzerini, enerji korunumunun herhangi gerçek bir ihlaline yol açmayacak biçimde kapar görünmesiyle ilgili avantaj söz konusudur. Bununla birlikte bu daha fazla çalışma gerektiren bir konudur. OR işlemindeki belirgin enerji sorunlarıyla §19.8'de değinilmiş olan kütleçekim enerjisinin kesinlikle yerel olmayan (ve tuhaf biçimde "güvenilmez") doğası arasında bir tür "değiş tokuş" bulunduğu görülür.

Bunun esasen nesnel bir işlem olup *her zaman* kütleçekimle ilgili bir olgu olması, kuantum durum indirgemesine ilişkin kendi bakış açımdır.

---

* objective reduction, –çn.

[39] Bu alanda yeni ufuklar açan pek çok kaynak için *bkz.* not 29.12.

Diyelim ki kütleçekimle ilgili OR'nin kendisine dolaysızca uygulanması için oldukça küçük olan bir sistemdeki (örneğin bir DNA molekülü) bir FAPP durum indirgenmesi olarak ele alınabilecek şeye yol açan sağlam çevresel evre uyumsuzluğun bulunduğu durumlarda bile olay budur. Böylesi durumlarda kütleçekimle ilgili OR sonucunu veren şey çevredeki kütlenin toplam yer değişikliğidir. Araştırılan durumun durağan iki duruma ilişkin üst üste binme olduğu, ele aldığım belirli durumlarda, bu indirgenme işlemine, henüz açıkladığım kütleçekimle ilgili OR düzenince aslında iyi biçimde yaklaşıldığını sanıyorum.

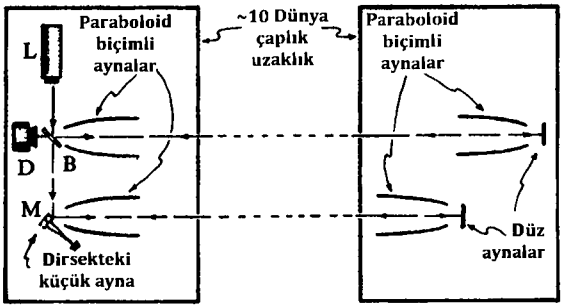
Bütünlüklü bir kuram kesinlikle eksiktir. Bu OR işlemi uyarınca, ele almakta olduğum belirli üst üste binme durumlarında bile, durum indirgenmesiyle ilgili gerçek hiçbir dinamik sunmadım. Bu anlamda, benim önermem "asgarici" bir önermedir ve ayrıca, Károlyházy, Frenkel, Pearle, Kibble, Weber, Ghirardi, Grassi, Rimini, Diósi, Weinberg, Percival, Gisin ve diğerlerinin ilham verici önermeleri gibi, daha tam bir dinamiğe heves etmez.[40] Yine de asgari önermemin açık deneysel sonuçlara sahip olduğu görülür. Bu bölümü, bu tür kütleçekimle ilgili bir OR düzeninin Doğa tarafından gerçekten saygı görüp görmediğine karar vermek üzere belirli bir potansiyele sahip olan gerçek bir deneyler sınıfına ilişkin temelde yatan fikri sunarak kapatacağım.

30.13 FELIX ve ilgili önermeler

Temel düzen, birbirinden yaklaşık bir çekirdek çapı kadar ayrılmış, hafifçe farklı iki konuma yerleştirilen bir kuantum üst üste binmesindeki küçük bir M aynasından oluşan bir "Schrödinger kedisi" oluşturmaktır.[41] Bu küçük ayna için makul bir boyut bir toz zerreciğiyle kıyaslanabilir bir şey, belki bir insan saçının onda biri kalınlığında ve 10^{14} ile 10^{16} arası bir düzende atom çekirdeği barındıran (böylece kütlesi yaklaşık 5×10^{-12} kg ve çapı yaklaşık 10^{-3}cm kadardır) bir şey olur. Bu M aynasının, biri M'ye yön-

[40] Bu tür önermeleri çalışarak çok şey edindim. Belki bunların bazıları kütleçekimle ilgili daha tam bir OR kuramına yönelik işaretçiler sağlar. *Bkz.* not 29.12, aynı zamanda belirli NO–GO teoremleriyle ilgili olarak Gisin, 1989, 1990.

[41] Bu önermeye ilişkin ayrıntılar pek çok meslektaşın önemli katkısına sahip oldu. Orijinal fikrin önemli bir bileşeni Johannes Dapprich'ten geldi; küçük aynanın boyutu, foton enerjisi ve pek çok diğer şeyle ilgili önerilen parametreleri de içeren daha özel bazı fikirler Anton Zeilinger ve kendisinin, o zaman Innsbruck'taki deney grubundaki diğerleri arasında geçen sohbetlerde ortaya çıktı. Uzay temelli deney fikri, FELIX, Anders Hansson'la yapılan tartışmalardan ortaya çıktı. Daha pratik bir zemin temelli alternatif sunar görünen yaratıcı fikirler William Marshall, Dik Bouwmeester ve Christoph Simon'a aittir. Penrose, 2000, Marshall vd., 2003.



Şekil 30.24 FELIX (Lazer interferometri X–ışınlarının serbest yörünge deneyi). Şematik bir düzenek gösteriliyor. L X–ışını lazerince üretilen bir foton B huzme ayırıcısına yönlendirilir. Fotona ilişkin sonuç durumunun aktarılan parçası kabaca 10 mikron küplük küçük bir aynaya yönlendirilir ve fotonun yansıtıldığı çarpma anında aynaya bir momentum aktarılır. Bu M'yi, diyelim ki bir saniye için tutulması gereken bir kuantum üst üste binmesine (Schrödinger'in kedisi) koyar. Bu arada fotonun dalga fonksiyonuna ilişkin iki parça bu süre geçip tüm işlem ters çevrilene dek uyumlu biçimde korunmak zorundadır (burada iki uzay platformu arasındaki yansıma yoluyla). Mükemmel bir düzenek (eşit yol uzunluğundaki) ve geleneksel kuantum mekaniği algılayıcının zamanın %0'ında tepki vermesini talep eder. Kütleçekimle ilgili OR %50'lik bir beklenti yaratır.

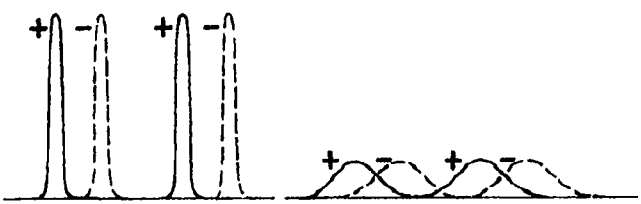
lenmiş olan iki huzmenin üst üste binmesine konmuş tekil bir X–ışınının çarpması tarafından kendi üst üste binmesine yerleştirildiğini düşünelim.

Olası bir deney düzeneği Şekil 30.24'te gösterilmektedir. Foton bir X–ışını lazeri tarafından üretilir ve bir B huzme ayırıcıya yönlendirilir. Fotonun (diyelim ki) aktarılan kısmının sonuç durumu M'yi hedefler ve çarpması, kendisinden yansıdığında bu ufak aynaya bir momentum katkısı yapacak türdedir. Ayna yüksek kalitede olmak zorundadır, bu durumda fotonun çarpmasına iç titreşimler ya da yerinden çıkan atomlar olmaksızın bir *bütün* olarak yanıt verecek "katı" bir doğada olmalıdır. Ayna, diyelim ki saniyenin onda biri kadarlık bir zamanda başlangıç konumuna geri dönecek bir biçimde asılmıştır. Bu arada fotona ilişkin dalga fonksiyonunun iki parçası bu süreç geçene kadar zamanı işaretleyerek bir şekilde tutarlı biçimde korunur ve bundan sonra tüm işlem, faz uyumunun, aslında kuantum üst üste binmeli küçük ayna aniden bir konuma ya da diğerine indirgendiğinde ortaya çıkacak durum olarak, kaybolmuş olup olmadığının anlaşılması için ters çevrilmek durumundadır.

Bununla birlikte bir X–ışını fotonunu saniyenin onda birinde uyumlu tutmak ortalama bir iş değildir. (X–ışını enerjileri ne yazık ki, küçük aynada uygun bir hareketin ortaya çıkacağı biçimde yeterli momentumun aktarılabilmesi için gereklidir.) Bu zaman zarfında uyumluluğu başarmak için bir öneri, tüm deneyi, foton uyumluluğu belki de birbirinden dünyanın çapı kadar ayrı iki uzay platformundaki büyük aynalar arasındaki

yansıma tarafından korunmak üzere, *uzay*da gerçekleştirmektir. Bu uzaklığı bir kez gidip gelmek bir foton için saniyenin onda biri kadarlık bir zaman alır. Fotona ilişkin dalga fonksiyonunun M'den yansıtılmış olan kısmı böylece M'ye geri dönerken B huzme ayırıcıdan yansıtılan parça da B'-ye geri döner. Zamanlama tüm fiziki işlemin kesin biçimde ters çevrileceği şekilde olmalıdır. Bu durumda M'nin hareketine neden olan fotona ilişkin dalga fonksiyonu parçası M'yle, M başlangıç konumuna döner dönmez yeniden karşılaşır, böylece foton daha önce kaybettiği momentumu geri kazanır ve M'yi hareketsiz duruma indirger; dahası foton dalga fonksiyonunun iki parçası B huzme ayırıcısında yeniden birleşmeye zamanlanır. Bu etkinlik süresince faz uyumluluğunda herhangi bir kaybın olmaması ve yol uzunluklarının uygun biçimde seçilmesi koşuluyla fotonun dalga fonksiyonu L lazerine yönelen tekil bir huzme olarak birleşecektir. Bu nedenle, fotonun B huzme ayırıcısından çıktığında ulaşmış olabileceği "alternatif" D konumuna yerleştirilen bir algılayıcı *hiçbir şey* algılamayacaktır (*bkz.* Şekil 30.24). Bu, FELIX önermesi olarak adlandırılmıştır (Lazer interferometri X–ışınlarının serbest yörünge deneyi).*

Saniyenin onda biri kadarlık bir sürede M'nin durumunun yer değiştirilmiş olmak ve olmamakla ilgili bir *üst üste binme* olacağına, esasen bu üstte açıklanıp Şekil 30.20'de gösterilen malzeme öbeğindeki durumun aynısı olmak üzere, dikkat edelim. Kütleçekimle ilgili **OR** düzeni uyarınca, M'nin durumu saniyenin onda biri kadarlık bir zaman ölçeğinde aniden yer değiştirmiş olma *ya da* olmamaya indirgenmelidir. Foton durumu M'-ninkiyle karışır, böylece, M'nin durumu indirgenir indirgenmez foton durumu da onunla birlikte indirgenir. Böylece foton, sonuçta B huzme ayırıcısına döndüğünde D algılayıcısını harekete geçirmek ya da L lazerine dönmekle ilgili eşit olasılıklara sahip olacak şekilde ya bir huzmededir



Şekil 30.25 Önemli bir etmen aynadaki çekirdeklere ilişkin kütle dağılımındaki "yayılım" miktarıdır. Verili bir toplam kütleyle ilgili olarak, daha sıkı biçimde yerelleşmiş bir kütle dağılımı daha kısa indirgenme süreleri verir.

* Free-orbit Experiment with Laser-Interferometry X-rays, –çn.

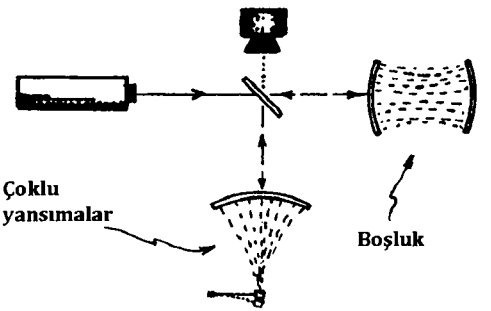
ya da diğerinde. OR'nin etkisi, algılayıcının, denemelerin yaklaşık %50'sinde yanıt vereceği biçimdeyken (mükemmel bir deneyle ilgili olarak) standart kuantum mekaniği uyarınca faz uyumluluğu kaybol*maz*sa algılayıcı pek de yanıt vermez.

Elbette pratik herhangi bir durumda, faz uyumluluğunun kaybolabileceği başkaca pek çok yol mevcut olabilir. Bu deneyin başarılı olması için, tüm bunların, kütleçekimle ilgili OR'nin özel imzasının ayırt edilebileceği şekilde, çok düşük bir seviyede tutulması gerekir. Deney, farklı küçük boyutlu ayna ve malzemeyi değişen zaman ölçeklerinde (belki de uzay platformaları arasında yinelenen yansıtmalar) kullanarak pek çok kez yinelenmek zorundadır. Ele alınan belirli OR düzenindeki önemli bir etmen küçük aynadaki çekirdeklere ilişkin kütle dağılımındaki "yayılım" miktarıdır. Belirli bir toplam kütleyle ilgili olarak, daha sıkı biçimde yerelleşmiş bir kütle dağılımı daha kısa bir indirgenme süresi verir; *bkz.* Şekil 30.25.

Üstteki FELIX önermesi teknik olarak pek çok sebep dolayısıyla son derece güçtür. Temel bir sorun, yaklaşık 10000km ayrı olan uzay platformları arasındaki X–ışınlarına ilişkin gerekli hedefleme kesinliğidir. Ne olursa olsun uzay deneyleri doğaları gereği zor ve oldukça pahalıdır ve dünya zemini temelli herhangi bir uygulanabilir alternatif mevcutsa bunun pek çok avantajı söz konusu olur. Şans eseri bu tür bir alternatif aslında pratik bir olasılık olarak belirir. William Marshall'ın yaratıcı bir önerisi ve onun uygulanmasıyla ilgili Dik Bouwmeester ve Christoph Simon tarafından ortaya konan eşdeğer derecede zekice fikirler nedeniyle zemin temelli uygulanabilir bir alternatif kağıt üzerinde ortaya çıktı ve artık etkin biçimde araştırılmaktadır. Önerme,[42] istenilen küçük ayna hareketini üretmek üzere tek bir X–ışını fotonunun çarpması yerine, ileri geri (diyelim ki) $\sim 10^6$ kez yansıtılan oldukça düşük enerjili bir fotonun (örneğin görülebilir ışık ya da hatta kızılaltı foton), artık küçük aynada aynı foton tarafından gerçekleştirilen yaklaşık 10^6 çarpmanın olacağı şekilde, kullanılabilmesidir; *bkz.* Şekil 30.26. Yazım anında, bu türdeki bir ön deneyin birkaç yıl içinde gerçekleştirilmesi önünde hiçbir temel engelin olmadığı görülmektedir. Başarıyla gerçekleştirilirse bile bu ön deney, kütleçekimle ilgili OR'ye ilişkin belirleyici bir test için gerekli olandan bir beş ya da altı büyüklük derecesi kadar yetersiz kalabilir. Yine de iki küçük aynanın konumuna ilişkin üst üste binmeyle ilgili kuantum uyumluluğu sağlanabilirse bu, mevcut "Schrödinger kedisi kaydı" üzerinden (C70 fulleren molekülleri)[43] belki de (kütle cinsinden) bir 10^{12} kat kadarlık bir ilerlemeyi

[42] *Bkz.* Marshall vd., 2003.

[43] *Bkz.* Arndt vd., 1999.



Şekil 30.26 "FELIX"in daha pratik bir versiyonu X–ışınlarını kullanmaz fakat küçük ayna üzerine tekil bir X–ışını fotonu tarafından gerçekleştirilen çarpma yerine, görülebilir ışık fotonunca bir 10^6 adet kadar çarpmayı gerektirir.

gösterir. §§30.9–12'nin bu "asgarici" kütleçekimle ilgili OR düzeninin standart kuantum mekaniğiyle *uyum* öngördüğü bu aşamaya başarılı biçimde ulaşılırsa bu durumda kütleçekimle ilgili OR'nin yeni öngörülerini test etmekte gerekli ek gelişmeler de izleyen birkaç yıl içerisinde gelecek olabilir.

Bu tür deney sınıfında ortaya çıkan son derece küçük E_G kütleçekim enerji belirsizliğinin –diyelim ki bir joule'ün 10^{-33} katı–, saniyenin onda biri kadarlık ya da daha az bir "makul" çökme ömrü sağlamaya yetmesi belki de dikkat çekicidir. Kütleçekim etkilerinin küçüklüğü genelde pek çok fizikçiyi, hepsini birlikte kovmaya yöneltme eğilimindeydi. Yine de kütleçekimle ilgili değerlendirmeleri kuantum tablomuza getirmenin etkilerinin, gözleme dayalı derin sonuçlara sahip olabileceğini görürüz. $\hbar/E_G$ zaman ölçeğinin, iki küçük $\hbar$ ve G niceliğinin *bölüm*ünü içerdiği ve böylece sıradan insani terimler biçiminde küçük bir nicelik olması gerekmediği belirtilmelidir. Bu, komik biçimde küçük olup $\hbar$ ve G'nin *çarpım*ından ortaya çıkan karakteristik kuantum kütleçekim nicelikleri, 10^{-33}cm ve 10^{-43}s ebatlarına sahip Planck uzunluğu ve Planck zamanıyla (§27.10, §31.1) tümüyle zıttır.

Kütleçekimle ilgili OR'yi test etmek üzere başarılı bir deney gerçekleştirildiğini düşünelim. Üstte özetlenmiş olan kütleçekimle ilgili OR tarafından öngörülen zaman ölçeklerinde faz uyumluluğu kaybedil*me*mişse, bu belirli düzen terk edilmek –ya da en azından ciddi biçimde değiştirilmek– zorunda kalınacaktır. Peki ya bu tür deneylerin sonuçlarının kütleçekimle ilgili OR'nin öngürülerini *destekle*diği açığa çıkarsa? Bu durumda kuantum durum indirgenmesinin aslında nesnel bir kütleçekim etkisi olduğu sunucunu çıkarabilir miyiz? Korkarım ki pek çokları bu konuyla ilgili ola-

rak hâlâ en "geleneksel" bakış açılarından birine tutunmayı tercih ediyor. Örneğin hâlâ, katı üniterlik (U) korunurken duruma ilişkin bir parçanın erişilemez hale geldiği, belki de "metrik alandaki kuantum dalgalanmaları"nda kaybolduğunu iddia edebilmekteler (*bkz.* §29.6 ve §30.15).

Kişisel olarak, daha önce kabul edilmiş olan fiziki bir kuramdaki temel değişime direnmeye ilişkin böylesi bir arzuya sahip değilim çünkü kuantum kuramı durumunda, epeyce üstte savunduğum üzere, temel değişimin aslında gerekli olduğuna inanıyorum. Yine de belki, örneğin, *özel göreliliğin* etkilerini yalnızca mutlak bir hareketsizlik durumunu kabul eden bir 19. yüzyıl dünya görüşü dahilinde uygulanan "düzeltmeler" olarak değerlendirmeyi tercih eden Lorentz gibi son derece saygın pek çok fizikçinin o görüşleriyle karşılaştırma yapmak o kadar da hayal ürünü değildir. Kütleçekimle ilgili OR'nin öngörülerinin başarılı biçimde gerçekleştirilmiş FELIX türündeki bir deneyle desteklen*diği* gerçekten açığa çıksa bile, benzer şekilde, kuantum fiziğine ilişkin zor edinilmiş 20. yüzyıl dünya görüşünü terk etmeye gönülsüz bir o kadar saygın fizikçi bulunacağına şüphe yoktur. Bana göre böylesi bir bakış açısı gericidir ve dünyayla ilgili gerçekten anlam ifade edebilecek yeni bir kuantum tablosu temelinde gerçekleşecek güçlü bir yeni ilerleme olasılığını ıskalar!

Elbette, kütleçekimle ilgili OR'nin, daha az geleneksel bakış açısını desteklemesini bekleyen bizler, bakışımızın böylesi bir deney tarafından *olumsuzlanabileceğine* ilişkin alternatif olasılığa da hazırlıklı olmak zorundayız. Buna yönelik kendi tepkim, bu konuyu tartıştığım pek çok kuantum fizikçisinin, geleneksel kuantum mekaniğinin yine sağ salim çıkacağına ilişkin katı beklentilerini ifade etmiş olması gerçeğine karşın, dikkate değer bir şaşkınlık olur. Şaşkınlığım öncelikli olarak, günümüz kuantum mekaniğinin, dünyayla ilgili fiziğin anlam ifade etmesi için ciddi biçimde değiştirilmek *zorunda olacağı* şekilde güvenilir herhangi bir ontolojiye sahip olmadığı kanaatinden kaynaklanır. Bu kendi içinde, ne *kütleçekimle ilgili* OR'nin yardımımıza gelmek zorunda olduğunu ne de burada özetlenen belirli kütleçekim önermesinin doğru olan olma zorunluluğunu ima eder.[44] Yine de, modern kuantum kuramının sabırlı ve esnek oluşunun, kolayca değiştirilmesine izin vermeyeceğini hissediyorum. Bana göre bu tür herhangi bir değişiklik eşdeğer biçimde dişli bir şeyin aracılığını gerektirir ve bilinen fizikte, Einstein'ın genel göreliliği ve ona ilişkin derinden harekete geçirici ilkeler dışındaki diğer hiçbir şey bu endama sahip değil-

[44] Örneğin hem Károlházy'nin, 1974, orijinal kütleçekimle ilgili OR düzeni hem de Percival'in, 1974, daha yeni olan bu tür önermesi burada ortaya konanlardan oldukça farklı öngörülerde bulunur.

dir. Üstte önermiş olduğuma benzer bir kütleçekimle ilgili OR düzeni beklememe yol açan şeyler bunlardır. Böylesi tartışmaların sonucu ne olursa olsun çok güçlü ve ilgi çekici pek çok *yeni* kuantum mekaniksel konunun ortaya konmasını ve 21. yüzyıl içinde yanıtlanmasını bekliyorum!

30.14 Erken evrendeki dalgalanmaların kökeni

Bu bölümü sonlandırmadan önce, kuantum kuramının kurallarındaki bir değişiklikten esasen derin biçimde etkilenebilecek olan o sayısız önemli konudan yalnızca birini, bu bölümdeki değerlendirmeler uyarınca ortaya koymak istiyorum. §27.13'te, evrenin o şekilde başladığı görülen olağanüstü derecede özel duruma dikkat çektim. Bu durumun özel olmasıyla ilgili temel yol ve ona saçma biçimdeki düşük entropisini veren şey oldukça kesin uzamsal izotropi ve türdeşlikti, böylece evrene ilişkin uzayzaman geometrisi standart kozmolojik FLRW modellerinden (§27.11) biriyle (hâlâ) dikkat çekici biçimde yakın uyuma sahiptir. Elbette sıklıkla ileri sürüldüğü üzere evren, mutlak ve kesin biçimde, böylesi simetrik bir modele sahip olmuş olamaz. Böylesi yüksek bir simetri *bir kez* söz konusu olsaydı her zaman için orada bulunmak zorunda olurdu çünkü Einstein'ın genel görelilik –ve klasik fiziğin geri kalanının– dinamiği bu tür simetriyi kesin biçimde koruyacaktır.

Peki ya *kuantum* fiziğinden ne haber? Kuantum evrim süreçlerine içkin olan "rasgelelik" bu tam simetrinin ortaya çıkmasındaki sapmalara olanak tanımaz mı? "Kuantum dalgalanmaları" kavramı bu aşamada, tam simetriden gerek duyulan hafif sapmaları sağlamanın bir aracı olarak sıkça yardıma çağrılır. Fikir, bu tür "dalgalanmaların" küçük olarak başlayabileceği fakat daha sonra kütleçekimle ilgili kümelenme yoluyla derece derece artacak olan kütle dağılımındaki düzensizliğin kaynağı olarak, sonuçta yıldızlar, galaksiler ve galaksi kümelerinin, gözlemle uyumlu olarak, gelişebileceği şekilde hareket edeceğidir.

Öyleyse kuantum dalgalanmaları ne*dir*? Bu, çok küçük bir bölgedeki bir kuantum alanının değeri yüksek bir isabetle ölçülmeye çalışıldığında bunun ilgili diğer alan niceliklerinde çok büyük bir belirsizliğe ve bu nedenle de ölçümlenen niceliğin beklenen değerinde çok seri bir değişime yol açması anlamında alan niceliklerine uygulandığı haliyle (§26.9) Heisenberg belirsizlik bağıntılarının (§21.11) bir özelliğidir. Böylece, bir alan niceliğinin kesin değerini öğrenmeye ilişkin eylem o nicelikte çılgınca bir dalgalanma sonucunu verecektir. Bu nicelik uzayzaman metriğinin bir bileşeni olabilir, böylece metriği kesin biçimde ölçmeye dönük her tür giri-

şim o metrikte devasa değişikliklerle sonuçlanacaktır. John Wheeler'ı 1950'lerde, 10^{-13} cm'lik Planck ölçeğindeki uzayzaman doğasının çılgınca dalgalanan bir "köpük" olduğunu (§29.6'nın sonuna ve Şekil 29.6'ya bakın) ileri sürmeye yönelten şey, bunlar gibi değerlendirmelerdir.

Bu tabloyu netleştirmek üzere Heisenberg belirsizlik bağıntılarının aslında ne ifade ettiğini dikkatli biçimde anımsamalıyız. Onlar bize, Doğanın en küçük ölçeklerdeki davranış biçiminde içsel olarak "bulanık" ya da "uyumsuz" bir şey bulunduğunu söylemez. Heisenberg belirsizliği bunun yerine, kendisi yoluyla değişmeli olmayan iki ölçümün gerçekleştirilebilmesini kısıtlar. Tekil bir parçacıkla ilgili olarak, ona ilişkin bir yöndeki değişmeli olmayan konum ve momentumun, kendilerine ait ilgili hataların çarpımı $\frac{1}{2}\hbar$'den küçük olmamak üzere (§21.11), aynı anda kesin olarak saptanamayacağını anımsayalım. Bununla birlikte mükemmel şekilde iyi tanımlı bir kuantum durumu söz konusudur ve herhangi gerçek bir ölçüm gerçekleştirilmezse Schrödinger denklemi uyarınca (standart **U** kuantum mekaniğinin geçerli olduğu varsayılarak) parçacığın durumu kesin olarak evrimleşecektir.

Benzer biçimde standart kuantum mekaniğinde bir uzayzamanı tanımlayan tüm değişkenler bir arada saptanamaz. Uzayzamana ilişkin kuantum açıklaması yine de mükemmel biçimde iyi tanımlı olmalıdır. Bununla birlikte Heisenberg ilkesi bize, farklı uzayzaman geometrik niceliklerinin birbiriyle değişmeli olmadıkları gibi, bu açıklamanın da klasik bir (sözde) Riemannıcı manifolda benzeyemeyeceğini söyler. Bunun yerine Wheeler tablosu uyarınca durum, çoğu düzlükten çılgın biçimde sapan ve böylece kafasında canlandırdığı üzere "köpük benzeri" bir karaktere sahip olan farklı geometrilerle ilgili çok büyük bir üst üste binmeden oluşur.

Bunun, erken evrene ilişkin duruma nasıl uygulandığını görelim. Tam simetriden sapmalar, tüm başlangıç durumu tam FLRW kozmolojik simetrisine sahipse, gerçekte "kuantum dalgalanmaları"na bağlanabilir mi? Bu duruma ilişkin **U** evrimi, "kuantum dalgalanmaları" ya da Heisenberg belirsizliğinin herhangi başka bir görünümünden bağımsız olarak bu tam FLRW simetrisini korumaya devam etmek zorundadır.[30.14] Bu, Wheeler'ın kafasında canlandırdığı son derece düzensiz "köpük benzeri" geometriyle nasıl uyuşur? Burada hiçbir çelişki olmaması gerekir çünkü durumun tümü tekil bir geometrinin değil, böylesi düzensiz geometrilerin bir *üst üste binme*sidir. Üst üste binmenin kendisi, kendilerinden oluştuğu tekil ge-

[30.14] Bu simetrinin korunmasının niçin, **U** evrimiyle ilgili oldukça zayır genel bir varsayımla birlikte yalnızca **U** evrimine ilişkin belirlenimci *eşsizlik*ten geldiğini görebiliyor musunuz?

ometrilerin sahip olmadığı bir simetriye sahip olabilir. Bir düzensiz geometri katkıda bulunursa bu durumda her FLRW uygulaması yoluyla ondan elde edilen tüm diğerleri de katkıda bulunur.[45]

Öyleyse düzensiz geometrilere ait bu çok büyük FLRW simetrik üst üste binmesinin, yalnızca, gözlemle uyumlu olan oldukça önemsiz bir biçimde rahatsız edilen belirli bir "neredeyse FLRW simetrik" evrene benzeyen bir şeyi ortaya çıkardığı nasıl düşünülür? Bunun tümüyle standart kuantum mekaniğine ilişkin **U** evrimi içinde gerçekleşebilmesinin, simetri burada tam olarak korunmak zorunda olduğundan, hiçbir yolunun bulunmadığı okuyucu için açık olmalıdır. Geometrilere ilişkin bu çok büyük üst üste binmeyi tekil bir geometri haline ya da bunun yerine geometrilerin tekil bir gometriye daha çok benzeyen daha küçük bir üst üste binme haline getiren **R** işlemi doğasında bir şey ortaya çıkmak zorundadır. Anahtar, "kuantum dalgalanmaları"ndan kaynaklanan düzensizliklerin, kendisi yoluyla, tekil başlangıç kuantum durumunun kendisini bir biçimde farklı durumlara ilişkin bir olasılık karışımına dönüştüreceği **R** benzeri bir eylem olmaksızın meydana çıkamamasıdır. Bu bizi yeniden, **R**'ye ilişkin "gerçekliğe" yönelik farklı tutumların tartışıldığı 29. bölümdeki konulara yönlendirir.

Burada, sıcaklığın belki de 10^{32} **K** değerini bulmuş olabileceği çok erken evrenle ilgilendiğimizi aklımızda tutmalıyız. O zamanlar etrafta "ölçümler" gerçekleştiren deneyciler yoktu, bu durumda standart "Kopenhag" perspektifinin (§29.1'deki (a)) nasıl uygulanabileceğini görmek güçtür. Peki ya çoklu dünyalar bakışı (§29.1'deki (b))? O tabloda gerçek hiçbir **R** söz konusu değildir ve evrenin FLRW simetrik durumu, bu durum oluşturucu uzayzaman geometrilerinden pek çoğuna ilişkin temel bir üst üste binme biçiminde temsil edebilmek üzere, günümüze kadar korunur. Bu bakışa göre alternatif uzayzaman geometrileri haline dönüşmenin ancak bilinçli gözlemciler dünyayı anlamlı kılmaya çalıştıklarında uygun olduğu varsayılır; artık her biri tekil bir "dünya" algılayan bilinçli gözlemcilere ilişkin bir üst üste binme söz konusudur.[46] "FAPP" bakışında (§29.1'deki (c)) (yeterli) çevresel evre uyumsuzluk varlığı, kendisi yoluyla, farklı geometrilere ilişkin kuantum üst üste binmemizin farklı geometrilere ilişkin bir *ola-*

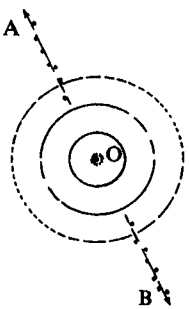
---

[45] Bununla birlikte burada bir incelik söz konusudur çünkü bir uzayzaman geometrisi üzerindeki soyut bir simetriye ilişkin eylemin basitçe yine aynı geometriyi üreteceği, genel kovaryans ilkesi nedeniyle, *bkz.* §19.6, düşünülebilir. Bu konuya ilişkin olarak alınabilecek farklı tutumlar mevcuttur fakat ne olursa olsun metinde ortaya konan genel fikir etkilenmez.

[46] Wheeler'm kendi değişik biçimi, "katılımcı evren"le ilgili olarak, *bkz.* Wheeler, 1983, bu, erken evrende meydana gelen uzayzaman geometrisine ilişkin özel seçimi bir biçimde, teleolojik olarak, belirleyen bilinçli gözlemcilerin nihai varlığıdır.

sılık karışımı biçiminde değerlendirilmesine izin verilen sinyal olarak değerlendirilir.

Olağan kuantum fiziğindeki bir örnekle kıyaslama yapmak aydınlatıcı olur.[47] Bir kabarcık odasında merkezi olarak konumlanmış bir O noktasında küresel olarak simetrik bir durumda (diğer bir deyişle 0 spinli, *bkz.* §22.11) hareketsiz bir radyoaktif çekirdek düşünün (Şekil 30.27).[48] Bunun nükleer bir fisyon yoluyla O'dan ters yönlere doğru fırlatılan iki parçaya, A ve B, bölündüğünü düşünün. A ve B'nin, kabarcık odasında iz bırakacak şekilde elektrik yüklü olduğunu düşünebiliriz. Bu örnekte merkezi O'da olan küresel simetriye sahip bir durumla başladık. Bununla birlikte bozunum sonrası küresel simetri, A ve B parçalarının kendisi üzerinde fırladığı eksen tarafından kırılır. Bunu orijinal duruma ilişkin **U** evrimi biçiminde nasıl anlamamız gerekir? Açıktır ki, üstte de belirtildiği üzere, küresel simetri korunmak zorundadır fakat durum bunu farklı eksen yönlerince verilen olası tüm durumların doğrusal bir üst üste binmesi biçiminde oluşarak gerçekleştirir. Dalga fonksiyonu merkezi O'da olan küresel bir dalga biçimine sahiptir; buna rağmen, A'ya ilişkin her konum antipodal yöndeki bir B konumuyla ilişkili olmak üzere, hem A hem de B'yi içeren karışık bir durum olduğunu aklımızda tutmak zorundayız. A ve B üzerindeki yüklerin etkisi kabarcık odasındaki malzemeyi iyonlaştırmaya başlayıp kabarcıklar oluştukça durum bu malzemeyle dolanık hale gelir, böylece tüm durumun, her bileşenin, biri A koridoruna ve diğeri B koridoruna karşılık gelen ters yönlü bir çift kabarcık izi içerdiği bir üst üste binmeden oluştuğunu görürüz.



Şekil 30.27 OR yoluyla simetri kırılımı. 0-spinli (küresel olarak simetrik) bir çekirdek, belirli bir çift ters yolu işgal ettiği gözlemlenen iki parçaya bölünür. Başlangıç durumunun **U** *evrimi küresel simetriyi korur fakat bu ters yönlerdeki (dolanık) bir kuantum üst üste binme çiftinden oluşur (Mott).* **R** *bunlardan yalnızca birinin algılanması sonucunu verir. Bu örnek başlangıçta son derece simetrik olan bir erken evren kuantum durumundaki yoğunluk dalgalanmalarının yaratılmasında ne olmuş olabileceğine ilişkin açıklayıcı bir model olarak kabul edilir.*

[47] Bu, Neville Mott'a, 1929, ait olan, α-parçacık yayınımındaki sis odasına ilişkin tartışmayla bir benzerlik taşır.

[48] Bu, kendisi yoluyla yüklü bir parçacığın geçişinin küçük bir kabarcık sicimi olarak belirtildiği standart bir düzenektir; *bkz.* not 30.47, *bkz.* Fernow, 1989.

Az önce açıklanan durum esasen erken evrendekinden farklı değildir. Simetrik kuantum üst üste binmesinin yerinin daha az simetrik alternatiflere ait bir olasılık karışımı tarafından alınabilmesi için ⊠'nin bir versiyonu gereklidir. Öyle görünüyor ki kuramcılar pratikte, kozmolojik ufuk boyutunun kuantum dolanıklıklarına yönelik bir tür "kesme" sağlamak üzere rasgele (ve mantıksız) biçimde alındığı FAPP yorumunun (§29.1'deki (c)) bir formunu benimseme eğilimindedir. Kuantum üst üste binmesi böylece, bu gerçek konum hemen hemen hiç belirgin olmamasına rağmen bir olasılık karışımı biçiminde değerlendirilir. Örneğin seçkin şişme yanlısı kozmologlar Kolb ve Turner (1994) mezun düzeyi ders kitapları *The Early Universe*'ün (Erken Evren) 286. sayfasında şunu ileri sürmekteler:

> Her mod ufuk dışına geçerken mikrofizikten ayrışır ve bir klasik dalgalanma biçiminde "donar".

Buradaki "mod" bir kuantum üst üste binmesine ilişkin bir bileşenle ilgilidir, böylece yazarların ufku bir biçimde, bir kuantum genliğinden gerçek klasik alternatife ilişkin bir olasılığa geçişe izin verecek biçimde kullanmayı denediklerini görürüz. Bu bir FAPP önermesi hattında bir şey olarak görünür ve §§29.6, 8'de tartışıldığı üzere, açık konuşmak gerekirse mantıksızdır.[49]

Kendi bakış açımda, tam FLRW simetrisinden kuantum dalgalanmaları yoluyla ayrılışların sunumu, zorunlu biçimde, nesnel durum indirgenmesine ilişkin bir kuram gerektirir. Bununla birlikte, §§30.9–12'de ileri sürülmüş olan kütleçekimle ilgili OR'ye ilişkin "asgarici" önerme, durduğu biçimde yeterince sağlam değildir. Tekil geometrilerin §30.10'da olduğu gibi zorunlu biçimde durağan olmasının gerekmediği çok sayıda uzayzaman geometrisine ilişkin kuantum üst üste binmelerinin ele alınabilmesi için daha kapsamlı bir OR önermesine gerek duyulur. Böylesi bir düzen elde edildiğinde, o hemen, karşısında durmak ya da çökmek zorunda olduğu, artan biçimde etkileyici bir gözleme dayalı veri topluluğuyla karşılaşacaktır. BOOMERanG, WMAP ve diğer gözlemler şimdiden, erken evrendeki yoğunluk/sıcaklık dalgalanmalarıyla ilgili devasa niceliklere ulaşan veriye sahiptir ve artık boru hattında diğer deneylerden gelen çok daha fazlası söz konusu olacaktır.

---

[49] O devirde, geri çekilmenin ışık hızına ulaştığı Hubble yarıçapındaki bu "kesme"nin gerçek sebebi, ne olursa olsun şişme düzenindeki Hubble yarıçapından çok daha büyük olan, *bkz.* Şekil 28.5, gerçek "ufuk boyutu"yla doğrudan ilgili değildir ve kuantum fiziğinden klasik fiziğe geçişle hiçbir ilgisi bulunmaz. Evrenin, görelilik sınırlarına bağlı olan bir alan üzerinde genişlemesiyle ilgili tümüyle klasik bir etkidir.

Burada bu durumla ilgili son bir yorum uygun olur. Nükleer fisyonla ilgili üstteki örneğimizde simetrik durumun ne kadar yüksek derecede karışık bir durum olduğunu belirttik. Bu ayrıca bizi, başlangıçtaki bir FLRW simetrik durumundan "kuantum dalgalanmaları"na bağımlı bir evrene götüren durum indirgenmeleriyle ilgili olarak da doğrudur, hatta daha büyük bir ölçüde. Bu nedenle §§23.3–6'da verilmiş olan EPR durumlarına ilişkin tartışmamızla uyumlu olarak, klasik nedenselliği çiğner görünen uzak olaylar arasında ilişki sağlayan "Bell eşitsizlik ihlalleri"ne sahibiz. Böylesi belirgin nedensellik ihlalinin, bu tür ayrı olayları nedensel etkileşime getirmeye hizmet eden şişme gibi bir mekanizmanın belirteci olması gerekmez fakat uygun herhangi bir nesnel durum indirgenme düzeninin (OR) bir sonucu olarak ortaya çıkabilir. Bununla birlikte henüz verilmiş olan tartışmadan,[50] standart FLRW kozmolojileri dahilinde bile bu tür belirgin "nedensellik ihlali"nin, nesnel bir durum indirgenmesi yoluyla başlangıç dalgalanmaları ortaya çıkarsa herhangi bir şişmeye gerek olmaksızın meydana gelebildiğini görmekteyiz.

Tüm bu konulara güvenilir biçimde yönelebilen bir kuramdan uzak olduğumuz açıktır. Yine de en azından okuyucuyu, geçerli bir ontolojinin bulunduğu bir kuantum mekaniğine sahip olmanın önemine ikna edebilmiş olduğumu umuyorum. Bu kitabın 29 ve 30. bölümlerinde ele alınmış olan konular yalnızca felsefi bakımdan ilgilenilen konular değildir. Ontolojik olarak uygun bir (gelişmiş) kuantum mekaniğine sahip olmanın önemi, bana göre abartılamaz. Bu bölümde, böylesi bir kuram bilgisinden derin bir biçimde etkilenebilecek temel konulardan yalnızca birine değindim. Erken evrenle ilgili "Kopenhag" bakış açısının gerçekten uygulanamayacağı, biyolojideki konuları da içeren daha pek çoğu, bir kuantum sistemiyle klasik bir ölçüm aleti arasında herhangi belirgin bir ayrım mevcut olmamak üzere, söz konusudur.

[50] Çeşitli insanların, böylesi "nedensel olmayan" EPR türü ilişkilerin erken evren dalgalanmalarında mevcut olmuş olabileceğini bu tür nedenlerden dolayı ileri sürdükleri görülür. Örneğin bu doğadaki bir öneri bana birkaç yıl önce Bikash Sinha tarafından sunulmuştu.

31

SÜPERSİMETRİ, BOYUTLULUK ÖTESİ VE SİCİMLER

31.1 Açıklanmamış parametreler

Olasılıkla çoğu fizikçi, 21. yüzyıl fiziğinin deposunda bizim için bulundurduklarıyla ilgili önceki bölümde özetlenmiş olandan oldukça farklı fikirlere sahiptir. Çok azı kuantum mekaniğinin çerçevesinde temel değişiklikler olacağını umar görünmektedir. Bunun yerine uzayzamana ilişkin ek boyutlar gerektiği ya da noktasal parçacıkların "sicimler" olarak bilinen genişletilmiş varlıklarla ya da belki de "membranlar" ya da p–zarlar ya da "zarlar" olarak adlandırılan –ve içlerinde "D–zarlar" olarak adlandırılan ek tuhaf nesnelerin önemli roller oynar göründüğü– yüksek boyutlu yapılarla değiştirilmesi gerektiğine benzer kulağa tuhaf gelen fikirleri savunmaktalar. "Süpersimetri" olarak anılan simetri fikrine ya da "kuantum grupları" fikrine ilişkin kafa karıştırıcı genişletmeler söz konusudur. "Değişmeli olmayan" biçiminde tanımlanan geometri kavramına ilişkin genellemeler mevcuttur ve en küçük düzeyde süreklilik yerine ayrıklığın egemen olduğu ya da uzay kumaşının kendisinin düğüm ya da bağlardan oluştuğu dünya tabloları söz konusudur. Uzayzaman kavramından vazgeçilmek ya da onun bazı başka terimlerle yeniden formüle edilmek zorunda kalacağına ilişkin fikirler mevcuttur.

Tüm bu fikirler nedir ve onlardan ne anlamalıyız? Daha önemlisi bu kadar çok fizikçiyi, sıradan insan ölçülerinde dolaysızca algıladığımız şeyle çok az benzerlik taşıyan bir "gerçeklik" tanımlamaya yönelten şey nedir? Şüphesiz, böylesi öneriler tasarlama nedeninin bir parçası kuantum mekaniğinin ve daha küçük bir ölçüdeyse genel göreliliğin başarısında yatar. 20. yüzyıl kuramları bize, doğrudan sezgilerimizin ne kadar yanlış yönlendirici olabileceğini ve "gerçekliğin" önceki yüzyıllara ait fizik tarafından sunulan tablolardan derin biçimde farklılık gösterebileceğini gösterdi. Yine de, dünyaya ilişkin olarak yalnızca yabancı ya da alışılmadık bir düzen içinde sunulması, ona inanmamıza yönelik bir zemin sağlamaz. Evrenin iç işleyişine yönelik daha derin sondalama girişiminde bu-

lundukları ölçüde modern kuramcıların araştırmalarıyla ilgili temelde yatan yönlendiricilere ilişkin bir şeyi anlamaya çalışmamız gerekecek.

İlk olarak 24. bölümde rastlayıp 25 ve 26. bölümlerde devam ettiğimiz, özel görelilik ve kuantum kuramının birleşik gerekliliklerinin bizi alanlara ilişkin kuantum kuramı bataklığına sürüklediği gerekçelendirmelere kaldığımız yerden devam etmek zorundayız. Bu, bizi daha sonra sonsuzlara ilişkin bir mayın tarlasına yöneltti; bunların çoğuyla başa çıkmak büyük ustalık gerektirdi ve sonuç olarak bizi, Doğanın ölçümlenmiş olan işleyişiyle iyi bir uyum sağlayan standart parçacık fiziği modeline yönlendirdi. Yine de, sonlu bir kuram olmak yerine yalnızca "normalleşebilir" bir kuram olarak standart modelin kendisi de sonsuzlardan bağımsız değildir. Normalleşebilirlik, kuram dahilindeki ilgili soruların çoğuna sonlu yanıtlar vererek yalnızca belirli hesaplamaların yapılmasına izin verir fakat bize, kuram tarafından tanımlanan özgül kütle değerleri ya da parçacıkların elektrik yükleri gibi belirli en önemli parametreler hakkında kavrayacağımız herhangi bir tutamak noktası sağlamaz. Terimlerin yeniden tanımlanması yoluyla bu sonsuz ölçeklendirmelerden kaçınan ve elde edilecek *diğer* niceliklere ilişkin sonlu yanıtlara olanak tanıyan yeniden normalleştirme işleminin kendisi olmasaydı bunlar, "sonsuz" (ya da belki "sıfır") olarak ortaya çıkardı. Temelde, değerleri kurama yalnızca açıklanmamış parametreler biçiminde dahil edilen kütle ve yükten "vazgeçilir"; aslında belirlenmesi gereken, temel kuark ve leptonların kütle değerleri, Higgs parçacığı, vb'ye ek olarak çeşitli türlerdeki bağlaşım sabitlerini de içeren bu tür 17 ya da daha fazla parametre mevcuttur.

Doğanın gerçek parçacıklarının kendi kütle ve yükleriyle ilgili sahip oldukları tuhaf değerleri çevreleyen önemli miktarda gizem söz konusudur. Örneğin, $-e$ elektron yükü olmak üzere,

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

denklemiyle tanımlanıp elektromanyetik etkileşimlerin kuvvetini yöneten açıklanmamış "ince yapı sabiti" α'yı ele alalım. İnce yapı sabitinin tersi oldukça yakın biçimde $\alpha^{-1} = 137$ değerini fakat daha isabetli olaraksa

$$\alpha^{-1} = 137{,}0359\ldots$$

değerini alır. Bazı fizikçiler uzun yıllar α^{-1}'in gerçekten *tam* 137 değerini alabileceğini düşündüler. Özellikle Sir Arthur Eddington (1946) ömrünün son kısmını sonuçlarından biri aslında "$\alpha^{-1} = 137$" olacak olan "temel bir kuram" üretmeye çalışarak geçirdi. Çoğu günümüz fizikçisi, α ya da diğer "Doğa sabitleri"ne ilişkin dolaysız bir matematiksel "denklem" bulmakla

ilgili olarak kendi öncellerinden daha az iyimser olabilir. Günümüzde fizikçiler bu nicelikleri basit olarak sayılar yerine, bir etkileşime dahil olan parçacıkların *enerji* fonksiyonları biçiminde değerlendirme eğilimindeler ve bunları "işleyen bağlaşım sabitleri" biçiminde adlandırmaktalar (*bkz.* not 26.21). "Doğa sabitleri" olarak andığımız gözlemlenmiş skaler değerler böylece bu "işleyen" değerlere ilişkin "düşük enerji sınırları" olur. Bu belirli sınır değerlerine ilişkin tümüyle matematiksel bir gerekçe bulmak hâlâ umulabilse de, enerjiye herhangi bir bağımlılık söz konusu olmasaydı bu değerler bir biçimde olduklarından daha az "temel" görülebilirdi.

Yük ve kütle benzeri nicelikleri, §27.10'da sunulmuş olan, kendisiyle ilgili G Newton kütleçekim sabiti, c ışık hızı, Planck sabitinin $\hbar$ Dirac formu ve k Boltzmann sabitinin tümünün

$$G = c = \hbar = \mathrm{k} = 1$$

şeklinde birime eşit sayılabildiği *mutlak* (Planck) birimler biçiminde ifade etmek çoğu kez açıklayıcıdır. Bu birimlerle proton üzerindeki yükün (ya da elektron üzerindekinin eksi işaretlisi) kabaca $e = 1/\sqrt{137}$ ve daha kesin biçimde[566]

$$e = 0{,}0854246$$

olduğu açığa çıkar ve temel kuark yükü (aşağı kuark yükünün eksi işaretlisi; *bkz.* §25.6) bu değerin üçte birine sahiptir. Mutlak birimler genellikle *Planck* birimleri (ya da bazen *Planck–Wheeler* birimleri) olarak adlandırılır çünkü (kuantum mekanik şöhreti; *bkz.* § 21.4) Max Planck 1906'da yayımlanan bir tezde bu doğada bir görüş ortaya koymuştur. Bu tezde şeyleri sabitlemek üzere ironik biçimde kendi "Planck sabiti" yerine elektrik yükünü temel birim olarak kullanmıştır. Bu düzende basitçe $e = -1$'e sahip oluruz. (Yük gizemi elbette ortadan kaybolmaz çünkü kendi düzeninde $\hbar = 137{,}036$'dır.) Bu fikirlerin önemini daha sonradan pek çok yazısında (Planck'ın elektrik yükü seçimi yerine $\hbar$'yi kullanarak) vurgulayan kişi John Wheeler'dı (*örn.*, 1975).

Tümü bu olsa, böylece Planck birimleri daha uygun biçimde *Stoney* birimleri olarak adlandırılırdı çünkü (elektron yükünü ilk olarak ölçen) İrlandalı fizikçi George Johnstone Stoney, Planck'ın 1906'da ortaya koyduğu fikirlerin aynısını epey önceden 1881'de ortaya koymuştu. Bununla birlikte Planck tarafından 1899'da yayımlanan, "Planck sabiti"nin mutlak birimleri tanımlamak üzere kullanıldığı ve esasen kuantum kuramına öncülük eden 1900 tarihli ünlü tezinden önce, başka bir tez mevcuttu. Buradan

[566] Elbette bu e, doğal logaritma tabanıyla karıştırılmamalıdır: $\mathrm{e} = 2{,}718281828459\ldots$; *bkz.* §5.3.

hareketle mutlak birimleri "Planck birimleri" olarak adlandıran geleneksel terminolojiye bağlı kalacağım!

Peki parçacıkların kütle değerlerinden ne haber? Kütle sorunu, elektrik yükününkinden çok daha belalı bir sorundur. Bu, Doğanın tüm parçacıklarının, temel bir yükün integral katları olan yük değerlerine sahip olması durumu gibi görünmektedir. Yalnızca serbestçe kendi başlarına var olabilen parçacıklarla ilgileniyorsak bunu, proton üzerindeki yük olarak ya da hadronların iç bileşenlerini dahil etmek istersek aşağı kuark yükünün eksi işaretlisi olarak kabul edebiliriz. Bu gerçeğe ilişkin olarak bütünlüklü herhangi bir kavrayış ve 137,036'ya ilişkin uygun hiçbir anlayış şimdiye dek kesinlikle var olmamasına rağmen bu sorun kütle değerleriyle ilgili olana karşılık gelenden çok daha fazla yönetilebilir görünmektedir. Kütle sorunuyla ilgili gizemli görünümlerden biri, sıradan parçacık kütlelerinin, mutlak birimlerle ölçüldüğünde sahip oldukları saçma biçimdeki küçük ebattır. Örneğin m_e elektron kütlesi mutlak birimlerle yaklaşık olarak

$$m_e = 0{,}000000000000000000000043$$

olur ve protonunki bu değerin yalnızca 1836 katıdır. Elektron nötrinosunun kütlesi üstteki değerin 10^{-5} katından küçüktür. Bu küçük kütle değerlerine ilişkin bilmeceyi ifade etmenin başka bir yolu, makroskopik bir 10^{-5}g olan (yaklaşık olarak küçük bir tatarcık kütlesi), doğal "Planck kütlesi"nin niçin Doğada karşılaşılan temel parçacıkların tümünün kütlesinden bu kadar büyük olduğunu sormaktır. Yine bu bulmacayı ifade etmenin bir diğer yolu, $1{,}6163\times10^{-35}$m'lik Planck uzunluğunun, parçacık fiziğinde normalde karşılaşılan en küçük ölçülerden 20'li bir büyüklük düzeni kadar küçük olduğunu sormaktır. Sürekli uzayzamanla ilgili normal fikirlerin gerçek herhangi bir anlam ifade etmez göründüğü uzaklık ölçeğinin altında olan bu uzaklık, kuantum kütleçekimde derin bir öneme sahip olarak değerlendirilir.[567]

Bu gizemleri görmenin bir yolu, elektrik yüklü ya da kütleye ilişkin küçük değerleri, çıplak değerin (§26.9) 1 ya da 4π gibi matematiksel olarak saygı gören bir sayı olabildiği bir yeniden normalleştirme işleminin sonucu biçiminde değerlendirmektir. Buradan hareketle, gözlemlenmiş küçük değerler, sonsuz yerine yalnızca *büyük* bir yeniden normalleştirme katsayısının sonucu olarak ortaya çıkabilir. Bu, QFT'ye ilişkin ıraksak toplam

[567] Etkileşim kuvvetleri –kabaca ilgili kavrama sabitleriyle nitelenen yeğin, elektromanyetik, zayıf ve özellikle kütleçekimiyle ilgili; $1, \frac{1}{137}, \sim10^{-6}, \sim10^{-39}$– arasındaki uyuşmazlık bazen "hiyerarşi sorunu" biçiminde adlandırılır. Goergia Devlet Üniversitesi bu bağlaşımları karşılaştırmakla ilgili hassas noktaları açıklayan sevimli bir minik sayfaya sahitir; *bkz.* see http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/forces/couple.html.

ya da integraller yakınsak bir şeyle yer değiştirilebilirse meydana gelebilir. Iraksamalar ("morötesi" ıraksamalar; *bkz.* §26.9) normalde, git gide daha da büyüyen momentumların sınır olmaksızın eklenmesini, bunlar sınır olmaksızın git gide daha küçük hale gelen uzaklıklarla ilgili olmak üzere, içermeleri nedeniyle ortaya çıkar. Buna göre, ıraksak integrallere (ya da toplamlara) yönelik (kütleçekimle ilgili) 10^{-35}m'lik Planck ölçeğinde[568] bir kesme söz konusu olsaydı sonsuzlar ortadan kaldırılabilirdi. Aslında bu tür bir fikir 1935 yılı civarında Oskar Klein tarafından ortaya kondu. Tüm bunlar, kütleçekim QFT hesaplamaları içine uygun biçimde dahil edildiğinde sonucun, yalnızca yeniden normalleşebilir bir kuram yerine sonlu bir kuram olabileceğini ve bu tür bir sonlu kuram içerisinde, açıklanmamış bu sayıların anlaşılması için bir alan bulunabileceğini ileri sürer.

Böylesi umutlar neredeyse yarım yüzyıldan fazla bir zaman öncesinde söz konusuyken şimdi, kütleçekimi tabloya dolaysız olarak katmakla ilgili sorunlar şimdiye kadar işleri yoluna sokmak yerine daha da kötüleştirdi. Einstein kuramına kuantizasyonla ilgili standart teknikler uygulandığında sonuç sonlu bir kuram yerine yeniden normalleşebilir olmayan bir kuram oldu. Bu, pek çok araştırmacıyı, kütleçekimle ilgili bir kuantum kuramı arayışlarında standart olmayan bir şey için uğraşmaya yöneltti. Kuantum (alan) kuramıyla genel görelilik arasında standart olmayan bir birlikle ilgili olarak aslında aramamız gereken şey elbette bu kitabın daha önceki bölümlerinde (özellikle bölümler 27–30'da) bulunan bir mesajdı. Bununla birlikte, şeylerin kuantum yönüyle ilgili bir değişiklik olması gerektiğine ilişkin iddiam ciddiye alınmış olan bir iddia değildir. Einstein kuramı, QFT'nin standart işlemlerine sunulduğunda sonuç aslında yeniden normalleşebilir olmayan yetersiz bir kuantum kütleçekim olur.[569] Pek çokları Einstein kuramında bir değişikliği savunurken QFT'deki bir değişikliği savunmamıştır.

31.2 Süpersimetri

Ne tür değişiklikler önerilmekteydi? Bunların birinde *süpersimetri*yle ilgili fikirler benimsendi ve bunlar *süper kütleçekim* olarak bilinen bir düzen üretmek üzere Einstein kuramıyla (ayrıca dahil olan bir torsiyonla;

---

[568] Yükle ilgili görece "ılımlı" yeniden normalleştirme katsayısı elektrodinamik ıraksamanın logaritmik doğasından kaynaklanabilir. Algısı yüksek okur elbette parçacık kütlelerine ilşkin küçük değerlerle ilgili bulmacanın ortadan kaybolmayıp yalnızca saçma biçimde küçük bir uzaklık ölçeğinde yeniden ifade edildiğini fark edecektir.

[569] Bununla birlikte t'Hooft'un §26.9'da değinilmiş olan uyarısını anımsayın.

bkz. §14.4 ve not 19.10) birleştirildi. Süpersimetri nedir? Süpersimetri fikirleri niçin çok fazla sayıda fizikçi tarafından temel modern kuramlardaki, en önemli olarak sicim kuramındaki çok sayıda gelişmenin temelinde yatması derecesine dek, "iyi bir şey" olarak değerlendirilmektedir? Aslında süpersimetri ilkelerine, bu fikirler düzenine ait öngörülerin Doğanın kendisine ait şeyler düzeninde şimdiye dek gözlemlenmiş şeylerle az ya da hiçbir benzerlik taşımaz görünmesi gerçeğine karşın, dikkat çekici bir önem atfedilmiştir.[570]

Bu noktada, eğilimimi yeniden açıklamak ve okuyucuya gerekli yasal uyarıyı yapmak zorundayım. Kendimi, süpersimetri düzeninin fiziki anlamıyla ilgili, en azından günümüz parçacık fiziğinde ve onu temelleyen kuramlarda işe koşulan biçimle ilgili, hiçbir biçimde ikna olmamış olarak buldum. Şu an itibariyle gözlemler süpersimetri iddialarıyla ilgili olarak kesinlikle fazlaca –olasılıkla hiç– destek sunmamaktadır. Fikirlerin etkileyiciliği, çok daha övgüye değer bir matematiksel zarafetten ve süpersimetrinin, kendi şemsiyesi altına giren o QFT modellerindeki büyük sonsuz yığınlarını sadeleştirmesiyle ilgili şüphe duyulmaz değerinden kaynaklanır. Kontrol edilemez sonsuzlardan bağımsız olması gereken bir QFT oluşturmakla uğraşan bir fizikçi olduğunuzu düşünün. Bu durumda kuramınızın süpersimetrik olduğunu kabul ederseniz göreviniz çok daha kolay hale gelecektir!

Süpersimetrinin ardındaki temel fikir onun, fermiyonlar ve bozonların, kendisi yoluyla bir tür simetri ilişkisi uyarınca "eşleştirilebileceği" bir araç sağlamasıdır. §25.5–8'de gördüğümüz üzere, parçacık fiziğine ilişkin normal simetri grupları, yalnızca bozon kümelerini kendi etrafında ve yalnızca fermiyon kümelerini kendi etrafında "döndür"ür. Bozonları fermiyonlara ya da fermiyonları bozonlara "döndür"mez. Öte taraftan süpersimetriyse yalnızca bunu yapar. §26.2'den, bozonlar değişme kurallarını sağlarken fermiyonların karşı–değişme kurallarını sağladığını anımsayın. Birini diğerine gönderen işlemcinin kendisi karşı–değişme kurallarını sağlamak zorundadır. Bununla birlikte olağan bir sürekli gruptan gelen işlemciler grubun, bir Lie cebiri oluşturan sonsuz küçük üreteçleridir; *bkz.* §13.6. Olağan Lie cebiri elemanları karşı–değişme kurallarını değil değişme kurallarını sağlar. Bu, gerekli işlemcilerin, olağan bir sürekli grubun değil fakat Lie cebiri kurallarının bazı üreteçlerin aslında değişme kurallarının yanında karşı–değişme kurallarını da sağlayacağı şekilde genişle-

[570] Tarih, kişilikler ve süpersimetriyi temelleyen esas fikirlere ilişkin açıklamalarda bulunan oldukça kullanışlı bir derleme için *bkz.* Kane, 2001. Biraz daha teknik bir şey için *bkz.* Kane, 1999.

tildiği, *süper grup* olarak adlandırılan daha geniş bir kavramın sonsuz küçük üreteçleri olduğu anlamına gelir.

§§26.2,3'te, QFT'ye ilişkin yaratma, yok etme ve alan işlemcilerince sağlanan

$$\boldsymbol{ab} \pm \boldsymbol{ba} = \boldsymbol{c}$$

benzeri denklemler türü şeylerle (§26.2'deki $\Psi^*\Phi \pm \Phi\Psi^* = \mathrm{i}^k\langle\psi|\phi\rangle\boldsymbol{I}$ gibi denklemlerde) zaten karşılaşmıştık. Bununla uyumlu olarak, bir *süper* Lie cebiri olağan bir Lie cebiriyle, tanımlayıcı bağıntılarda artık bir artı (+) işareti olması dışında, aynı biçimde oluşturulur. §13.6'da bir Lie cebirine ilişkin tanımlayıcı bağıntıların, $\gamma^{\chi}_{\alpha\beta}$ yapı sabitleri ve $[\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{E}_\beta] = \boldsymbol{E}_\alpha\boldsymbol{E}_\beta - \boldsymbol{E}_\beta\boldsymbol{E}_\alpha$ olmak üzere, $[\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{E}_\beta] = \gamma^{\chi}_{\alpha\beta}\boldsymbol{E}_\chi$ biçimine sahip olduğu belirtildi. Bu bağıntılar, $\boldsymbol{ab}$ ve $\boldsymbol{ba}$ arasında normal eksi işareti bulunduğunda üstte gösterilmiş olan denklem biçimine sahip olur. Bununla birlikte bir süper Lie cebiriyle ilgili olarak ayrıca, hem $\boldsymbol{a}$ hem de $\boldsymbol{b}$ (her ikisi de bozonik ya da biri fermiyonik biri bozonik olmak yerine) fermiyonik nicelikler olduğunda artı işaretine de izin veririz. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_+$ notasyonu bu tür karşı–çeviricilerle, diğer bir deyişle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_+ = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}$'yla, ilgili olarak alışıldık Lie parantez notasyonunu, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}$, tamamlamak üzere kullanılmak eğilimindedir. Aslında bu, alışıldık bir Lie cebiri notasyonunun ötesine geçmemizi gerektirir.

Süper gruplara ilişkin üreteçler normalde belirli bir şekilde oluşturulmuş olarak açıklanır. Sıradan gerçel sayı nicelikleriyle başlamak yerine, bu üreteçleri, §11.6'da gördüğümüz üzere, değişme özelliklerinin yanı sıra karşı–değişme özelliklerine de sahip olan bir Grassmann cebirine ait elemanlar olarak kabul ederiz. Bunun nasıl işlediğine daha ayrıntılı olarak §31.3'te bakacağız.

Süper gruplar artık saf matematikte saygın bir yer tutar. Dahası süpersimetriyle ilgili fikirler matematiksel argümanlarda, başka biçimlerde elde etmesi o kadar da kolay olmayan sonuçları elde etmek üzere, doğrudan uygulanabilmektedir.[571] Bununla birlikte bu bize, kullanıldığı biçimiyle süpersimetrinin, fizikle dolaysız herhangi bir ilişkisi olup olmadığını söylemez. Diğer taraftan süpersimetrinin, dolaysız fiziki anlama sahip *olan* matematiksel sonuçlara yönlendirmek ya da onları kurmaktaki faydalılığını kanıtladığı çeşitli örnekler mevcuttur.[572] Yine de bu hâlâ bana,

[571] 4–manifoldlarla ilgili Donaldson kuramında büyük sadeleştirmelere yol açan süpersimetrik Yang–Mills kuramıyla ilgili *bkz.* Witten, 1982; Seiberg ve Witten, 1994; *bkz.* Donaldson ve Kronheimer, 1990. John Baez'e göre, Seiberg–Witten kuramı, Donaldson kuramındaki bazı kanıtları kendi orijinal uzunluklarının binde birine kadar kısaltır.

[572] Pozitif enerjiyle ilgili süpersimetrinin kullanılan kanıtlar için *bkz.* Witten, 1981; Deser ve Teitelboim, 1977. İlginç kara delik eşitsizlikleriyle ilgili *bkz.* Gibbons, 1997.

parçacık fiziği ya da QFT'yle herhangi dolaysız temel bir ilişkiye sahip süper gruplarla ilgili çok büyük bir yük taşıyormuş gibi görünmüyor.

Süpersimetrinin parçacık fiziğinde oynayacak gerçek bir role sahip olduğuna ilişkin ne gibi kanıtlar söz konusudur? 25. bölümde açıklanan standart modeli anımsayın. Ona ilişkin yeniden normalleşebilirlik, büyük oranda kendisine ait parametrelerin bir "ince ayar"ına bağlıdır. Bu bağıntılar büyük oranda kendisinin, $SU(3)\times SU(2)\times U(1)/Z_6$ simetrisine (§25.7) gerek duyması biçiminde anlaşılabilir. Yine de bazı iddialara göre,[573] standart model bu ilişkilere ek olarak bazı çok kesin ince ayarlamalara gerek duyar. Bunu düzenlemek üzere ek simetriler yardıma çağırılabilir. Süpersimetri bu tür ince ayarı gerçekleştirmenin bir aracı olarak önerilmiştir. Buradan hareketle böylesi fikirler birleşik büyük kuramlarda (§25.8) sıklıkla kullanılmıştır. Yine de böylesi GUT'lara inanmak üzere bir sebebimiz var mı? Şimdiye dek bununla ilgili gözleme dayalı hiçbir kanıt yoktur.

Süpersimetriyle ilgili çekici özellikler aslında, onun, bozonlarla fermiyonların ilişkilenmesine yönelik bir yol sunması ve süpersimetrik QFT'leri sonlu yanıtlar sağlar hale getirmenin süpersimetrik olmayan QFT'lere göre çok daha kolay olması gibi görünür. Bozonların fermiyonlarla süpersimetrik bir eşleşmesiyle, bir kümedeki sonsuzlar diğer kümedeki sonsuzları iptal eder hale getirilebilir. Bu, QFT oluşturan kişinin işini süpersimetrinin olmadığı durumdakinden çok daha kolay hale getirir. Bununla birlikte bu bize, Doğanın da böyle yaptığını söylemez. Elbise kolunda oldukça farklı hilelere de sahip olabilir.

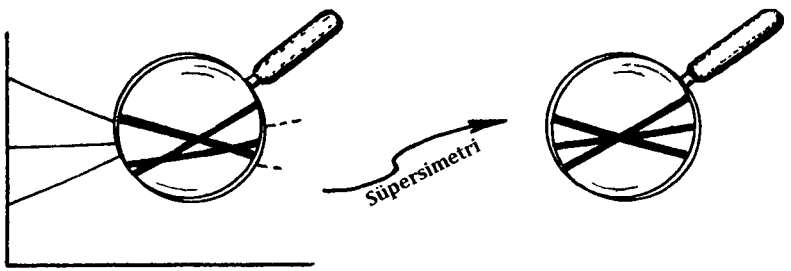
Şu halde, (bugün kullanılan biçimiyle) süpersimetriyle ilgili temel zorluk onun, Doğadaki temel her parçacığın, orijinal parçacığın spininden $\frac{1}{2}\hbar$ kadar bir farklılık gösteren spine sahip "süper eş" denen şeye sahip olmasını talep etmesidir. Elektrona eş olarak 0–spinli bir "selektron", her kuark türüne eşlik edecek 0–spinli bir "skuark", fotona eş olacak $\frac{1}{2}$–spinli bir "fotino", W ve Z bozonlarının ilgili eşleri olarak $\frac{1}{2}$–spinli birer "wino" ve "zino", vb, vb'ye gerek söz konusudur. Sorun şimdiye dek böylesi hiçbir "süpersimetrik eş" bulunmamış olmasıdır. Buna ilişkin resmi açıklama, doğası hiçbir zaman uygun biçimde tanımlanmamış olan bir "süpersimetri kırılımı" mekanizması nedeniyle, bu varsayılmış süpersimetri eşlerinden her birinin, kendisine eş olduğu parçacıktan çok daha fazla kütleli olmak zorunda oluşudur. Gözlemlenmemiş bu parçacıkların sahip olduğu artık kabul edilen kütle türü proton yaklaşık bir bin katı ya da daha fazlasıdır. Bunun bir miktar yapmacık göründüğüne inanmakta yalnız olmaktan çok uzak olduğumu belirtmeliyim.

---

[573] *Bkz.* Greene, 1999, not 5, s. 399.

İki "eş"ten ($\frac{1}{2}\hbar$ kadar) daha küçük spine sahip olanının, (çiftin her iki üyesinin de kütlesiz olması durumu dışında) çiftin aşırı deredede daha kütleli olan biçiminde varsayılması telep edilir görünmektedir. Olasılıkla, yalnızca "temel" olarak kabul edilen parçacıklar (görünüşe göre bunlar foton, graviton, W ve Z bozonları, gluonlar, leptonlar ve kuarklar olmak üzere) süper eşlere sahip olur. Aksi halde pionlar gibi 0–spinli parçacıklarla sorunumuz söz konusu olur. 0–spinli, örneğin hâlâ keşfedilmemiş Higgs boznu gibi, temel parçacıklar mevcutsa bu durumda bunlar, (negatif spin dışta bırakıldığından) bu belirli hesaplamaya göre, süper eşlerinden daha kütleli sayılmak zorunda olur. Bu doğruysa niçin Higgs bozonunun süper eşi bulunmadı? Yine, hem süpersimetri hem de şişme kozmolojisi yanlıları, son olgunun skaler φ parçacığının (§ 28.4) "süper eş" tablosuna nasıl uyum sağladığını açıklamak zorundalar.

Şimdilerde süpersimetriyle ilgili bir destek sunar biçimde sıkça alıntılanan parçacık "pozitif" kanıt, parçacık fiziğindeki üç kuvvetin (yeğin, zayıf, elektromanyetik), Büyük Patlamadan bir 10^{-39} saniye (yalnızca yaklaşık 10000 Planck anı) sonra evrenin sıcaklığı müthiş bir değere sahip olduğunda (yaklaşık 10^{28}K) son derece simetrik bir bileşik düzende bir araya geldikleri iddia edilen biçimlere ilişkin belirli fikirlerle ilişkilidir.[574] Fikir, böylesi birleşmenin, o sıcaklıktaki etkileşim kuvvetlerinin tümünün aynı olması gerekliliğidir. Olağan koşullarda yeğin ve zayıf etkileşim kuvvetleri arasında (ikisi esasen dolaysız biçimde karşılaştırılamamasına rağmen) 10^{13}'lük bir çarpan bulunduğu belirtilmelidir. Argüman, yeniden normalleştirme etkileri dikkate alındığında (§26.9'dan, bir parçacığa



Şekil 31.1 Belirli bir "birleşik büyük" bakış açısı uyarınca "işleyen bağlaşım sabitleri" biçiminde ele alınan yeğin, zayıf ve elektromanyetik etkilşimlere ilişkin bağlaşım sabitlerinin tümü, Büyük Patlamadan yaklaşık 10.000 Planck anı kadar sonra ($\sim 10^{-39}$s) gerçekleşmiş olan 10^{28}K dolayındaki yeterince yüksek sıcaklıklarda tam olarak aynı değere erişmelidir. Süpersimetriye, üç değerin hepsini kesin biçimde bir araya getirmek üzere gerek duyulduğu bulunmuştur.

[574] *Bkz.* Lawrie, 1998 ya da daha fazla ayrıntı için *bkz.* Mohapatra, 2002.

ilişkin gözlemlenen yükün çıplak yükünden ne kadar farklı olabileceğini anımsayalım), böylesi devasa sıcaklıklarda "çıplak" değerler kendi hallerine geri dönmek üzere, bu kuvvetlerin tümünün bir araya geleceğidir. (§31.1'in sonunda değinilen "işleyen bağlaşım sabitleri" kavramını anımsayın.) Görüşler, süpersimetri olmaksızın değerlerin pek de bir araya gelmeyip birbirini "ıskala"dığını iddia eder (*bkz.* Şekil 31.1); yine de tabloya süpersimetri dahil edildiğinde eğriler şanlı bir rastlantıyla bir araya gelir ve parçacık fiziğinin büyük birleşimi ortaya çıkabilir!

Okur, inanç eksikliğimi hissetmiş olabilir. (§28.3'te, evren sıcaklığının yeterince yüksek olduğu durumda, kendileriyle ilgili olarak "simetri onarımı"nın meydana geldiği kuramlara ilişkin bazı sıkıntılarımı zaten ifade etmiştim.) Süpersimetriye ilişkin gözleme dayalı destek oldukları iddia edilen bu belirli fikir derlemesinde muazzam kestirimler içerilir. Bunlardan biri, bugünün hızlandırıcılarınca erişilebilir olan 10^{28}K ve kabaca 10^{14}K arasındaki devasa enerji (sıcaklık) boşluğunda esasen yeni hiçbir şeyin açığa çıkmaması gerektiği varsayımıdır. Bu, kendi içinde akıl almaz bir kestirim gibi görünüyor ve bu argümanların süpersimetriye, gözleme dayalı herhangi bir destek sunar biçimde nasıl değerlendirilebildiğini anlamıyorum.

31.3 Süpersimetriye ilişkin cebir ve geometri

Bu söyleve başladığım süper kütleçekim kuramına dönelim. Yukarısıyla uyumlu olarak, gravitonun, *gravitino* olarak adlandırılan $\frac{3}{2}$–spinli bir süper eşinin mevcut olması gerekir. Var olduğu kabul edilen bu parçacık, şiddetli bir süpersimetri kırılımı söz konusu olmadıkça gravitonun kendisi gibi kütlesizdir. Gravitino geometriyle nasıl ilişkilenir? Einstein bize kütleçekimin uzayzaman eğriliği tarafından açıklandığını öğretti (§17.9 ve §19.6). Bu durum, gravitinonun buna karşılık gelen (süper) geometrik bir oynaması gerektiğini mi ima eder? Böylesi bir role duyulan istekle uyumlu olarak pek çok süper kütleçekim kuramcısı (10 ve 12. bölümlerde açıklanan) olağan *manifold* kavramının genellenmesi gerektiğini iddia eder. Buradan hareketle *süper manifold* kavramı ortaya konmuştur. Bunu, karşı–değişmeli elemanları içermek üzere genellenmiş olan olağan *koordinatlar* kavramıyla birlikte çok resmi bir biçimde açıklanmış olarak düşünebiliriz. Olağan bir manifoldla ilgili olarak koordinatlar genellikle gerçel sayılardır (ya da karmaşık bir manifold ele alınıyorsa karmaşık sayılar; *bkz.* §12.9). Bir süper manifoldla ilgili olarak bunların bir Grassmann cebirine (§11.6) ait elemanlar olduklarını kabul ederiz.

Çoğu süpersimetri kuramcısı, kendilerine ait süpersimetrik alan niceliklerinin üzerinde yaşadığı "manifold" doğasına yönelik olarak böylesi hassas böylesi hassas bir yaklaşımı (standart genel göreliliğin "geometrik" doğası bunu süper kütleçekimle ilgili olarak talep eder görünse bile) kabul etmez. İzleyen açıklamalarda "süper manifold" bakış açısına kesin olarak bağlı kalmak gerekli olmayacak. "Süper cebir" fikirleri yalnızca, olağan bir uzayzaman manifoldu üzerinde tanımlı niceliklerle ilgili olarak değerlendirilebilir.

Böylesi en basit cebir, tekil bir karşı–değişmeli ε elemanını $\mathbb{R}$ gerçel sayı sistemine eklemlersek elde edilir. ε niceliği kendisiyle karşı–değişmeli olmak zorudadır: $\varepsilon\varepsilon = -\varepsilon\varepsilon$ ve buradan $\varepsilon^2 = 0$. Böylece cebirin her elemanı, a ve b, ε'la değişmeli gerçel sayılar olmak üzere,

$$a + \varepsilon b$$

biçimine sahiptir. Bu tür iki sayının toplamı ve çarpımının

$$(a + \varepsilon b) + (c + \varepsilon d) = (a + c) + \varepsilon(b + d)$$

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon(ad + bc)$$

ifadeleriyle verildiğine dikkat edin. Ayrıca ε çarpım terimlerini göz ardı ettiğimizde basit olarak olağan cebir kurallarını yeniden elde ettiğimize de dikkat edin.

Farklı birçok karşı–değişmeli süpersimetri üretecine, diyelim ki $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, sahip olduğumuz da bu, hâlâ geçerli olur:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = -\varepsilon_j\varepsilon_i \text{ ve buradan } {\varepsilon_i}^2 = 0.$$

Süper cebirle ilgili genel elemansa

$$a + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_N\varepsilon_N + c_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + c_{13}\varepsilon_1\varepsilon_3 + \cdots + f_{12\ldots N}\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_N$$

biçimine sahip olur.[31.1] Cebir, herhangi bir elemanın yalnızca (hiçbir ε'un içerilmediği) "olağan" a kısmını alırsak bu durumda yalnızca olağan (gerçel ya da karmaşık) sayılara ilişkin tanıdık cebiri elde edeceğimiz biçimde davranır. Cebirin "süper" kısmı kalandır. Elemanlarından herhangi biri yeteri kadar yüksek bir üsse yükseltilirse tümüyle yok olması anlamında "üstel sıfır"dır.[31.2] Bu "olağan" ve "süper" kısmıyla ilgili olarak bazen sırasıyla hayal ürünü "gövde" ve "ruh" terminolojisi kullanılır.

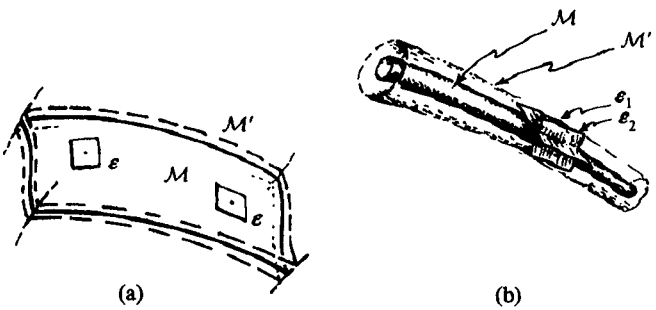
Ne olduğuna ilişkin bir "resme" sahip olabilmekten hoşlanan biri olarak süper cebirler ve süper manifoldlarla ilgili bu tür tümüyle resmi bir

---

[31.1] $N = 3$ durumunda, böylesi iki nicelikle ilgili toplam ve çarpımı yazın. $a \neq 0$ olmak üzere bu tür bir elemanın çarpmaya göre tersi nedir?

[31.2] Bunu gösterin. Hangi üs?

açıklamayı her zaman yetersiz buldum. Bu şeylere bakmanın aslında daha geleneksel bir geometrik yolunun var olması şanstır. Gelin şimdilik yalnızca tekil bir ε süpersimetri üreteciyle ilgili en basit durumu ele alalım. Karşı–değişmeli bir nesne olması gerektiğinden onu, bir ε 1–biçimlisi olarak düşünmeyi deneyebiliriz. Bununla birlikte o yalnızca, çalışmakta olduğumuz olağan uzaya –$\mathcal{M}$ n–manifoldu diyelim– ait olağan bir 1–biçimli olamaz. $\mathcal{M}$ içerisindeki olağan tüm biçimler zaten alınmış olan anlamlara sahiptir (*bkz.* §12.4). ε'nin, daha büyük $\mathcal{M}'$ manifolduna ait fakat $\mathcal{M}$'nin noktaları kendisine yasaklanmış bir 1–biçimli olması gerekmek üzere, yapmak zorunda olduğumuz şey $\mathcal{M}$'yi, $(n+1)$–boyutlu bir $\mathcal{M}'$ manifoldu içine bir *hiper yüzey* olarak (bir "hiper yüzey" çevresel uzaydan daha küçük bir alt manifold olmak üzere; *bkz.* not 27.11) gömülmüş biçimde, düşünmektir. $\mathcal{M}''$yle, $\mathcal{M}''$nün $\mathcal{M}'$den dışa doğru uç veren ek bir boyut sağladığı $\mathcal{M}'$ye ait noktalar dışında ilgilenmemiz gerekmez. *Bkz.* Şekil 31.2a. (Yalnızca, $\mathcal{M}'$nin $\mathcal{M}''$ndeki *birinci* komşuluğu olarak anılan şeyle ilgileniriz. Bu, $\mathcal{M}'$den çıkan ilk türev anlamına gelir, bu durumda $\mathcal{M}'$den çıkıp $\mathcal{M}''$nü "işaret eden" tanjant ve kotanjant vektör ya da uzay kavramlarıyla ilgileniriz, yoksa $\mathcal{M}'$den dışarıya doğru olan *eğrilik* gibi daha yüksek dereceli türev kavramlarıyla değil.) Yaptığımız şey, tüm niceliklerimizin $\mathcal{M}$ manifoldundaki n bağımsız koordinata ilişkin fonksiyonlar biçiminde gösterilebilmesi anlamında hâlâ n–boyutludur. "Ruh" nicelikleri $\mathcal{M}'$den çıkıp $\mathcal{M}''$nü işaret eden yönlerle ilgiliyken "gövde" nicelikleri basit olarak $\mathcal{M}'$nin kendisi içindeki yönlerle ilgilidir.



Şekil 31.2 Süpersimetri üreteçlerinin geometrik açıklaması. (a) Tekil bir ε üreteciyle ilgili olarak, ε, $\mathcal{M}'$ içinde $\mathcal{M}$'de tanımlı bir 1–biçimli olmak üzere (ve ε Şekil 12.7 ve §12.3'teki gibi $\mathcal{M}$'ye tanjant olan n–düzlemini tanımlar), $\mathcal{M}$ n–manifoldumuzu $\mathcal{M}'$ $(n+1)$–manifoldundaki bir hiper yüzey olarak değerlendirin. $\mathcal{M}''$yle yalnızca $\mathcal{M}'$deki "birince derece"ye kadar ilgileniriz fakat $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}'$den dışarıya doğru işaret eden ek bir boyut sağlar. (b) N adet süpersimetri üreteciyle, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, $\mathcal{M}$ n–manifoldu artık bir $\mathcal{M}'$ $(n+N)$–manifoldu olarak değerlendirilir, $\mathcal{M}''$yle yine yalnızca $\mathcal{M}'$den dışarıya doğru birinci dereceye kadar ilgileniriz. N adet bağımsız 1–biçimli, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, $\mathcal{M}'$den dışarıya $\mathcal{M}''$ne doğru işaret eden N adet ek yönü sezmeye çalışır.

N adet süpersimetri üretecine, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, gerek duyduğumuzda da durum esasen farklı değildir. n–manifoldumuz $\mathcal{M}'$yi artık bir $\mathcal{M}'$ $(n+N)$–manifolduna gömülü olarak düşünürüz. $\mathcal{M}''$yle yine yalnızca onun en yakın (birinci) $\mathcal{M}$ komşuluğunda ilgileniriz. $\mathcal{M}'$den dışarıya doğru $\mathcal{M}''$nü işaret eden N adet ek yönü[575] denemek üzere artık N farklı 1–biçimliye, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, gerek duyarız. Bana göre (32. bölümde güçlü biçimde bir rol oynayan Abhay Ashtekar da dahil olmak üzere pek çok kişiye ait)[576] bu tablo, süpersimetri ve süper manifoldlara ilişkin temel fikirleri normalde benimsenmiş olan resmi (ve oldukça gizemli görünen) işlemlerden çok daha açık hale getirir. "Gövde" yalnızca, tümüyle $\mathcal{M}'$ye içkin niceliklerle ilgiliyken "ruh"un $\mathcal{M}'$den çıkıp $\mathcal{M}''$ne "doğru işaret eden" bir bileşene sahip niceliklerle ilgili olduğuna dikkat edin; *bkz.* Şekil 31.2b.

Bu açık geometrik yorumlamayla birlikte dahi, "süper cebir"in genellikle işe koşulduğu biçimde, geometrik tabloyla uyum sağlanması gerektiğinde, tuhaflıklar söz konusudur. p bir tek sayı olmak üzere, $\mathcal{M}'$deki olağan bir $\boldsymbol{\alpha}$ p–biçimlisi, bir $\boldsymbol{\varepsilon}$ süpersimetri üreteciyle, $\boldsymbol{\varepsilon}$'la $\boldsymbol{\alpha}$ arasındaki çarpımı bir kama çarpımı olarak kabul edersek, karşı–değişmeli hale gelir. Bununla birlikte bu, normalde $\boldsymbol{\varepsilon}$'nin $\boldsymbol{\alpha}$'yla değişmeli olduğu kabul edilen, süper cebire yönelik standart yaklaşımlardaki normal uzlaşı değildir. Bu temel olarak notasyonla ilgili bir konudur ve süpersimetri üreteçlerinin biçimlerle çarpımını ele alacaksak bunu resmi olarak bir kama çarpımından çok simetrik bir çarpım biçiminde kabul edebiliriz. Bu, (resmi) bir matematiksel anlam ifade etmesine rağmen, burada desteklediğim "temiz" geometrik tabloyu bir biçimde bulanıklaştırır.

Esasen, "olağan" parçacık fiziği kuramlarındaki süpersimetri uygulamalarında genellikle en basit durum olan $N = 1$ durumu benimsenir. Sebep, büyük N'ler için süper eşlerin çoğalmasının, temel her parçacık "eşler"e ilişkin bir 2^N–liye ait olmak üzere, çok daha fazla oluşudur. Gözleme dayalı sorun bu olmadan da yeterince kötüdür! Her durumda ilgili süper - gruplar, $\mathcal{B}$'nin kendisinden N kez daha büyük boyutlu bir $\mathcal{B}'$ uzayı içindeki yakın komşuluğuna genişlemesiyle ilgili "döndürmeler"le birlikte, "iç simetriler" içeren dönüşümler biçiminde düşünülebilir.

31.4 Yüksek boyutlu uzayzaman

Süpersimetri ve "süper geometri"nin ne olduğuyla ilgili biraz daha iyi fikir sahibi olduğumuza göre süper kütleçekim konusuna dönelim.

---

[575] N'de 2'nin, bu bir spinördeki bileşen sayısı olmak üzere, *bkz.* §11.5, §33.4, bir üssü olma eğilimi söz konusudur. Bu, süpersimetri cebirindeki elemanlara ilişkin 2^N sayısıyla karıştırılmamalıdır. Süpersimetriyle ilgili bir tartışma için yaratıcılardan biri olarak *bkz.* Wess ve Bagger, 1992.

[576] Süper manifoldlarla ilgili daha fazla bilgi için *bkz.* DeWitt, 1984; Rogers, 1980.

1970'lerin sonunda bu fikri kuşatan orijinal coşku, standart Einstein genel göreliliğinin aksine süper kütleçekiminin yeniden normalleşebilir olmasının açığa çıkabilmesiyle ilgili umuttan kaynaklandı. Einstein vakum kuramında yeniden normalleşebilir olmayan ıraksamalar "2–döngü düzeyinde" görünmüştü; "döngüler" Feynman diyagram genişlemeleriyle, "döngü sayısı" Feynman grafiğini bir ağaç grafiğine indirgemek üzere gerekecek kesik sayısıyla ilgilidir (*bkz.* §26.8, özellikle son paragrafı ve Şekil 26.8 ve ayrıca §§26.9, 10). Bununla birlikte madde varlığında böylesi ıraksamalar halihazırda, gerçek bir felaket olarak değerlendirilebilecek 1–döngü düzeyinde görünür. Süper kütleçekiminde bu 1–döngü ıraksamaları, kuramın izin verdiği madde biçimleriyle ilgili olarak sihirli biçimde ortadan kaybolur. Pek çok insan bunun tüm döngü derecelerinde süreceğine ilişkin büyük umuda sahipti. Ne yazık ki durum böyle olmadı ve yeniden normalleşebilir ıraksamalar yine süper kütleçekimindeki 2–döngü düzeyinde bulundu.[577] Daha sonradan, uzayzaman boyutluluğu standart olan dörtten on bire yükseltilmesi gerekecekse bu durumda konuların çok daha fazla umut verici görüneceği fark edildi. Buna karşın, süper kütleçekiminin bütünlüklü bir yeniden normalleşebilir versiyonu hâlâ elde edilemedi ve çok daha güncel çalışmalar bu biçimde elde edilemeyeceğini gösterdi.[578]

Fizikçilerin, uzayzaman boyutluluğunun doğrudan deneyimlediğimiz dörtten (bir zaman ve üç uzay) farklı olabilmesi olasılığını ciddiye alabilmeleri nasıl mümkündür? Matematiksel alıştırmalara göre böylesi yüksek boyutlu şeyler sorunsuz görünür fakat bunun, "uzayzaman"ın gerçekten gerçek uzayla zamanın birleşimi anlamına geldiği fiziki bir kuram olması gerekiyor. Aslında §31.7'de göreceğimiz üzere sicim kuramı uzayzamanın gerçekten dörtten fazla boyuta sahip olma zorunluluğuna gerek duyar. Erken kuramda boyut 26 olarak kabul edilmişti fakat (süpersimetri fikirlerini de içeren; *bkz.* § 31.2) sonraki yenilikler bu uzayzaman boyutluluğunun 10'a düşmesine yol açtı.

Tam bir hayal olan bu fikri görevden almadan önce, §15.1'den, 1919'da (o zaman için) az bilinen Polonyalı matematikçi Theodor Kaluza tarafından ortaya konmuş olup bu bölümün başlarında karşılaştığımız aynı İsveçli matematiksel fizikçi Oskar Klein tarafından daha da ileri götürülmüş olan zekice düzeni anımsamak zorundayız. Ek boyutların (4'ten fazlası) uygun bir biçimde *küçük* boyutlar olarak kabul edilmesi sağlandığında onların doğrudan farkına varmayabiliriz. Bu bağlamda "küçük" ne anlama

---

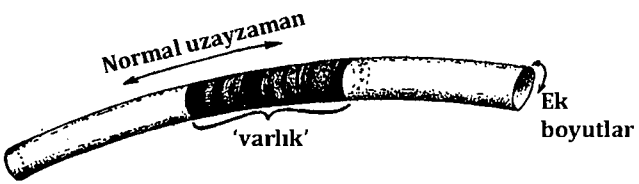
[577] Tüm bunlara ilişkin ayrıntılı bir tartışma için Bern, 2002, inceleme makalesine bakın. Ayrıca *bkz.* Deser, 1999, 2000.

[578] Süper kütleçekimin yeniden normalleşebilirliği için bir "son umut" olarak *bkz.* Deser, 1999, 2000. Ayrıca *bkz.* Deser ve Zumino, 1976.

gelir? Şekil 15.1'deki "hortum" benzetmesini anımsayın. Büyük bir uzaklıktan bakıldığında hortum 1–boyutlu olarak görünür fakat onu daha yakından incelersek 2–boyutlu bir yüzey buluruz. Fikir, hortum evreninde ikamet etmekte olan bir *varlığın* hortum etrafında dolanan ek boyutun gerçekten "orada" olduğunu, bu varlığın fiziki boyutu hortum çevresinden çok daha büyük olmak koşuluyla, "bilmeyeceği"dir. Benzer yorumlar, yüksek boyutlu, $4 + d$, bir "hortum evreni"nde de, boyutlardan d adedi "küçük" olmak ve bu evrende yaşayıp yalnızca 4 "büyük" boyut algılayan daha büyük bir varlık tarafından doğrudan algılanmamak üzere, geçerli olur; *bkz.* Şekil 31.3.

Kaluza–Klein modelinde ya da bu fikrin modern yüksek boyutlu versiyonlarında hangi "küçüklük" derecesi beklenmelidir? Klein'ın kendisi küçük ek boyuta ("hortum çevresi") ilişkin "ölçeğin" 10^{-35}m'lik Planck uzaklığı mertebesinde olması gerektiği sonucuna vardı. Ayrıca bunun, yüksek boyutlu süper kütleçekimi ve sicim kuramı gibi daha modern düzenlerde benimsenmiş en tutulan türdeki ölçek (ya da bundan yalnızca biraz büyük olan) olduğu görülür. Bizim gibi varlıklar için bunun aslında "küçük" sayıldığı açıktır ve bunun kadar küçük ek uzayzaman boyutlarıyla herhangi dolaysız bir deneyime sahip olmayacağımız beklenebilir.

Aslında ek boyutların (bu kadar) küçük kabul edil*me*yip hatta çap boyutu olarak bir milimetre kadar "büyük" (belki de bu kadar bile kapanmamış) bir şeyle ilgili bazı yeni gelişmeler (sicim kuramında) söz konusudur. Bir fikir, böylesi bir düzenin, kendisini bu tür uzaklıklarda kütleçekim etkileşimine ilişkin ters kare yasasını bir değişimi biçiminde gösteren gözleme dayalı sonuçlarının söz konusu olabileceğidir. Esasen yakın zamanda, Newton kuramından böylesi sapmaların algılanabilir olup olmayaca-



Şekil 31.3 Kaluza–Klein türü yüksek boyutlu bir uzayzamana (*bkz.* Şekil 15.1) ilişkin hortum modeli; hortum uzunluğu üzerindeki boyut normal 4–uzayzamanı ve hortum etrafındaki boyut "küçük" (belki Planck ölçeğinde) ek boyutları temsil eder. Bu dünyada ikamet eden bir varlığı bu "küçük" ek boyutlara oturur biçimde hayal ederiz; böylece gerçekte onların farkında değildir.

ğını öğrenmek üzere oldukça hassas bazı deneyler gerçekleştirildi.[579] Şimdiye dek yarım milimetreye kadarlık böylesi herhangi bir sapma bulunmadı.

Bu yeni fikirlerin konumu ne olursa olsun, uzayzamana ilişkin bir yüksek boyutluluk önerisi, tartışmalarımızın bu aşamasında, bir zamanlar Kaluza–Klein önerisinin kesinlikle olduğu gibi "şirin bir fikrin" sahip olduğundan daha ilgi çekici bir konuma sahip değildir. Bu fikrin matematiksel çekiciliği ne olursa olsun, böylesi bir düzene inanmakla ilgili sağlam fiziki kanıtlar olup olmadığı sorusunu yöneltmek zorundayız. Orijinal Kaluza–Klein modeli durumunda bu yüksek boyutlu bakış açısını benimsemenin nedeni elektromanyetizmayı "geometrikleştirmek"ti. §25.1'den anımsayacağımız üzere 20. yüzyılın başlarında bilinen (ve kavranan) Doğa kuvvetleri yalnızca kütleçekim kuvvetiyle elektromanyetik kuvvetti. Einstein yalnızca, kütleçekim alanının 4–boyutlu uzayzaman eğriliğiyle nasıl birleştirileceğini göstermişti. Aslında elektromanyetizmayı da böylesi bir geometrik çerçeve içine getirmeye çalışmak oldukça etkileyici ve doğal görünümlü bir fikirdi. Dahası, aynı "Einstein vakum denklemleri"nin, diğer bir deyişle Ricci tensörünün ($R_{ab} = 0$; *bkz.* §19.6) yok olması, 5–boyutlu Kaluza–Klein kuramında tıpkı 4–boyutlu standart genel görelilikte olduğu gibi geçerli olma biçiminde oldukça mucizevi bir şey söz konusuydu. 4–boyutlu kuramda bu denklem *vakum* durumuyla, diğer bir deyişle kütleçekimi dışındaki tüm fiziki alanların yokluğuyla ilgilidir. 5–boyutlu kuramda yalnızca kütleçekim ve elektromanyetizmanın işlediği ve bu yolla zamana ilişkin olarak bilinen fiziki alanları kapsadığı *neredeyse* durumla ilgilidir.

Bununla birlikte "neredeyse", durumu bir şekilde oldukça güçlü biçimde ifade eder. Çünkü en önemlisi, Kaluza–Klein modeliyle ilgili olarak "küçük" boyutta, son derece fazla serbestlik derecesi bulunmayacak şekilde bir *simetri* bulunması şarttır. Aksi durumda bu ek serbestlik derecelerinin, niçin ortaya çıktığını görelim. §16.7'den, verili bir uzay üzerindeki sonsuz boyutlu uzay alanlarının "ebat"ıyla ilgili tartışmayı anımsayın. q–boyutlu bir başlangıç veri yüzeyi üzerinde serbestçe seçilmiş k adet bağımsız bileşen tarafından belirlenebilen bir alanla ilgili serbestlik $\infty^{k\infty^q}$'dur. Einstein genel göreliliğiyle ilgili olarak (bir biçimde karışık nedenlerden dolayı)[580] $k = 4$ ve $q = 3$'e sahibiz, böylece bu nicelik $\infty^{4\infty^3}$ olarak ortaya çıkar ve Maxwell kuramıyla ilgili olarak da tam olarak aynı serbestliği elde ederiz. Birleşik Einstein–Maxwell kuramıyla ilgili olarak,

[579] Örneğin *bkz.* Hoyle vd., 2001, s. 1418.

[580] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984.

başlangıç veri yüzeyindeki nokta başına düşen etkin bileşen sayısı ayrı ayrı her alanla ilgili değerlerin toplamıdır, böylece başlangıç 3–uzayındaki nokta başına etkin biçimde bağımsız $4 + 4 = 8$ bileşene sahip oluruz ve tam serbestlikle ilgili doğru değer

$$\infty^{8\infty^3}$$

olur. Şu halde, yalnızca Ricci düzlük koşuluna (diğer bir deyişle $R_{ab} = 0$; *bkz.* §19.6) bağlı 5–boyutlu bir kuramda başlangıç yüzeyi 4–boyutludur (böylece $q = 4$) ve gerçekte $k = 10$ olarak açığa çıkar. Bu bize alanla ilgili gereken değerden, 10, 8'den (k değeri) büyük olduğu için değil fakat 4, 3'ten (q değeri) büyük olduğu için son derece daha büyük bir serbestlik, $\infty^{10\infty^4}$, verir. 3 değişkenli fonksiyonlardan olağanüstü biçimde daha çok sayıda 4 değişkenli fonksiyon mevcuttur!

Kaluza–Klein modelinde 4'ü, küçük boyutta sürekli (gerçekte U(1), *krş.* §13.10) bir simetri dayatarak 3'e indirgeriz. Bu simetriyi ifade eden bir Killing vektörü (§14.7) olmak zorundadır ve aslında, Kaluza–Klein 5–uzayı 4–boyutlu olağan $\mathcal{M}$ uzayı üzerindeki bir $\mathcal{B}$ S^1–demetidir. Bu, §19.4' te açıklandığı üzere (ve §15.8'de), elektromanyetizmayla ilgili geleneksel demet açıklamasından pek de uzak görünmüyor. Temel bir fark, bir metriğin yalnızca $\mathcal{M}$ uzayzamanına atanıyor olması yerine $\mathcal{B}$'nin kendisinin burada bir düz Ricci Lorentzci (sözde) metriğine atanmasıdır.[581] Kaluza–Klein modeliyle ilgili çarpıcı bir gerçek, $\mathcal{B}$'ye (U(1) simetrisine ek olarak) Ricci düzlüğünün yüklenmesinin, bize $\mathcal{M}$ üzerindeki Einstein–Maxwell kuramındaki denklemlerin[582] tümünü sağlamaya şaşırtıcı biçimde yakın görünmesidir. Ek olarak gerek duyulan bir şey de, Killing vektörünün sabit bir sıfır olmayan (aslında negatif) norma sahip olmasıdır. Bu, istenmeyen skaler bir alanı eler ve gerçek Einstein–Maxwell kuramı bu yolla ifade edilir!

Zarif olmasına rağmen Einstein–Maxwell kuramıyla ilgili Kaluza–Klein bakış açısı bize gerçekliğin ilgi çekici bir tablosunu sunmaz. Bunu benimsemekle ilgili olarak fiziki yönden herhangi güçlü bir güdü kesinlikle söz konusu değildir. Örneğin süpersimetri, QFT'deki sonsuzlar sorununu indirgemeye ilişkin kuşku götürmez değerinden dolayı kesinlikle daha sağlam bir fiziki durumdur. Öyleyse yüksek boyutlu Kaluza–Klein türü ku-

[581] Geleneksel bir demet açıklamasında, bir $\mathcal{M}$ taban uzayı üzerindeki metrik, istenirse onun üzerinden, bir $\mathcal{B}$ demetine, genellikle yalnızca $\mathcal{B}$ üzerinde "bozuk" bir kanonik metrik sağlamak fakat belki de lifler üzerindeki bir metrik yapısından yararlanılırsa bozuk olmayan bir metrik sağlamak üzere geri "kaldırıl"abilir. Bununla birlikte bu, bir demet yapısının temel bir görünümü değildir.

[582] Bunlar, Maxwell enerji momentum tensörüne kaynak olarak sahip olan, eğik uzayzaman ardalanındaki serbest Maxwell denklemleriyle birlikteki Einstein denklemleridir.

ramlar niçin Doğaya ilişkin daha derin bir kurama yönelik modern uğraşılarda bu derece popülerdir? Temel sebepler, bugün izlenen geniş kapsamlı tüm versiyonlarında hem süpersimetri hem de yüksek boyutları temel biçimlerde işe koşan sicim kuramından gelmektedir.[583]

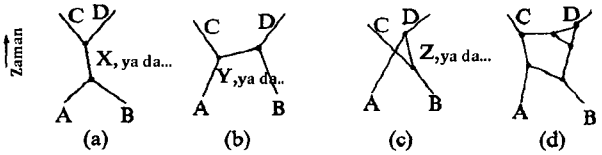
31.5 Orijinal hadronik sicim kuramı

Öyleyse sicim kuramı *nedir*? Niçin pek çok günümüz kuramcısı üzerinde böylesine güçlü bir etkiye sahiptir? Yine, şeylere ilişkin bu düzen de en güçlü güdüsünü, QFT'yle ilgili sonsuzların yok olması isteğinden alır. Bu anlamda o, bölümler 24–26'daki yönlendirici fikirlere ilişkin bir sürekliliği temsil eder. Bununla birlikte, hadronik fizikteki gözleme dayalı bazı ilginçliklerle özellikle ilgili olup çığır açıcı bir doğaya sahip olan diğer bir önemli tarihi güdü daha söz konusuydu. Gelin ilk olarak bunlara bir göz atalım.

Bu orijinal konu, hadron saçılımı parçacık fiziğinde bulunan belirli ilişkilerle ilgiliydi. 25. bölümde hadronlar arasında, son derece kısa ömürlü (yalnızca yaklaşık 10^{-23}s) olmaları nedeniyle "parçacık" ismini zar zor hak eden ve sıklıkla *rezonanslar* olarak adlandırılan pek çok parçacık bulunduğu belirtilmişti. Şimdi, QFT kurallarının herhangi fiziki bir işlemde ortaya çıkabilecek olası her tür farklı etkinliğin tam kuantum genliğini elde etmek üzere toplama eklenmek zorunda olmasını talep ettiğini anımsayalım (§25.2, §§26.6, 8). Bu durumda bununla ilgili olarak tüm parçacık ve rezonaslar hesaba katılmak zorundadır. Örneğin, iki A ve B parçacığının bir araya gelip kısacık bir an sonrasında kendilerini C ve D parçacıklarına dönüştürdüğü bir hadronik saçılım işlemine sahip olabiliriz. Şu halde A ve B'nin bunu yapabilmelerinin bir yolu, neredeyse aniden C ve D parçacıklarına bozunan tekil bir X parçacığı (rezonansı) oluşturmak üzere bir araya gelmeleridir. Bu tür olası pek çok ara parçacık, X, X′, X″, ..., söz konusu olabilir ve her birinin etkisi toplama eklenmek zorunda olur. Bu işlemlerin her biriyle ilgili Feynman grafikleri Şekil 31.4a'da gösterilmektedir. Şimdi, dönüşümün ortaya çıkabilmesinin alternatif bir yolu A ve B arasında bir Y parçacığının, A'yı C'ye ve B'yi D'ye çevirerek "değiş tokuş" edilmesidir. Yine olası değiş tokuş parçacıklarının bir listesi, Y, Y′, Y″, ..., söz konusu olabilir; Feynman grafikleri Şekil 31.4b'de gösterilmektedir. Dönüşümün ortaya çıkabileceği bir üçüncü işlem ailesi söz konusudur.

---

[583] Bununla birlikte, normal 4–boyutlu uzayzamanı kullanan sicim kuramıyla burgaç kuramını birleştiren fikirlerin bazı yeni uygulamaları söz konusudur. *Bkz.* §§31.6, 18, §33.14 ve not 31.76.



Şekil 31.4 İki A, B parçacığının C, D çiftine çevrildiği hadronik bir saçılıma ilişkin Feynman grafikleri. (a) Bu tür işlemlerin bir ailesinde A ve B, neredeyse aniden C ve D'ye bozunan, olası pek çok X, X′, X″, ..., ara bulucusu söz konusu olmak üzere, bir parçacık (rezonans) oluşturmak üzere birleşir ve hepsi toplama katkıda bulunur. (b) Alternatif bir işlem ailesinde bir Y parçacığı (ya da Y′ ya da Y″ ya da ...), A'yi C'ye ve B'yi D'ye, her ara bulucu katkıda bulunmak üzere, çevirerek "değiş tokuş edil"ir. (c) Her ara bulucu katkıda bulunmak üzere, Z'yi içeren (ya da Z′ ya da Z″ ya da ...) benzer bir "değiş tokuş". Artık A, D'ye ve B, C'ye çevrilir. En düşük düzende (a), (b) ve (c) alternatiflerinin, birbirlerine eklenmek yerine, denk oldukları ortaya çıkar. (d) Bu değişimi gerçekleştirmenin diğer yolları kapalı döngüler içerir.

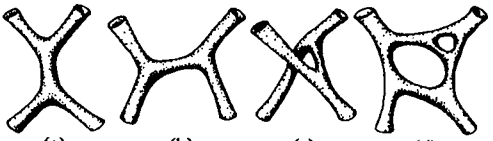
Bunlar, bir önceki dönüşümden, oluşan C ve D parçacıklarının diğer biçimde alınması anlamında farklılık gösterir ve bunlara ilişkin Feynman grafikleri Şekil 31.4c'de gösterilmektedir. Dönüşümün gerçekleştiğini düşünebileceğimiz, *kapalı döngüler*i (Şekil 31.4d) içeren başkaca daha karışık yollar da mevcuttur fakat bu "yüksek dereceli" işlemler şimdilik önemsiz olarak değerlendirilecektir.

(A, B) çiftinin kendisi yoluyla (C, D) çiftine çevrilmiş hale geldiği işlemle ilgili toplam genliği elde etmek üzere bu farklı katkıların tümünü toplamamız gerekir; fakat bulunan şey bu üç olasılıktan *her birinin* oldukça şaşırtıcı biçimde aynı yanıtı verir görünmesidir. Bu tek yanıt temelde doğru yanıt olarak görünmektedir. Üç yanıtın tümünü toplamamız gerekirse bu durumda oldukça büyük bir şey elde ederiz. Sırasıyla Şekil 31.4a, b, c'de verilmiş olan üç Feynman grafiği derlemesinden her biri bireysel şekilde toplandığında fiziki olarak aynı şeyi temsil eder! Standart Feynman grafiği bakış açısıyla bu "ikilik"[584] anlaşılmaz görünür. Bununla birlikte 1970'te Japon/Amerikalı fizikçi Yoichiro Nambu,[585] genç İtalyan Gabriele Veneziano tarafından 1968'de bulunan dikkat çekici bir denklemle ilgili kendi değerlendirmelerine dayanarak,[586] tüm bunların, kendisi yoluyla bireysel hadronik parçacıkların noktasal parçacıklar yerine *sicimlerle* modellendiği farklı bir bakış açısıyla anlamlı kılınabileceği sonucuna ulaştı. Bir sicim geçmişi 2–boyutlu bir yüzeydir, böylece sırasıyla Şekil 31.4a, b, c, d'deki

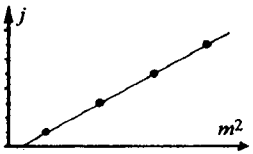
[584] Not 14.3'le karşılaştırın.

[585] Genel bir sicim kuramı tarihi için *bkz.* Schwartz, 2001; özellikle *bkz.* Veneziano, 1968; Nambu, 1970; Susskind, 1970; Nielsen, 1970; ve Goddard vd., 1973.

[586] Bu, şeyleri 1777'de muhteşem Euler tarafından bulunmuş olan β fonksiyonu biçiminde açıklar. İkiliğe ilişkin ilk önemli açıklama için *bkz.* Goddard vd., 1973.



Şekil 31.5 Şekil 31.4'ün ilgili işlemlerine ilişkin sicim geçmişi tablosu (a), (b) ve (c) arasındaki denkliğin, bunlar topolojik olarak aynı oldukları için birbirlerine dönüştürülebildiklerinden, bir açıklamasını sunar. (d) Yüksek dereceli işlemler daha karmaşık topolojiye karşılık gelir. Topolojik cins döngü sayısının karşılığıdır (Şekil 8.9'la karşılaştırın).



Şekil 31.6 Artan spinli parçacık rezonaslarına ilişkin düz "Regge yörüngeleri"nin kütle karesi karşısındaki grafiği. Elastik sicim tablosu bir açıklama sağlar.

Feynman grafiklerinde açıklanan işlemler artık Şekil 31.5a, b, c, d'de sırasıyla gösterilen çeşitli alternatif "boru tesisatı" biçiminde resmedilebilir. Bu "sicim bakış açısı"yla ilgili çarpıcı olan şey, standart Feynman diyagram bakış açısından oldukça farklı görünen üç (a), (b), (c) işleminin tümünün artık topolojik olarak denk olması ve *aynı* işleme bakmanın üç farklı biçimi olarak değerlendirilebilmesidir. Bu nedenle "sicim" tablosu, hadronik fiziğe ilişkin kafa karıştırıcı bir gerçeği anlamlı kılmak üzere bir yol önerir.

Bu yorum yalnızca niteldir fakat sicim tablosu ayrıca, Veneziano'nun denklemine ilişkin matematiksel bir türev sağlayan fiziki bir model de sunmuştur. Ek olarak –sicimlerin daha çok, bir sicimin gerilme miktarıyla orantılı olarak artan bir *sicim gerilimi*ne sahip küçük elastik şeritler gibi davrandığı– sicim modeli hadronik fiziğin gözlemlenmiş diğer bir özelliğine, diğer bir deyişle *Regge yörüngeleri*nin düzlüğüne ilişkin bir açıklama da sunar. Regge yörüngeleri, belirli bir hadron sınıfıyla ilgili olarak, spin değerinin kütle karesiyle değişimini gösteren grafiğini çizdiğimizde görülen çizgilerdir. Bu çizgiler dikkat çekici biçimde düzdür. Şekil 31.6'da buna ilişkin bir örnek gösterilmektedir. Bildiğim kadarıyla hadronlara ilişkin olarak gözlemlenmiş olan bu çarpıcı gerçeğe ilişkin hâlâ alternatif herhangi tam bir açıklama mevcut değildir.[587]

[587] Regge kutuplarını açıklayacak modeli ilk tasarlayan Veneziano'dur, 1968. Genel olarak Regge kuramıyla ilgili Penrose vd., 1978 yanı sıra *bkz.* Collins, 1977.

Dahası sicim kuramı, bu tabloyla birlikte hadronik fizikle ilgili sonlu bir kuramın elde edilebilir olabileceğine ilişkin önemli ve anlamlı bir umut oluşturdu. Açıkçası, geleneksel Feynman yaklaşımındaki (§26.8) (morötesi) ıraksamaları "düzeltme"ye hizmet etti. Bu ıraksamalar, noktasal parçacıklar birbirlerine sınır olmaksızın git gide daha yakın hale geldikçe ortaya çıkan küçük uzaklık etkilerinden kaynaklanır biçimde düşünülebilir. Sicimler noktasal cisimler değildir, böylelikle bu, sorunu gidermek üzere bir alan açar. Gerçekte standart Feynman grafik tablosunda ıraksama sorunlarına neden olan şey kapalı döngülerdir. Sicim tablosunda kapalı döngüler basit olarak, Şekil 31.4d'nin bir sicim versiyonu olan Şekil 31.5d'de gösterildiği üzere, yüksek topolojili yüzeyler tarafından devralınır. Bunun, Feynman grafiklerinden ıraksak integraller yerine sonlu bir şey sağlaması gerekir. Dahası, tek bir sicim geçmişi tablosu, bireysel olarak ıraksayabilecek fiziki olmayan parçalar yerine, bu ıraksamaların birbirlerini sadeleştirmesi gerektiği varsayılmak üzere, sonlu olması gereken bir probleme yönelik toplam fiziki yanıtı temsil etmek üzere daha iyi bir olanak sağlayarak farklı pek çok Feynman diyagramını kapsayabilir. Ayrıca farklı parçacık çeşitleri basit biçimde sicimlere ilişkin farklı titreşim modları olarak birleştirilebilir. Son olarak 2–boyutlu uzayzaman sicim geçmişleri, 8. bölümden anımsayacağımız üzere olağanüstü zengin geometrik ve analitik özelliklere sahip *Riemann yüzeyleri* olarak (esasen Veneziano'nun kayda değer denklemini temelleyen gerçek) kabul edilebilmeye ilişkin dikkat çekici ek özelliğe sahiptir. Aslında Doğanın, gerçekliğin kuantum seviyesindeki tasarımının parçası olarak görünen karmaşık sihirle ilgili alan buradadır.

Bu, şüphe götürmez biçimde, olağan parçacıklara ilişkin olandan daha derin bir fiziki açıklama düzeyinde ne olabileceğiyle ilgili en zarif matematiksel tablodur. Bu tabloyu ilk duyduğumda, bu fikirler derlemesinin güzeliği ve potansiyel gücü beni aşırı derecede etkiledi. Bana burada, hem matematiksel olarak heyecan verici hem de anlaşılan, parçacık fiziğinin önemli bir alanıyla dolaysız ilişkiye sahip yeni bir şey varmış gibi göründü. O zamanlar öncelikli ilgi alanım (33. bölümde geleceğimiz) burgaç kuramıydı ve yaptığım şeyle kulağa oldukça umut verici gelen bu yeni fikirler arasında kesinlikle bir bağlantı kurmam gerektiğini düşündüm. Burgaç kuramı karmaşık (holomorfik) yapılardan çok önemli biçimde faydalanır ve temel sicim kuramında, bu tür yapıların, –esasen karmaşık eğriler olan– Riemann yüzeylerinin temel kullanımı yoluyla fiziki davranışı kontrol ettiğini görürüz.[588]

[588] Burgaç fikirleriyle sicim kuramınınkileri bir araya getirmekte daha sonra bazı sınırlı başa-

Witten'in (2003) oldukça yeni bazı çalışmaları dikkat çekici biçimde bu ilk arzuları artık gerçekleştirebilmektedir. Yüksek boyutlu uzayzamanı işe koşmayan bu oldukça pozitif yeni gelişmelere §31.18'de döneceğim. Yine de bunlar henüz geniş kapsamlı yeni bir sicim kuramını temsil etmez ve ara bölümlerdeki açıklamalarım bunun yerine "ana akım" sicim kuramı denilebilecek şeyle ilgilidir.

31.6 Dünyaya ilişkin bir sicim kuramına doğru

Üzerlerinden 30 yıldan fazla zaman geçtikten sonra bu başlangıç fikirleri ne durumdalar? Konuyla ilgili yıllar içindeki gelişmeler başlangıç umutlarını korudu ya da aştı mı? Bunlar farklı insanların oldukça farklılık gösteren yanıtlar verebileceği sorulardır. Sicim kuramı zaman zaman son derece duygu yüklü bir konu haline bile geldi. Esaslı taraftarlarına göre (sonraki başkalaşımlarıyla birlikte) sicim kuramı 21. yüzyılın fiziği*dir* ve fiziki düşünüşte, büyük değilse bile en azından genel görelilik ya da kuantum mekaniğinin temsil ettiğiyle karşılaştırılabilecek bir devrimi temsil eder. Aşırı aleyhtarlarına göreyse onun fiziki olarak şimdiye dek başardığı kesinlikle hiçbir şey söz konusu değildir ve geleceğin fiziğine ilişkin olarak belirli bir rol oynama olasılığı çok düşüktür.

Benim için de bu gelişmelerle ilgili olarak uygun biçimde tarafsız olmaya çalışmak neredeyse olanaksızdır fakat en azından makul biçimde isabetli olmaya ve edindiğim izlenimlere ilişkin nedenleri ortaya koymaya çalışacağım. Daha önce olduğu üzere okuyucuya, pek çok etkin ve son derece yetenekli kuramsal fizikçinin görüşlerime katılmadığına ilişkin yasal uyarımı yapmak zorundayım. Yine de şeyleri, gördüğüm gibi sunmak dışında bir şey yapamam.

Mevcut sicim kuramı programına ilişkin pek çok görünüme ilişkin bakış açım olumludan az olacağından en azından okuyucuya bu olası dengesizliği ayarlama olanağı sunmalıyım. İlk olarak konuya ilişkin gelişmelerle ilgili en önemli kişilerden ikisinin bakış açısını sunacağım. Cambridge Üniversitesinden Michael Green'in kendi sözleriyle:[589]

> Sicim kuramıyla karşılaştığınız ve fizikte son yüz yıldan fazla bir zamandır görülen temel gelişmelerin neredeyse tümünün böylesi basit bir başlangıç noktasından ortaya çıktığını –ve böylesi bir za-

rılar elde edildi fakat bunlar temel olarak matematiksel doğaya sahiplerdi ve birleşik bir fiziki bakış açısı sağlamıyorlardı; *bkz.* Shaw ve Hughston, 1990, not 31.76.

[589] Brian Greene tarafından Michael Green'le 10 Aralık 1997'de yapılmış bir röportajdan alıntılandı; Greene, 1999.

rafetle ortaya çıktığını– fark ettiğinizde, bu sıra dışı biçimde heyecan verici kuramın kendine özgü bir sınıf olduğunu anlıyorsunuz.

Ve Princeton'daki İleri Çalışmalar Enstitüsünden (Institute for Advanced Study) Edward Witten mükemmel biçimde şöyle yorumladı:[590]

"Sicim kuramının yirmi birinci yüzyıl fiziğinin şans eseri yirminci yüzyıla düşmüş bir parçası olduğu söylenir [Danielle Amati]."

Oldukça erişilebilir, anlamlı ve coşkun ve pek de eleştirel olmayan –fakat matematiksel fikirlerin derinine inmeyen– popüler bir açıklamayla ilgili olarak *bkz.* Greene, 1999.[591]

Sicim kuramı konusuyla ilgili, özel avantajlı konumumdan alınan, zorunlu biçimde makul olmasa da tutarlı bir bakış açısı için konunun, benim kendi düşünüşümü nasıl etkilediğiyle ilgili kabaca tarihi bir açıklamada bulunmayı tasarlıyorum. Bu yolla, yalnızca kuramda ortaya çıkan daha sonraki gelişmelerle ilgili bir şeyi değil fakat ayrıca bu gelişmelere ilişkin kendi tepkimin ne olduğunu da göstermeye çalışacağım. Sicim kuramının tarafsız biçimde değerlendirilmesini böylesine zorlaştıran şey onun, desteğini neredeyse tümüyle matematiksel gerekliliklerce yönlendirilen estetik yargılardan edinip gelişim yönünün bunlara göre belirlemesidir. Kuramın geride bıraktığı dönüm noktalarından her birini kaydetmenin ve neredeyse bu noktalardan her birinin bizi gözleme dayalı olarak oturtulmuş gerçeklerden daha da uzaklaştırdığını belirtmenin önemli olduğunu düşünüyorum. Sicim kuramı, temellerini hadronik fiziğin deneye dayalı olarak gözlemlenmiş özelliklerinden almış olsa da, bu temellerden sert biçimde kopmuş ve daha sonra fiziki dünyayla ilgili gözleme dayalı verinin, oldukça kısıtlı bir kılavuzluğuna sahip olmuştur.

Çok geniş ve tümüyle yabancı bir şehirdeki belirli bir binayı bulmaya çalışan bir turist düşünün. Hiçbir sokak adı, harita ya da hangi yönün kuzey, güney ya da her neyse ne olduğuyla ilgili tümüyle kapalı gökyüzünden edinilebilecek hiçbir (en azından turiste bir anlam ifade edecek hiçbir) belirti mevcut değil. Zaman zaman yolda bir kavşak bulunuyor. Turist sağa mı dönmeli yoksa sola mı, ya da bir tarafa doğru giden küçük etkileyici gizli geçidi mi denemeli? Dönüşler çoğu kez dik açılı değil ve yollar da neredeyse hiç düz değil. Ara sıra yol bir çıkmaz sokaktır, bu nedenle geri adım atılıp başka bir dönüş yapılmak zorunda. Bazen daha önce fark edilmemiş bir rotanın ayırdına varılabilir. Etrafta yolu sorabilecek kimse yok,

---

590 *Bkz.* Witten, 1996.

591 *Bkz.* Greene, 1999. Daha ayrıntılı ve teknik olarak yetkin çalışmalar için *bkz.* Green vd., 1987; Polchinski, 1998; ve Green, 2000.

zaten yerel dil de pek tanıdık değil. Turist en azından aradığı binanın mükemmel güzellikte bir bahçeye sahip görkemli bir zarafette olduğunu biliyor. Sonuçta onu aramasının temel sebeplerinden biri de bu. Seçtiği sokaklardan bazıları, daha etkileyici mimarisi ve –bazen yakından incelendiklerinde plastik oldukları ortaya çıkabilecek– muhteşem çiçek ve çalılıklarla bezenmiş güzel avlularıyla diğerlerinden çok daha belirgin bir estetik çekiciliğe sahip. İzlenecek rotada pek çok seçim bulunmakta ve turistin her seçimle ilgili tek kılavuzu alandaki estetik çekicilikle birlikte şehre ilişkin bir tarz ya da hayal edilen bir tür temel düzenle ilgili bütünlüklü bir genel tutarlılık.

Belki daha iyi bir benzetme için *sizin* turist olduğunuzu düşünelim. Etkileyici bir zekaya, bilgi birikimine ve duyarlılığa sahip bir tur rehberince yönlendirilen bir grupta yer alıyorsunuz fakat bu durumdaki tek sorun rehberin şehirle ilgili herhangi bir önbilgiye sahip olmayıp yerel dille daha önceden herhangi bir tanışıklığı bulunmaması. Rehberin sizden daha iyi bir estetik kavrayışa sahip olduğuna ve böyle şeylere ilişkin kesinlikle sizden daha hızlı bir yargıya varacağına inanıyor da olabilirsiniz. Zaman zaman rehberin gizli düzenlerle ilgili duyarlılığı zarafetinin belirli bir kapsamı olan bir bina bulur. Aslında kriterler sizin kullanmayı seçebileceklerinizden temel olarak farklı türde değildir. Grubu takip ederseniz en azından diğerlerinin arkadaşlığına sahip olacak, onlarla çevredeki mimari üzerine sohbet edebilecek ve ortak amacınıza yönelik heyecanı paylaşabileceksiniz. O amaca ulaşmayı beklemeseniz bile arayışın keyfini çıkaracaksınız. Yine de öte taraftan, amaca nasıl ulaşılacağıyla ilgili olarak tur rehberinin sizden daha fazla şey bilmediği hakkında giderek daha da kuşkulu hale gelmeniz nedeniyle belki de yola kendi başınıza devam etmeyi seçeceksiniz. Art arda gelen her dönüş seçimi bir kumar olacak ve çoğu durumda, rehberin esasen çoktan yapmış olduğu seçimden farklı birinin daha fazla umut taşıdığını hissedebileceksiniz.

Elbette önceki bölümlerde, büyük fizikçilerin özel kavrayışlarının, bu kavrayışlar çoğu kez belirgin biçimde matematiksel bir karaktere sahip olmak üzere, gücünü gösterdikleri çeşitli örneklere tanıklık ettik. Bunların en etkileyicilerinden biri, §24.7'de açıklandığı üzere, kesinlikle Dirac'ın elektronla ilgili denklemi bulması olmalıdır. Yine de estetik atılım esasen yalnızca, kuantum mekaniğinin deneye dayalı bulgularından kaynaklanan matematiksel kavrayışın sağlam gövdesinden bilinmeyene doğru atılan tek bir adımdı. Dirac'ın, elektronun karşı–parçacığına ilişkin tahmini bu tür başka bir atılım içerir. Yine de bu, önemli bir dikkatle yapıldı ve ardından gözlemle doğrulandı. Einstein'ın genel göreliliği de ayrıca kısmen matematiksel estetik düşüncelerle yönlendirildi ve genel görelilik, kuvve-

tini büyük ölçüde kendisinin derinliğine güzel matematiksel yapısından elde etti. Einstein kuramı ilk kez formüle ettiğinde, ona ilişkin olarak gözlem alanında herhangi belirgin bir talep söz konusu değildi. Yine de, Einstein'ın basit olarak matematiksel estetik düşüncelerle yönlendirildiği güçlükle söylenebilir. Yol göstericiliğini öncelikli olarak fizikten ve eşdeğerlik ilkesinin (§17.4) kütleçekim kavrayışının merkezinde olma zorunluluğuna inanmasından elde etti.

Bunun aksine sicim kuramı neredeyse tümüyle matematiksel olarak güdülenmiştir. Öncelikle bunun kendi içinde, zorunlu olarak kötü bir şey olmadığını açıklamalıyım. Başarılı fiziki kuramların tümü sağlam matematiksel destekleyicilere sahiptir. Aslında matematiksel tutarlılık fiziki bir kuram için, o kuram bütünlüklü bir anlam ifade etmek istiyorsa yaşamsal bir özelliktir. Belirli bir matematiksel çerçeve bir kez oluşturulduğunda bu çerçeve içindeki hassas matematiksel gelişmeler fiziki dünyayla ilgili güçlü anlamlara sahip olabilir. (20. bölümde açıklanmış olan klasik fizikteki Lagrange denklemi ve Hamilton gelişmeleri bunun etkileyici bir örneğini sunar.) Bununla birlikte bir tutarsızlığı gidermek üzere daha önce inanılan bir kuram değiştirilmek zorunda olduğunda sorunlar ortaya çıkar. Bir kuramın değiştirilebildiği belirli yol kuramcının özgün matematiksel bilgisine ve estetik tercihlerine göre değişebilir. Çok sıklıkla değişiklik yalnızca, yerini aldığı kuramın başarısızlıklarından belki de farklı olmasına rağmen olasılıkla hâlâ matematiksel tutarsızlık başarısızlıklarına sahip bir fikir –hatta belki de "parlak bir fikir"– olacaktır. Daha sonra yeni değişiklikler gerekir ve böylece devam eder. Bunlardan çok fazlası söz konusuysa doğruyu seçme olasılığı her seferinde son derece azalır.

31.7 Ek uzayzaman boyutlarıyla ilgili sicim güdüsü

Sicim kuramı tablosundaki ilk tutarsızlıklardan biri ciddi bir anomalinin ortaya çıkmasıydı. §30.2'den, anomalilerin, klasik bir simetri ya da değişmezlik özelliği ifade eden klasik değişme kurallarının kuantum çeviricilerce tam anlamıyla gerçekleştirilememesi durumunda ortaya çıktığını ve böylece kuantum kuramının, klasik kuramın bir gerekliliği olarak değerlendirilebilecek bir niteliğini kaybettiğini anımsayın. Sicim kuramı durumunda bu anomali sicimin tanımlanmasındaki temel bir değişmezlik parametrizasyonuyla ilgiliydi. Anomalinin varlığı feci olarak değerlendirilebilecek etkilere yol açtı. Bununla birlikte[592] uzayzaman boyutlarını 4'ten 26'ya çıkarmanın anomalinin ortadan kaybolmasına neden olduğu bulun-

[592] 26 boyuta yönelten bir tartışma için *bkz.* Green vd., 1987; Polchinski, 1998; ve Green, 2000.

du.[593] Buna göre sicim kuramı kuantum mekaniksel olarak yalnızca 26–boyutlu bir uzayzamanda tutarlı olarak göründü.

Soruna, bu "26–boyutlu" sonucun ardındaki gerekçelendirmenin kuvvetini değerlendirmek üzere asla yeterince göz atmamış olmama rağmen buna ilişkin kendi tepkim temel olarak "bu civarda başka bir yol olmalı" şeklindeydi. Sanırım pek çokları benzer bir tepki verdi çünkü kuram bu noktada önceki popülerliğini büyük ölçüde yitirdi. Bununla birlikte 26–boyutlu bir evren modelini dikkate almamaya ilişkin kendi nedenlerim, burgaç kuramından gelen ek bir girdiye sahipti. §§33.2, 4, 10'da göreceğimiz üzere, uzayzamanın aslında dolaysız biçimde gözlemlediğimiz bir zaman ve üç uzay boyutu (diğer bir deyişle "1 + 3 boyut") değerine sahip olması, kendi özel "burgaçsal" bakış açımla ilgili temel bir anlatımdır.

Bu ek boyutlarla ilgili olarak ne yapılması gerektiğine ilişkin bu soruna ek olarak hadronlara ilişkin bu oldukça basit görünümlü sicim modeli, örneğin *takyonik* davranışın (ışıktan daha hızlı yayılım) ortaya çıkması gibi başka zorluklarla karşı karşıya kaldı. Ayrıca, 25. bölümde açıklandığı üzere, standart modelin büyüyen başarısı, fizikçileri sicim kuramları gibi bu tür "ilgisiz" önerilerle öncekinden daha az ilgilenmeye yöneltti. Veneziano, Nambu ve diğerlerini sicim yollarına düşüren, üstte değinilmiş olan hadronik fiziğe ilişkin kafa karıştırıcı özellikler, gluon–kuark tablosu biçiminde (kısmen) alternatif bir QCD açıklaması buldu.

Özellikle hadron bileşenlerinin "nokta benzeri" doğası deneye dayalı olarak belirgin hale geliyordu ve bu sicim kuramının daha sonraki haliyle değil fakat standart modele ilişkin kuark tablosuyla uyumluydu. Bir sicim döngüsünün tipik büyüklüğü sicimin bağlaşım kuvvetiyle ilişkilidir ve (yeğin etkileşim bağlaşım sabiti kuvveti yanı sıra bir sicim gerilimi sabitiyle birlikte) orijinal hadronik sicimlerle ilgili olarak bu, ortalama 10^{-15}m'lik bir döngü ölçeği verir. Bir protonun kendi "büyüklüğü"yle kıyaslanabilen bu ölçek, hemen hemen hiç "nokta benzeri" değildir.

Sicim kuramına yönelik çok az ilginin bulunduğu yaklaşık bir on yıldan sonra, zaman zaman "ilk süpersicim devrimi" olarak adlandırılan şeyle sonuçlanan bir gelişme ortaya çıktı. 1984 yılında Michael Green ve John Schwarz (daha önce Schwarz ve Joël Scherk tarafından yapılmış bazı önerileri kapsayan) süpersimetrinin sicim kuramıyla (bize yalnızca "sicimler" yerine "süpersicimler" sunmak üzere) birleştirildiği bir taslak ortaya koydu ve bu yolla uzayzaman boyutluluğu[594] 26'dan 10'a indirgendi.

---

[593] Kuantum çeviricilerinde anomali biçiminde ortaya çıkan ilgili sayı $24 - \sigma$'dır. σ, uzay boyutları sayısı *eksi* zaman boyutları sayısıdır.

[594] Süpersimetriyle birlikte, σ önceki dipnottaki gibi olmak üzere, $8 - \sigma$ sıfır olarak ayarlandı-

Bu, üstte değinilen "takyonik sorunu" ortadan kaldırdı. Dahası, sicim geriliminin doğası ve ölçeğindeki radikal bir değişiklikle sicim kuramı artık, yeğin etkileşimlere ilişkin bir kuram olmak yerine öncelikle bir kuantum kütleçekim kuramı olarak değerlendirilir. Sicimlere ilişkin titreşim modundan kaynaklanan 2–spinli bir kütlesiz parçacık/alan olması gerektiği zaten fark edilmişti. Bu doğaya sahip hiçbir hadronik parçacık bulunmadığından bu, sicim kuramının orijinal "hadronik" versiyonuyla ilgili bir utanç kaynağıydı. Yine de yeni sicimler ve onlara ilişkin çok daha büyük sicim gerilimlerine ilgili olarak bu kütlesiz alanı kütleçekimle belirlemek aslında uygun olur. Tipik bir sicim döngü büyüklüğü, öncekinden yaklaşık 20 büyüklük mertebesi kadar küçük ve kesinlikle hadronik ölçekte nokta benzeri olarak, genel, minik (kütleçekimle ilgili) Planck uzunluğu mertebesinde bir şeydir.

Yeni "kütleçekim ölçekli" sicimlerle sunulan sicim geriliminin doğasındaki (normalde popüler açıklamalarda vurgulanmayan) bir teknik farklılığı daha belirtmeliyim. Orijinal hadronik sicimler daha çok, sicim gerildiği ölçüde gerilimin germe miktarıyla orantılı olarak artması anlamında, lastik şeritler gibiydi.[595] Buna rağmen, yeni kütleçekim ölçekli süpersicimler, gerilim miktarından bağımsız şekilde, *sabit* bir $\hbar c/\alpha'$ gerilimi uygular. α', *sicim sabiti* olarak anılan çok küçük bir sayıdır (bir alan ölçüsü). Bu bakımdan, orijinal hadronik sicim, kendisine ilişkin klasik bir versiyonun fiziki bir anlam ifade edeceği olağan fizikteki tanıdık bir varlık türüne çok daha fazla benziyordu. (Sabit gerilime sahip yeni süpersicimin klasik bir versiyonu neredeyse bir anda sıfır büyüklüğündeki tekilliğe büzüşür!)

31.8 Kuantum kütleçekim olarak sicim kuramı?

Bu gelişmeler sicim kuramının genel algılanışını bütünüyle dönüştürdü ve kuram hızlıca büyük bir popülerlik kazandı. Sicim kuramının, standart genel göreliliğe ilişkin yeniden normalleşebilir olmama durumunun (*bkz.* §31.1) yeri kuantum kütleçekimle ilgili bütünüyle sonlu bir sicim kuramı tarafından değiştirilmek üzere, "kuantum kütleçekime ilişkin bütünlüklü bir kuram" sunduğu iddiaları sıklıkla dile getirildi.[596] Baskı yapıldığında bazı sicim kuramı yanlıları, sonluluk iddialarının hepsinin tümüyle kanıtlanmadığını kabul edebilseler de bu, küçük önemde bir konu olarak

ğında anomali artık ortadan kalkar.

[595] Hadronik bir sicim olağan lastik bir sicimden, sonuncusu, gerilimin sıfıra düşeceği *doğal* bir sonlu uzunluğa sahip olmak üzere, küçük bir farklılık gösterir. Hadronik bir sicimle ilgili olarak bu "doğal uzunluk" sıfır olur.

[596] Bu tür pek çok iddia Greene'de, 1999, bulunabilir.

değerlendirilir. Seçkin bir kuramsal fizikçi ve sicim kuramcısı şöyle diyordu:[597]

> Sicim kuramı öylesine açık biçimde sonlu ki, biri bir kanıt yayımlayacak olsa onu okumakla ilgilenmem bile.

Dahası kuantum kütleçekime ilişkin sicim kuramı, sicim kuramcıları tarafından, kuantum kütleçekime yönelik sicim kuramı dışındaki yaklaşımlar üzerine Joseph Polchinski (1999) tarafından yapılan şu yorumda da görüleceği üzere, "şehirdeki tek oyun" olarak değerlendirilme eğilimindedir:

> ... herhangi bir alternatif söz konusu değil ... tüm iyi fikirler sicim kuramının bir parçasıdır.

Kuramın sonradan edindiği gücün çoğunu sağlayanın, ilk zamanlardaki sonluluk iddialarının şiddeti olmasından kuşkulanıyorum (buna rağmen *bkz.* §31.13). Esasen "kuantum kütleçekim" –20. yüzyıl fiziğinin iki büyük devrimi arasındaki kayıp birlik– arayışına ilişkin iddia edilen bu keşfin hakkı gerçekten korunmuş olsaydı bu, sicim kuramını yalnızca o yüzyılın temel entelektüel başarılarından biri olarak değil fakat ayrıca temel fiziğin gelecekteki ilerlemesiyle ilgili devrimci bir esas çerçeve olarak da oluştururdu.

Bugünün *sicim* kuramcılarının bile pek çoğunun, kuantum kütleçekim sorununun 1980'lerde sicim kuramı tarafından bütünüyle "çözüldüğüne" ilişkin iddiaları abartılı olarak değerlendirebildiklerini sanıyorum. Bu insanlar artık bu daha ölçülü konumu benimsemekle öncekinden daha mutlu olabilirler çünkü günümüz sicim kuramı ilerledi ve 1984'teki halinden dikkate değer biçimde farklılaştı. Yine de onlar, 1984 sicim kuramının en azından bu kuantum kütleçekim amacına yönelik en etkileyici adımı atmış olduğuyla ilgili bakışı benimsemeye yatkındırlar.

Bu iddialarla ilgili benim tepkim nedir? Yakın meslektaşlarımın çoğunun tepkisi gibi korkarım ki oldukça olumsuz. Bu olumsuz tepkinin sebebinin büyük kısmının, bakış açısı, örneğin ben ve meslektaşlarım gibi, Einstein'ın genel göreliliğine yönelik büyük ilgide köklenmiş olanlarla güdüleri çoğunlukla QFT tarafından gelen diğerleri arasındaki kültürel altyapıdaki farklılıklara bağlanabilir. Bakış açısındaki bu farklılığın ana etkisi, bir kuantum kütleçekim birliğinde çözülecek temel sorunlarla ilgili oldukça farklı görüşlere sahip olmamızdı. QFT tarafından gelenler yeniden normalleşebilirliği –ya da daha doğrusu *sonluluk*– bu birliğin öncelik-

[597] Abhay Ashtekar tarafından, bir dersinde aktarılır; NSF–ITP Kuantum Kütleçekim Atölyesi, Kaliforniya Üniversitesi, Santa Barbara, 1986.

li amacı olarak kabul etmeye yatkındır. Öte taraftan, görelilik cephesinden gelen bizler kuantum mekaniğinin ilkeleriyle genel göreliliğinkiler arasındaki çözülmesi gereken derin kavramsal çelişkileri merkezi önemdeki konular olarak kabul ederiz ve bunların çözümünden geleceğin yeni bir fiziğine doğru ilerlemeyi bekleriz. Sicim kuramcılarının ileri süregeldikleri güçlü iddialara yönelik olumsuz tepkimiz bu kez yalnızca ayrıntıdaki konulardan ya da genel güvensizlikten değil (gerçi bunlar da önemli) fakat bizim, kuantum/kütleçekim konusunun tümünün merkezinde olduğunu düşündüğümüz sorunların sicim kuramcıları tarafından var olduklarının bile tanınmaz görünmesi gerçeğinden kaynaklandı!

Bu konuların bazılarına §30.11'de değinildi (ve bir diğerine §33.2'de değinilecek). Bununla birlikte o bölümlerde ortaya konan konuların, genel kovaryans ilkesinin QFT'yle (§19.6) bağıntılı olarak gerektirdiği derin çelişkilerin yüzeyini hemen hemen hiç kazımadığı belirtilmelidir.[598] Bu arada ayrıca bir "kuantum uzayzaman geometrisi"nin gerçekte neye benzemesi gerektiği temel konusu da mevcuttur. Sicim kuramı basit olarak, var olmayan basit sicimin kendisinin hiç enerji taşımayıp böylece ardalan uzayzamanını dolaysız biçimde "eğmemesi" nedeniyle, bir sicim varlığından dolaysız biçimde bile etkilenmeyen pürüzsüz bir "klasik" ardalan uzayzamanıyla çalışır. Görelilik camiasındaki çoğu insan doğru "kuantum geometrisi"nin ayrıklığa ait bazı elemanları barındırması gerektiği ya da en azından klasik pürüzsüz manifold tablosundan farklılık göstermesi gerektiği beklentisine sahiptir.

Bu derin konulara, kendilerine ilişkin çözümlemelere yönelik belirli yaklaşımlarda da olacağı gibi, sonraki iki bölümde daha açık biçimde yöneleceğiz. Özellikle bir sonraki bölümde (§32.4) karşılaşacağımız "döngüler", çok yüzeysel olarak benzer sicimler olsalar da, bunlardan sayısız bakımdan farklıdır. Uzayzaman geometrisi bu döngülerin varlığından, uzamsal metrik tümüyle onlar üzerinde yoğunlaşıp herhangi başka bir yerde yok olmak üzere, derin biçimde etkilen*ir*; aslında esasen *yaratılır*. Diğer taraftan sicim kuramında pürüzsüz bir uzayzaman, sicimlerle ilgili bir ardalan olarak halihazırda mevcut olarak kabul edilir ve kendisine ait metrik geometrisi üzerindeki sınırlamalar yalnızca, sicimlerle ilgili dolaylı etkilerden kısa süre içinde geleceğimiz (§31.9) bir biçimde ortaya çıkar. Şimdilik gerçekten önemli kuantum kütleçekim konularının sizim kuramı tarafından uygun biçimde ele alınıp alınmadığına ilişkin bu sorunu bir

[598] Kuantum/kütleçekim birliği arayışının QFT'nin kurallarında bir değişim içerme zorunluluğuyla ilgili olarak görelilik camiasının tümü sonuna kadar benim yanımda olmasa da, camiadan bu bakış açısına ilişkin olarak sürekli biçimde destek gördüm. QFT camiasından gelen tepki çok daha az sevimli olma eğilimindeydi!

kenara bırakalım. Bunun yerine, sicim kuramcılarının, kütleçekimle ilgili sonlu bir kuantum kuramına sahip olduklarına ilişkin iddialarını ele alalım. Sahipler mi? Bu bölümün geri kalanı ve sonraki beş bölümde bu soruya yöneleceğim.

Önemli bir nokta belki de ifade tarzında bulunmaktadır. Sicim kuramcılarının iddiası, genel görelilik ya da Einstein kuramına değil bir "kütleçekim kuantum kuramı"na sahip olduklarıdır. Einstein'ın muhteşem biçimde doğrulanmış genel göreliliği değilse "kütleçekim"le neyi kastediyorlar? İlk olarak sicim kuramcısının uzayzamanının artık 10–boyutlu olduğunu anımsayalım (ya da birazdan (§31.14) öğreneceğimiz üzere *kabaca* 10–boyutlu; fakat şimdilik bunun sizi endişelendirmesine izin vermemeye çalışın!). 10 boyutta kütleçekim nedir? Tensör analizi 10 boyutta tıpkı 4'te olduğu gibi iyi işler (*bkz.* §§14.4, 8), böylece hâlâ R_{ab} Ricci tensörünü, tıpkı önceden olduğu gibi, oluşturabiliriz. §19.6'da gördüğümüz üzere, olağan Einsteincı kütleçekimdeki bir *vakum*la ilgili koşulu Ricci düzlüğüdür, böylece sicim kuramcısının kütleçekimle ilgili "vakum denklemi"nin, artık 10 boyutta olmamız dışında, aynı, diğer bir deyişle

$$R_{ab} = 0,$$

göründüğünü tahmin edebiliriz. "5–vakum"un hem kütleçekim hem de elektromanyetizmayı içerdiği 5–boyutlu Kaluza–Klein kuramında ne olduğuna ilişkin bir benzeşim yoluyla ayrıca, 10 boyuttaki bu denklemin de kütleçekimin yanı sıra kütleçekimle ilgili olmayan tüm alanları barındırması gerekeceğini bekleyebiliriz.

Sanırım bu, sicim kuramcılarının temel olarak anlatmak istedikleri şey*dir*; en azından kabaca. Daha kesin bir biçimde, Ricci düzlüğünü, α' sicim sabiti biçimindeki sonsuz bir üslü serinin yalnızca ilk terimini ima eder biçimde değerlendirirler. Yüksek dereceli terimler bize Ricci düzlüğüne yönelik "kuantum düzeltmeleri" sunar. ($(\alpha')^r$'nin katsayısı eğrilik tensörlerine ilişkin yüksek dereceli türevler ve böylesi tensörlerdeki polinom ifadelerini içerebilir.) Dahası, 10–boyutlu uzayzaman üzerindeki metriğe ek olarak bu tartışmada ortaya çıkan başkaca alanlar da söz konusudur. Bunlardan biri asimetrik tensör alanıdır ve ayrıca (toplam ölçeklemeyle ilgili olan) *dilaton*[599] olarak adlandırılıp orijinal Kaluza–Klein kuramındaki (istenmeyen) skaler alana oldukça benzeyen bir skaler alan da

[599] "Dilaton" terimi, "genişleme"yle (dilation, –çn.) ilgili bir yazım hatası değildir fakat o kavramın, metrikteki ölçek değişiminde bulunan uygun serbestlik derecelerinden kaynaklanan bir *kuantum* versiyonuyla ilgilidir. 26. bölümden, QFT kuralları uyarınca, kuantize serbestlik derecelerinin kendilerini bir tür parçacık biçiminde ortaya koyduğunu anımsayın.

mevcuttur. (Bu skalerin Killing vektörünü normalleştirmek yoluyla ortadan kaldırıldığını anımsayalım; §31.4'ün sondan bir önceki paragrafına bakın.) Dilatonun sonraki tartışmalarla bir ilişkisi olacak; *bkz.* §31.15. Sicim sabitinin çok küçük olduğunu anımsayın. Artık o, Planck uzunluğunun karesinden çok hafif biçimde büyük olarak kabul edilir (α' küçük bir alan olmak üzere):

$$\alpha' \approx 10^{-68}\mathrm{m}^2.$$

Böylece 10–uzayzaman metriğiyle ilgili Ricci düzlüğü mükemmel bir yaklaşıklık tahmini olarak değerlendirilir.

31.9 Sicim dinamiği

Sicim kuramı gerçekten yalnızca, (9 uzamsal boyuta sahip olsa da) bir ardalan uzayzamanı civarında koşuşturan minik sicimlerle ilgili bir kuram olduğundan, uzayzaman eğriliğiyle ilgili bu ifadelerin gerçekte nereden geldiğini merak ediyor olabilirsiniz. Aslında sicim dinamiğini kontrol eden denklemlerle ilgili şimdiye dek kesin ifadeler kullanmadım. Şimdi buna bakalım.

Alan kuramında alışıldık olduğu üzere bir Lagrange denklemi (§§20.5, 6 ve §26.6) söz konusudur. Sicim Lagrange denklemi, $1/2\alpha''$nün, sicimin uzayzamanda izini sürdüğü 2–yüzey geçmişinin alanıyla *–dünya yaprağı–* çarpımı biçiminde tanımlanır. Dünya yaprağı üzerindeki metrik uzayzamanın sebep olduğuyla uyumlu olmalıdır; klasik olarak dinamik, dünya yaprağının verili uzayzaman ardalanında basitçe (uygun metrik imzaya sahip) bir tür "sabun filmi" ya da "asgari yüzey" olmasıdır. Ardalan klasik olarak hiçbir kısıtlamaya tabi değildir. Belirtilen dinamik uyarınca sicim etrafta basitçe dalgalanır. Bununla birlikte anomali konusu olduğundan daha büyük görünür ve ardalanın süpersimetriyle birlikte 10 boyuta sahip olma koşulunun bile artık yetersiz olduğunu ve kuantum sicimleriyle ilgili ardalan metriğine ilişkin tutarlılık koşullarını sağlamak üzere 10–uzay eğriliğiyle ilgili üstteki koşulların da gerekli olduğunu görürüz.

Bu Einstein denklemi benzeri tutarlılık gerekliliğine ek olarak, §31.7'de değinilip 2–spinli kütlesiz bir parçacığı açıklar görünen kapalı bir sicime ilişkin "en düşük uyarım" modunu anımsayalım. Ona ilişkin "2–spinli" doğa ortaya çıkar çünkü mod, salınımında (*bkz.* §22.11 ve §32.2) bir dört kutuplu (ya da $l = 2$) yapıya sahiptir ve esasen kütlesizdir çünkü oldukça "sert" bir sicimin en düşük modudur. Mod, orijinal hadronik sicimlerle ilgili olarak ciddi bir sorun oluşturmuş olmasına rağmen, kütleçekimle ilgili yeni bağlamında artık ona beğeniyle bakılmaktaydı çünkü olağan (4–bo-

yutlu) fizikte bir *graviton* (kütleçekim alanına ilişkin bir kuantum) 2–spinli kütlesiz bir parçacıktır. Geleneksel çözümlemede bu, (ε sonsuz küçük olmak üzere, *bkz.* §32.2, metriğin g_{ab}'den $g_{ab} + \varepsilon h_{ab}$'ye sonsuz küçük bir kaymasını veren simetrik bir "h_{ab}" tensörüyle tanımlanan) metrik alanındaki tedirgemelere ilişkin bir inceleme yoluyla ortaya çıkar. Yeni sicim kuramındaki bakış açısının, –(4 yerine 10 boyutta olmasına rağmen) üstteki Einstein denklemi benzeri tutarlılık gerekliliği ve bu "graviton benzeri" sicim uyarım modu bakışıyla– "sicim kuramı kütleçekimi içerir" şeklinde olduğu görülür. Edward Witten'ın (1996) sözcükleriyle:

> Sicim kuramı *kütleçekimi öngörme*ye ilişkin dikkat çekici özelliğe sahiptir.

Witten daha sonra şu yorumda bulunur:[600]

> Kütleçekimin sicim kuramına ilişkin bir sonuç olması gerçeği gelmiş geçmiş en önemli kuramsal anlayışlardan biridir.

Bununla birlikte boyutluluk konusuna ek olarak sicim kuramı yaklaşımının (şimdiye dek neredeyse her bakımdan) yalnızca, üslü seriler biçiminde (üstte anılmış olan "ε"da diyelim fakat üslü serilerle ilgili çoğu sicim kuramı hesaplaması α' sicim sabiti biçimindedir) ifade edilen tedirgeyici bir kuram olmakla kısıtlandığı vurgulanmalıdır. Bu kısıtlama, üstteki değerlendirmeleri Einstein'ın genel göreliliğindeki gibi temelde yatan aynı derin kurallara sahip bir kuram sağlamakta yetersiz gören görelilik uygulayıcılarının çoğu tarafından ciddi bir sınırlama olarak değerlendirilir.

İfade edildiğini duyduğum bir "sicim felsefesi" versiyonu, fiziği, 2–boyutlu sicim dünya yaprağının kendisine ilişkin daha ilkel "gerçekliğe" göre ikincil olan 10–boyutlu geometrik uzayzaman kavramıyla birlikte "esasen" *2–boyutlu* bir QFT olarak düşünmeye çalışmamız gerektiğine ilişkin olanıdır. Her şey "sicim uyarımları" biçiminde açıklanmalıdır ve bunlarsa yalnızca, dünya yaprağı üzerindeki 2 koordinatın fonksiyonları biçimindeki nicelikler olarak düşünülmelidir. 10 uzayzaman boyutu bu uyarımlar tarafından sezilir fakat her şey bir tür "2–boyutlu yaprak üzerindeki alan"dır.

Uzayzaman geometrisinde dinamik serbestlik derecesi söz konusu olmak üzere, kütleçekimi açıklama derdi olan bir kurama ilişkin bu tür bakış açısıyla oldukça fazla miktarda soruna sahibim. §16.7'den, daha büyük boyutlu bir uzay üzerinde, küçük boyutlu bir uzayda olduğundan çok

---

[600] Edward Witten'le Brian Greene tarafından 11 Mayıs 1998'de yapılan bir röportaj, Greene, 1999, s. 210'da aktarılır.

daha fazla fonksiyon ya da alanın bulunduğunu anımsayın (ve üstte §31.4'teki tartışmayla alttaki §§31.10–12, 15–17'dekilere bakın). Bu durum, fonksiyonun (alanın) her bir noktada sahip olabileceği bağımsız bileşen sayısından, bu bileşenlerin sayısı sonlu olmak üzere, bağımsızdır. Dahası, herhangi olağan bir "sicim uyarımı" kavramıyla ilgili olarak, nokta başına düşen bu bileşen sayısı aslında sonludur (çünkü dünya yaprağının her noktası yalnızca, ortam uzayındaki sonlu sayıda bağımsız yönde yer değiştirilebilir). Bu belirli "sicim felsefesi", şeylere bakmanın oldukça yanıltıcı bir yolu gibi görünür. Buna pek çok sicim kuramcısı tarafından gerçekten sıkı biçimde bağlı kalındığını düşünmememe rağmen bazılarının bu tür bir bakış açısını ağırlamaya hazırlanmış olmaları gerçeği belki de pek çok sicim kuramcısının uzayzaman boyutluluğuyla ilgili, görünüşe göre gözü pek bir tutum takınmalarının işaretçisidir. *Gözlemlenmiş* uzayzamanımızın, belki bir "düşük enerji etkisi" olarak düşünülen 4–boyutluluğu, görece daha az öneme sahip bir konu olarak kabul edilir görünmektedir!

Her ne olursa olsun, 10 boyutta bile, sicim kuramına ilişkin "Einstein vakum denklemi" yalnızca, sicimin 2–boyutlu dünya yaprağına ilişkin *tutarlılığın* bir sonucu olarak değerlendirilir. Ayrıca Ricci düzlüğü, sicim dünya yaprağının kendisinin bile yerinin belirlen*me*diği o konumlarda geçerli olmaya devam etmek zorunda olarak kabul edilir! Kuantum kuramı gerçekten

hareket eden sicimi içeren ardalan 9–uzayı

tarafından belirtilen birleştirilmiş klasik sistemin kuantize olma dinamiğini açıklasaydı bu durumda ardalan eğriliği üzerindeki tutarlılığın yalnızca sicimin yerinin belirlendiği yerde geçerli olmasına gerek duyulurdu. Öyleyse kuantize olan klasik sistemin bu sistem olmadığına ilişkin görüşü kabul etmek zorundayız. Aslında bir kütleçekim kuramı olduğu iddia edilmesine karşın sicim kuramı, uzayzaman metriğindeki dinamik serbestlik derecelerini açıklama sorunuyla gerçekten uygun biçimde uğraşmaz. Uzayzaman basit olarak, sicimlerin kendilerinin tam serbestliğe sahip olmalarına olanak tanıyacak belirli biçimlerde kısıtlanmış sabit bir ardalan sağlar.

31.10 Ek uzay boyutlarını niçin görmüyoruz?

10–boyutlu uzayzamana ilişkin tüm dinamiği artık ciddiye alacaksak 10–boyutlu uzaydaki devasa ek fonksiyonel serbestliği olağan bir fiziki kuramdaki dört uzayzaman boyutuyla ilgili uygun olan şeye nasıl getire-

ceğimize ilişkin zıt sorunla da yüzleşmek zorundayız. On boyuttaki Ricci düzlüğü, nokta başına N bağımsız bileşen alan (§16.7 ve §31.4) olağan bir 4–uzay alan kuramında sahip olduğumuz tek başına $\infty^{N\infty^3}$'ten çok daha büyük olan bir $\infty^{70\infty^9}$ fonksiyonel serbestliğine (*bkz.* §16.7) olanak sağlar. (10–boyutlu bir "Ricci düzlüğü" kuramı esasen 70 bağımsız fonksiyona 9–boyutlu bir başlangıç uzayı üzerindeki serbest veri olarak sahip olur.)[601] Ek büyüklük 9'un 3'ten büyük olmasından kaynaklanır. Öte taraftan 70 ve N'yle ilgili büyüklükler bu fonksiyonel serbestlik patlamasına göz ardı edilebilir bir katkı sağlar.[602] 10–boyutlu (orijinal Kaluza–Klein kuramındaki Killing vektörü tarafından karar verilmiş simetri gibi bir kısıtlamanın olmadığı; *bkz.* §31.4) bir uzayzamandaki olağan bir *klasik* alan kuramı gözlemlenmiş evrenimizle, bu korkunç fonksiyonel serbestlik fazlası nedeniyle kesinlikle büyük bir çelişki içindedir. Bu konuya §§31.12, 16'da yeniden geleceğiz.

Sicim kuramcıları bu fonksiyonel serbestlik fazlasıyla niçin özel olarak sorun yaşar görünmezler? Bunun nedeninin bir parçası, uygun biçimde kuantize olmuş bir sicim kuramında, sicimin fonksiyonel serbestliğini etkin biçimde indirgeyen kuantize sicimlere ilişkin tutarlılık gerekliliklerinden gelen ek uzayzaman kısıtlamalarının da söz konusu olabileceğine ilişkin belirgin umutlara sahip olmaları olarak görünmektedir. Bu umutlara §31.16'da bir göz atacağız. Yine de genellikle dillendirilen temel argüman, "ek" altı boyutun aşırı biçimde "küçük" olduğu varsayılırsa (diyelim ki 10^{-35}m'lik bir Planck ölçeğinde) bu durumda –günümüz fiziki dünyasında erişilebilir olan enerjilerle ilgili olarak– kuantum mekaniksel değerlendirmelerin yardıma gelmesi gerektiği ve ek uzamsal boyutlarla ilgili serbestlik derecelerini etkin biçimde "yok edeceği"ne ilişkin beklentiden kaynaklanır.

Bunun ne şekilde işlemesi gerekir? Üstte belirtildiği üzere sicim kuramsal değerlendirmelerin neredeyse tümü, yalnızca, belirli basit bir modelden uzak küçük tedirgemelerin incelendiği tedirgeyici bir çerçevede gerçekleştirilir. Burada, normal Minkowski 4–uzayıyla verili uzaysal tıkız bir Riemanncı $\mathcal{Y}$ 6–uzayının, bu belirli $\mathcal{Y}$'ye ilişkin toplam "büyüklük" çok küçük, diyelim ki 10^{-35}m'lik Planck ölçeğinde, olmak üzere, *çarpımı*, $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$, olan basit bir uzayzaman olarak ele almak durumundayız. $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$'den uzak küçük tedirgemeleri aramalıyız.

---

[601] 70 sayısı, Ricci düzlüğüne sahip n–uzaydaki bir başlangıç $(n-1)$–yüzeyindeki nokta başına bağımsız bileşen sayısıyla ilgili olarak, $n(n-3)$ denkleminden gelir; *bkz.* Wald, 1984; Lichnerowicz, 1994; Choquet–Bruhat ve DeWitt–Morette, 2000.

[602] *Bkz.* Penrose, 2003; Bryant vd., 1991; Gibbons ve Hartnoll, 2002.

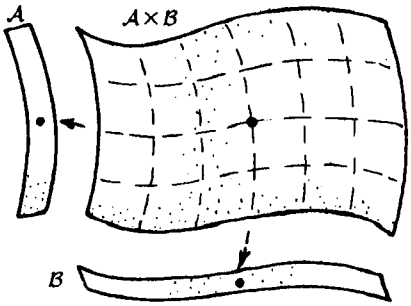
İlk olarak, hem $\mathcal{A}$ m–uzayı hem de $\mathcal{B}$ n–uzayının her biri (sözde) Riemanncı manifoldlar olarak kabul edilmek üzere, $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ "çarpım manifoldu"nun ne olduğuyla ilgili daha açık bir tabloya gerek duyarız. §15.2'den, $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$'nin noktalarının, a $\mathcal{A}$'ya ve b $\mathcal{B}$'ye ait olmak üzere, (a,b) çiftleri biçiminde tanımlandığını anımsayın, böylece $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$'nin boyutu $m+n$ olur (*bkz.* alıştırma [15.1]). $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ üzerindeki (sözde) Riemanncı metriği nasıl tanımlamalıyız? $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$'yle ilgili olarak, $(x^1,\ldots,x^m)$ ve $(y^1,\ldots,y^n)$ sırasıyla $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'yle ilgili yerel koordinatlar olmak üzere, $(x^1,\ldots,x^m,y^1,\ldots,y^n)$ yerel koordinatlarını kullanabiliriz. Böylece $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$'ye ilişkin g_{ij} metrik bileşenleri, sırasıyla $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'yle ilgili metrik bileşenlerin *dolaysız toplamını* açıklayan (matrislere ilişkin bütünüyle indirgenebilir bir gösterim için §13.7'de gösterilmiş olana benzer) "blok köşegen biçimi"ne sahip olur: $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$'deki metrik uzaklık karesi tekil olarak $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'dekilerin toplamıdır (Şekil 31.7).

Daha sonraki anlama ilişkin kilit bir gerçek (*bkz.* §31.14), $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ metriklerinin her ikisi de (Ricci tensörünü yok eden; *bkz.* §19.6) Ricci düzlüğüne sahipse bu durumda $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$'ye ilişkin dolaysız toplam metriğinin de Ricci düzlüğüne sahip olacağıdır.[31.3] $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ çarpımımızdaki $\mathcal{Y}$ uzayı esasen Ricci düzlüğüne sahip olarak kabul edilir ve $\mathbb{M}$'nin kendisi, düz olarak, kesinlikle Ricci düzlüğüne sahiptir. Ayrıca gerekli olacağı üzere $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ çarpımı da Ricci düzlüğüne sahiptir.

$\mathcal{Y}$ *tıkız* uzayını, genel Planck ölçeği düzeyindeki bir toplam uzamsal büyüklüğe, ya da biraz daha fazlasına, sahip olarak kabul etmek durumundayız. (Tıkızlığın §12.6 ve Şekil 12.14'te açıklanmış olan anlamını anımsayın.) $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$'den uzak tedirgemeler nasıl açıklanmalıdır? Bunlar, $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ metriğinde sonsuz küçük bir değişiklik sunan, §31.9'daki h_{ab}'ye benzeyen, $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ üzerindeki (tensör) alanlarınca verilir.

$\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ üzerindeki alanları çalışmak üzere bir başlangıç değeri problemi biçiminde düşünmek faydalı olur; böylece, öklitçi $\mathbb{E}^1$ 1–uzayı bir t zaman koordinatıyla ve öklitçi $\mathbb{E}^3$ 3–uzayıysa uzayla ilgili olmak üzere, $\mathbb{M}$'yi $\mathbb{M}=\mathbb{E}^1\times\mathbb{E}^3$ biçiminde gösteririz. Daha sonra bu alanları $\mathbb{E}^3\times\mathcal{Y}$ üzerindeki normal modlar biçiminde çözümleyebiliriz. *Bkz.* Şekil 31.8. ("Normal mod" kavramını §20.3'te ve §§22.11, 13'teki kuantum bağlamında klasik olarak açıklandığı biçimde anımsayın.) Bu normal modlar neye benzer? $\mathbb{E}^3\times\mathcal{Y}$'nin "çarpım" yapısı nedeniyle bu modların her birini basit olarak $\mathbb{E}^3$ üzerindeki bir modla $\mathcal{Y}$ üzerindeki bir modun olağan çarpımı biçiminde gösterebiliriz. $\mathbb{E}^3$'e ilişkin modlar yalnızca momentum durumlarıdır (§21.11) ve sürekli bir aile oluştururlar. $\mathcal{Y}$'nin normal modlarıyla ilgili olarak tıkızlık onların, her biri sonlu bir öz değer kümesi tarafından nitelenen *ayrık*

[31.3] Niçin? *İpucu*: Alıştırmalar [14.26], [14.27] ve §14.7'deki açık ifadelerin biçimine bakın.

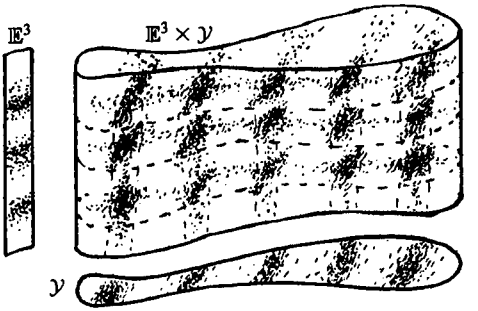


Şekil 31.7 (Sözde) Riemanncı olan iki $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ uzayının $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ çarpım manifoldunun kendisi de (sözde) Riemanncıdır (bkz. Şekil 15.3a, §15.2). $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$'nin ikisi de Ricci düzlüğüne sahipse bu durumda $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$'de sahiptir.

bir aile oluşturmalarını sağlama alır. (§22.13'ün sonundaki tartışmayı anımsayın.) Bu modlar, basit $\mathbb{E}^3\times\mathcal{Y}$ geometrisinin başka bir şeye çevrileceği biçimde nasıl "uyarılır"?

Alışıldık sicim kuramcısının, $\mathcal{Y}$'ye ilişkin tedirgemelere, en azından mevcut kozmolojik çağda, aldırış etmeyebilmemize ilişkin argümanı, $\mathcal{Y}$'nin herhangi bir modunu uyarmakta gerekli olan enerjinin, özel bir belirli sıfır enerji modları kümesiyle ilgili (bizim için §31.14'te önemli olacak) olan dışında, devasa olmasıyla ilgili bir beklentiye bağlıdır. Bu enerjinin niçin bu kadar büyük olması beklenir? Neden, $\mathcal{Y}$'nin kendisine ilişkin çok küçük ölçeğe dayanır? $\mathcal{Y}$ üzerindeki bir "kalıcı dalga", $\sim 10^{-35}$m'lik Planck uzaklığıyla karşılaştırılabilecek küçük bir dalga boyuna ve böylece de $\sim 10^{-43}s$ gibi bir Planck frekansına sahip olur. Böylesi bir modu uyarmak üzere gerekli enerji, sıradan parçacık etkileşimlerindeki en büyük enerjiden yaklaşık yirmi büyüklük derecesi kadar daha büyük olan genel bir Planck enerji düzeyinde, diğer bir deyişle yaklaşık 10^{12} joule kadar olur! Buradan hareketle $\mathcal{Y}$'nin geometrisini etkileyen modların, bugün bilinmekte olan fiziki eylemler için önemli parçacık fiziği işlemlerinin tümünde, uyarılmamış biçimde kalacağı iddia edilir. Tablo, evrenin çok erken dönemlerinde, altı boyut kabaca bir $\mathcal{Y}$ Planck ölçeğiyle açıklanan düzenlemeye yerleşmişken kalan üç uzamsal boyutun, günümüz kozmolojisiyle uyumlu olan uzamsal olarak neredeyse düz bir 3–boyutlu evren vermek üzere dışa doğru müthiş biçimde genişlediği şekilde sunulur. $\mathcal{Y}$ uzayları, evrenin var oluşuna ilişkin ilk Planck anlarından çok da sonra olmayan bir andan itibaren temel olarak rahatsız edilmemiş biçimde kalmıştır.

Bu argümana biraz daha ayrıntılı biçimde göz atalım. İşleri basitleştirmek üzere, $\mathcal{Y}$'nin, §31.4'teki orijinal Kaluza–Klein kuramı ve Şekil 15.1'de gösterilen hortum benzetmesinde olduğu gibi yalnızca, oldukça küçük bir ρ yarıçaplı bir S^1 *çemberi* olduğu durumu göz önüne alın. S^1'e ilişkin olarak, $\rho\theta$ çember etrafındaki gerçek uzaklığı ölçmek üzere, gerçel bir θ koordinatı ($\theta + 2\pi$'yle belirlenmiş bir θ'yla) seçebiliriz. $\mathcal{Y}$'nin modları



Şekil 31.8 $\mathbb{E}^3 \times \mathcal{Y}$ üzerindeki (Laplaca denklemiyle ilgili) tedirgeme modları $\mathbb{E}^3$ üzerindeki modlarla $\mathcal{Y}$ üzerindeki modların çarpımıdır.

artık, n bir tamsayı, diğer bir deyişle §9.2'de karşılaştığımız Fourier modları olmak üzere, basit olarak $e^{in\theta}$ niceliklerdir. $\mathbb{E}^3$ üzerinde, olağan (x, y, z) Kartezyen koordinatları seçebiliriz. §22.11'den "modlar"ı bulmaya ilişkin soruna yönelmenin bir yolunun (uygun) Laplace işlemcisine ait öz durumları aramak olduğunu anımsayalım. Mevcut bağlamda bu, bir yaklaşıklık tahmini (ya da yalnızca bir "model") olarak değerlendirilebilir. Daha doğru biçimde, geometrinin evrimiyle ilgili $\mathcal{H}$ Hamiltonına ait öz durumlarla ilgilenmeliyiz. Ricci düzlüğüne sahip 5–uzaylarla (gerekli $\mathcal{M} \times S^1$ tedirgemelerimizle) ilgili olarak, beş–boyutlu genel göreliliğin karışık olan uygun Hamilton formülasyonuna gerek duyarız. Bununla birlikte buna ilişkin başlıca terim esasen bir Laplace *işlemcisidir* ve bu, mevcut tartışmamız için yeterli olacaktır.

2–boyutlu $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ Laplace işlemcisiyle ilk olarak §10.5'te karşılaştık. Burada dört boyuta yapılacak bir genellemeye gerek duyarız fakat $\mathbb{E}^3 \times S^1$ uzayımızın metriği hâlâ düzdür, böylece §22.11'dekine benzer daha ayrıntılı bir ifadeye gerek duymayız. Burada tüm gerek duyduğumuz, değişken sayısını dörde çıkarmaktır, böylece Laplace işlemcisini, dördüncü koordinatımız S^1 için gerekli $\rho\theta$ olmak üzere,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

biçiminde yazabiliriz.[31.4] "Modlar"ımızı bulmak üzere, bu ∇^2'ye ilişkin öz durumları ararız. İşlem daha özgül biçimde yalnızca, $\mathbb{E}^3 \times S^1$'in S^1 kısmıyla ilgili mod çözümlemesiyle uğraşmak ve $\mathbb{E}^3$ kısmını olağan bir alan olarak bırakmaktır. Buradan hareketle alanlarımızı, her biri, $e^{in\theta}$ biçimine ait

[31.4] Niçin?

θ'ya üstte açıklandığı üzere bir bağımlılık vererek farklı bir "n" tamsayısına sahip olan farklı bileşenlere ayırırız. Böylece, n'inci dereceden bir S^1 moduyla ilgili olarak $\mathbb{E}^3 \times S^1$ başlangıç 4–uzayımız üzerinde, ψ olağan x, y, z uzay koordinatlarına ilişkin bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Psi = e^{in\theta}\psi$$

ifadesini yazabiliriz. Bu tür herhangi bir n'inci dereceden Ψ moduyla ilgili olarak, üstteki Laplace işlemcisi ifademizdeki $\rho^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$ terimi basit olarak $-n^2/\rho^2$'yle değiştirilebilir:[31.5]

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2} \mapsto -\frac{n^2}{\rho^2}.$$

Kalan x, y, z değişkenleriyle ilgili olarak Laplace işlemcimiz artık olağan 3–uzay haline geri döner fakat bu 3–uzay Laplace işlemcisine eklenmiş sabit $-n^2/\rho^2$ terimine sahip oluruz.

Olağan Minkowski $\mathbb{M}$ uzayzamanındaki μ kütleli (spinsiz) olağan bir parçacığa ilişkin alan denklemini anımsayalım. $\Box = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial z^2$ olmak üzere bu,

$$\left(\Box + \frac{\mu^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

"Klein–Gordon" dalga denklemidir (*bkz.* §24.5). Bunu (QFT'ye yönelik bir S–matrisi yaklaşımında uygun olacağı üzere, *bkz.* §26.8) "gelen serbest bir parçacık" olarak düşünebiliriz. Bununla birlikte $\mathbb{M} \times S^1$ 5–uzayında, $\Box$ dalga işlemcisinde ek bir $-\rho^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$ terimine sahip oluruz. Bu 5–uzay parçacığının, S^1'le ilgili bir n–modlu öz durumda bulunduğunu kabul edersek bu terim üstteki gibi n^2/ρ^2 terimiyle değiştirilir. Buradan hareketle, olağan Minkowski 4–uzay bakış açısından, n–modlu 5–uzay Klein–Gordon parçacığımız

$$\left(\Box + \frac{\mu^2}{\hbar^2} + \frac{n^2}{\rho^2}\right)\psi = 0$$

4–uzay denklemini sağlar. Bu yine tam olarak Klein–Gordon denklemidir fakat artık $\mu^2/\hbar^2$ yerine $\mu^2/\hbar^2 + n^2/\rho^2$ gelmiştir. Böylece yeni bir parçacıkla ilgili 4–uzay Klein–Gordon denklemine, kütlenin μ'den $\sqrt{(\mu^2 + \hbar^2 n^2/\rho^2)}$'ye artırılmış haliyle sahip oluruz.

Şu halde, Doğaya ait gözlemlenmiş herhangi bir parçacık (seçtiğimiz ρ değeri için) kabaca $\hbar/\rho$ olan Planck değerinden son derece daha küçük bir

[31.5] Bunu niçin yapabiliriz?

μ kütlesine (*bkz.* §31.1) sahip olur. Bu yeni parçacık $n \neq 0$ olduğunu varsayarak en azından Planck mertebesinde bir kütleye ($\hbar n/\rho$, μ'den çok daha büyük olmak üzere) sahip olur, böylece o, halihazırda kullanılan parçacık hızlandırıcılarının menzilinden epeyce uzakta bulunur. Buradan hareketle sicim kuramcılarınca, mevcut kozmolojik çağda uygulanabilir olan herhangi bir parçacık fiziği işleminde hiçbir $n \neq 0$ moduna ulaşılamayacağı sonucu çıkarılır!

Esasen aynı argüman tümüyle Planck boyutundaki tıkız $\mathcal{Y}$ uzayında da geçerli olur. Kendimizi bugün içinde bulduğumuz oldukça düşük enerji durumunda $n \neq 0$ için $\mathcal{Y}$'ye ait uyarım modları bizim için deneye dayalı olarak erişilmezdir, öyleyse sicim kuramcıları haklıdır. Bu nedenle, ek uzamsal boyutlar hipoteziyle gözleme dayalı günümüz fiziği arasında herhangi bir çelişki bulunmadığı ileri sürülür.

31.11 Kuantum kararlılık argümanını kabul etmeli miyiz?

Peki bu gerekçelendirme uygun mudur? Bunu sorgulamanın derin nedenleri bulunduğunu sanıyorum.[603] Uzamsal üç boyutun kalan altısından niçin bu kadar farklı davrandığıyla ilgili yanıtlanmamış bilmeceyi bir kenara bıraksak bile, $\mathcal{Y}$ geometrisinin evrenin daha sonraki evrimi sırasındaki değişimlere bağışık olmasına dayanan bu "parçacık fiziği" gerekçelendirmesiyle ilgili son derece dikkatli olmak zorundayız.

Bununla birlikte $\mathcal{Y}$'yle ilgili Planck enerji tedirgemeleri konusuna girmeden önce §31.10'da göz ardı etmeyi seçtiğim $\mathcal{Y}$'nin *sıfır enerji* modlarına geri dönmeliyim. §31.14'te, sicim kuramı programında bu modların, standart parçacık fiziğindeki simetri gruplarıyla (§§25.5, 7) kurulacak gerçek ilişkilerle ilgili umut vaat etmeleri nedeniyle, beğeniyle değerlendirilme eğiliminde olduğunu göreceğiz. Matematiksel olarak yine de, *modüller sorunu* olarak adlandırılmış olan ciddi bir güçlüğe yol açarlar. Bir Riemann yüzeyiyle ilgili olarak (*bkz.* §8.4), ele alınan $\mathcal{Y}$–uzayı türünün özgün biçimini tanımlayan, *modüller* olarak adlandırılan belirli parametreler söz konusudur. (§31.14'te, tercih edilen $\mathcal{Y}$'lerin, modülleri genellikle bir karmaşık sayı ailesi oluşturan ve "Calabi–Yau" uzayları olarak adlandırılan belirli karmaşık 3–manifoldlar olduğunu göreceğiz.) Sıfır enerji modları bu modüllerin değişimiyle ilgilidir. Bu değişimin uzamsal bir $\mathbb{E}^3$ bağımlılığına sahip olmasına olanak tanımayı seçebiliriz fakat bu bize yalnızca, N, bağımsız (gerçel) modüllerin gerçek sayısına karşılık üzere, kabul edilebilir bir $\infty^{N\infty^3}$ verir. Bununla birlikte, içerisinde, modüllerin tekil bir $\mathcal{Y}$–

[603] *Bkz.* Penrose, 2003.

uzayına yol açarak seri biçimde sıfıra küçüldüğü modların var olduğu açığa çıkar. Felakete yol açar görünen bu kararsızlık esasen sicim kuramcılarının "modüller sorunu"dur (ayrıca *bkz.* §31.14).[604] Yanıtlanmadığı görülür; buna rağmen genellikle göz ardı edilir.

Bunu da göz ardı etmeyi seçtiğimizi düşünün(!). Bu durumda, altı ek boyutun titreşimiyle ilgili (Planck ölçekli) pozitif enerji modları uyarımlardan bağışık mıdır? Normal parçacık fiziği enerjileriyle kıyaslandığında Planck enerjisi esasen çok büyük olmasına rağmen yine de o hâlâ, yaklaşık bir tonluk TNT kalıbının patlamasıyla açığa çıkan enerjiyle kıyaslanabilecek *kadar* büyük bir enerji değildir. Elbette bilinen evrende bundan çok daha fazla kullanılabilir enerji mevcuttur. Örneğin güneşten gelip dünya tarafından bir saniyede alınan enerji bunun yaklaşık 10^8 katı kadar daha büyüktür! Yalnızca enerji terimleriyle bu, $\mathcal{Y}$ uzayını *tüm evren* için uyarmaya yetecek olandan çok daha fazladır!

Sicim kuramcısının gerekçelendirmesinde bu enerji, yerel bir parçacık etkileşiminde iletilir ve biz de onu olağan uzayın küçük bir bölgesinde idare edilir olarak hayal etme eğilimi gösteririz. $\mathcal{Y}$'nin uyarımına ilişkin erişilmez olması gereken gerçek modlar yine de, $\mathbb{E}^3\times\mathcal{Y}$ tedirgemelerimizde $\mathbb{E}^3$'ün bütününe düzenli biçimde yayılır. $\mathbb{E}^3\times\mathcal{Y}$'nin uyarım modlarının basit biçimde $\mathbb{E}^3$ üzerindeki modlarla $\mathcal{Y}$ üzerindeki modların çarpımı olduğunu anımsayın. Burada ele almakta olduklarımız yalnızca $\mathbb{E}^3$ boyunca sabittir. Bunların, olağan fiziki uzaydaki yerelleşmiş bir bölgeye yerleştirilmeleri gerektiğiyle ilgili söylenecek hiçbir şey yoktur.

Bununla birlikte bu, kendi içinde, yerel parçacık etkileşimlerinin böylesi modları uyarmanın uygun biçimi olması karşısındaki bir argüman değildir. $\mathbb{E}^3$'ün tümüne yayılmış olmaları, parçacık fiziği bakış açısına karşı çıkmaz. §26.2'deki yaratma ve yok etme işlemcileriyle §§26.7, 8'deki Feynman grafiklerine ilişkin tartışmadan, QFT'deki parçacıklar ve etkileşimlerinin genellikle momentum durumları biçiminde açıklandığını anımsayalım. Böylesi durumlar esasen, §21.11'de özel olarak vurgulandığı üzere, $\mathbb{E}^3$'ün tümüne "yayılır". "Kuantum parçacıkları"nın hiçbir biçimde uzamsal olarak yerelleşmesi gerekmez. Belki de bu konuları düşünmenin daha iyi bir yolu parçacıklar yerine "kuanta"ya başvurmaktır. Konu, Planck enerjisinin tek bir kuantumunun bir $\mathcal{Y}$ modu içerisine, ne biçimde olursa olsun, yerleştirilebilmesini beklemenin mantıklı olup olmayacağıdır. Bununla birlikte, bu biçimi zorunlu şekilde yerel parçacık etkileşimleri ve örneğin tüm uzayzaman geometrisine ilişkin çizgisel olmayan bir rahatlık gibi bir şey olarak düşünmemiz gerektiğini sanmıyorum.

---

[604] Modüllerle ilgili yansımalar için *bkz.* Dine, 2003.

Başkaca biçimler olması gerektiğine inanacağımız sebepler mevcut mudur? Aslında bana göre bununla ilgili uğraşacağımız sebepler söz konusudur. Hortum benzetmemize yeniden dönelim (Şekil 31.3). Hortumu, ($\mathbb{E}^3$'le benzeş) "büyük" boyutunda esasen düz olarak ve küçük bir ρ yarıçaplı çember olan ($\mathcal{Y}$'yle benzeş) sabit bir S^1 ara kesitine sahip biçimde düşünün. Hortumun uyarım modları kendi boyu üzerinde bir yöne ya da diğerine yolculuk eden çeşitli dalgalardan ("$\mathbb{E}^3$ modları") ve çembersel ara kesit biçimindeki çeşitli çarpıklıklardan ("$\mathcal{Y}$ modları") oluşabilir. Gördüğümüz üzere bu sonraki modlardan herhangi birisi tüm hortum boyunca eşzamanlı biçimde ortaya çıkabilir. ν titreşim frekanslı böylesi bir moda – bir *eksiton*– ilişkin tek bir kuantum uyarımındaki enerji, kuantum mekaniksel olarak $2\pi\hbar\nu$'dür (*bkz.* §21.4) ve hortum uzunluğundan bağımsızdır!

Sonsuz uzunluktaki bir hortum için bu, tekil her bir eksitonla ilgili olarak sıfır yoğunluklu bir enerji verir, bu durumda hortumun, diyelim ki $R \gg \rho$ olmak üzere R yarıçapındaki, çok büyük bir çember olarak büküldüğünü düşünmemiz daha az kafa karıştırıcı olabilir. Şimdi, belirli bir $\mathcal{Y}$ titreşim modunu belirli bir ν frekansıyla birlikte düşünün. Bu eksitondaki toplam $2\pi\hbar\nu$ enerjisi aslında R'den bağımsızdır. Bu, kafa karıştırıcı görülebilir çünkü R'yi ne kadar büyük alırsak titreşimde yerel olarak var olacak enerjinin, $1/R$'yle orantılı biçimde, o kadar küçük olacağını ima eder. Bu bir çelişki değildir fakat bize, hortum uzunluğu ne kadar büyük olursa, sabit bir titreşimsel $\mathcal{Y}$ moduyla ilgili olarak bir eksitondaki titreşim genliğinin o kadar küçük olacağını söyler. $R \to \infty$ limitini alırsak modda yerel olarak depolanmış enerji sıfıra gider. Bundan, hortumun yerel olarak titreşebileceği herhangi belirli bir biçimin, hortumun sonsuz haline geldiği limitte, tekil her bir kuantumun etkisi azalırken git gide daha fazla sayıda kuanta içermek zorunda olduğunu öğreniriz. Böylece hortum davranışına ilişkin bir kuantum açıklaması yerine *klasik* bir açıklamanın daha uygun hale gelebileceğini düşünmeye zorlanırız.[605]

Bu, büyük kuantum sayılarıyla ilgili bir kuantum sistemine ilişkin *klasik sınır* konusunu ve bununla ilgili, böylesi klasik bir düzenlemeye yönelik **R** durum indirgemesi konusunu ortaya çıkarır. Özellikle 29. bölümdeki tartışmada, **R** konusunun günümüz kuantum kuramı çerçevesi içinde gerçekten bütünüyle çözümlenemeyeceğini görmüştük.[606] Yine de iyi bir fizikçi, bir kuantum açıklaması kullanmanın ne zaman uygun olacağıyla ve klasik bir açıklama kullanmanın fiziki olarak ne zaman daha fazla anlam

[605] Bir QFT çerçevesi içinde kalmak tercih edilip klasik bir açıklama yerine uyumlu bir durum, §26.6, kullanılabilir. Bununla birlikte bu, burada ortaya konan konuları savuşturmaz.

[606] Pek çok sicim kuramcısının **R**'yi dinamik bir işleme dahil etmeye heveslendiğinden kuşkulansam da dikkat çekici bazı istisnalar da söz konusudur; *bkz.* Ellis vd., 1997a, 1997b.

ifade edeceğini bilmelidir. §22.10'da tartışılmış olan olağan açısal momentum durumunu anımsayın. Çok büyük bir açısal momentuma sahip bir cisim en iyi şekilde klasik bir sistem olarak ele alınma eğilimindedir, böylece çok iyi tanımlı bir döndürme ekseni elde ederiz. Buna yalnızca çok büyük bir j değerine sahip bir kuantum sistemi olarak davrandığımızda, genellikle etraftaki her yönü işaret eden pek çok spin yönüne sahip bir Majorana açıklaması elde ederiz. Pratikte klasik açıklama çok büyük açısal momentumlarla için kullanılan açıklamadır ve bu fiziki gerçekliğe ilişkin iyi bir tablo sunar. Daha genel olarak, klasik açıklamalar, kuantum sayıları aşırı şekilde büyük hale geldiğinde fiziki olarak uygun kabul edilme eğilimindedir. Açısal momentum durumunda ilgili kuantum sayısı, diğer bir deyişle j, $\hbar$'ye ilişkin birimler biçiminde ölçülür, bu durumda kuantum mertebesinden ne zaman uzaklaştığımızı söyleyen makul görünümlü bir kıstas düşünebiliriz: $\hbar$ birimlerinde j'nin değeri oldukça büyüktür. Bir hortumda, ρ uzaklığının küçüklüğünün bize bir "kuantum" açıklamasının klasik olan bir açıklamadan daha elverişli olduğunu söylemek üzere, kendiliğinden uygun bir ölçü olmadığını görürüz. Sabit bir ρ için, yerel hortum titreşimlerine ilişkin açıklamanın, R'yi ne kadar büyük alırsak o kadar "klasik" hale geldiği görülür çünkü giderek artan sayıda, git gide daha çok titreşimsel kuantum sayısı içeren eksitonu dahil etmeye gerek duyarız ($\mathcal{Y}$ modları).[607]

"Küçük" olanlar (bana göre göre kuantum mekaniğinin yapısında §§30.9–12 hattında bir değişimin gerekli olduğu) kuantum kurallarına uygun olarak davranırken ne kadar "büyük" sistemlerin klasik biçimde açıklanır hale geleceğini söyleyen bir kuramın yokluğunda, $\mathcal{Y}$'nin uyarımlarına ilişkin ileri sürülen erişilemezlikle ilgili herhangi kesin bir sonuca varamayacağımız görülür. (30. bölümdeki değerlendirmeler bize henüz herhangi kesin bir yanıt ve kesinlikle tartışmasız olmayan bir yanıt da sunar görünmemektedir.) Yine de, $\mathcal{Y}$'ye ilişkin gerçek tedirgemelerin bizi, tekil her bir kuantumun $\mathcal{Y}$ geometrisini hemen hemen hiç etkilemediği çok büyük sayıda kuantaya ve büyük kuantum sayılarına sahip bir kuantum tablosuna yöneltmesi gerçeği bakışıyla, "küçük" $\mathcal{Y}$'ye sahip bir $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ evrenine ilişkin tedirgemelerin, bunları kuantum mekaniksel biçim yerine *klasik olarak* çalışırsak, nasıl davranacağıyla ilgili daha fazla kavrayış elde edebileceğimiz görülür. Şimdi gelin bunu ele alalım.

[607] Eksitonlar hortum titreşimlerine ilişkin bir kuantum alan kuramsal açıklamasında bozonlar gibi davranır, §22.13, §23.8, §26.2, böylece herhangi belirli bir $\mathcal{Y}$ modunda pek çok kuanta söz konusu olabilir. Böylesi bir kuantum açıklamasının uygun olabileceği gerçek bir fiziki sistem uzun ve dar optik dalga kılavuzu, diğer bir deyişle optik bir lif, olur.

31.12 Ek boyutlara ilişkin klasik kararsızlık

10–uzay modelini aslında tümüyle klasik bir model olarak alırsak ne söylenebilir? Bu en azından bize tam kuantum modelinin esasen nasıl davranacağıyla ilgili bir yönlendirme sağlar. §31.10'un başında, klasik bir $(1+9)$–uzayzamanda (diğer bir deyişle bir zaman ve dokuz uzam boyutunda) kabul edilemez bir serbestlik derecesi fazlası bolluğu ($\infty^{M\infty^9} \gg \infty^{N\infty^3}$) söz konusudur. Bu yeterince ciddidir fakat bana göre şeyler esasen bundan çok daha kötüdür. Klasik bir –Ricci düzlüğüne bağlı– $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ evreninin küçük tedirgemelere karşı son derece kararsız olduğunu bulacağız. $\mathcal{Y}$ tıkızsa ve Planck büyüklüğündeyse bu durumda uzayzaman tekilliklerinin (§ 27.9) bir saniyenin küçük bir kesri içinde sonuçlanması beklenir.

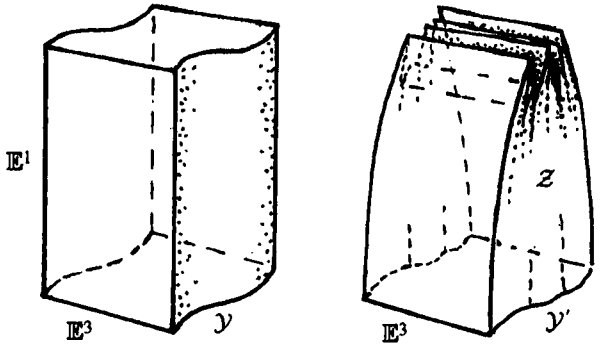
İlk olarak yalnızca $\mathcal{Y}$ geometrisini rahatsız edip buradan hareketle uzamsal $\mathbb{E}^3$'e "sızmayan" $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ tedirgemelerini ele alalım. Demek oluyor ki, tüm $(1+9)$–uzayzaman $\mathcal{Z}\times\mathbb{E}^3$ olmak üzere, "kendine özgü" bir Ricci düzlüğüne sahip $\mathcal{Z}$ $(1+6)$–uzayzamanını ($\mathcal{Y}$'ye ilişkin huzursuz evrimi) inceleyeceğiz. $\mathcal{Z}$'nin $\mathcal{Y}$'ye "yakın" olan bir 6–uzayın zaman evrimi olduğunu düşünürüz böylece $\mathcal{Z}$, daha sonraki zamanlarda $\mathbb{E}^1\times\mathcal{Y}$'den önemli ölçüde sapabilecek olmasına rağmen, $\mathcal{Y}$'ye ilişkin $\mathbb{E}^1\times\mathcal{Y}$ (değişmeyen) "zaman evrimi"ne yakın biçimde başlar (Şekil 31.9). Burada $\mathbb{M}$'yi §31.10'da olduğu gibi ($\mathbb{E}^1$ zaman boyutunu ve $\mathbb{E}^3$ uzay boyutlarını açıklamak üzere) $\mathbb{M} = \mathbb{E}^1\times\mathbb{E}^3$ biçiminde ifade ediyorum böylece $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ uzayzamanını ($\mathcal{Y}$'ye ilişkin zaman evrimini çarpımda öne alarak) $(\mathbb{E}^1\times\mathcal{Y})\times\mathbb{E}^3$ olarak düşünürüz; *bkz.* Şekil 31.9a.

1960'ların sonunda Stephen Hawking ve ben, $\mathcal{Z}$ tekil olmasını beklemek zorunda olduğumuzu gösteren bir tekillik teoremini kanıtladık.[608] Açıkça belirttiğimiz üzere bu teorem $(1+6)$–uzayzamanda da (ve $(1+9)$–uzayzamanda) tıpkı orijinal olarak ele aldığımız geleneksel $(1+3)$–uzayzamanda olduğu gibi geçerlidir. Bu teoremin sonuçlarından birine göre uzaysal tıkız bir hiper yüzey içerip belirli bir özel anlamda "kendine özgü" olan[609] (ve zamansal kapalı eğrilerden bağımsız, *bkz.* § 17.9 ve Şekil 17.18) Ricci düzlüğüne sahip herhangi bir uzayzaman esasen tekil olmak zorundadır!

---

[608] *Bkz.* Hawking ve Penrose, 1970.

[609] Koşul, her zamansal ya da sıfır jeodezinin "kendine özgü" eğrilikle, bu tür her jeodezi üzerinde bir yerde, k^a sıfır vektörü jeodeziye tanjant olmak üzere, $k_{[a}R_{b]cd[e}k_{f]} \neq 0$ olması anlamında karşılaşmasıdır. Serbestlik derecelerine ilişkin basit bir dolaysız değerlendirme bu koşulun her tür "kendine özgü" uzayzamanda kesinlikle sağlandığını gösterir. Teoremin Ricci düzlüğünden çok daha genel koşullarda geçerli olduğu belirtilmelidir. Yalnızca Ricci tensörünün uygun bir "negatif olmayan enerji koşulu"nu sağlamasını bekleriz; *bkz.* §27.9, özellikle not 27.20 ve §28.5.



Şekil 31.9 $\mathcal{Y}$ "küçük" bir Calabi–Yau uzayı olmak üzere bir tekillik teoremi $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ tedirgemelerinde geçerlidir. (a) $\mathbb{M} = \mathbb{E}^1\times\mathbb{E}^3$ olarak ifade ettiğimiz, $\mathbb{E}^1$'in zamanla ilgili olduğu tekil olmayan $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ kanonik durum. (b) $\mathcal{Y}$'ye ilişkin genel bir $\mathcal{Y}'$ tedirgemesi tekil olan bir $\mathcal{Z}$ uzayına evrimleşir, böylece $\mathbb{E}^3$'e etki etmeyen genel $\mathbb{E}^3\times\mathcal{Y}$ tedirgemeleri tekil olmayan $\mathbb{E}^3\times\mathcal{Z}$ uzaylarına evrimleşir.

dadır! Orijinal $\mathbb{E}^1\times\mathcal{Y}$ tekil olmaktan kurtulur çünkü bu durumda kendine özgülük koşulu başarısız olur. Bununla birlikte kendine özgü biçimde huzursuz olan $\mathcal{Z}$ tekil olmak zorundadır.

Böylesi "tekillik teoeremleri"nde eğrinin sonsuz bir değere ıraksamasının dolaysız biçimde saptanamayacağı fakat yalnızca, zamansal ya da sıfır jeodezilerin uzayzaman içerisinde sonsuz uzunluğa (ya da sıfır jeodezileri durumunda sonsuz afin uzunluğuna; *bkz.* §14.5) genişletilebilir olması önünde bir engel söz konusu olduğunun saptanabileceği belirtilmelidir. Normal beklenti bu engelin esasen ıraksama eğrisinin varlığından kaynaklanmasıdır fakat teorem bunu dolaysız biçimde göstermez. Bununla birlikte bu teorem bize $\mathcal{Z}$'nin şu y da bu biçimde tekil hale geleceğini söyler. $\mathcal{Y}$'den uzaklaşan tedirgeme $\mathcal{Y}$'nin kendisi gibi aynı genel ölçeğe (diğer bir deyişle Planck ölçeğine) sahipse bu durumda $\mathcal{Z}$'deki tekilliklerin karşılaştırılabilir bir zaman ölçeğinde ($\sim 10^{43}$s) ortaya çıkmasını beklememiz gerekir fakat bu zaman ölçeği, tedirgemeler $\mathcal{Y}$'nin kendisinden orantılı biçimde daha küçük bir büyüklükteyse bir biçimde daha uzundur.

$\mathcal{Y}$'yi kendine özgü biçimde, tüm $\mathbb{M}\times\mathcal{Y}$ $(1+9)$–uzayına ilişkin tekil olmayan bir tedirgeme elde edeceğimiz şekilde rahatsız etme olasılığına sahip olmak istersek bu durumda uzayzamanm $\mathbb{M}$ kısmına da belirgin biçimde taşan rahatsızlıkları düşünmek zorunda olmamız sonucuna varırız. Bununla birlikte böylesi rahatsızlıklar belirli bakımlardan "olağan" uzayzaman tablomuza yönelik olarak tek başına $\mathcal{Y}$'yi etkileyenlerden bile daha tehlikeli olabilir çünkü $\mathcal{Y}$'de var olması olası Planck ölçekli büyük eğrilik-

ler[610] gözlemle toptan çelişkili olarak olağan uzaya taşacak ve çok kısa bir sürede uzayzaman tekillikleriyle sonuçlanacaktır.[611]

Elbette klasik kuramdaki kabul edilemez tekillikler bize böylesi kusurların o kurama ilişkin uygun kuantum versiyonunda zorunlu biçimde devam edeceğini söylemez. §22.13'te gördüğümüz üzere, kuantum mekaniği olağan klasik atomların felakete yol açan kararsızlıklarını, elektronların çekirdek içine elektromanyetik ışınım yayımı yoluyla sarmal yapmasını sağlayarak iyileştirir. Bununla birlikte tek başına "kuantizasyon işlemleri"nin sunumu klasik tekilliklerin zorunlu biçimde ortadan kaldırılmasını sağlamaz. Kuantizasyon sonrası tekilliklerin devam ettiği (kuantum kütleçekime ilişkin oyuncak modellerinin çoğundaki gibi)[612] pek çok örnek söz konusudur.

Ayrıca, (1 + 9)–boyutlu Ricci düzlüğünün sicim kuramının kesin biçimde talep ettiği gereklilik olmadığı gerçeğini de –*bkz.* §31.8– not etmeliyiz. Ricci düzlüğünün yalnızca, bu gerekliliğe yönelik, α' sicim sabitindeki en düşük dereceli terimden daha yüksek dereceli olanlar göz ardı edildiğinde ortaya çıkan mükemmel bir yaklaşıklık tahmini olarak değerlendirildiğini anımsayalım. Belki, α' sicim sabitindeki tüm dereceleri içeren "tam" gereklilik üstteki tekillik teoreminden sakınabilir. Bununla birlikte bu gereklilik bize Ricci tensörü üzerinde alışıldık yerel enerji pozitifliği taleplerinin sağlandığı bir koşul sunarsa (özellikle *bkz.* not 27.9 ve §28.5) bu durumda tekillik teoremi hâlâ geçerli olur. Öte taraftan böylesi yerel enerji koşullarının çiğnenmesi QFT'de kesinlikle ortaya çıkabilir (§24.3), öyleyse bu konular kesinleşmiş olmaktan uzaktır.

---

[610] Bir $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ "hiper simit" topolojisine sahip $\mathcal{Y}$ sıfır eğriliğine ilişkin olağanüstü durumlar söz konusudur. Bununla birlikte bunlar günümüz sicim kuramcılarınca beğenilen $\mathcal{Y}$ modelleri değildir; §31.14. Dahası hiper simide ilişkin çoğu tedirgeme düz olmaz.

[611] Bu sonuç daha önce değinilip $\mathcal{M}$ uzayzamanının tümünde dolaysız biçimde geçerli olan tekillik teoreminin diğer bir uygulamasından ortaya çıkar. Bu uygulamada tıkız bir uzaysal hiper yüzeyin mevcut olması koşulu, $\mathcal{C}$ gelecek ışık konisi tüm yönlerde "kıvrılıp kendisiyle buluş"an bir p noktasının varlığı koşuluyla yer değiştirir. $\mathcal{C}$ geometrik yeri, p geçmiş bitiş noktasına sahip ve geleceğe doğru belirsiz biçimde genişleyen ℓ ışık ışınları ailesi, diğer bir deyişle boş konileri, *bkz.* § 28.8, tarafından taranandır. Teknik olarak gerekli koşul bu tür her ℓ'nin, kendisiyle ilgili olarak p'den q'ya, katı biçimde geleceğe doğru uzanan zamansal bir eğrinin bulunduğu bir q noktası içermesidir. Henüz açıklanmış olan tam $\mathcal{M} \times \mathcal{Y}$ modellerinde koşul başarısız olur (bir zorunluluk sonucu çünkü $\mathcal{M} \times \mathcal{Y}$ tekil olmayabilir) fakat *çok az* bir farkla. Esasen gerçekleşen, 8–boyutlu ℓ ışık ışınları ailesi arasında, uzayzamanın "$\mathcal{Y}$ kısmı"na doğru gidip geri gelerek $\mathcal{C}$'nin içine doğru kıvrılmakta başarısız olan yalnızca 2–boyutlu bir alt aile söz konusudur. $\mathcal{C}$ tarafından karşılaşılan kendine özgü fakat küçük bir tedirgemeyle, bu kurtarıcı özelliğin yok olacağı ve üstte değinilmiş olan tekillik teoreminin esasen geçerli olacağı gösterilebilir. Bu argümana ilişkin ayrıntılar başka bir yerde sunulacaktır.

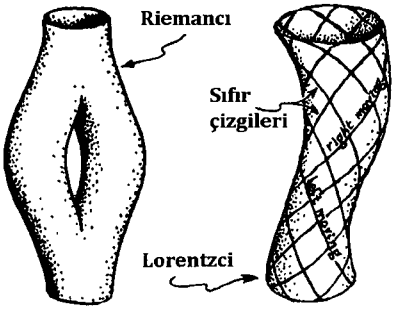
[612] Örneğin *bkz.* ilgili başkaca araştırmalara başvuran Minassian, 2002.

Bana göre daha ciddi olanı esasen, α' sicim sabitindeki tüm dereceleri içeren, sınırlanmamış diferansiyel derecedeki diferansiyel denklemlere ilişkin sonsuz bir sistem gerçeğidir. Buna göre, bir başlangıç 9–yüzeyi üzerindeki tüm veri, (olağan alan kuramlarında gerekli olan yalnızca birinci ya da ikinci dereceden türevler yerine) alan nicelikleri biçimindeki tüm türev derecelerini içerir. Böylece 9–yüzey üzerindeki nokta başına gerekli parametre sayısı sonsuzdur, böylece herhangi pozitif bir M tamsayısı için $\infty^{M\infty^9}$'dan *daha büyük* bir fonksiyonel serbestlik elde ederiz. Bu, fonksiyonel serbestlik fazlası sorununu öncekinden de kötü hale getirir! Bu tam gereklilikle ilgili matematiksel biçimli herhangi ciddi bir tartışmadan haberdar değilim ve bununla ilgili ne tür başlangıç verisinin uygun olabileceğini bilmiyorum.

31.13 Sicim QFT'si sonlu mudur?

Üstte vermiş olduğum argüman türü, sicim kuramsal modellerin Einstein'ın (1 + 3)–boyutlu genel göreliliğini her tür duyarlı "klasik limit"te çoğaltmasının olası olduğuna ikna edilmekte niçin ağır sorunlar yaşadığımı örnekler. Sicim kuramının iddiasının, (sonuçtaki kuram aslında fiziki olarak ne anlama gelirse gelsin) *tutarlı bir sonlu* QFT olduğuna ilişkin diğer kısmından ne haber? Bana öyle geliyor ki, sabitlenmiş bir sicim dünya yaprağıyla ilgili olarak sonlu bir genliğin elde edildiği durum aslında ön sicim argümanına ilişkin en sağlam parçadır. Bu sonuç sicim fikrinin orijinal üstünlüklerine ilişkin doğru bir yansıma sağlar gibi görünür. Yine de burada bile ortaya konmak zorunda olan temel sorular söz konusudur.

Başlamak gerekirse sicim kuramıyla ilgili olarak her zaman belirli bir endişeye sahip oldum. O, dünya yaprakları zamansal olan ve böylece uyarılmış "metriği" (1 + 1)–boyutlu Lorentzci bir metrik olan sicim benzeri yapılara ilişkin fiziki bir kuram olarak sunulur. Yine de (pozitif belirli) bir metriğe sahip olan sicim dünya yapraklarında, Riemann yüzey kuramının zarif fikirlerine (8. bölümdeki gibi) başvurulabilecek şekilde matematik uygulanır, *bkz.* Şekil 31.10. Zamansal dünya yaprağı üzerinde ışık hızıyla sola ya da sağa yolculuk eden rahatsızlık modlarından, öncekiyle uyumlu olarak bahsedilir. (Bunlar Lorentzci dünya yaprağı üzerindeki sıfır eğrileri boyunca yayılır.) Kuramın Riemanncı versiyonunda bu "sol" ya da "sağ" modları Riemann yüzeyi üzerindeki "holomorfik" ya da "karşı–holomorfik" fonksiyonlar halini alır. Yaklaşım, hesaplamaların esasen pozitif belirli Riemann yüzeyi tablosunda yapıldığı biçimde görünür ve daha sonra, istenen Lorentzci sicim kuramını dışarı çıkarmak üzere bir "Wick döndür-



Şekil 31.10 Sicim kuramı matematiği (pozitif belirli) Riemanncı metriğe sahip Riemann yüzeyleri olan "sicim geçmişleri"ni kullanır. Bununla birlikte sicim geçmişleri fiziki olarak Lorentzcidir. Birinden diğerine geçmek bir tür "Wick döndürmesi" içerir.

mesi" (§28.9) gerçekleştirilir. Bu işlemin burada tatmin edici olması kesinlikle olasıdır fakat bu, özel bir gerekçelendirme olmaksızın basit biçimde varsayılamaz. Örneğin bu, önemli biçimde, genlik hesaplamalarında yapılmış olmayan yaklaşıklık tahminlerine bağlıdır. Aksi halde, daha önce kuantum kütleçekime yönelik Hawking yaklaşımı ve QFT'ye yönelik analitik sürdürmeyi de içeren (*bkz.* §28.9) diğer yaklaşımlar türündeki işlemler hakkında ciddi soru işaretleri söz konusu olabilir. Benim anlayışım Riemann yüzey hesaplamalarının esasen isabetli olduğunun düşünüldüğü yönündedir, böylece Wick döndürmesinin güvenilebilir olduğuyla ilgili umutlu olmak için bir sebep söz konusu olur. Yine de bir Wick döndürmesine ilişkin açık gerekçelendirme, (tedirgeyici olmayan) ciddi genel görelilikle uğraştığımızdaki durum olmayacak olan, ardalan uzayzamanının düz olmasına bağlıdır, böylece bunun bizi gerçek kütleçekimle ilgili bir kuantum kuramına doğru ne kadar götüreceği belirsizliğini korur.

Bu tür düz uzay değerlendirmelerinin geçerliliğine güvensek bile, sabit her Riemann yüzey topolojisiyle (diğer bir deyişle g olağan bir Feynman grafiğiyle ilgili "döngü sayısı"na karşılık gelmek üzere, *bkz.* §26.8 ve Şekil 31.5d, §31.5, sabit g türüyle, *bkz.* §8.4) ilgili olarak toplam genliğin aslında sonlu olduğuna ilişkin iddiaları desteklemek zorunda mıyız? Aslında bu belirlenmemiştir. Yinelenen güvencelere karşın iddia edilen bu sonlulukla ilgili hiçbir matematiksel gösterim sunulmamıştır. Sonluluk iddiaları yalnızca, kuantum alan kuramcılarının kendilerini en tehlikede hissettikleri *morötesi* (büyük momentum, küçük uzaklık) ıraksamalarla ilgilidir fakat bunlar bile şimdiye dek yalnızca 2–döngü düzeyinde belirlenmiştir. Dahası, *kızılaltı* (küçük momentum, büyük uzaklık) ıraksamaların (§26.9) yok edildiği iddia edilen hiçbir argümanın söz konusu olduğu görülmez. Bu tür ıraksamalar normalde morötesi olanlardan daha az öneme sahip olarak değerlendirilseler de, kesinlikle göz ardı edilemezler ve bunlarla, "sonluluk" iddiası gerekçelendirilecekse bir biçimde uğraşılması gerekir.

Sonluluk tüm sicim fikrinin temel taşı olduğu için bu bizi, tüm programla ilgili bir belirsizlik içinde bırakır.[613]

Belki de bunlar yalnızca, gelecekteki matematiksel gelişmeler tarafından üstesinden gelinecek olan rahatsız edici ayrıntılardır. Bununla birlikte, sabit her topolojiye ilişkin sonlu genliklere sahip olduğumuzu kabul etsek bile sonuçtan oldukça uzağız. Öyleyse ifadeler *toplanmak* zorundadır. Şimdiyse aslında bu toplamın belirgin biçimde ıraksamasıyla ilgili bir sorun söz konusudur.[614] *Sonlu* olması amaçlanan kuram sonuç olarak gerçekte sonlu değildir! Bununla birlikte bu belirli ıraksaklık sicim kuramcılarını kaygılandırmaz görünür çünkü onlar bu seriyi toplam genliğe ilişkin uygunsuz bir gerçekleştirme biçiminde kabul ederler. Bu genlik, kendisine "yanlış nokta (diğer bir deyişle genlikle için tekil olan bir nokta) dolayında genişlemek" yoluyla bir ifade bulmaya çalışan üslü seriye (bu biraz $\log z$ için $z - 1$'in üsleri biçiminde genişleyen bir üslü seri yerine $z = 0$ dolayında genişleyen birini bulmaya çalışmaya benzer; o belirli örnekte bu seri esasen sonsuz katsayıya sahip olsa da *bkz.* § 7.4) sahip analitik bir nicelik olarak kabul edilir. Burada karşılaşılan ıraksaklık oldukça kontrol edilemez ("Borel toplanabilir olmayan") bir türde gösterilmiş olmasına rağmen bunda bir sorun olmayabilir. Gerekli "Eulerci" tipteki (örneğin $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \cdots = -\frac{1}{3}$'ü veren türünde; *bkz.* § 4.3 ve § 26.9) gerekçelendirmeyi anlamlı kılmak üzere, bir miktar daha kapsamlı işlemin gerektiği görülmektedir.[615] Dahası, sicim kuramsal (tedirgemeyle ilgili) hesaplamalar gerçekten "yanlış nokta dolayındaki" genişlemelerse, bu durumda tüm bu tedirgeyici hesaplamalara nasıl güvenebileceğimiz belirsizdir! Bu nedenle henüz sicim QFT'sinin gerçekten sonlu olup olmadığını bilmiyoruz. Sicim kuramının bize gerçekten, şüphe götürmeyen tüm etkileşimleriyle birlikte, kütleçekime ilişkin bir kuantum kuramı sunup sunmadığı sorusuyla baş başa kaldık.

31.14 Sihirli Calabi–Yau uzayları; M–kuramı

Bununla birlikte sicim kuramına ilişkin sahip olduğum belirli ön koşullar, §§31.8–13'te ifade edildiği üzere, sicim kuramcılarını kaygılandırır görünenler değildir. Onların başı, şimdiye dek değinmediğim başka konu-

[613] *Bkz.* Smolin, 2003 ve Nicolai, 2003.

[614] *Bkz.* Smolin, 2003; Gross ve Periwal, 1988; Nicolai, 2003.

[615] $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \cdots$ serisi de, bu toplama ilişkin "Eulerci" $-\frac{1}{3}$ değeri kesin bile olsa, analitik sürdürme, §7.4, kullanılarak görülebileceği üzere Borel toplanabilir değildir. Böylesi işlemlerin toplam sicim genliklerine uygulanmış olup olmadığını bilmiyorum.

larla, diğer bir deyişle kuramın benzersizliği sorunuyla beladadır. Başlangıçta bu, sicim kuramının evrene ilişkin benzersiz tek taslağı verebileceğiyle ilgili büyük umutlardan/başarılardan biri olarak değerlendirilmişti ve varsayılan bu benzersizlikte çok fazla şey biriktirildi. Açık bir konu, 10–boyutlu evrenin büyük oranda içine dolandığı düşünülen Planck ölçekli tıkız $\mathcal{Y}$ 6–manifolduyla ilgiydi. Bu 6–manifoldlar neyin nesidir? Evren niçin bunlar yerine başka bazılarına dolanma eğiliminde değildir. Başlangıçta süpersimetri, uygun boyutluluk ve Ricci düzlüğüne ilişkin sıkı gereklilikler temel bazı fiziki gerekliliklerle birlikte benzersiz yanıtlara yol açabilir şekilde görünmüştü fakat daha sonra çok geniş sayıda alternatifin eşdeğer biçimde olası olduğu görüldü.

Bazı erken fikirler $\mathcal{Y}$ uzayının sıfır eğriliğe sahip bir $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ *hiper simit* olabileceği yönündeydi (*bkz.* not 31.45; $S^1 \times S^1$'le ilgili "simit" terimini anımsayın, *bkz.* şekiller 8.9, 8.11 ve 15.3). Bununla birlikte daha sonra hiper simit tabanlı sicim kuramının, standart modele ilişkin aynal görünümleri[616] (§ 25.3'ü anımsayın) birleştirir hale getiremediği açığa çıktı ve daha kapsamlı bir şeye gerek duyuldu. "Sıkı gereklilikler" daha sonra *Calabi–Yau uzayları* olarak adlandırılan bu 6–manifoldlara yol açtı.[617] Bunlar tümüyle önemli matematiksel anlama sahip uzaylardır ve daha önceden bu tür sebepler nedeniyle Eugenio Calabi ve Shing–Tung Yau tarafından çalışılmışlardır. Hem gerçel Riemanncı metrikleri hem de karmaşık yapılar, bu iki yapı birbiriyle uyumlu olmak üzere (ayrıca *simplektik* manifoldlar olmaları sonucu metrik bağlantının karmaşık yapıyı koruması anlamında;[31.6] ilgili kavramlar için *bkz.* §12.9 ve §§14.7, 8), olmaları anlamında (böylece karmaşık 3–manifoldlar olarak yorumlanabilirler), *Kähler* manifoldları olarak adlandırılan şeylerin örnekleridir. Calabi–Yau uzayları sicim programıyla ilgili olarak gerekli olduğu varsayılan ek özelliklere sahiptir: Ricci düzlüğünün bulunduğu metriklere sahiptirler ve onlara, metrik bağlantısına göre sabit olan *spinör alanları* verilmiştir. Bu sabit spinör alanları süpersimetri üreteçleri olarak önemli roller oynar. Onlarsız süpersimetri olanaklı olmazdı. Verili bir Calabi–Yau uzayı için böylesi çeşitli spinör alanları bir simetri grubu eylemi tarafından (biçimsel olarak) "birbirine döndürül"ebilir. Böylece bu grup, parçacık fiziğindeki simetri gruplarının oynadığı türde bir rol oynar.

---

616 Bu uyarı, kısa süre içinde göreceğimiz, temel sicim çerçevesinin kendileriyle ilgili olarak halihazırda aynal olduğu heterotik sicimlerde geçerli değildir.

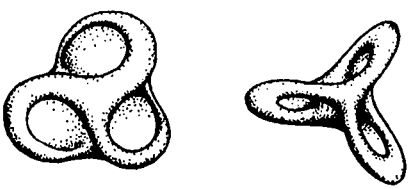
617 En yakın kaynak Gross vd., 2003 olarak görünüyor. Smolin, 2003 sicim kuramındaki bu manifoldlara ilişkin başkaca kaynaklar sunar ve bunları Polchinski de, 1998, tartışır.

[31.6] Bunların sonuç olarak niçin simplektik manifoldlar olmak zorunda olduğunu görebiliyor musunuz? *İpucu*: g_{ab} metriği ve J^a_b karmaşık yapısından S_{ab}'yi oluşturun ve sonra $dS = 0$ olduğunu doğrulayın; S_{ab}'nin tekil olmadığını varsayın.

Bu simetrinin, Calabi–Yau uzaylarının kendisine, bir lif demetindeki $\mathcal{F}$ lifine 15. bölümdeki tartışmada açıklandığı üzere uygulanan bir simetri biçiminde, dolaysız olarak uygulanamayacağı belirtilmelidir. Aslında Calabi–Yau uzayları (sürekli) hiçbir simetriye sahip değildir ve 10–uzayımızı, olağan 4–uzayzaman üzerindeki Calabi–Yau 6–uzaylarına ilişkin (önemsiz olmayan) bir lif demeti biçiminde değerlendiremeyiz. Parçacık (iç) simetrileri bunun yerine onlar üzerindeki sabit spinör alanlarına ilişkin "döndürmeler"le ilgilidir. Gerçek Calabi–Yau uzayları simetrinin eylemi tarafından etkilenmez.[618]

Bu nedenle sicim kuramı çok özel fakat alışılmadık tipte bir GUT kuramına (*bkz.* § 25.8 ve §§28.1–3) yol açar. Parçacık fiziğinin tümünün uygun sicim kuramsal taslakta bulunması amaçlanır. Bu biçimde ortaya çıkan simetri grupları standart modeldekilerden (§§25.5–7) çok daha büyüktür fakat diğer GUT kuramlarında olduğu üzere (§25.8), grupları standart modelle daha dolaysız bir ilişkiye sahip olanlara indirgemekle ilgili olarak, bu program henüz başarılı biçimde gerçekleştirilmemiş olsa da, simetri kırılımının bir türünün sorumlu olduğu kabul edilir.

Benzersizlik konusundan ne haber? Ne yazık ki Calabi–Yau uzaylarıyla ilgili nitelik bakımından farklı olası on binlerce alternatif sınıf söz konusudur, böylece taslak, açıklandığı üzere, benzersiz olmaktan uzaktır. Aslında belirli bir Calabi–Yau uzayı sınıfı içerisinde, tıpkı bir Riemann yüzeyiyle ilgili olarak olduğu gibi (§8.4, Şekil 8.11) kendisine ilişkin biçimi tanımlayıp (Şekil 31.11) *modüller* (*bkz.* §31.11) olarak adlandırılan belirli parametre değerlerince ayırt edilen son derece farklı olanları mevcuttur. Bu modüllerin varlığı iyi bir şey olarak değerlendirilir çünkü onları değiştirmek, fiziki olarak gerçekleştirilebilir kabul edil*en* ve parçacık fiziği ve sicim kuramının gözleme dayalı sonuçlarına ilişkin gerekli rotayı sağlayan $\mathcal{Y}$ uzayının salınımıyla ilgili (§31.11'de anılan) sıfır enerji modlarını sağlar. Bununla birlikte §31.11'de belirtildiği üzere bunlar kararsızlıklara yol açabilir.



Şekil 31.11 Bir $\mathcal{Y}$ Calabi–Yau uzayının "biçim"i bir miktar modül tarafından açıklanır (Şekiller 8.10 ve 8.11'i karşılaştırın). Bu modüllerdeki değişimler $\mathcal{Y}$'nin titreşimindeki sıfır enerji modlarını sağlar.

[618] Bununla ilgili belirli bir sorunum var çünkü spinör alanları esasen geometrik bir yoruma sahiptir. Bu, ortam uzayının kendisinde uygulanmaksızın "çevril"emezler, böylece açık konuşmak gerekirse "ayarlan"amazlar, §§15.2, 7; *bkz.* Penrose ve Rindler, 1984.

Bununla birlikte, Calabi–Yau benzersiz olmayışından bile daha ciddi olma izlenimi veren başka benzersiz olmayış türleri de söz konusudur. Süpersimetrinin, içerisinde, sicime ilişkin "bozonik" ve "fermiyonik" titreşim modlarıyla bağlantı kurduğu ayrıntılı biçime ilişkin olarak oldukça ayrı olası beş adet bütünlüklü taslak bulunduğu ortaya çıkar. bu nedenle beş farklı sicim kuramı söz konusudur. Bunlar Tip I, Tip IIA, Tip IIB, Heterotik O(32) ve Heterotik $E_8 \times E_8$ olarak adlandırılır. O(32) ve $E_8 \times E_8$ grupları bu bölümün önceki paragrafında özetlenen biçimde ortaya çıkanlardır. (Okuyucu bu gruplara ilişkin notasyonu, E_8 *olağanüstü* Lie gruplarının en büyüğü olmak üzere, §13.2'den anımsayabilir.) Tip I kuramları kapalı döngülerin yanı sıra açık uçlu sicimleri işe koşar, tüm diğerleri yalnızca kapalı olanlarla işler. Rahatsızlıklar tüm bu modellerde sağ–elli ya da sol–elli biçimde yolculuk edebilir.[619] Tip IIA ve IIB bu sağ ve sol–elli rahatsızlıkların birbiriyle nasıl ilişkilenecekleri noktasında farklılık gösterir. Heterotik sicimler, sol ve sağ–hareketli rahatsızlıkların farklı boyutluluklardaki (sırasıyla 26 ve 10) iki uzayzamana ait olması anlamında özellikle tuhaftır. Bu, geometrik olarak hemen hemen hiçbir anlam ifade etmez –bana kesinlikle etmez (!)– fakat biçimsel olarak uygun anlamı oluşturduğu görülür. Bakış, 10–boyutlu tablonun geometrik olarak uygun olduğu gibi görünür fakat sol–hareketli rahatsızlıklar, 26–boyutlu bir ortam uzayında bulunması gereken §31.5'in (süpersimetrik olmayan) eski "bozonik sicimler"ininkilerle aynı biçimde davranır. Daha önce gördüğümüz üzere sicim kuramcıları uzayzaman boyutundaki belirgin tutarsızlıklarla, bu boyutluluğu genellikle "enerji bağımlı" bir etki biçiminde değerlendirerek (§31.10), fazlaca sorunlu görünmezler. Kısa süre içinde ve §§31.15, 16'da buna ilişkin olarak daha çok şey göreceğiz.

Farklı sicim modellerinin çoğalması, pek çok kuramcının daha fazla ilerlemeye yönelik umutlarını bir süre için yitirmesine neden oldu. Bununla birlikte, açık biçimde oldukça farklı olan bu modeller arasında belirli olası iç ilişkileri belirten dikkate değer bazı gelişmeler ortaya çıkmaya başladı. Daha sonra 1955'te Edward Witten, "ikinci süpersicim devrimi" olarak bilinir hale gelmiş olan şeyi başlatan ünlü bir ders verdi.[620] Bu derste Witten sicim kuramının gelişimine ilişkin olarak, konunun ele alındığı biçimi tümüyle dönüştüren bir program özeti sundu. Yeni temel özellik, belirli türde gizemli ("yeğin–zayıf ikiliği" ya da "ayna simetrisi"[621] ve

[619] Bir Riemann yüzeyi elde etmek üzere "Wick döndürmesi" uygulandığında ayrım, §31.13'te belirtildiği üzere, holomorfik ve karşı–holomorfik arasındadır.

[620] Greene, 1999; Smolin, 2003 bilinen ikiliklerin tümünü, konumlarını ve kaynaklarını sıralar.

[621] Bu "ayna simetrisi" kavramı §25.4'te tartışılıp, P'yle gösterilen uzay yansıma simetrisinden, parity, tümüyle farklıdır.

bazen S ikilikleri ya da S–, T– ve U–ikilikleri olarak adlandırılan) "simetri işlemleri"ni yardıma çağırmak yoluyla bu farklı sicim kuramlarının birbirleriyle ilgili, esasen açık olarak *eşdeğer* sicim kuramları olarak kabul edilebilecekleri, çok derin ilişkilere sahip olduklarının açığa çıkarılmasıdır. Bu kuramlardan bazılarının küçük ölçekli sınırları diğerlerinin büyük ölçekli sınırlarıyla (uygun bir anlamda) özdeş olarak görünür ve olağan elektromanyetik kuramdaki elektrik ve manyetizma arasındaki ikilikle benzeş olan bir Yang–Mills kuramı (§25.7) ikiliğinden kaynaklanan bu genel türdeki simetri ilişkilerinin başka türleri de söz konusudur. (Ayrıca §25.8'de kısaca açıklanmış olan Chan–Tsou kuramından kaynaklanan ikilikle de karşılaştırın.) Dahası farklı Calabi–Yau uzaylarının birbirleriyle çeşitli biçimlerde ikili oldukları da açığa çıkar. Konuyla ilgili bilgim olduğu kadarıyla şimdiye dek bu ilişkilerin tümü matematiksel sonuçları olacak biçimde kanıtlanmamıştır.[622] Koşullara bağlı bazı etkileyici kanıtlarla birlikte sicim kuramından gelen başlangıç varsayımları, Calabi–Yau manifoldları ve onlar arasındaki ilişkilerin daha derin bir kavranışına yol açan tümüyle matematiksel olan çok önemli bir incelemeyi harekete geçirdi.[623]

Bu "koşullara bağlı kanıt"a ilişkin özellikle çarpıcı bir örneği anlatmaya değer. Bu örnek, sırf matematikçi (cebirsel geometrici) olan belirli bazılarının ilgilenmiş oldukları tümüyle matematiksel özel bir sorunla ilgilidir. Sorunun fizikle belirgin hiçbir ilişkisi yoktu, o daha çok, belirli karmaşık 3–manifoldlardaki *rasyonel* eğrileri saymakla ilgiliydi.[624] Rasyonel bir eğri *sıfır cinse* sahip karmaşık bir eğridir (diğer bir deyişle bir Riemann yüzeyi; *bkz.* 8. bölüm); demek oluyor ki bir S^2 küre topolojisine sahiptir. Bu karmaşık 3–manifoldlara ilişkin, –"ikinci süpersicim devrimi"nin önermeleri uyarınca– sicim kuramı istemlerinin, ayna simetrisi yoluyla, belirli diğer Calabi–Yau uzaylarıyla ilişkili olmasının gerektiği Calabi–Yau uzayları olduğu açığa çıkar. Ayna simetrisi, belirli bir anlamda, karmaşık yapıyı simplektik yapıyla yer değştirir; buna göre rasyonel (holomorfik) eğrileri (teknik olarak oldukça zor bir sorun olan) sayma sorunu "ayna" Calabi–Yau uzayında çok daha basit ve farklı görünen bir sayma sorununa çevrilir. Norveçli iki matematikçi, Geir Ellingstrud ve Stein Arilde Strømme, kendi uzaylarındaki (1, 2, 3, ... ardışık düzenindeki)[625] rasyo-

---

[622] Böylesi fikirlre ilişkin mükemmel bir kapsam için *bkz.* Cox ve Katz, 1999.

[623] Örneğin *bkz.* Kontsevich, 1994; Strominger vd., 1996; daha yeni gelişmelerin bazıları için *bkz.* Yui ve Lewis, 2003.

[624] Bu özel manifoldlar , "5'inci dereceden" olduklarını ifade eden "quinticler" olarak adlandırılan karmaşık 3–yüzeylerdir. $\mathbb{C}P^m$'deki karmaşık bir n–yüzeyinin derecesi $\mathbb{C}P^m$'deki genel bir karmaşık $(m - n)$–düzlemiyle buluşan nokta sayısıdır.

[625] Karmaşık bir eğrinin "düzen"iyle ilgili olarak *bkz.* önceki not, 31.59. Burada $n = 1$'dir.

nel eğri sayısını saymanın dolaysız yöntemlerini geliştirdiler. İlk üç durumla ilgili olarak arka arkaya

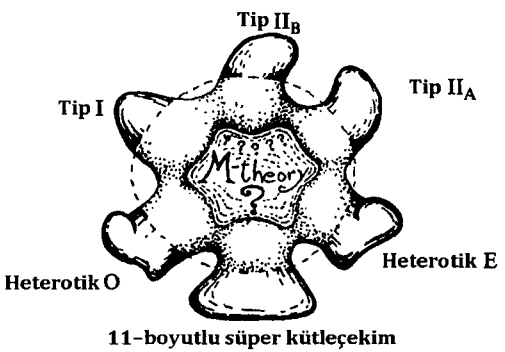
2875, 609 250, 2 682 549 425

sayılarına ulaştılar. Bununla birlikte ayna simetri ilişkisinin, çok daha basit sayma işleminin uygulanabileceği şekilde, geçerli olduğu varsayımını kullanarak Philip Candelas ve iş arkadaşları

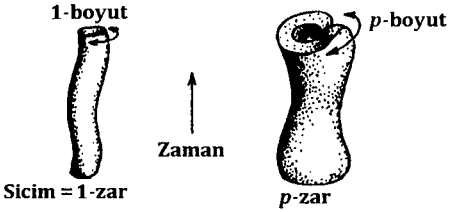
2875, 609 250, 317 206 375

sayılarına ulaşmayı başardılar. Zamanında ayna simetrisi yalnızca kanıtlanmamış bir "fizikçi varsayımı" olduğundan ilk iki durumdaki uyumun rastlantısal olduğu ve Candelas ve arkadaşlarının ulaştığı 317206375 sayısını kabul etmekle ilgili herhangi bir sebep bulunmadığı varsayıldı. Bununla birlikte Norveçli matematikçilerin sayısının bir bilgisayar yazılımı hatası nedeniyle yanlış olduğu ortaya çıktı ve aslında doğru değer tam olarak ayna simetri argümanıyla elde edilmiş olan değerdi! Daha sonra bu ayna simetrisi kullanılarak sonra gelen pek çok sayı hesaplandı. Örneğin üstteki yüksek dereceli (4, 5, 6, ..., 10) rasyonel eğrileri sayma dizisine ilişkin genişleme gibi:

242 467 530 000
229 305 888 887 625
248 249 742 118 022 000
295 091 050 570 845 659 250
375 632 160 937 476 603 550 000
503 840 510 416 985 243 645 106 250
704 288 164 978 454 686 113 488 249 750



Şekil 31.12 Esrarengiz "M-kuramı" iddiası, tümü S-, T- ve U-ikilikleriyle 11-boyutlu süper kütleçekim yoluyla ilişkili, beş farklı çeşit sicim kuramının altı farklı görünüme sahip ve hâlâ aynı keşfedilmemiş yapıdaki bir kuram olduğudur.



Şekil 31.13 Membranlar (ya da p–zarlar ya da yalnızca zarlar) dünya yaprağı (1 + p)–boyutlu olmak üzere p uzamsal boyuta ve 1 zaman boyutuna sahiptir. Bu yapılar olağan sicimlerle (1–zarlar) birlikte tanımlanmamış M–kuramının bir parçası olarak içerilir.

Bu, aslında "sahne arkasında devam etmekte olan bir şeyler" olduğunu güçlü biçimde belirten çok dikkat çekici bir örnektir. Var olan haliyle bu, belirgin biçimde esrarengizdir. Matematikte çözülmesi gereken kesinlikle hiç de açık olmayan bir şey söz konusudur ve oldukça yeni bazı matematiksel gelişmeler bunu gerçekleştirmeye doğru bir miktar yol almış görünmektedir.[626] Diğer taraftan daha önemli olan soru bu sonuçları fiziki önemine ilişkin olanıdır. Sicim kuramının *matematiğe* derin ve daha önceden beklenmeyen kavrayışlar sunmasına ilişkin şüphe götürmez gerçekten onun ayrıca derin bir *fiziki* doğruluğa sahip olmak zorunda olduğu çıkarsamasını yapmaya hak kazanır mıyız? Bu gizeme ilişkin bu yanıt açıklıktan uzaktır. Witten, o ana dek anlaşıldığı kadarıyla sicim kuramının, buz dağının yalnızca tepesi olduğunu ileri sürdü; ya da o daha çok, Witten'in "M–kuramı" olarak adlandırdığı hâlâ bilinmeyen gizemli bir kurama ilişkin beş tepeyi temsil eder, *bkz.* Şekil 31.12. Bu yeni kuram, bulunduğunda, daha önce ortaya konmuş farklı tüm sicim kuramlarının ayağını kaydırıp onların yerine geçmelidir.

Bu gizemli M–kuramı yalnızca tüm bu sicim kuramlarını kapsamayı amaçlamaz fakat aynı zamanda onun sicimle ve süpersimetriyle ilgili bir miktar diğer fikri de kendisine dahil etmesi gerekir. Sicimler artık yalnızca, yüksek (ve hatta düşük) boyutlu yapıları içeren daha genel bir kavrama ilişkin özel bir durum olarak değerlendirilir. Bunlar, dünya yaprağı $(1 + p)$–boyutlu olmak üzere p uzamsal boyuta sahip *membranlar* (ya da p–zarlar ya da yalnızca zarlar) olarak adlandırılır. *Bkz.* Şekil 31.13. *D–zarlar* olarak anılan ilgili bazı zamansal yapılar da dahil edilebilir; §31.17'de bunlarla ilgili söylenecek bir şeyler olacak.

Başka bir gelişmede, M–kuramının, daha önce bu bölümde geride bıraktığımız (§31.4) 11–boyutlu süper kütleçekim kuramını da kapsayacak şekilde düşünülür. Aslında M–kuramının kendisinin kabaca 11–boyutlu bir kuram olarak düşünüldüğü görülür, öyleyse belki de boyutsal gizem

[626] *Bkz.* Cox ve Katz, 1999; Candelas vd., 1991; Kontsevich, 1995.

onun 11–boyutlu süper kütleçekim yerine daha çok 10–boyutlu çeşitli sicim kuramlarıyla ilişkisinde yatar. 11 boyutun tutarlı bir sicim türü kuramla ilgili olarak artık "kabul edilebilir" görülmesinin, "bir artı dokuz" boyutun §31.7'de değinilmiş olan sicim anomalisini kaldırma gerekliliğine ilişkin orijinal argümanın, bir anlamda, gerçekten bir yaklaşıklık tahmini olarak değerlendirilmesi gerektiği ve daha doğru yanıtın aslında 11 (= 1 + 10, diğer bir deyişle 1 zaman 10 uzam boyutu) olduğuyla ilgili Witten'e ait çıkarsama olduğu görülür.[627] Yine de 11 boyut sicim kuramcılarını hâlâ tatmin etmeyebilir. Hâlâ daha fazla boyuta, 12 (= 2 +10) boyuta sahip (böylece 2 zaman boyutu nevcuttur) daha da gizemli (ve hatta daha az keşfedilmiş) "F–kuramı"na geçilmesi gerektiğiyle ilgili bazı düşünceler mevcuttur.[628]

11–boyutlu (ya da belki 12–boyutlu) bir "uzayzaman"a sahip bir kuramın, belirli düşük enerji ve yüksek enerji sınırlarında, her biri 10–boyutlu birer uzayzamana sahip olan çeşitli kuramlara özelleşir bir şey olabilmesi nasıl söz konusu olur? Uzayzaman boyutluluğundaki bu uyuşmazlık özel öneme sahip bir şey olarak değil yine bir "enerji etkisi" olarak değerlendirilir görünmektedir (§31.10). Giderek daha yüksek enerjilerde araştırıldıkça git gide artan sayıda uzayzaman boyutu algılanabileceği düşünülebilir. Bu tür bir yolla sicim kuramcıları, uzayzaman boyutlarına yönelik görünüşte gözü pek tutumlarını gerekçelendirir görünürler! Bu tür argümanla ilgili önemli rahatsızlığımı §§31.11, 12'de zaten ifade etmiştim. Bana göre farklı sayıda boyutlarda bulunan fonksiyonel serbestlikteki geniş farklılıklardan kaynaklı güçlükler[629] doyurucu biçimde ele alınmaktan oldukça uzaktır. Ayrıca bu konu, halihazırda pek çok sicim kuramcısının uğraştığı diğer konularda olduğundan da büyük görünüyor. Şimdi bunlara kısaca değineceğim.

31.15 Sicimler ve kara delik entropisi

§27.10 ve §30.4'ten Bekenstein–Hawking denkleminin bir kara deliğe, ufkunun yüzey alanıyla orantılı bir *entropi* atadığını anımsayın. Bu sonucu destekleyecek farklı pek çok argüman verilmiş olmasına rağmen bunların hiçbiri kara delik entropisini bir faz uzayı hacminin logaritmasına, Boltzmann denkleminin talep ettiği gibi (§27.3), açıkça anlaşılır biçimde

[627] *Bkz.* Smolin, 2003, özellikle kaynak 171; Witten, 1995; popüler bir açıklama için, Greene, 1999, s. 203.

[628] *Bkz.* Vafa, 1996; ya da Bars, 2000.

[629] *Bkz.* Bryant vd., 1991; not 31.37.

eşitlemez.[630] Bu, "delikteki kayıp" serbestlik derecelerinin dolaysız bir sayımı anlamına gelir; sayım uygun kuantum kütleçekim kuramı uyarınca gerçekleştirilir. Daha sonra 1966'da Andrew Strominger ve Cumrun Vafa, sicimler ve membranları kullanarak, Bekenstein–Hawking entropi denklemine ilişkin bir yorumu bu yolla "serbestlik derecelerinin sayımı" biçiminde destekleyen bir hesaplama sundular.[631] Bu, sicim kuramcılarınca şu ifadelerle alkışlandı: "Çeyrek yüzyıllık eski bir bilmece çözüldü."[632]

Böylesi sicim kuramsal bildirgelerde alışıldık görüldüğü üzere, bu sonuç çok büyük ölçüde abartılmıştır. Örneğin, orijinal Strominger–Vafa hesaplaması yalnızca 5–boyutlu bir uzayzamandaki kara deliklere ilişkindir. Daha sonraki sonuçlar olağan 4–uzayzamanda da geçerlidir fakat üstteki bildirge gibilerine yol açan başlangıç uyarımı orijinal 5–boyutlu hesaplama tarafından açığa çıkarılmış gibi görünür. Dahası, bu sicim kuramsal sonuçların tümü yalnızca, Hawking sıcaklığının (§30.4) sıfır olduğu ve deliğin, bilinen fizikte açık bir gerekçelendirmesi bulunmayan ek süpersimetrik Yang–Mills tipi alanlar içerdiği son derece özel bir sınırlayıcı "aşırı uçtaki delik" durumuyla (ya da bunun uzağındaki tedirgemelerle) ilgilidir. Ek olarak, gerçek hesaplamalar hiçbir gerçek olay ufkunun bulunmadığı *düz uzay*da gerçekleştirildi. Bunların ayrıca belirgin biçimde eğik bir kara delik metriğinde de geçerli olması gerektiğini iddia etmek bir kestirim konusudur.

Birkaç cümleyle açıklamaya çalışayım. Uzayzamanın 4–boyutlu olduğu vakumla ilgili olağan genel görelilik kuramında durağan yalıtık bir kara deliğin, m kütle ve $a \times m$ açısal momentum olmak üzere (doğal birimlerde), yalnızca (negatif olmayan) iki gerçel m ve a parametre değeriyle nitelenen Kerr metriğiyle açıklandığını görmüştük (§27.10). Çıplak bir tekillik (§28.8) yerine bir kara deliği gerçekten açıklayacak bir Kerr geometrisi için, $m \geq a$ olmasına gerek duyarız. (Örneğin bu eşitsizliğin §27.10'daki bir Kerr delik ufkunun A alanıyla ilgili $A = 8\pi m[m + (m^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]G^2/c^4$ denklemi için gerekli olduğuna dikkat edin.) Olağan bir kara deliğe ilişkin *aşırı uç* durumu, onu yalnızca bir "kara delik" olarak niteleyen $m = a$ söz konusu olduğunda ortaya çıkar. Bu gerçekten, kendisine ait Hawking sıcaklığı sıfır olan olağan bir kara delikle ilgili (astrofiziksel olarak elde edilemez) sınırlayıcı bir durumdur.

Bu, kendisi de Hawking sıcaklığının yok olması anlamında "aşırı uç" olup sicim kuramcısı tarafından ele alınan açık "kara delik"le meydana

---

[630] Bununla birlikte fikir verici bir argüman için *bkz.* Thorne, 1986.

[631] *Bkz.* Strominger ve Vafa, 1996.

[632] *Bkz.* Greene, 1999, s. 340.

gelen şeyle karşılaştırılabilir. Bununla birlikte bu sicim hesaplamalarının neredeyse tümü bütünüyle farklı bir tür yaratıkla ilgilidir! Döndürme yerine $-a$ Kerr parametresinin varlığınca olanak tanındığı üzere– ek fiziki alanlar sunulur. Sicim kuramcısının "deliği" bunun yerine, Einstein denkleminin, Kerr çözümünün aksine, küresel olarak simetrik olan Reissner–Nordstrøm çözümü üzerinde modellenir. Kerr'in a'sı yerine deliğin toplam elektrik yükünü ölçen bir e parametresi söz konusudur. Reissner–Nordstrøm metriği Einstein–Maxwell denklemlerinin (§ 31.4), diğer bir deyişle enerji momentum tensörü kaynak serbest bir Maxwell alanınınki olan Einstein denklemlerinin, bir çözümüdür.[633] Ufuk alanı artık çok benzer görünümlü

$$A = 8\pi[m + (m^2 - e^2)^{\frac{1}{2}}]^2 G^2/c^4$$

denklemince verilir. bu metriğin çıplak bir tekillik yerine bir kara deliği temsil etmesinin koşulu $m \geq |e|$ ve deliğin *aşırı uç* (sıfır sıcaklık) olma koşuluysa $m = |e|$'dir. (Modül çizgileri, §6.1, basit olarak negatif e'ye olanak tanır.)

Sicim kuramcılarının temel olarak ilgilendikleri "kara delik" türü esasen Reissner–Nordstrøm durumundakiyle aynıdır fakat burada Maxwell alanının yerini Yang–Mills alanlarına (§25.7) ilişkin bir süpersimetri ailesi alır. Aslında tüm çözüm, süpersimetri, durağanlık ve asgari enerji gerekliliklerinin çözümü belirlediği bir *BPS durumu* ("BPS", "Bogomoln'yi–Prasad–Sommerfeld" yerine kullanılmak üzere) olarak adlandırılan şeyin belirli bir örneğidir. Bunun anlamının ayrıntılarıyla uğraşmayacağım. Böylesi şeyler sicim kuramcıları ve süpersimetriyle ilgilenen diğer insanlar için belirgin bir uğraşı alanı olsa da gerçek fiziki dünyayla bağlantılı olduklarına ilişkin henüz hiçbir kanıt söz konusu değildir (*bkz.* §31.2).

Sicim serbestlik derecelerine ilişkin belirli hesaplamaların, hiçbir olay ufkunun var olmadığı düz uzayda gerçekleştirilmesi gerçeğinin anlamı nedir? Einstein genel görelilik kuramı altyapısına sahip biri olarak bunu, sicim kuramcılarının iddialarının en kafa karıştırıcı görünümlerinden biri olarak görüyorum. Kara deliklere ilişkin, oluşumundaki "bilgi" olay ufkunun ardında tutsak edilmiş olmak üzere, kara deliğin oldukça eğik uzayzaman geometrisine bütünlüklü bir ilgi göstermeksizin ne gibi kesin sonuçlara ulaşılabileceğini kestirmek güçtür.

[633] Okuyucu, kaynak serbest bir Maxwell alanının sıfır olmayan bir yüke nasıl yol açabildiğiyle ilgili meraklanabilir. Burada hiçbir çelişki yoktur çünkü kara delik, yük kaynaklarının tümü delik içinde kaybolmak üzere, yüklü bir malzeme kütlesinin çökmesinden ortaya çıkmış olabilir.

Sicim argümanın nasıl geliştiğiyle ilgili kabaca bir fikir edinmeye çalışalım.[634] Başlangıç olarak, fiziki serbestlik derecelerinin sayısını, diyelim ki sabit bir yarıçapa sahip küresel bir hacim içerisindeki Planck ölçekli bir kafes üzerinde l uzunluğundaki olası farklı sicim döngülerinin, bu sicimler belirli bir M toplam kütle enerjisine katkıda bulunmak üzere, sayısını saymak yoluyla hesaplandığını düşünün. Newton kütleçekim sabiti G'nin gerçek değerinin kullanımımıza hazır olduğunu varsaymak durumundayız. Yeterince küçük G için hiçbir kara delik söz konusu olmayacak ve G'nin sıfıra gittiği limitte uzayzaman esasen düz hale gelecektir. Bununla birlikte kafamızda G'yi derece derece ("Newton sabitini harekete geçirerek") artırdığımızı canlandırırsak, genel görelilik uyarınca, sonuç olarak içerisinde bir kara deliğin oluştuğu duruma ulaşırız ("Newtoncı bir kara deliğin" yarıçapıyla ilgili $2MG/c^2$ Michell ifadesini anımsayın; *bkz.* §27.8). Sicim kuramında G, *sicim bağlaşım sabiti* olarak adlandırılan bir g_s parametresine bağlıdır ve g_s büyütüldükçe G'nin de daha büyük hale geldiği ortaya çıkar ($G \sim g_s{}^2$). Küçük G sınırında (küçük g_s), sicim serbestlik derecelerinin (§27.3) sayımı, ortada hiçbir kara delik olmasa bile bir kara delikle ilgili Bekenstein–Hawking değerinin aynısı olan bir entropi verir. Bu bağıntının G arttıkça, kara delik aşamasına gelindiğinde gerçek Bekenstein–Hawking denklemi elde edilecek şekilde aynı kaldığını göstermek üzere ölçekleme argümanları sunulur.

Bu, sicim serbestlik dereceleri sayımıyla $S_{BH} = \frac{1}{4}A \times kc^3/G\hbar$ Bekenstein–Hawking denklemi arasında, sicim entropisiyle A kara delik yüzey alanı arasındaki kabaca bir orantılılığı doğrulayarak yalnızca nitel bir uygunluk sağlar. Formüldeki $\frac{1}{4}A$'nın kesin değerini elde etmek üzere Strominger ve Vafa, süpersimetri gerekliliklerinin kütlenin (süpersimetrik Yang–Mills alanlarıyla ilgili) çeşitli "yük" değerleri biçiminde sabitlenmesine olanak tanıdığı ve "sayma"nın sicim düzenlemelerini numaralandırmak yerine artık toplama katkı sunan farklı tüm BPS durumlarını[635] (verili yük kümesindeki tüm BPS durumlarını) numaralandırdığı, bir BPS durumları değerlendirmesine başvurdular. Bu yeterince açık biçimde yapılabilir ve bu sayının logaritması $\frac{1}{4}A$'nın değerini (aşırı uç durumunda), dikkate değer bir biçimde, kesin olarak verir. Yalnızca burada değil fakat (sonraki çalışmaların gösterdiği üzere) aşırı uçluluktan (diğer bir deyişle sıfırın sonsuz küçük biçimde üzerindeki Hawking sıcaklıklarında) uzak tedirgemelerde de entropi, Hawking ışınımının tümüyle "kara cisim" doğasına yönelik belirli hafif düzeltmelerde olduğu gibi, yine doğru olarak ortaya çıkar. Dahası

[634] Bu konularla ilgili güzelce okunabilen bir inceleme için *bkz.* Horowitz, 1998.

[635] Sayım, §31.17'de ele alacağımız "D-zarlar" olarak adlandırılan yapıları içerir.

aynı şeyin döndürme varlığında ve 4–boyutlu uzayzamanda da geçerli olduğu açığa çıkar.

Dikkatli okuyucunun, sicim kuramında, her şeyin Lagrange denkleminde görülen gerçek tek parametre olan α' sicim sabiti (§§31.8, 9) tarafından sabitlenmiş olması gerekirken niçin "diğer bir sabit" g_s'nin var olduğuyla ilgili kafası karışabilir. Bunun yanıtı şeylerin gerçekten sabitlenmemiş olması gerçeğinde yatar çünkü dilaton alanıyla (§ 31.8) ilgili olarak bir değere karar vermek gerekir. g_s değeri bu dilaton alanına ilişkin sabit olduğu varsayılan beklenti değeriyle[636] verilir. Genelde dilaton alanının sabit olması gerekmez fakat uygunluk gereği (üstteki tartışmada olduğu üzere) sıklıkla öyle davranılır. Ona ilişkin değer, Planck ölçüsündeki $\mathcal{Y}$ uzayının belirli seçimi ve sicim kuramı türü (Tip I, IIA, IIB, Heterotik O(32) ya da Heterotik $E_8 \times E_8$; *bkz.* §31.14) diğer bir deyişle seçimi gibi çeşitli şeylere bağlıdır. Esasen bu bağımlılık, bir kurama ilişkin g_s, "ikili" kurama ilişkin g_s'nin tersi olmak üzere §31.14'teki yeğin/zayıf ikiliğini vurgular.

Okuyucu, üstteki argümanları, bazı dikkat çekici uzlaşılara karşın, S_{BH}'nin gerçek bir sicim kuramsal türetiminden oldukça uzak bulmamı algılayacaktır. Ayrıca başkaca genel görelilikçilerin de, özellikle bir kara deliğe ilişkin temel *ufuk* özelliğinin, kara deliğin çok büyük entropisini belirlemede pek de gerçek bir rol oynamaz görünmesi gerçeğine ilişkin olarak hatırı sayılır biçimde huzursuz hissettiklerini biliyorum. (Bu, §32.6'da kısaca göreceğimiz kara delik entropisine ilişkin döngü değişkeni tartışmasıyla tümüyle çelişkilidir.) Aslında, sicim kuramı tablosunda, bir kara delik oluşumu anında entropi, (§27.10'da açıklanmış olan) alışıldık olandan tümüyle tümüyle farklı bir bakış açısı verecek biçimde, neredeyse hiç artmaz.

Ek olarak, sicim argümanının verili haline ilişkin olarak özel bir teknik güçlüğü belirtmeliyim.[637] Bu, normal kara deliklere ilişkin, küçük açısal momentum için onların *negatif özgül ısı*ya sahip olması termodinamik özelliğiyle ilgilidir (not 27.2'ye bakın). Bir cismin özgül ısısı, kendisine küçük miktarda bir ısı enerjisi sunulduğunda sıcaklığının ne kadar arttığına bakılarak ölçülür. Sıradan bir cisim için bu *pozitif* bir değerdir; normal deneyimimizden de bildiğimiz üzere bir cisme ısı verildiğinde sıcaklığı artar. Bununla birlikte bir kara delikte, onun sıcaklığının *düştüğünü* bulma eğilimindeyiz. Isı enerjisi deliğe ($E = mc^2$ yoluyla) kütle sunar, böylece delik daha iri kütleli hale gelir ve bir Schwarzschild deliğine (§30.4) ilişkin olarak Hawking'in $T_{BH} = 8\pi/m'$si üzerinden deliğin sıcaklığı düşer, bu durumda özgül ısı esasen negatiftir. Bir kara deliğin özgül ısısının bu tuhaf

[636] *Bkz.* not 22.11.

[637] Bana Abhay Ashtekar tarafından işaret edilmiştir.

negatifliğinin, aşırı uç durumuna yakın olmayan kara deliklere uygulanacak olsa kara delik entropisine ilişkin üstteki sicim kuramsal argümanla ilgili bir zorluk çıkardığı görülür çünkü argümanla ilgili olarak pozitif bir özgül ısı gerektiği görülür; bir kara deliğin özgül ısısı, o yalnızca aşırı uca yakın olduğunda pozitif olur. Aslında özgül ısının Kerr durumunda yalnızca $m > a > \left(2\sqrt{3}-3\right)^{1/2}$ olduğunda ve Reissner– Nordstrøm durumunda $m > e > m\sqrt{3}/2$ olduğunda pozitif olduğunu görürüz ve aynı tür şey diğer Yang–Mills yüklü alanlarının tümünde geçerlidir.

Bu sicim kuramsal hesaplamalar sonucu ortaya çıktığı görülen şaşırtıcı bazı ilişkiler söz konusudur. Bununla birlikte bana göre bunlar Bekenstein–Hawking entropi denklemine bağımsız bir gerekçelendirme sunmanın oldukça uzağında bulunuyorlar. Bu soruna yönelik (§ 32.6'da kısaca ele alınacak olan) döngü değişkeni yaklaşımı, soruna çok daha etkileyici bir kuantum kütleçekim temelli atak düzenler görünmektedir.

31.16 "Holografik ilke"

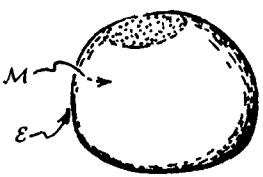
Üstte değinilen sicim argümanları neredeyse tüm sicim hesaplamalarında olduğu gibi tedirgeyici bir doğadadır. Bununla birlikte yakın zamanda, bütünlüklü sonuçlar sunmak amacıyla belirli görüşler ileri sürüldü. Bunlar, bir biçimde *holografik ilke*ye evrilmiş olan "holografik varsayım" olarak adlandırılan bir şeyin çeşitli örneklerine bağlıdır. Bu "ilke"ye ilişkin fikir, belirli uygun koşullarda, bir $\mathcal{M}$ uzayzamanı üzerinde tanımlanmış olan bir (kuantum) alan kuramına ilişkin durumların başka bir kuantum alan kuramının durumlarıyla, ikinci QFT daha düşük boyuttaki başka bir $\mathcal{E}$ uzayzamanında tanımlanmış olmak üzere, dolaysız biçimde 1'e 1 uyumluluğa sokulabileceğiydi. $\mathcal{E}$ sıklıkla, $\mathcal{M}$'ye ilişkin (zamansal) bir sınır, ya da en azından $\mathcal{M}$'ye ilişkin konformal olarak pürüzsüz zamansal bir alt manifoldmuş gibi sunulur (*bkz.* Şekil 31.14). Bununla birlikte bu, kısa süre içinde inceleyeceğimiz bilindik örnekteki durum değildir. Holografik ilke, bir anlamda, (temel olarak) 2–boyutlu bir yüzeye bakıldığında 3–boyutlu bir görüntünün algılandığı bir *hologram*a benzeştir.[638]

Bu "holografik ilke"nin en tanındık biçimi, Juan Maldacena'nın 1998'deki çalışmasından ileri gelir ve zaman zaman *Maldacena* varsayımı ya da ADS/CFT varsayımı olarak anılır. Burada $\mathcal{M}$, $(1+9)$–boyutlu bir $AdS_5 \times S^5$ çarpımı olmalıdır. AdS_5 ("çözülmemiş") $(1+4)$–boyutlu *karşı–de Sitter* uzayıdır (*bkz.* §28.4, şekiller 28.9 ve 28.10c, d; fakat burada dört

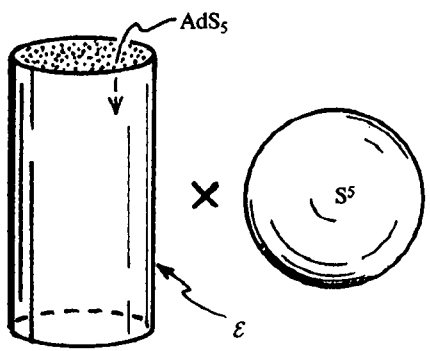
[638] "Gerçel" hologramlarla ilgili bir kaynak için *bkz.* Kasper ve Feller, 2001.

uzay boyutu söz konusudur). S^5, yarıçapının kozmolojik boyutu, Λ' (negatif) kozmolojik AdS_5 sabiti olmak üzere (§19.5), $(-\Lambda')^{\frac{1}{2}}$'ye eşit olan uzaybenzeri bir 5–küredir. Daha küçük $\mathcal{E}$ uzayı AdS_5'in 4–boyutlu "scri"si (diğer bir deyişle konformal sonsuz; *bkz.* §27.12) olmalıdır; *bkz.* Şekil 31.15. Bu durumda, 4–boyutlu olan $\mathcal{E}$'un, $\mathcal{M} = AdS_5 \times S^5$'in 10–boyutlu olması nedeniyle, kesinlikle $\mathcal{M}$'ye ilişkin sınır olmadığına dikkat edelim. Bunun yerine $\mathcal{M}$'ye ilişkin "sınır", diğer bir deyişle "scri", $\mathcal{E} \times S^5$ olarak düşünülebilir. Maldacena varsayımı $AdS_5 \times S^5$ üzerindeki sicim kuramının $\mathcal{E}$ üzerindeki belirli bir süpersimetrik Yang–Mills kuramına eşdeğer olduğunu ileri sürer.

Burada, $\mathcal{M}$ üzerindeki olağan bir alana ilişkin fonksiyonel serbestlikle, $\infty^{M\infty^9}$, $\mathcal{E}$ üzerindeki olağan bir alan, $\infty^{E\infty^3}$, arasındaki büyük çelişkiyi mazur göstermek üzere, §31.10'da ortaya konmuş olan "kuantum enerji" argüman türüne başvurmanın hiçbir yolu yoktur. $\mathcal{M}$'nin ek boyutları –kozmolojik ölçekli olarak– hiçbir biçimde "küçük" olmadığından, alanların $\mathcal{M}$'nin S^5 kısmına bağımlılığından kaynaklanan ek serbestlik derecesi bolluğu iki alan kuramı arasındaki herhangi bir uyum olasılığını berbat eder. Aynısı, $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{E}$ üzerindeki olağan QFT'ler için de geçerlidir çünkü tek par-



Şekil 31.14 "Holografik ilke?" Bir $\mathcal{E}$ uzayzamanı diğer bir $\mathcal{M}$ uzayzamanına ilişkin (zamansal) bir sınırdır. $\mathcal{E}$ üzerinde tanımlı uygun bir QFT'nin $\mathcal{M}$ üzerindeki bir sicim QFT'sine eşdeğer olabileceği ileri sürülür.



Şekil 31.15 ADS/CFT (Maldacena) varsayımı. Burada $\mathcal{E}$, 10–boyutlu $\mathcal{M} = AdS_5 \times S^5$ yerine, AdS_5 karşı–de Sitter 5–uzayının (bkz. Şekil 28.9b) 4 boyutlu "scri"si (konformal sonsuz, §27.12) olmalıdır fakat $\mathcal{M}$ üzerindeki sicim kuramı, $\mathcal{E}$ üzerindeki süpersimetrik bir Yang–Mills kuramına eşdeğerdir.

çacıklı durumların kendileri basit biçimde "olağan alanlar"la açıklanır (*bkz.* §26.2). Bu uzaylarla ilgili holografik ilkenin gerçekten doğru olmasının tek olanağı, ele alınan QFT'lerin "olağan"dan uzak olmasıdır.

$\mathcal{M}$ üzerindeki sicim kuramı durumunda, $\infty^{M\infty^9}$ fonksiyonel serbestliğini şiddetli biçimde indirgeyen oldukça sağlam tutarlılık koşullarının olması kesinlikle makuldur. Yine de görünüşe bakılırsa bu pek olası görünmez. 21. bölümden, §22.8 ve §16.7'den, $(1 + n)$–boyutlu uzayzamandaki tekil bir parçacığa ilişkin kuantum durumunun, P parçacığa ilişkin iç ya da dönel serbestlik derecelerini (diğer bir deyişle spin) tanımlayan pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\infty^{P\infty^n}$ fonksiyonel serbestliğine sahip olduğunu anımsayın. Tekil bir sicimin kuantum durumu çok *daha büyük* bir fonksiyonel serbestliğe sahip görünür çünkü *klasik* bir sicim son derece fazla serbestlik derecesine sahiptir. $\infty^{P\infty^n}$ sayısının bir biçimde indirgenmesi gerekirse bu durumda, belki de §31.7'de anılmış olan uzayzaman boyutu ya da eğriliğine ilişkin kısıtlamalara yol açan türde devasa sınırlamalar olmak zorundadır fakat her durumda, sicim durumlarının sayımını §31.15'te olduğu gibi şiddetli biçimde etkileyecek olan, önerilmiş bu tür herhangi bir sınırlamadan haberdar değilim.

Geri kalan olasılık, $\mathcal{E}$ üzerindeki süpersimetrik Yang–Mills alanlarının fonksiyonel serbestliğini büyük ölçüde artıracak bir yol bulmaktır. Bunu gerçekleştirmekle ilgili olarak görebildiğim tek yol, $N \to \infty$ limitini alarak erişilebilecek (N süpersimetri üreteçleri sayısı olmak üzere) sonsuz sayıda böylesi alana sahip olmaktır. Bununla birlikte varsayımın bilindik biçiminde, süpersimetrik eşler üzerine etki eden fakat Yang–Mills potansiyellerini değişmemiş halde bırakan bir SO(6) "iç grubu"nun var olması için $N = 4$ olarak kabul edilir.[639] Bu iç simetri, $AdS_5 \times S^5$'te rol oynayan S^5'e ait SO(6) simetrisini eşleştirecek şekilde alınır. Kendi bakış açıma göre, bir "uzayzaman simetrisini" bu türde bir iç grupla eşleştirmeye çalışmak, uzayzaman simetrisi orijinal Kaluza–Klein kuramında (§33.4) olduğu gibi Killing alanlarının varlığı tarafından tam olarak belirlenip uzayzaman üzerindeki tüm fiziki alanlar tarafından kabul edilmedikçe, temelden yanıltıcıdır. $\infty^{M\infty^9}$'daki serbestlik derecesi fazlası, kesin biçimde $\mathcal{M}$'nin S^5 kısmı üzerinde belirlenmiş böylesi hiçbir simetri bulunmaması nedeniyle ortaya çıkar.

Bana göre fonksiyonel serbestlikteki bu tür uyuşmazlığın önemi derin biçimde hafife alınmıştır. Fock uzaylarının (*bkz.* §26.6) "büyüklükler"i, klasik alanlardaki fonksiyonel serbestliğin tümüyle farklı olduğu her zaman bütünüyle farklı olacaktır. QFT'deki 1–parçacıklı durumlarda talep

[639] Bu, oldukça zor bir fikirler kümesidir. Gerçek bir meydan okuyuş için *bkz.* Maldacena, 1997 ve Witten, 1998.

edilen *pozitif frekans* koşulunun klasik alanlarla ilgili "$\infty^{M\infty^N}$" serbestliğini değiştirmediği belirtilmelidir. Bu basit olarak, bir QFT tanımlamasına geçtiğimizde bu klasik alanların karmaşıklaştırılma gerekliliği gerçeğini dengeler; *bkz.* §26.3.

ADS/CFT varsayımı niçin bu kadar ciddiye alınır? Bununla ilgili desteğin, Maldacena tarafından fark edilmiş olan iki taraftaki BPS durumları arasındaki uyumluluktan ve bir miktar diğer uyumluluktan geldiği görülür. Sonrakilerin pek çoğu, tümüyle, iki taraftaki alan kuramlarına ilişkin simetri grupları (SO(2, 4) × SO(6)) arasındaki uyumluluktan anlaşılabilir fakat ayrıca açıklama gereği olduğu görülen ek bazı "rastlantılar" da söz konusudur. ADS/CFT'nin doğru olmasını ummaya ilişkin bir sebep, onun, olağan tedirgeyici yöntemlere başvurmaksızın bu tür yöntemlerin sahip olduğu tüm şiddetli sınırlılıklara rağmen, bir sicim kuramının neye benzeyebileceğine ilişkin bir tutamak noktası sağlamasıdır.

$\mathcal{E}$ tarafı üzerindeki hesaplamalar, $\mathcal{E}$ uzayının konformal olarak düz (ve bazen, kendisine yalnızca konformal metrik $+---$ imzası dışında atanmış gerçek herhangi bir metriğe sahip olmamasına rağmen "düz" olarak anılır) olması gerçeğiyle kolay hale getirilir. Bu, §33.3'te geleceğimiz "tıkızlaştırılmış Minkowski uzayı"nın[640] $S^3 \times \mathbb{E}^1$ topolojisine sahip evrensel örten uzayıdır. $S^3 \times \mathbb{E}^1$ *metrik* uzayı bazen, 1917–1929 yılları arasında, alan denklemine kozmolojik bir sabit eklemlediğinde (§19.7) Einstein tarafından desteklenmiş kozmolojik model olmak üzere, "Einstein silindiri" ya da "Einstein evreni" olarak adlandırılır.[641]

ADS/CFT varsayımı, Bekenstein–Hawking kara delik entropi denkleminin (§31.15) sicim "türetim"ine farklı bir biçimde bakarak ortaya çıktı. Bunun için bir "kara delik", $\mathcal{E}$ üzerindeki bir "ısıl durum" olarak gösterilir. En iyi durumda bu, yalnızca kozmolojik büyüklükteki kara deliklerle ilgilidir ve Bekenstein–Hawking ifadesinin gerçek bir türetimi yerine, farklı biçimlerde yapılmış "entropi hesaplamaları" arasındaki kayda değer uyuma dayanan bir "varsayım" sunar.

31.17 D–zar bakış açısı

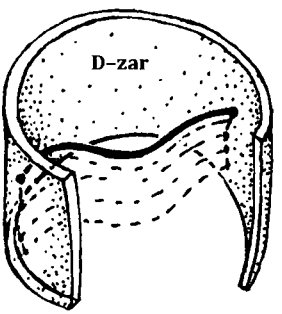
Üstteki tartışmanın çeşitli yerlerinde, özellikle §§31.11, 12, 15, 16'da, sicim kuramında yüksek boyutlu uzayzaman kullanımıyla ilgili rahatsızlığımı ifade ettim. Buna ilişkin yaşadığım temel zorluklardan biri, yüksek boyutlu kuramlardaki fonksiyonel serbestliğin devasa artışıdır ki ((1 +

[640] Garry Gibbons, burgaç kuramıyla bile bağlantılı görünen bu ilgi çekici geometriyle ilgili bir tabloya işaret etti. Bu yapıyla ilgili çeşitli konular Penrose'da, 1968, aranmalıdır.

[641] *Bkz.* Nair, 1988; Witten, 2003; Cachazo vd., 2004.

M)–boyutlu bir uzayzamanla ilgili $\infty^{P\infty^M}$) bu ek serbestliği dondurmanın birtakım araçlarının düşünülmesi gerekir. Şekil 15.1 ve Şekil 31.3a'da gösterilmiş olan hortum benzetmesini anımsayın. Bir "uzayzaman noktası" olarak algıladığımız şey, burada genellikle yüksek boyutluluktaki bir çember olarak açıklanan, tümüyle dinamik bir kavramdır ve bize devasa ek serbestliği sağlayan şey budur. Kaluza ve Klein'ın bu serbestliği, bizi "hortum" etrafına götüren bir Killing vektörünün varlığını ileri sürerek, esasen uzayzamanı 4–boyuta indirgeyerek emirle yok etme yoluna gittiklerini anımsayalım. Matematiksel olarak bu mükemmel derecede saygın bir işlemdir fakat sicim kuramında hiçbir zaman ciddi biçimde ileri sürüldüğü görülmez. Bunun yerine, §31.10'da olduğu gibi, sicim kuramcılarının normalde, bu ek boyutlardaki salınımları uyarması gereken enerjinin büyüklüğüne dayandıkları görülür. §§31.11, 12'de gördüğümüz üzere bu argüman hattından kuşku duymak için her türlü nedene sahibiz.

Yine de sicim kuramı eylemine ilişkin doğa, §§31.11, 12, 16'da belirtilmiş olanlar gibi belirli argümanlar yoluyla atak geliştirmenin zor olacağı bir durumdadır. konu her zaman başka bir biçime başkalaşmaya elverişli olduğu için, böylesi atakların hangi noktalarda varsayıldığının bir önemi yoktur.[642] Aslında, yüksek boyutlara bakmanın bazı yeni biçimleri uyarınca tüm felsefe, anlayabildiğim kadarıyla herhangi ciddi bir değişiklik olduğuna ilişkin kamuya yönelik bir açıklama olmaksızın, alt üst olabilir. Zorunlu biçimde "ana akım" sicim kuramcılarının berrak bakış açısı (bu ne olursa olsun) olmasa da, belirli bir "D–zar felsefesi" sunumunun bu karakterde olduğu görülür.



Şekil 31.16 Açık bir sicimin iki ucu, bir D–zar ya da D–q–zar olarak adlandırılan uzayzamanın zamansal bir $(q+1)$–boyutlu bir alt uzayında yer alır biçimde düşünülür. Bir D–zar esasen, 11–boyutlu süper kütleçekim kuramının (bir tür "BPS durumu") bir çözümünü temsil eden (süpersimetri özelliklerine sahip olsa da) klasik bir nesnedir.

İlk olarak *D–zarlar* nedir? Sicim kuramı niçin bunlara gerek duyar? İkinci sorunun temel yanıtı, onların, §31.14'te anılan Tip I kuramında rol oynayan açık sicimleri anlamlı kılmalarıdır: açık bir sicimin iki ucundan

[642] Bu olguya ilişkin bir örnek için *bkz.* Ashtekar ve Das, 2000.

her biri bir D–zar üzerinde yer olmak zorundadır (Şekil 31.16). İlk soruya yanıt olarak bir D–zar (ya da bir D–q–zar) 11–boyutlu süper kütleçekimin kararlı bir çözümü olan $(1 + q)$–uzayzaman boyutuna (diğer bir deyişle q uzam boyutu ve 1 zaman boyutuna) ilişkin zamansal bir yapıdır. (M–kuramı ikiliklerinden birini yardıma çağırarak bir D–zarı, alternatif biçimde, sicim/M–kuramının bazı başka versiyonlarına ilişkin denklemlerin bir çözümü olarak değerlendirebiliriz.) Temel olarak bu, bir BPS durumu (*bkz.* §§31.15, 16) olan (0, 1, 2, ..., ya da 9) boyutlu bir (§31.14'te açıklanmış olan) "zar"dır, böylece o, Yang–Mills "yükleri"nin süpersimetrik bir derlemesine ve buna bağlı olarak minimum enerjiye sahiptir. D–zarlar sicimle ilgili pek çok modern tartışmada rol oynar (örneğin kara delik entropisi; *bkz.* §31.15). Sıklıkla, 1 + 9 (ya da 1 + 10) boyuttaki bütünlüklü uzayzamanda yer alan klasik nesneler gibi ele alınma eğilimindedirler. D, verinin kendisi üzerinde belirlendiği *zamansal* bir sınır bulunan, *Dirichlet* problemi (1805'ten 1859'a kadar yaşayan ünlü Fransız matematikçi Peter G. Lejeune Dirichlet'in ardından; §7.4'teki "Dirichlet serisi"ni anımsayın) olarak anılan türdeki sınır değeri problemiyle benzerlikten hareketle, "Dirichlet" yerine kullanılır.

D–zarları burada ayrıntılı olarak açıklamaya girişmeyeceğim. Ortaya koymak istediğim tek konu, böylesi "D–zarlar"ın sunumuyla birlikte, çeşitli kuramcıların daha önce yok olmuş olandan derin bir sapmayı temsil eder görünen bir "sicim felsefesi" sunmuş olmalarıdır. Çünkü şu ya da bu D–zarıyla birlikte "yaşa"yabileceğimiz ortak kabul görür biçimde ileri sürülmez, diğer bir anlatımla algılanmış uzayzamanımız esasen bir D–zar içerisinde bulunabilir. Aslında hatta bu D–zarla, belirli "ek boyutlar"ın algılanmamasının nedeninin D–zarımızın kendisinin bu ek boyutlara genişlememesi gerçeğiyle açıklanacağı şekilde üst üste binebilir.

Şekil 31.17 Şekil 31.13'tekine alternatif, sıklıkla D–zarlar bağlamında ifade edilen bir bakış açısı, yüksek boyutlu uzaydaki bir "varlığın" ek boyutların tümüne oturması gerekmeyip bir alt uzayda, belki bir D–zar sınırı üzerinde "yaşar" biçimde düşünülebileceğidir.

Son olasılık, elbette en tutumlu konumdur, böylece D–zar"ımız" 1 + 3 boyutta olur (bir D–3–zar). Bu, ek boyutlardaki serbestlik derecelerini *ortadan kaldır*maz fakat şiddetli biçimde indirger. Peki neden? Konumumuz artık, D–zarlar arasındaki yüksek boyutlu uzayın iç derinlikleriyle ilgili,

bu, ek fonksiyonel serbestliğin kendisini algılanır hale getirdiği yer olmak üzere, serbestlik derecelerinin "farkında" olmamamızdır. Bu ek boyutların yalnızca, üzerinde "yaşadığımız" D–zarı dolaysız biçimde etkiledikleri yerde farkına varmak durumundayız. Hortum benzetmemize geri dönelim. Orijinal Kaluza–Klein benzetmesinin varsaydığı "çarpan uzayı"[643] türündeki tablo yerine (Şekil 31.3), gözlemlenmiş uzayzamanımız artık yüksek boyutlu uzayın 4–boyutlu bir *alt uzayı* olarak görünür. Bunu gözünüzde canlandırmak üzere, artık "gözlemlenmiş 4–boyutlu evrenimiz" olan D–zar alt uzayını göstermek üzere hortumumuzun uzunluğu boyunca çizilmiş bir çubuk düşünün (Şekil 31.17).

Şu halde ne kadar fonksiyonel serbestlik bekleriz? Durum bir biçimde, §31.3'te "süper geometri"yle ilgili daha geleneksel bir bakış açısı elde etmek üzere benimsenen geometrik tabloyla benzerdir; *bkz.* Şekil 31.2. Şu anda yalnızca (geometrik olarak (1 + 3)–boyutlu olağan bir uzayzaman olduğu varsayılan) D–zardaki davranışla ilgilendiğimiz için fonksiyonel serbestliğimizin artık, görece büyük bir M için de olsa, kabul edilebilir bir $\infty^{M\infty^3}$ haline geldiğini hayal edebiliriz. Bununla birlikte bu, bütünlüklü 10–uzaydaki (ya da 11–uzay) dinamiğe ilişkin kısıtlamanın bize 4–boyutlu D–zar"ımız" içerisinde geleneksel türde dinamik denklemler sunduğunu varsaysa bile bir 3–uzay üzerindeki o başlangıç verisi 4–uzay boyunca olan davranışı belirlemeye yetecektir. Genel olarak, hâlâ bir $\infty^{M\infty^4}$ fazlasının beklenebilmesi hemen hemen olanaksızdır. Sorun hâlâ giderilmedi!

D–zarlara yönelik bu yaklaşımın kullanıldığı şeylerden biri §31.1'de anılan "hiyerarşi sorunu"nu çözümlemeye girişmektir. Özel olarak bu, kütleçekimle ilgili etkileşimlerin Doğanın önemli diğer kuvvetleriyle bağıntılı olarak niçin bu kadar küçük olduğu ya da eşdeğer biçimde, kütleçekimle ilgili temel Planck kütlesinin niçin Doğanın temel parçacıklarının kütlelerinden bu kadar (10^{20}'lik bir çarpan kadar) büyük olduğuyla ilgili sorundur. Bu soruna yönelik D–zar yaklaşımı birden fazla, biri "büyük" ve diğeri "küçük" olan, D–zar varlığını gerektirir görünüyor. Geometrinin bir D–zardan diğerine esneme biçiminde üstel bir çarpan bulunması söz konusudur ve bu, kütleçekimle ilgili kuvvetlerle diğer kuvvetler arasındaki uyumsuzluğa, 10^{40} (ya da öyle bir şey), yönelmekte faydalı olarak değerlendirilir.[644] Bir D–zar sınırını diğerine esneten bu tür yüksek boyutlu bir

[643] Bir "çarpan uzayı" bir demete ilişkin taban uzayına benzer; *bkz.* §§15.1, 2.

[644] *Bkz.* Randall ve Sundrum, 1999a; bu konularla ilgili daha genel düşünceler için *bkz.* Randall ve Sundrum, 1999b. Johnson, 2003, D–zar teknolojisiyle ilgili standart kaynaktır. Bu teknolojinin en harika uygulamalarından biri, evrenin başlangıcına ilişkin Steinhardt ve Turok, 2002, tarafından ortaya konan, Büyük Patlamanın evrenin daha önceki bir fazında iki D–zarın çarpışması sonucu ortaya çıktığının ileri sürüldüğü "ekpyrotic" model olmuştur. Böylesi

uzayzaman tablosunun, 11. boyutun açık bir kesit biçimine sahip olduğu M–kuramı gibi, 11–boyutlu kuramlar için düşünülen bir geometri türü olduğu, her sınır geometrisi daha önce ele aldığımız 10–uzay topolojik biçimine (diğer bir deyişle $\mathcal{M}\times\mathcal{Y}$) sahip olmak üzere, belirtilmelidir. Diğer modellerde 11. boyut topolojik olarak S^1'dir.

31.18 Sicim kuramının fiziki konumu?

Tüm bunlarla, geleceğe ilişkin bir kuram biçiminde değerlendirilen sicim kuramının konumuyla ilgili olarak ne yapmalıyız? Durum beni, kendisine ilişkin kulağa son derece mantık dışı gelenler yanı sıra esrarengiz ve dikkat çekici bazı görünümlere sahip olarak etkilemektedir ve bu aşamada tümüyle dogmatik olmaya çalışmak yanlış olur. Yine de sicim kuramcılarının pek çoğunun iddiaları son derece belirgin bir güvenle ileri sürülür. Hiç şüphesiz bunlar, ciddi bir tüketime niyetlenmeden önce sulandırılmak ve büyük miktarda tuzla birlikte alınmak zorundadır. İddiaların en sağlamlarından bazılarının (örneğin kuantum kütleçekime ilişkin bütünüyle tutarlı bir kuram sunmuş olan sicim kuramı) bir bütün olarak bir bütün olarak dikkate alınmayabileceğini söylemenin uygun olacağını düşünüyorum. Bununla birlikte, söylenmiş olduğu üzere, sicim/M–kuramının bazı görünümlerinde "sahne arkasında devam etmekte olan" gerçek öneme sahip bir şeylerin ortaya çıkışının söz konusu olduğunu itiraf etmek zorundayım. Londra Imperial Üniversitesinden matematikçi Richard Thomas bir e–mail yoluyla beni şöyle uyardı:

> Bu ikiliklerden bazılarının ne kadar derin olduğunu ne kadar vurgulasam az; bizi yeni öngörülerle sürekli biçimde şaşırtıyorlar. Daha önce olanaklı olduğu asla düşünülemeyecek yapılar gösteriyorlar. Matematikçiler pek çok kez bu şeylerin olanaklı olmadığını kendilerinden emin biçimde tahmin ettiler fakat Candelas, de la Ossa, vd gibi insanlar bunun yanlış olduğunu gösterdi. Matematiksel olarak uygun biçimde yorumlanarak yapılmış olan her tahminin doğru olduğu açığa çıktı. Ve şimdiye dek herhangi bir *kavramsal* matematik gerekçelendirme olmaksızın; bunların niçin doğru olduklarına ilişkin hiçbir fikrimiz yok, yalnızca her iki tarafı da bağımsız olarak hesaplıyoruz ve esasen her iki tarafta aynı yapı, simetri ve yanıtları elde ediyoruz. Bir matematikçi için bunlar rast-

ilginç elemanları yardıma çağırmalarına karşın bu modelin yazarları, Büyük Patlamanın sunduğu temel bulmacayı, diğer bir deyişle ona ait §27.13'te açıklanmış olan olağanüstü özgüllüğü, açıklamaya yönelik hiçbir girişimde bulunmazlar.

lantı olamaz, daha yüksek bir nedenden kaynaklanmak zorundalar. Ve bu neden *bu büyük matematiksel kuramın doğayı açıkladığı varsayımıdır...*

Yine de, bu "bir şey", bizi Doğanın gizemlerine daha yakınlaştırdığıyla ilgili gerçek hiçbir neden olmaksızın hâlâ matematiksel bir öneme sahip olabilir. Aslında Doğanın bu konularla (olasılıkla şimdiye kadar önerilmiş olanlardan bir biçimde farklı bir hat üzerinde) ilgisi olduğunu kabul etmeye hazır olduğum gerçek inançlarıma karşın bunun, benimsenecek mükemmel biçimde savunulabilir bir konum olduğunu düşünüyorum. Sicim kuramı durumunun kuvvetinin, görünüşte farklı "fiziki durumlar" arasındaki (bu "fizik" genellikle daha çok Doğanın gerçek dünyasına ilişkin fizikten çıkarılmış görünen bir şey olmak üzere) bir miktar kayda değer matematiksel ilişkiye dayandığı görülür. Bu ilişkiler "rastlantı" mıdır yoksa bunların ardında daha derin bir neden mi vardır? Bana öyle geliyor ki pek çoğuyla ilgili olarak, bazı durumlarda henüz keşfedilmemiş, bu tür bir neden söz konusudur fakat bu hâlâ bize sicim kuramcılarının fizikle uğraştıklarına ilişkin güvence vermez. Ya da öylelerse, fiziğin gerçekten hangi görünümünü araştırmaktalar?

Edward Witten'in özel konumuna işaret etmeksizin bu konulara ilişkin uygun bir değerlendirme yapılabileceğini sanmıyorum. O genellikle, 1980'lerin sonlarından itibaren gerçekleştirilen sicim kuramı (ve M–kuramı) araştırmalarının yönüne ilişkin en sorumlu insan olarak kabul edilir. 1995'te "ikinci süpersicim devrimi"ni başlatmaktaki rolünü belirtmiştim (§31.14) fakat o bundan sonra da sicim kuramında ve sicim kuramıyla (her zaman pek belirgin olmayan) bir ilişkiye sahip pek çok diğer alanda önemli birkaç gelişme başlatarak üstünlüğünü pekiştirdi. Sicim kuramı 30 yılı aşkın geçmişi boyunca pek çok "tur rehberi"ne sahip oldu fakat Witten pek çok bakımdan bunlar arasında açık biçimde en etkileyici olanıydı. Diğerlerinin Witten'i gittiği yerde takip etmeleri pek uzun sürmez. Buna bir örnek olarak, §31.16'da tartışılmış olan hareketliliklerin çoğunu başlatan, sicim kuramı camiası tarafından Witten onu 1998'de bulana dek esasen arşivlerde unutulmuş biçimde kalan orijinal Maldacena tezi belirtilebilir. O hemen, sicim kuramcıları tarafından en çok alıntı yapılan tez haline geldi.[645]

Oldukça önemli görünen yeni bir çalışmada[646] Witten'in yeniden (süpersimetri hâlâ içerilmesine rağmen) standart 4–boyutlu uzayzaman içerisindeki değerlendirmelere dönüşü ilginçtir. Witten, burgaç kuramıyla si-

[645] *Bkz.* not 31.74.

[646] *Bkz.* notlar 31.18, 31.76.

cim kuramındaki fikirleri birleştirerek çeşitli gluonlara ilişkin Yang–Mills etkileşimleriyle ilgili (§25.7) büyüleyici bazı sonuçlar elde etmeyi başardı. Bu çalışma özellikle benim kendi burgaç yönelimli bakış açımdan (*bkz.* 33. bölüm) önemlidir ve yeni bazı önemli gelişmelere de yol açabilir.

Witten'in olağanüstü nitelikteki entelektüel başarılarıyla ilgili hiçbir sorun söz konusu değildir. Bunu büyük ölçüde dolaysız deneyimden hareketle söyleyebilirim. Oxford'daki Matematik Enstitüsünde (Geometri ve Analiz grubunda) katıldığım seminerlerde, bir soruna yönelik son derece orijinal bir yeni yaklaşımın duyurulduğu sayısız durum söz konusu oldu ve ufuk açıcı fikrin esasen tümüyle ya da kısmen Witten'den geldiği ortaya çıktı. Böylesi yaklaşımlar sıklıkla, bu umulmadık kavrayışların zor matematiksel problemlere, bazen öncesinde inatçı görünenlere, orijinal bir güçlü ışık tuttuğu, yeni alanlar açtı. Zihnimde, Witten'in yüksek düzey bir kayda değer matematiksel sezgi ve kavrayışa sahip olduğuyla ilgili en ufak bir kuşku yok. (Aslında, 1990'da, matematikçiler arasında, bilim dünyasındaki Nobel Ödülü konumuna sahip Fields Madalyasını kazandı. Bir fizikçi için bu gerçekten olağanüstü bir başarıdır.) Yine de Witten'in, matematikte daha yetenekli olduğunu inkar ettiğini sanıyorum. Onun bakışını anladığım kadarıyla başarısı, yol integralleri ve sonsuz boyutlu fonksiyon uzaylarıyla birlikte QFT yapısından, süpersimetri fikirlerinden ve sicim kuramının doğasıyla ona ilişkin genellemelerden edindiği kavrayışla, Doğanın yollarına dikkatli biçimde daha derin bakmaktan kaynaklanıyor. Haklıysa, belki de bu kendisine ait, süpersimetri ve sicim kuramının esasen Doğada derin bir onaylama bulduğu savlarını kabul etmekle ilgili en güçlü durumlardan biridir. Öte taraftan belki de olduğunu kabul ettiğinden çok daha kayda değer bir matematikçidir!

Witten ve meslektaşlarının ortaya çıkardığı oldukça çarpıcı matematiksel ilişkilerin Doğaya yönelik derin bir yakınlığı belirtmesinden ne kadar etkilendim? Bu konuya nasıl bakmak gerektiğinden emin değilim ve onunla ilgili olarak kesinlikle ikna olmuş değilim. Matematikçi Andrew Wiles'ın, üç buçuk yüzyıllık başarısız girişimden sonra ünlü "Fermat'nın Son Teoremi"ni kanıtlamaktaki dikkat çekici başarısını anımsayın (§1.3). Wiles'ın, önemli bir durumda, gerçekte saptadığı şey, oldukça farklı görünümlü iki hesaplamanın esasen her zaman aynı yanıt listesi sonucunu vermesiydi; bu dikkat çekici savın genel biçimi Taniyama–Shimura varsayımı olarak bilinir. (Aslında, Wiles'ın kanıtı tüm T–S varsayımının yalnızca bir kısmını saptadı –Fermat savını kanıtlamaya yeterli bir kısım– fakat yöntemleri, sonrasında Breuil, Conrad, Diamond ve Richard Taylor tarafından tamamlanan bütünlüklü kanıt için temel bir veri sundu.)

Belki bu varsayım ve üstte anılan Calabi–Yau uzaylarına (§31.14) ilişkin "ayna simetrisi" bağıntıları arasında belirsiz bir benzerlik söz konusudur. Her durumda, gizemli biçimde aynı oldukları ortaya çıkan sayılardan oluşan sonsuz iki listeye sahip olunur. Böylesi bir şey matematik içerisinde benzersiz olmaktan uzaktır. Herhangi özel bir durumda, listelerin denkliğine ilişkin temel neden gün yüzüne çıkmadan önce uzun yıllar geçmesi gerekebilir. Anladığım kadarıyla "ayna simetrileri" kullanılarak elde edilebilen bağıntıların çoğu artık tümüyle matematiksel argümanlarla elde edilmiştir.[647] Bildiğim kadarıyla, böylesi gizemli ilişkiler normalde (matematiksel olanların aksine) *bilimsel* kuramlara ilişkin önermeleri desteklemek üzere ileri sürülmez. Bu tür bir konu §34.9'da yeniden ele alınacak.

Aynı tür bir rastlantıyı, §31.15'te ileri sürülen kara delik entropisine ilişkin sicim kuramsal argümanlarda da (ve hatta daha önceden §30.5'teki "sicim olmayan" argümanlarda) görmüştük. Bunlar gerçekten matematiksel rastlantılar mıdır yoksa biz bunları gerçek türetimler sağlayan argümanlar olarak mı kabul etmekteyiz? Bu bölümü, çarpıcı matematiksel rastlantıya ilişkin, 20. yüzyılın başlarındaki fizikten alınmış diğer bir örneği ele alarak bitireyim. Woldemar Voigt 1912'de, hatalı bir osilatör modeline dayanan bir spektral çizgi kuramı oluşturdu. On beş yıl sonra Heisenberg ve Jordan, bugün bu soruna yönelik doğru yaklaşım olduğunu kabul ettiğimiz şeyi buldu. Heisenberg'in, Voigt'un çalışmalarıyla ilgili anılarından alıntı yapmaya değer:[648]

Osilatörlerin bağlaşımlarını birbirleri ve dış alanla, zayıf manyetik alanlarda Paschen–Back etkisinin de doğru biçimde gösterileceği şekilde ayarlamayı başardı. Ilımlı alanlarla ilgili ara bölgeler için, frekanslar ve şiddetlerle ilgili uzun ve karmaşık, ikinci derece kökler elde etti; büyük ölçüde anlaşılmaz fakat deneyleri belirgin biçimde büyük bir tamlıkla yeniden üreten formüller. On beş yıl sonra Jordan ve ben, aynı sorunu kuantum mekaniksel tedirgeme yöntemleriyle çözme belasına bulaştık. Hem frekans hem de şiddetlerle ilgilenildiği sürece şaşkınlık içinde eski Voigtçı formüllerin tam olarak aynısına ve de ayrıca ılımlı alanlara ilişkin karmaşık bölgede ulaştık. Bunun sonradan algılayabildiğimiz nedeni, tümüyle biçimsel ve matematiksel olmasıydı.

34. bölümde matematiksel ilişkilere ilişkin bu kafa karıştırıcı konulara, sicim kuramının ve temel fiziki bir kuramın gelişimiyle ilgili diğer önermelerin ardındaki itici kuvvet olarak döneceğim.

---

[647] *Bkz.* notlar 31.57, 31.58.

[648] Bu alıntı Heisenberg'in 1975'te German Physical Society'ye yazdığı "What is an elementary particle?" yazısındandır. Abhay Ashtekar'a bu örnek için minnettarım. *Bkz.* Heisenberg, 1989.

32

EINSTEIN'IN DAHA DAR YOLU; DÖNGÜ DEĞİŞKENLERİ

32.1 Kanonik kuantum kütleçekim

Sicim kuramının popülerliğine karşın bazılarının yaptığı gibi[1] onun "şehirdeki tek oyun" (*bkz.* §31.8) olduğu bakışını kabul etmek bir saçmalık olur. Farklı üstünlük ve farklı zorluklara sahip pek çok farklı fikir izlendi. Ne yazık ki burada, kuantum kuramıyla uzayzaman yapısını birleştirmeye yönelik alternatif fikirlerin pek çoğuyla ilgili bir tartışmaya girmek benim için pek uygun olmaz. Bunun yerine bu ve bir sonraki bölümde, genel görelilikle kuantum mekaniği arasındaki gerçek birlik arayışında olasılıkla hangi çizgilerin daha faydalı olduğuyla ilgili kendi inançlarıma daha yakın olan daha etkin alanların bazılarına yoğunlaşacağım. Önceki bölümdeki yorumlarımdan anlaşılabileceği üzere, uzayzaman boyutluluğunda bir büyüme ya da süpersimetriye yönelik riskli girişimlere (sondakine, §§31.11, 12'de gözlemlediğimiz üzere ciddi kararlılık sorunlarıyla karşılaşan ilkinden daha az karşı olsam da) izin verenler yerine daha sıkı biçimde kontrol edilen bir konumu kabul etmek zorunda olacağımız görüşündeyim. Buradan hareketle bu iki bölümde özellikle, Einstein'ın gerçek alan denklemine,[2] süpersimetri olmaksızın, gerçek bir tür kuantum bağlamında yönelme gerekliliğinin tasarlandığı 4–boyutlu Lorentzci uzayzamanla ilgili bazı fikirleri görüyor olacağız. Burada bile, karşılaştığımız "fiziki gerçeklik tabloları"nın, bazı bakımlardan önceki bölümde gördüğümüz ölçüye dek değil fakat bazı bakımlardan ondan da fazla olacak şekilde, tanıdık olan şeyden büyük oranda çıkarıldığını göreceğiz. Bu bölümde Ashtekar değişkenleri, döngü değişkenleri ve spin ağlarının ardındaki fikirlerin bazılarına tanıklık edeceğiz. Sonraki bölümde burgaç kuramıyla tanışacağız.

---

[1] *Bkz.* Greene, 1999.

[2] Burada, Einstein'ın kendisinin, daha sonraki yıllarında birleşik alan kuramlarına girişmesiyle, daha önceden girmiş olduğu dar yola takılıp kalmamasına ilişkin bir ironi söz konusudur.

Değer kazanmış olan belirli başkaca fikirlere de, özellikle ayrık uzayzaman, q–deformeli yapılar ("kuantum grupları") ve değişmeli olmayan geometriye, bu iki bölümde değinilecek.

Einstein kuramının kuantize olmasına dönük yaklaşımın en dolaysız biçimlerinden biri onu bir Hamilton biçimine sokmak ve daha sonra §§21.2, 3'te açıklanmış olan kanonik kuantizasyon işlemlerini uygulamaya çalışmaktır. Bununla ilgili pek çok güçlük söz konusudur; ayrıntılara saplanmak istemiyorum. Bunların pek çoğu Einstein kuramının "genellikle kovaryant" (§ 19.6) olması gerçeğinden ileri gelir, böylece kullanılan herhangi belirli bir koordinatın hiçbir önemi yoktur. §21.2'deki tartışmadan, kendisi yoluyla p_a momentumunun, x^a (klasik olarak) eşlenik konum değişkeni olmak üzere, $i\hbar\partial/\partial x^a$ işlemcisiyle yerinin değiştirildiği standart "kuantizasyon reçetesi"nin her zaman doğru olmadığını, eğri çizgisel koordinatları kullandığımızda düz uzayzamanda bile doğru olmadığını anımsayın. Bu nedenle, bu tür kuantizasyon işlemi gerçekleştirilirken büyük özen gösterilmek zorundadır.

Diğer bir zorluk, genel görelilikle ilgili standart Hamilton için bulunmuş olan polinom biçimli olmayan karışık yapıdır. Bizi bir uzaysal başlangıç $\mathcal{S}$ 3–yüzeyinden uzaklaştıran evrim denklemlerine sahip olmanın yanı sıra, bunlar Hamilton tarafından yönetilmek üzere, $\mathcal{S}$ *içerisinde* hareket edip *kısıtlılıklar*[3] olarak adlandırılan başkaca denklemler de söz konusudur. Bunlar bize $\mathcal{S}$ *üzerindeki* veriyle ilgili tutarlılık denklemleri sağlar ve kısıtlılık denklemlerinin sağlanması $\mathcal{S}$*'den uzak* (en azından yerel olarak) bulunan verinin tatmin edici bir evrimi için gerekli (ve yeterli) olur ve bu evrim daha sonra kısıtlılıkların sağlanmasını koruma altına alır.

Genel göreliliği kuantize etmekle ilgili kanonik yaklaşım, 1932 yılında esasen Einstein kuramında ortaya çıkan karışık kısıtlılıkları ele alabilmek üzere yeni bir bütünlüklü kuantizasyon çerçevesi geliştirmiş olan Dirac'a dek uzanan uzun ve seçkin bir tarihe sahiptir.[4] Bu tür bir yaklaşım yıllar içinde çeşitli sayıda araştırmacı tarafından artan bir çok yönlülük içerisinde izlendi[5] fakat Hamiltonın polinom biçimli olmayan karışık doğası ileremeyi güçleştirdi. Daha sonra 1986'da Hint/Amerikalı fizikçi Abhay Ashtekar önemli bir atılım gerçekleştirdi. Kuramda kullanılan değişkenlerin incelikli bir seçimi yoluyla o (daha önceden Amitabha Sen tarafından

---

[3] Kısıtlama kavramları ve Hamilton formülasyonuyla ilgili olarak *bkz.* Dirac, 1964; Ashtekar, 1991; Wald, 1984.

[4] Örneğin *bkz.* Dirac, 1950, 1964; Pirani ve Schild, 1950; Bergmann, 1956; Arnowitt, 1962. Temelde kuantum kütleçekimin tıkız 3–geometri üzerindeki Schrödinger denklemi olan Wheeler–deWitt denklemiyle ilgili olarak *bkz.* deWitt, 1967.

[5] *Bkz.* Isham, 1975; Kuchar, 1981.

ileri sürülmüş fikirlerle kısmen ilişkili biçimde),[6] denklemlerin yapısını çarpıcı biçimde sadeleştirmeyi başardı ve Hamiltondaki tuhaf paydalar ortadan kaldırılarak nispeten basit bir polinom yapısına ortaya çıktı.

32.2 Ashtekar değişkenlerine yönelik aynal girdi

Ashtekar'ın, (hâlâ) adlandırıldıkları üzere, orijinal "yeni değişkenler"ine ilişkin çarpıcı özelliklerden biri, gravitonun (kütleçekimin kuantumu)[7] sağ–elli ve sol–elli kısımlarına ilişkin olarak ele alınmalarına göre asimetrik olmalarıdır. §§22.7, 9'dan, (skaler olmayan) kütlesiz bir parçacığın, hareket yönü dolayında sağ–elli ya da sol–elli olabilen iki spin durumuna sahip olduğunu anımsayalım. Bunlar sırasıyla parçacığın pozitif ve negatif *sarmallık* durumları olarak anılır. Graviton 2–spinli bir parçacık olmak durumundadır, öyleyse kendisine ilişkin iki sarmallık durumu sırasıyla, s sarmallık yerine kullanılmak üzere, ($\hbar = 1$ kabul ederek) $s = 2$ ve $s = -2$ olmalıdır (ayrıca *bkz.* §22.12). Orijinal Ashtekar yaklaşımı bu iki durumu *farklı biçimde* ele alır. Böylece bu formalizm sol–sağ asimetriktir!

Burada, foton 1 spine sahipken gravitonun aslında niçin 2–spinli bir parçacık olarak ele alındığıyla ilgili bir yorum uygun olur (*bkz.* §22.7, §32.3). Bunun anlamı nedir? Bir kuantum parçacığının spin değeri onu tanımlayan alan niceliğinin simetrileriyle (ve alan denklemleriyle) ilgilidir (ve §34.8'de göreceğimiz üzere, 2–spinör biçiminde yazılan denklemlerde en belirgindir). Bununla birlikte, kütleçekimin spin–2 doğasıyla elektromanyetizmanın spin–1 doğası arasındaki farkı dolaysız olarak görmenin *geometrik* bir biçimine sahip olmak iyidir. Her alana uygun olan dalgaları, diğer bir deyişle bir taraftan ışığı oluşturan elektromanyetik dalgaları, öte taraftan kütleçekim dalgalarını inceleyelim.

Elektromanyetizma durumunda dalgalara ilişkin geometrik doğayı Şekil 22.12'de ve §22.9'da görmüştük. Kilit nokta, elektrik ve manyetik vektörlerin esasen, dalganın kendi hareketi yönündeki π'lik (diğer bir deyişle 180°) bir döndürmesinin alan niceliğini kendi *negatifine* göndereceği şekildeki *vektör* nicelikleri olmasıdır; ve onu eski haline geri getirmek için 2π'lik bir döndürmeye gerek duyarız. Kütleçekim durumunda dalga, şekiller 17.8a ve 17.9a'da gösterilmiş olan uzayzaman çarpıklığı biçiminde olur. Şu halde dalgayı yalnızca π kadar döndürürsek çarpıklık kendine gi-

---

[6] *Bkz.* Sen, 1982 ve Ashtekar, 1986, 1987.

[7] Kısa süre içinde göreceğimiz üzere, teknik güçlükler orijinal Ashtekar yaklaşımını bu belirgin biçimdeki aynal açıklamadan saptırmıştır. Bununla birlikte Ashtekar programını ardındaki güdüleyiciye ilişkin anlayışım odur ki, bu "saptırma", tasarlanan kuantum kütleçekim kuramına yakın olup onunla özdeş olmayan modellere ilişkin geçici bir araştırma olarak kabul edilebilir.

der ve onu kendi negatifine gönderen şey $1/2\pi$'lik bir döndürme olur. Bunun, Weyl eğriliğinin, şekiller 17.8a ve 17.9a'daki çarpıklık elipsleri biçiminde gösterildiği üzere, *dört kutuplu* bir işlem olmasının bir sonucu olduğunu belirtebiliriz ve bunun 2–spinli bir parçacığa karşılık geldiğini §31.9'da belirtmiştik. σ spin değeri için, dalga yönündeki π/σ'lık bir döndürme alan niceliğini kendi negatifine gönderirken onu eski durumuna getirmek üzere $2\pi/\sigma$'lık bir döndürmeye gerek duyulur. (Bunun yalnızca σ'nın yarı–tek bir tamsayı olması durumunda işleyeceğine, bu durumdaki alan niceliği zorunu olarak spinör biçimli olmak üzere, *bkz.* §11.3, dikkat edin.)

Buradaki durumda olduğu üzere kütlesiz bir alanda daha ileri gidebilir ve düzlem dalgalarını çembersel olarak sağ–elli ve sol–elli kutuplanmış kısımlardan oluşur şekilde, elektromanyetik çembersel kutuplanma Şekil 22.12b'de gösterilmiş olmak üzere, düşünebiliriz. Kuantize olmuş bir alana ilişkin olarak ilgili parçacıklar buna bağlı olarak pozitif ya da negatif sarmallığa sahip olacaktır (Şekil 22.13). σ spini için bu sarmallık değerleri (Şekil 22.13'e yönelik uygun bir açıklamayla fakat $q^{2\sigma} = z/w$ ifadesinin $q^{1/2} = z/w$ ifadesi yerine geçmesiyle birlikte) $\pm\sigma$ olur. Böylece, kütleçekimle ilgili olarak esasen olası iki $+2$ ve -2 değerini elde ederiz.

Sarmallık durumlarının nasıl açıklandığını görmek üzere, matematiği biraz daha açık olarak incelememiz gerekecek. Aslında, başvurduğum bu sol–sağ asimetrisi sonraki bölümde inceleyeceğimiz burgaç kuramının önemli bir özelliğidir ve Ashtekar yaklaşımı, başlangıç esinlerinin bir kısmını bu tür burgaç biçimli fikirlerden edinmiş görünür. Şimdilik burgaç ilintili fikirlerden gerek duyacağımız tüm şey bu sol–sağ asimetrisinin olağan uzayzaman terimleriyle matematiksel olarak nasıl ifade edileceğidir. Doğanın bilinen iki kütlesiz alanını, elektromanyetizma ve kütleçekim, açıklayan iki tensör niceliğini anımsayalım. Bu nicelikler, $\boldsymbol{F} = F_{ab}$ maxwell alan tensörüyle (§19.2) $\boldsymbol{C} = C_{abcd}$ Weyl konformal tensörüdür (§19.7). Bunların her biri (ε_{abpq} burada $\varepsilon_{0123} = 1$ olacak biçimde seçilmiş, standart bir sağ–elli ortonormal tabandaki karşı–simetrik Levi–Civita tensörü olmak üzere; *bkz.* §12.7 ve §19.2),

$$^{*}F_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abpq}F^{pq} \text{ ve } {}^{*}C_{abcd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abpq}C^{pq}{}_{cd}$$

indis notasyonunca tanımlanıp *ikili* tensör olarak adlandırılan şeye sahiptir. İkili $^{*}\boldsymbol{F}$ Maxwell tensörünü §19.2'de görmüştük. $^{*}\boldsymbol{C}$ ikili Weyl tensörü benzeş bir nicelik olarak görülür. Bunun yerine ayrıca Weyl tensörünün sondaki cd indis çiftini "eşleştirme"yi de tasarlayabiliriz. Bununla birlikte bunun ab üzerindeki eşleştirmeyle aynı olduğu ortaya çıkar.[32.1]

[32.1] Nedenini açıklayın. Diyagram biçimli notasyonla §12.8'in özdeşliklerini faydalı bulabilirsiniz.

4–boyutlu uzayzamandaki bir noktadaki bir 2–düzlem elemanının *basit* olan (§12.7) bir $\boldsymbol{f}$ 2–biçimlisiyle (ya da bir ikili-vektör) açıklandığını anımsayın. Buna ilişkin $^*\boldsymbol{f}$ *eşleniği*ni (2–biçimli) $\boldsymbol{F}$ Maxwell tensöründe olduğu gibi oluşturabilir ve kavrama *karmaşık* bir $\boldsymbol{f}$ için *öz eşlenik* diğer bir deyişle $^*\boldsymbol{f} = \mathrm{i}\boldsymbol{f}$ ya da *karşı–öz eşlenik* diğer bir deyişle $^*\boldsymbol{f} = -\mathrm{i}\boldsymbol{f}$ olabileceği anlamını verebiliriz. $\boldsymbol{f}$'ye karşılık gelen (karmaşık) 2–düzlem elemanı buna göre, "öz eşlenik" ya da "karşı–öz eşlenik" olarak adlandırılır. Bu kavram burgaç kuramı için önemlidir (§33.6).[32.2]

Kuantum kuramında alan niceliklerinin karmaşık sayı değerleri almasına, en azından dalga fonksiyonlarıyla ilgili yoruma sahip olduklarında, olanak tanınır. Aslında bu şeylere bakmanın bir çok farklı fakat matematiksel olarak eşdeğer biçimi söz konusudur (*bkz.* 26. bölüm). Karmaşık bir Maxwell tensörünü ya da hatta karmaşık bir Weyl tensörünü sırasıyla foton ya da gravitonla ilgili bir dalga fonksiyonuna ilişkin bir biçimi temsil eder şekilde düşünürsek halihazırdaki amaçlarımıza en iyi uyacak şey bu olur. Klasik bir alan niceliğinin ayırt edici bir özelliği olan gerçeklik koşulu yerine karmaşık dalga fonksiyonlarımız (§24.3 ve §26.2'de belirtilmiş olan gerekliliklerle uyumlu biçimde) pozitif frekanslı olmak zorundadır. Bunun, Weyl eğriliği durumunda esasen ne *anlama geldiğiyle* ilgili fazlaca endişelenmeyelim. Geçici olarak, $\boldsymbol{C}$'nin yalnızca, Minkowski uzayındaki bir alan olarak düşünülebileceği durumdaki, düzlükten sonsuz küçük biçimde farklı olan eğik uzaylara bakmakta olduğumuzu düşünebiliriz, böylece pozitif frekans koşulu sorunlu olmaktan çıkar. (Bununla birlikte, §§33.10–12'de belirtileceği üzere, bundan bile daha iyisinin yapılabileceği ortaya çıkar.)[8] Şu halde, *sağ–elli* foton ve gravitonlar, $^+\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F} - \mathrm{i}\,{}^*\boldsymbol{F})$ ve $^+\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \mathrm{i}\,{}^*\boldsymbol{C})$ olmak üzere, (pozitif frekanslı) $^+\boldsymbol{F}$ ve $^+\boldsymbol{C}$ *öz ikili* nicelikleri tarafından

$$^*(^+\boldsymbol{F}) = \mathrm{i}\,{}^+\boldsymbol{F} \text{ ve } {}^*(^+\boldsymbol{C}) = \mathrm{i}\,{}^+\boldsymbol{C}$$

ifadelerine sahip olacağımız şekilde, tanımlanır. *Sol–elli* olanlar da,

$$^*(^-\boldsymbol{F}) = -\mathrm{i}\,{}^-\boldsymbol{F} \text{ ve } {}^*(^-\boldsymbol{C}) = -\mathrm{i}\,{}^-\boldsymbol{C}$$

olacak şekilde, $^-\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F} + \mathrm{i}\,{}^*\boldsymbol{F})$ ve $^-\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \mathrm{i}\,{}^*\boldsymbol{C})$ *karşı–öz ikili* nicelikleri tarafından tanımlanır. Orijinal Ashtekar çerçevesinde Weyl eğriliğine ilişkin öz ikili ve karşı–öz ikili kısımlar farklı roller oynar.

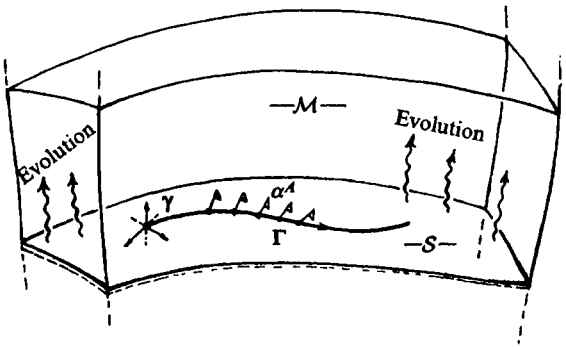
[32.2] Öz ikili bir $\boldsymbol{f}$'yi açıklayan iki f_{ab} indisinin her ikisi de karşı–öz ikili bir Weyl (ya da Maxwell) tensörünün herhangi bir indis çiftiyle daraltılırsa bu durumda sonucun sıfır olacağını gösterin.

[8] Doğrusallaştırılmış kütleçekime ilişkin orijinal bir tartışma için *bkz.* Fierz ve Pauli, 1939; doğrusallaştırılmış kütleçekimle ilgili daha fazla bilgi için *bkz.* Sachs ve Bergmann, 1958. Doğrusal olmayan gravitonla ilgili *bkz.* Penrose, 1976a ve 1976b.

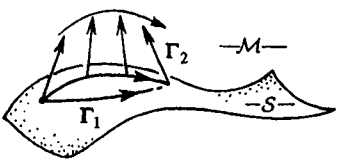
Fiziki bakış açısıyla bu, tuhaf görünebilir çünkü kütleçekim alanında sol/sağ asimetrisine ilişkin herhangi bir kanıt söz konusu değildir ve standart Einstein genel görelilik kuramında da kesinlikle yoktur. Görebildiğim kadarıyla bu soruna yönelik iki farklı tutum takınabiliriz. Bir taraftan, Hamiltonı sadeleştirmekte faydalı olduğu ortaya çıkan asimetriyi belirli matematiğe ilişkin önemsiz bir özellik olarak değerlendirebiliriz. Diğer taraftan, Doğayla ilgili derin biçimde sol/sağ asimetrik olan bir şeyin söz konusu olduğuna ve asimetrik formalizmin bunu bir biçimde araştırdığına ilişkin konumu kabul edebiliriz. Aslında Doğanın sol/sağ asimetrik *ol*duğunu, zayıf etkileşimlerde açık biçimde ortaya konduğu üzere (§25.3), biliyoruz. Belirli bir anlamda elektromanyetizma bu asimetrinin kalıntılarını içerir fakat bu yalnızca, onun *elektrozayıf* kuramdaki zayıf etkileşimlerle birleşimi üzerinden dolaylı biçimde görülebilir. Kütleçekimle ilgili (bilinen) benzer bir birleşim yokluğunda kütleçekimin bu tür asimetrik özelliklere dolaylı ya da dolaysız olarak sahip olması gerektiğini beklemek için hiçbir neden yoktur. Yine de sicim kuramcılarının kendi kuramlarına ilişkin bakış açılarıyla ilgili olarak, bir kuantum kütleçekim kuramının sırf kütleçekimden daha fazlası olan bir şeyi amaçladığına ilişkin bakışı kabul edebiliriz; o, klasik bir uzayzamanla ilgili halihazırdaki çerçevenin daha temel bir şeye yönelik bir uygunluk ya da yaklaşıklık tahmini olarak görülmesi gerekmek üzere, fiziğin tümüyle ilgili temel bir çerçeveyi ortaya sermektedir. O "bir şey" (Ashtekar ve burgaç çerçeveleri yanı sıra sicim kuramının heterotik görünümlerinde olduğu gibi; *bkz.* §31.14) kendi içinde bir aynallığa sahipse bu durumda zayıf etkileşimlerde bütünlüklü aynal asimetriler bulunması gerçeği çok daha kolay biçimde algılanır.

32.3 Ashtekar değişkenlerinin biçimi

Öyleyse bu aynal Ashtekar değişkenleri nedir? Aynallık, Lorentzci 4–uzaya uygulanan iki tür 2–spinördan birine ilişkin asimetrik seçimden kaynaklanır. Bu nesneleri, elektronun ψ dalga fonksiyonunun 2–karmaşık bileşenli kavramlarının, biri apresiz ve diğeri apreli bir indise sahip olan bir çiftinden, α_A ve $\beta_{A'}$, oluşur biçimde düşünülebildiğini gördüğümüz §25.2'den anımsayabiliriz. Apresiz indisin elektronun *zik* ya da *sol–elli* (negatif sarmallıktaki) kısmı ve apreli indisin *zak* ya da *sağ–elli* (pozitif sarmallıktaki) kısmıyla ilgili olduğunu belirtmiştik. Ayrıca zayıf etkileşimin $\beta_{A'}$ zak kısmına değil yalnızca $\acute{a}_A$ zik kısmına ilgi gösterdiğini de görmüştük (§25.3). Bu durumda, apreli ya da apresiz spinörü diğerinden "daha temel" olarak seçen bir uzayzaman formalizmi temel bir aynallık içerir



Şekil 32.1 Ashtekar'ın, $\mathcal{M}$ uzayzamanındaki uzaysal $\mathcal{S}$ 3–yüzeyi üzerinde tanımlı orijinal kanonik değişkenleri Γ "konum" parametrelerini, $\mathcal{S}$'yle sınırlanmış (yarım okla belirtilen α^A spinörleri için) 4–uzay spin bağlantısının bileşenleri olarak alır. "Momentum" parametreleri temel olarak $\mathcal{S}$'ye ilişkin (ters) γ içsel metriğinin (2–biçimliler olarak ifade edilip $\mathcal{S}$'nin her noktasındaki ortonormal bir tabanla ilgili olan) bileşenleridir.



Şekil 32.2 Γ_1 *$\mathcal{S}$'ye ilişkin içsel eğrilik ve* Γ_2 *dışsal eğrilikle ilgili olmak üzere* $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$ *biçiminde ifade edebiliriz (böylece* Γ_2*, $\mathcal{S}$'nin $\mathcal{M}$ içinde ne kadar büküldüğünü ölçer).*

ve bu iki sarmallığı temel bir düzeyde ayırt edebilme yeteneğine sahip bir çerçeveyi ortaya serer.

Aslında bu yalnızca, orijinal Ashtekar (ve burgaç) formalizmlerinde meydana gelen şeydir. Ashtekar yaklaşımında, uzaysal bir $\mathcal{S}$ 3–yüzeyine göre seçilmiş olan *kanonik değişkenler* temel olarak $\mathcal{S}$'ye *içsel* olan (ters) γ 3–metriğinin ve $\mathcal{S}$ üzerinde alınmış olan (apresiz) Γ *spin bağlantısı*nın bileşenleridir. Biraz daha kesin olmak üzere, bunlar yerel bir spinör tabanıyla ilgili ters metrik bileşenleridir ve 2–biçimliler olarak gösterilirler. Dahası Γ spin bağlantısı yalnızca "$\mathcal{S}$'ye içsel olan spinörler"ine ilişkin değil tüm 4–uzayda tanımlı α^A spinörlerine ilişkin paralel taşımayla da ilgilidir.[9] Böylece Γ bize apresiz bir α^A 4–uzay spinörünün (2–spinör), $\mathcal{S}$ 3–uzayı içerisinde bulunan bir eğri üzerindeki 4–uzay metrik bağlantısına (§§14.2, 8) göre, kendine paralel biçimde nasıl taşınacağını söyler.[10] γ 3–

[9] *Bkz.* Ashtekar, 1986 ve 1987; ayrıca bir yineleme için *bkz.* Ashtekar ve Lewandowski, 2004 ve ders kitabı için *bkz.* Rovelli, 2003.

[10] "İndisler"in nasıl işlediğini anlamak isteyenler öncelikle ters 3–metriğin yükseltilmiş 3–boyutlu indislere sahip bir γ^{rs} niceliği olduğuna dikkat etmelidirler. $\mathcal{S}$ içerisindeki s üzerinde ikili oluşturarak t ve u'da karşı–simetrik olan $\gamma^r{}_{tu}$'yu (bir yoğunluk) elde ederiz. Bu alt indisleri 4–uzaydaki 2–biçimli indisler olarak okuyabiliriz ve bize alt simetrik spinör indisle-

metrik (yoğunluk) niceliklerine ilişkin alan *momentum* değişkenleri kümesi rolünü ve Γ bağlantı nicelikleri alanı ilgili eşlenik *konumlara* ilişkin rolü oynar; *bkz.* Şekil 32.1. Kuantum kuramında, p_a momentumunun x^a gösteriminde (§21.2) $i\hbar\partial/\partial x^a$'yla yer değiştirme biçimine bağlı olarak Γ gösteriminde γ alanlarını ("$\delta/\delta\Gamma$" §20.5'te anılmış olan *fonksiyonel türev* kavramıyla ilgili olmak üzere) $i\hbar\delta/\delta\Gamma$'yla yer değiştirmiş biçimde kabul edebiliriz. Benzer biçimde γ gösteriminde Γ, $i\hbar\delta/\delta\gamma$'yla gösterilir. Γ bağlantısı tam olarak $\mathcal{S}$'nin *içsel* eğriliğiyle ilgili bir Γ_1 kısmına *dışsal* eğrilikle (diğer bir deyişle $\mathcal{S}$'nin $\mathcal{M}$ uzayzamanı içinde nasıl "büküldüğüyle") ilgili bir Γ_2 kısmına sahiptir; *bkz.* Şekil 32.2. Tüm Γ niceliği

$$\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$$

biçiminde ifade edilebilir (formalizme ilişkin ters aynallığı seçmiş olsaydık $\Gamma_1 - i\Gamma_2$'ye sahip olurduk). Γ niceliği, taban uzayı $\mathcal{S}$ ve lif (apresiz) $\mathbb{S}$ (2–boyutlu bir karmaşık vektör uzayı) spin uzayı olmak üzere, (§15.8'deki anlamıyla) bir demet bağlantısı tanımlar. Life ilişkin ilgili grup SL(2,$\mathbb{C}$)'dir (*bkz.* §13.3).[11]

Bu noktada orijinal Ashtekar yaklaşımındaki teknik bir güçlüğe değinmeliyim. Bu, SL(2,$\mathbb{C}$) grubunun tıkız olmaması ve çoğu üniter olmayan (*bkz.* §13.7), istenmeyen sonsuz boyutlu indirgenemez gösterimlere sahip olmasıdır. Tüm bunlar, gerekli kuantum kütleçekim kuramının hassas inşasıyla ilgili ciddi sorunlar yaratır. Buradan hareketle ilerleme kaydedebilmek için, η Barbero–Immirzi parametresi olarak bilinen sıfır olmayan gerçel bir sayı olmak üzere, değiştirilmiş

$$\Gamma_\eta = \Gamma_1 + \eta\Gamma_2$$

bağlantısı kullanılmıştır. Bu, tümüyle teknik bir özellik olan, grubun artık tıkız SU(2) biçiminde olması avantajına sahiptir ve ona ilişkin (indirgenemez) gösterimlerin tümü sonlu boyutlu ve üniterdir. Her bir Γ_η tarafından

---

rinin bir çiftini sağlayan karşı–öz ikili kısmını almak bize P ve Q'da iz serbest olan bir $\gamma^r{}_{PQ}$ niceliğini ya da eşdeğer biçimde $\gamma^r{}_P{}^Q$ niceliğini verir. Γ'yla ilgili olarak bu, zorunlu biçimde iz serbest olan (çünkü bu bir SL(2,$\mathbb{C}$) bağlantısıdır) spin uzayındaki 1–biçimli bir matris olduğundan, bir $\Gamma_r{}^P{}_Q$ niceliğidir. Γ'yla ilgili indis yapısının kanonik değişkenler için, γ'nın, olması gerektiği üzere, tersi olduğuna dikkat edin. Daha fazla ayrıntı için *bkz.* Ashtekar, 1986, 1987; Ashtekar ve Lewandowski, 2004; Rovelli, 2003.

[11] Sen'in 1981'de sunduğu şey, genel göreliliğin kısıtlılıklarını polinom biçimine indirgeyen bu bağlantıdır. Witten'in, genel görelilikteki toplam enerji pozitifliğiyle ilgili kanıtlama işleminde, bağımsız olarak, aynı bağlantıyı (yine 1981'de) kullanmış olması önemlidir; *bkz.* §19.8 ve Witten, 1981. Bildiğim kadarıyla bu bağlantınn ilk kullanımı, burgaç kuramının Ashtekar değişkenleriyle en yakın biçimde ilişkili parçası olan $\mathcal{S}$'ye ilişkin hiper yüzey burgaç uzayının oluşturulması sırasındadır; Penrose ve MacCallum, 1972; Penrose, 1975.

tanımlanan *klasik* kuram Γ'yla tanımlanandan yalnızca "kanonik dönüşüm" olarak adlandırılan şey kadar farklılık gösterir ve bu klasik kuramların faz uzayı (§20.2) üzerindeki farklı, "genellenmiş koordinatlar" tarafından açıklansa da eşdeğer olmaları (aynı simplektik yapıya sahip olmaları; *bkz.* §14.8, §20.4) anlamına gelir. Bununla birlikte sonuçtaki kuantum kuramlarının eşdeğer olması gerekmez. Bu, §21.2'de ortaya konmuş olan konudur: kuantizasyon işlemi normalde, genellenmiş koordinatların değişimi altında değişmez değildir. Γ'nın Γ_η'yla yer değişikliğinin ne kadar "zarar" gerçekleştirebileceği çözümlenmemiş bir konu olarak görünür. Her koşulda, ilk olarak "daha kolay" Γ_η durumu çalışılarak daha fazla şey öğrenilebilir. Sonuçtaki kuantum kütleçekim kuramının, kuantum kütleçekime yönelik niyetlenilen yaklaşım yerine yalnızca ($\pm i$ ya da 0 dışındaki η değerlerinin geometrik gerekçelendirmeden yoksun göründüğü) bir "oyuncak modeli" olduğu konusunda endişelenilebilse de sapmanın Einstein kuramının tasarlanan kuantize versiyonundan büyük olmadığı varsayılır.

Γ_η durumunda hayat oldukça basit hale gelir çünkü SU(2)'ye ilişkin gerekli indirgenemez farklı gösterimler, (görelilikçi olmayan) olağan kuantum mekaniğindeki (kütleli bir parçacığın) farklı *spin* durumlarıyla matematiksel olarak eşdeğerdir. Bu farklı spinlerin, $\frac{1}{2}n\hbar$ spin değeri olmak üzere, $n = 0,1,2,3,4,5,\ldots$, doğal sayılarıyla işaretlendiğini §22.8'den anımsarız. (§22.8'de ayrıca her bir n'ye ilişkin gösterim uzayının n indisli $\psi_{AB\ldots D}$ simetrik spin tensörlerinden oluştuğunu da görmüştük.) Bu farklı "spin değerleri"nin nasıl kullanılması gerektiğini kısa süre içinde göreceğiz.

32.4 Döngü değişkenleri

Şeyleri, genel kovaryansı, $\mathcal{S}$ başlangıç 3–uzayında, daha belirgin hale getiren bir şekilde nasıl açıklarız? Bu, genel kuantum durumumuzu, *temel* kuantum kütleçekim durumlarına ilişkin temel olarak farklı şekilde açıklanabilen ve $\mathcal{S}$ içerisindeki kendisine ilişkin genel kovaryansla çok basit şekilde ilgilenilen özellikle basit bir aile biçiminde açıklayan yaratıcı bir alet yoluyla yapılır. (Bu temel durumlara birazdan geleceğiz.) Böylece *genel* durum doğrusal üst üste binme yoluyla bu genel durumlar biçiminde ifade edilir. Ne gerektiği anlamak için $\mathcal{S}$ içerisindeki kapalı döngüyü ele alın. Zihnimizde, Γ bağlantımızı, bize "kendisine paralel" olan apresiz bir α^A spinörünü böylesi bir döngü etrafındaki tüm yol boyunca taşıma olanağını sağlamak üzere kullanmanın etkisini canlandıralım. Başladığımız yere geri döndüğümüzde $\mathbb{S}$ spin uzayına ilişkin çizgisel bir dönüşümün etkilenmiş olduğunu görürüz. Bu, bileşen biçiminde, karmaşık bir 2×2 $T^A{}_B$ matrisiyle (*bkz.* §13.3), bu matrisin elemanları $\mathcal{S}$ üzerindeki bir taban seçi-

mine bağlı olmak üzere, tanımlanır. Bunula birlikte bu matrise ilişkin $T^A{}_A$ *izi* taban bağımlı karmaşık bir sayıdır,[32.3] öyleyse bu basit olarak, Γ spin bağlantısının, döngü seçimiyle ilişkili olan bir özelliğidir. (Bu, bu fikri ayar kuramlarında ilk olarak kullanan Kenneth Wilson'ın ardından, *Wilson döngüsü* olarak adlandırılan daha genel bir kavrama ilişkin bir örnektir.)[12] Carlo Rovelli, Lee Smolin ve Ted Jacobson bu fikri 1988'de, bu döngü bağımlı izleri genel görelilikle ilgili *döngü değişkenleri* olarak adlandırarak, genel görelilikte geliştirdiler. Bu döngü değişkenlerini kuantum işlemcileri biçiminde kabul ettiğimizde, bu paragrafın başında değinilmiş olan "temel durumlar" esasen tam olarak onların *öz durumları* olur.

Bu temel kuantum kütleçekim durumlarının geometrik niteliği nedir? Tanıdık olduğumuz olağan türdeki metrik geometrisi bakış açısıyla epey olağandışı oldukları ve klasik genel göreliliğin "pürüzsüz geometriler"inden çok uzak oldukları açığa çıkıyor. Aslında bu temel durumların geometrik olarak, §9.7 ve §21.10'da değerlendirdiğimiz (Dirac) *delta fonksiyonlarına* benzer biçimde, oldukça "tekil" olduklarını göreceğiz. İlk olarak S'yi niteliksiz bir manifold biçiminde düşünün.[13] Daha sonra S'deki bir

Şekil 32.3 (a) Koni biçimli 2–yüzeye ilişkin bu pürüzsüz olmayan örnek, eğri δ–fonksiyonlarının bulunduğu, tepe ve taban kenarı etrafı dışındaki her yerde sıfır eğriliğe sahiptir. (Kuantum kütleçekimine Regge analizi yaklaşımı 2–uzay üzerindeki δ–fonksiyon eğriliğine sahip 4–uzayla benzer biçimde işler; *bkz.* Şekil 33.3.) (b) Bununla birlikte döngü kuantum kütleçekimde gerçekleşen şey bu *değil*dir. Burada döngüler üzerinde, metriğin kendisi geri kalan her yerde yok olmak üzere, bir *alan* δ–fonksiyonu mevcuttur.

[32.3] Nedenini açıklayabilir misiniz?

[12] *Bkz.* Wilson, 1976; kuantum kuramındaki bu teknikle ilgili olarak *bkz.* Zee, 2003. Ayrıca *bkz.* Rovelli ve Smolin, 1990.

[13] Bunu belirtebilmek için bile, manifold yapısı yetkili olduğumuzdan daha fazlası tarafından ele alınabilmelidir çünkü bu ona yalnızca bir topoloji sağlamakla kalmaz aynı zamanda türevlenebilirlik ya da "pürüzsüzlük" de sağlar; *bkz.* §10.2 ve §12.3. Ayrıca §33.1'le de karşılaştırın. Aslında teknik uygunluk için, Ashtekar–Lewandowski yaklaşımında S'ye *analitik* bir yapı atanır; Ashtekar ve Lewandowski, 1994. Bu onun, §6.4'teki anlamda, C^ω olması anlamına gelir.

kapalı döngüler ailesini ele alın. Her döngü durumunu, tüm geometrisine bir biçimde döngü üzerinde yoğunlaşmış şekilde sahip olarak düşünmeliyiz. Döngü üzerinde yoğunlaşmış biçimde bulunan şey gerçekte *eğrilik* değildir fakat bunun yerine tüm *metrik* döngü üzerinde bir tür delta fonksiyonunu biçiminde, döngü dışında bütünüyle yok olarak, yoğunlaşmalıdır. Bu durum Şekil 32.3'te gösterilmiş olan düz tabanlı koni geometrisiyle benzerdir. Koni tabanının kenarı boyunca olan eğrilikte ve ayrıca tepede[32.4] bir delta fonksiyonu (§9.7) söz konusudur ve bu tür bir durum kuantum kütleçekime yönelik, Regge analizi olarak bilinen farklı bir yaklaşımdan kaynaklanır; *bkz.* §33.1. Bu yoğunluğun, döngüye atanan bir "spin" değeriyle ölçülen, bu tür farklı $j = 1/2n$ değerleri SU(2)'nin indirgenemeyen farklı gösterimlerine karşılık gelmek üzere, bir "derece"si mevcuttur (bağlantımızla ilgili olarak belirgin biçimde daha "doğru" Γ yerine Γ_η'yı kullanırız).

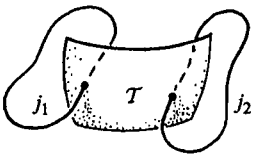
Bu ifadeler daha fazla açıklama gerektirir. Burada ortaya çıkan "metrik" kavramı gerçekten de, döngüyle karşılaşan herhangi bir deneme 2–yüzey elemanına bir *alan* atayan kavramdır. Aslında alan ölçüsünde, ailedeki her döngü üzerinde tümüyle yoğunlaşan bir delta fonksiyonu söz konusudur. Bunun anlamı nedir? $\mathcal{S}$ 3–yüzeyinde bulunan (kapalı olması gerekmeyen) 2–boyutlu bir $\mathcal{T}$ deneme yüzeyi düşünün. Bu, çeşitli döngüleri pek çok yerde kesebilir. $\mathcal{T}$, döngülerden biriyle her karşılaşmasında belirli bir alan ölçüsünü kaydeder; alanı her neyse ona, döngüyle buluştuğu yer *dışında* herhangi bir katkı söz konusu değildir. Böylece metriğe ilişkin "delta fonksiyonu"nun niteliği, her döngünün yalnızca $\mathcal{T}$'nin döngüyü kestiği yerde bir alan ölçüsü ataması gerçeğiyle belirtilir. Her kesişim noktası, $j = \frac{1}{2}n$ belirli döngünün "spin" değeri olmak üzere,

$$8\pi G\eta\hbar\sqrt{j(j+1)}$$

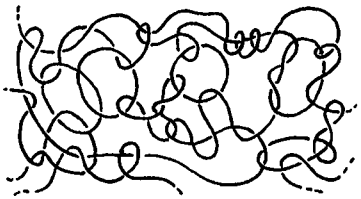
değerini sunar; *bkz.* Şekil 32.4. Ailenin tüm döngülerinden gelen bu alan katkılarını toplarız.

Sicim kuramıyla döngü değişkeni kuramı arasında ilginç bir karşıtlık söz konusudur. Sicim kuramı kuantum kütleçekime yönelik neredeyse tümüyle *tedirgeyici* bir yaklaşımken döngü değişkeni yaklaşımı temel olarak tedirgeyici değildir. Sicim kuramındaki hesaplamalar neredeyse değişmez biçimde *düz* olan bir ardalan uzayzamanında, diğer bir deyişle $\mathbb{M}$ Minkowski uzayının diyelim ki bir Calabi–Yau 6–uzayıyla çarpımı olan uzayzamanda (*bkz.* §31.14) gerçekleştirilir ve yalnızca o ardalandaki zayıf alanlarla ilgilenilir. Fikir bu zayıf alan sınırından "uzağa dalgalanmak"tır

[32.4] Açıklaya bilir misiniz? *İpucu*: §14.5'teki fikirleri kullanın.



Şekil 32.4 $\mathcal{S}$ 3–yüzeyindeki 2–boyutlu bir $\mathcal{T}$ deneme yüzeyi. $\mathcal{T}$'nin bir döngüyle her kesişimi alana ilişkin $8\pi\eta\hbar\sqrt{j(j+1)}$ değerine (j "spin" değeri olmak üzere) katkıda bulunur.



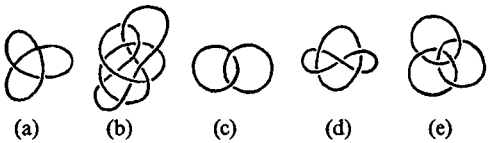
Şekil 32.5 Yaklaşık bir uzayzamana ilişkin döngü değişkeni açıklaması, "örgüler"in neredeyse düzenli bir yayılımına ilişkin bir çakışma biçiminde sunulabilir.

(diğer bir deyişle üslü seriyi daha küçük bir parametre cinsinden düşünmek); *bkz.* §26.10 ve §31.9. Öte taraftan döngü değişkenleri durumunda temel döngü durumları (ya da spin ağı durumları; *bkz.* §32.6), döngüler (ya da spin ağı çizgileri) üzerindeki alan ölçüsünde *delta fonksiyonlarına* sahip olarak, düzlükten (ya da klasikten) oldukça uzaktır. Yaklaşık bir uzayzamana ilişkin döngü değişkeni açıklamasını elde etmek üzere, Şekil 32.5'te gösterildiği gibi, "örgüler"in neredeyse düzenli bir yayılımına benzer bir şeyi ele almamız gerekir.

Bunun oldukça topolojik bir açıklama olduğuna dikkat edin. Bir döngünün diğerine ne kadar "yakın" olduğunun önemi yoktur (çünkü "metrik" kavramı döngünün kendisinden öte bir anlam ifade etmez). Önemli olan şeyler yalnızca, döngüler arasındaki topolojik "bağlanma" ve "düğümlenme" (ya da kesişme) ilişkileriyle onlara atanmış olan farklı "spin" değerleridir. Böylece ($\mathcal{S}$ içerisindeki) genel kovaryansın icabına, yalnızca bu ayrık topolojik tabloyu elimizden kaçırmamak koşuluyla, tümüyle bakılmış olur.

32.5 Düğüm ve bağların matematiği

Kuantum kütleçekimine ilişkin döngü değişkeni tablosu bizi düğümler ve bağların topolojisiyle ilgilenen matematik alanına yöneltir. Bu, kendi bileşenlerinin, temelde sicimin çözümlenen parçaları, sıradan doğasını ele alan şaşırtıcı biçimde çok yönlü bir konudur. Kapalı bir "sicim döngüsü"nün gerçekten *düğümlü* olup olmadığına karar vermek üzere elverişli matematiksel kriterleri kullanmamız gerekir ("düğümlü", olağan Öklitçi bir 3–uzay içinde pürüzsüz hareketlerle döngüyü olağan bir çember haline



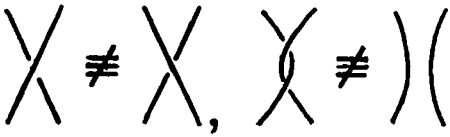
Şekil 32.6 Düğümler ve bağlar. (a) Yonca düğüm; düğümlü bir döngü örneği. (b) Düğümlü olmayan (çıplak gözle belli olmayan) bir döngü örneği. (c) İki döngü arasındaki basit bir bağ. (d) Sıfır "bağlama sayısı"na sahip olsalar da ayrılamayan iki döngünün bulunduğu Whitehead bağı (her birinin bir yüzeyle buluştuğu net sayı diğerini kapsar). (e) Hiçbir çifti bağlanmamış olmasına karşın ayrılamayan Borromean bağı.

deforme etmenin, döngü esnemelerinin birbiri içinden geçişine izin verilmemek üzere, olanaksız olması anlamına gelir; *bkz.* Şekil 32.6). Benzer biçimde, iki ya da daha fazla ayrık döngünün birbirinden, *bağsız* hale gelmek üzere, bütünüyle ayrılıp ayrılamayacağına karar vermekle ilgili kriterler de arayabiliriz. Bu soruya az çok bütünlüklü yanıtlar sağlayan (örneğin "Alexander polinomu" gibi) çeşitli yaratıcı matematiksel ifadeler 20. yüzyılın başlarından beridir biliniyor fakat son yıllarda, esin kaynaklarını büyük ölçüde fizikten alan etkileyici ve daha sadeleştirilmiş bir miktar işlem bulundu. Bunlar, "Jones polinomu", "HOMFLY polinomu", "Kauffmann polinomu", vb gibi isimler aldılar.[14]

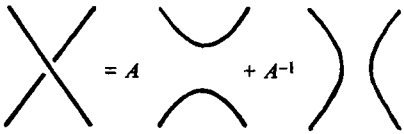
Bu yeni matematiksel yapıları düşünmenin bir yolu onları bir tür "diyagram biçimli cebir"den, bu §12.8'de (*bkz.* şekiller 12.17 ve 12.18) sunulmuş ve 13. bölümde (*bkz.* şekiller 13.16–19, vb) geniş biçimde kullanılmış olan tensör cebirinin diyagram biçimli açıklamasına ilişkin bir genelleme olmak üzere, kaynaklanır biçimde ele almaktır. Bu genellemede bir "indis çizgisi"nin böylesi diğer bir çizginin, bir diyagramda birbirleriyle karşılaştıklarında üstünden ya da altından geçmesi bir farklılık yaratır; *bkz.* Şekil 32.7. Kauffmann cebirini belirlemeye hizmet eden Şekil 32.8'de gösterilmiş olan gibi, cebir üzerinde uygulamaya sokulabilecek çeşitli "cebirsel varlıklar" söz konusudur. Bunlar, kısa süre içinde geleceğimiz *spin ağı* kuramının temelini oluşturan tümleşik düzenlere ilişkin zarif genellemeler sunar.

Şekil 32.8'deki A niceliği karmaşık bir sayıdır ve A bazen bir $q = A^2 = e^{i\pi/r}$ niceliği biçiminde yazılır. ($A = -1$ durumu spin ağı kuramının temelindeki "binor analiz"i verir; Penrose, 1969, 1971.) Şekil 12.17'deki simetrikleştirici ve karşı–simetrikleştiricilerin benzerleri mevcuttur. Böylesi şeylere ilişkin, bazen bir *q–deformeli* yapılar olarak adlandırılan önemli bir kuram geliştirildi. Çoğu kez, oldukça yanıltıcı biçimde "q–deformeli"

[14] Düğüm kuramına oldukça nazik bir başlangıç için *bkz.* Adams, 2000. Daah teknik bir çalışma için *bkz.* Rolfsen, 2004 ve Kauffmann, 2001.



Şekil 32.7 Şekiller 12.17, 12.18 ve 13.6–9, vb'deki türde diyagram biçimli tensör cebiri düğümler ve bağlara ilişkin bir cebir üretmek üzere genellenebilir. Ek bir özellik, bir "indis çizgisi"nin böylesi diğer bir çizgiyle kesiştiğinde üstten ya da alttan geçmesinin artık bir fark oluşturacak olmasıdır.

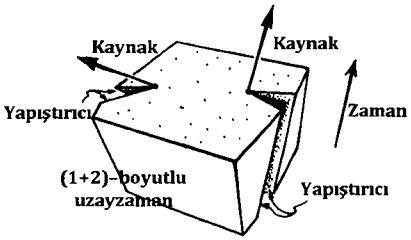


Şekil 32.8 Kauffmann cebiriyle ilgili olarak, spin ağı kuramını temelleyen "binor" cebirinin q–deformeli versiyonunu veren en basit cebirsel özdeşlik, $q = A^2 = e^{i\pi/r}$ olmak üzere, gösterilmektedir. ($A = -1$'dir ve Şekil 32.7'deki kesişme durumları ortaya çıkmaz.)

yerine, örneğin "kuantum grubu" kavramındaki gibi, "kuantum" terimi kullanılır. Bununla birlikte bir "kuantum grubu"yla kuantum kuramı arasında açık herhangi bir ilişki söz konusu değildir ve kuantum gruplarının önemli bir uygulamasının temel düzeydeki fizikte varlığı şu an için, tümüyle olası olsa da, büyük ölçüde varsayımsaldır.

Kenarda bekleyen bir şey olarak, bu yeni bulunmuş matematiksel yapılar (Jones polinomları, vb) ile fizik arasında, özellikle Edward Witten tarafından geliştirilmiş, diğer olası bir bağlantının söz konusu olmasını belirtmeye değer.[15] Bu *topolojik kuantum alan kuramı* kavramıdır. Bu tür bir kuramda alan denklemleri bütünüyle kaybolur fakat evrensel yapıda ve (yerel olarak kaybolan) alanla ilgili "kaynaklar" sağladığı düşünülebilecek "aksaklıklar"da bilgi hâlâ mevcuttur. 1 + 2 boyuttaki genel görelilik iyi bir örnek olabilir. 1 + 2 (= 3) boyutta Weyl tensörü aynı biçimde yok olur, böylece tüm eğrilik Ricci tensöründe bulunur. Bu nedenle "boş uzay"da (Ricci düzlüğü) tüm eğrilik yok olur. Bununla birlikte bir "noktasal kaynağa" ilişkin kütleçekim alanı önemsiz değildir çünkü kaynak evrensel geometride ortaya çıkan bir "aksaklığa" neden olur. Bu, Şekil 32.9'da gösterilmektedir. Geometri, Şekil 28.4'te gösterilmiş olan kozmik bir sicim geometrisiyle, burada tablonun 3–boyutlu bir uzay yerine (1 + 2)–boyutlu bir uzayzamanı göstermesi dışında, oldukça benzerdir. Kaynağın (zaman-

[15] Bir gözden geçirme makalesi olarak *bkz.* Labastida ve Lozano, 1997; orijinal "TQFT" için *bkz.* Witten, 1988.



Şekil 32.9 2+1 boyuttaki "genel görelilik" herhangi bir kaynağın bulunmadığı her yerde (çünkü orada Ricci tensörü yok olur ve 3 boyutta Weyl tensirü her zaman yok olur) düz uzayzaman talep eder. Bununla birlikte kaynak dünya çizgisi düz uzayzamanda, uzamsal 3-geometrisi Şekil 28.4'te ve §28.2'de gösterilmiş olan, "kozmik sicimi" andıran bir "aksaklık" (koni biçimli tekillik) sunar. Kaynak dünya çizgileri, klasik biçimde, her zaman düzdür fakat bu durum, bu kuramın –topolojik kuantum alan kuramının bir örneği olan– kuantum versiyonunda esnetilir.

sal) dünya çizgisi üzerindeki eksen doğrultusunda bir kesit çıkarılır ve sonuçtaki iki düzlemsel sınır birbirine yapıştırılır. Klasik tabloda böylesi kaynakların dünya çizgileri düz olmak zorundadır fakat bu klasik modele dayanan bir QFT, alan (burada eğrilik alanı) yok olduğundan *topolojik* bir QFT, eğri ve esasen düğümlü ya da bağlı kaynak çizgilerine izin verir. Topolojik QFT fikrini kullanarak düğüm ve bağların matematiğiyle ilgili kavrayış edinimine izin veren şey budur.[16] Alan ölçüsüne katkı, döngülerin kendisi olan "aksaklıklar" dışında yok olduğundan, döngü değişkenlerinin, "topolojik QFT" genel düzenine bir biçimde benzeyen bir sistem sağladığı fark edilecektir. Yine de bir fark söz konusudur çünkü alan denklemleri döngü değişkenleriyle birlikte ortadan kaybolmaz.

Topolojik QFT'ler matematiksel yapılar olarak ilginçtir fakat onları ciddi fiziki kuramlara ilişkin modeller biçiminde roller oynarken görmek, alan denklemlerinin tümüyle yok olmaları nedeniyle güçtür. Bilinen fiziğin büyük kısmı böylesi denklemlerin, alanların geleceğe kontrollü biçimde yayılabilmeleri için önemsiz olmayışına dayanır. Bununla birlikte topolojik QFT fikirlerinin *burgaç kuramı*yla birleşik halde kullanılabileceğine ilişkin belirgin diğer bir olasılık da söz konusudur. 33. bölümde göreceğimiz üzere (§33.11'in sonunda), burgaç uzayı açıklamasında alanlar yerel olarak kaybolmaz. Topolojik QFT fikirlerinin burgaç kuramına uygulanması şimdiye dek pek de ilerletilmedi[17] fakat bu alanda neler gerçekleşebileceğini görmek ilginç olurdu.

---

[16] Bununla birlikte topolojik QFT'ler, hırçın biçimli ıraksamalar nedeniyle, dolaysız olarak hassas matematiksel teoremler sonucunu vermez.

[17] *Bkz.* Penrose, 1988.

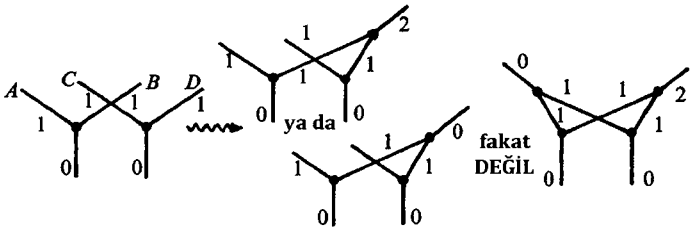
32.6 Spin ağları

3–geometrideki sınırlayıcı düzenlemeler ("δ–fonksiyonu") kadar dikkat çekici olan döngü durumları hâlâ bu geometriye uygun (ortonormal) bir *taban* sunmaz. Bunun için, içerisinde döngülerin kesişebildiği bir genellemeye geçmek gereklidir. Bu bizi bir tür "kesişen döngü çizgileri" ağını ele almaya yöneltir fakat şunu sormamız gerekir: bu kesişim noktalarında ne yapmalıyız? Yanıtın biçimsel olarak, farklı fakat ilişkili bir amaçla yaklaşık 50 yıl önce çalışmış olduğum *spin ağlarına* oldukça yakın belirli türde bir yapıda bulunduğu açığa çıkar.

Spin ağları nedir ve onlarla 1950'lerde niçin ilgilenmiştim? Kendi özel amacım, fiziği ayrık tümleşik nicelikler biçiminde açıklamaya çalışmaktı çünkü o zamanlar oldukça güçlü biçimde, fizik ve uzayzaman yapısının köken olarak süreklilik yerine *ayrıklığa* dayanması gerektiği (*bkz.* §3.3) bakış açısına sahiptim. Eşlik eden bir güdü, kendisi yoluyla uzay kavramının kendisinin düzende başlangıç olarak var olan değil fakat *türetilmiş* bir kavram olduğu *Mach ilkesi*'nin[18] (§28.15) bir biçimiydi. Her şey nesneler arasındaki *ilişki* biçiminde açıklanmalıydı, bir nesne ve herhangi bir ardalan arasındakiyle değil.

Bu gerekliliklerı sağlamanın en iyi yolunun bir sisteme ilişkin kuantum mekaniksel *toplam spin* durumunu ele almak olduğu sonucuna ulaşmıştım. "Toplam spin", bir yöndeki spinin belirli bir bileşenini ölçen m niceliği yerine spin miktarını bir bütün olarak ölçen skaler j $(= 1/2n)$ niceliğiyle tanımlanır. ("j" ve "m" harfleri, $\hbar$'li birimlerde alınan, genellikle kuantum mekaniksel açısal momentum tartışmasında kullanılanlardır. m, tamsayı basamakları biçiminde, $-j$ ve j tamsayı ya da yarı tamsayıları aralığındadır; *bkz.* §§22.8, 10, 11.) Toplam spinin (üç dik yöndeki m değerlerinin kareleri toplamının karekökü biçiminde elde edilen) *gerçek* değeri, üstteki alan ifadesinde görünenle aynı nicelik olan $\hbar\sqrt{j(j+1)}$'dir. $n = 2j$'yle ilgili olarak izin verilen değerler basit şekilde doğal sayılardır bozonlar için çift fermiyonlar için tek sayılar; *bkz.* §23.7). Dahası, yön bağımsız olsa da, n yine de uzayın yönle ilgili görünümleriyle yakın biçimde *ilişkili*dir. n doğal sayısıyla ölçülen toplam spin, derme çatma bir şeyden gerçek fiziki uzay kavramına yönlendiren ayrık bir tümleşik yapı inşa edilmek istendiğinde ilginin odaklanacağı mükemmel bir nicelik olarak görünmüştü. Daha başka bir bileşen olarak, şeyler doğru biçimde düzenlenirse, kuantum mekaniksel olasılıklar, fiziki bir düzeneğin farklı parça-

[18] Mach ilkesine olan ilgim güçlü biçimde meslektaşım, arkadaşım ve danışmanım Dennis Sciama sayesinde uyarıldı.



Şekil 32.10 Spin ağları. Bir n doğal sayısıyla işaretlenmiş her doğru parçası $\frac{n}{2}\times\hbar$ toplam spinle ilgili, n–birim olarak adlandırılan bir parçacık ya da alt sistemi gösterir. Bu oldukça basit örnekte, her biri 0–birim durumundan başlayan iki EPR–Bohm 1–birim çiftine, (A,B) ve (C,D), sahibiz (Şekil 23.2'deki gibi). B ve C tek bir birim oluşturmak üzere bir araya gelirse iki olasılık söz konusu olur: o ya bir 0–birim ya da 2–birimdir ve olasılık değerleri sırasıyla 1/4 ve 3/4'tür. Alternatif olarak A ve D'yi bir araya getirirsek aynı olasılıklar ortaya çıkar. Bununla birlikte bu olasılıklar, bir durumda 0–birime ve diğerinde 2–birime sahip olamayacağımız için bağımsız değildir.

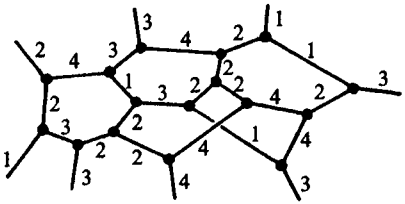
larının diğer parçalara göre yönlendirildiği biçimin ayrıntısına bağlı olarak değil, *saf olasılıklar* biçiminde gösterilebilir.

Bu nasıl işler? $\frac{1}{2}n\hbar$ toplam spin niceliğine bir *n–birim* diyelim. Açık olması için bu "birim"i bir parçacık olarak düşünebiliriz fakat temel bir parçacık olması gerekmez. Örneğin bir hidrojen atomu bütünü mükemmel şekilde iyi iş görür. Yalnızca toplam spiniyle ilgili (bir hidrojen atomu durumunda, sırasıyla orto– ve para– hidrojen durumlarında $n = 0$ ya da 2'yle verilen)[19] iyi tanımlı bir değere sahip olması gerekir. Saf bir olasılığı nasıl elde ederiz? Örneğin, her biri 0–birimli durumdan başlayan bir çift (A,B) ve (C,D) EPR–Bohm 1–birimli çiftlerini alabiliriz. (Bu yalnızca, her biri §23.4'teki Şekil 23.3'e benzeyen bir düzenleme çiftidir; *bkz.* Şekil 32.10.) Şu halde B ve C'yi bir araya getirir ve tek bir birimde birleşmelerine olanak tanırsak, 0–birimli ya da 2–birimli bir sonuç elde edebiliriz ve buna ilişkin olasılıklar sırasıyla $\frac{1}{4}$ ve $\frac{3}{4}$ olur.[32.5] Alternatif olarak A ve D'yi bir araya getirirsek olası sonuçlar ve olasılıklar tümüyle aynı olur. Bununla birlikte bu iki olasılık, bir durumda 0–birim alırsak diğer durumda 2–birim elde edemeyeceğimiz, ya da tam tersi olamayacağı için, birbirinden bağımsız olmaktan uzaktır.

Saf olasılıklara ilişkin elde ettiğim fikir türü buydu ve böylesi herhangi bir olasılığın rasyonel bir sayı olarak ortaya çıkması gerektiği (çünkü bu Doğanın sonlu bir sayıdaki ayrık olasılıklar arasında bir tür rasgele seçim yapması anlamına gelir) fikrini oluşturmuştum. Üstte ele alınmış

[19] *Bkz.* Levitt, 2001.

[32.5] Nedenini görebiliyor musunuz?



Şekil 32.11 Başlangıçta tasarlanmış haliyle bir spin ağı örneği. Gerçek hiçbir ardalan uzayzaman manifoldu önden varsayılmamıştır. Uzamsal tüm kavramlar spinlerin ağından ve (iki birim bir üçüncüyü oluşturmak üzere bir araya geldiği zamanki) olasılık değerlerinden kaynaklanır. Her köşede, bağlantıyı eşsiz biçimde belirtecek şekilde tam olarak üç çizgi birleşir.

olan örnek oldukça basit olmasına rağmen genel fikri göstermeye başlar. Belirli bir spin ağında bulunan tüm birimler (bu normalde diyagramda açık biçimde ifade edilmese de) ilk olarak başlangıç 0–birimlerinden üstteki biçimde üretilmiş olarak düşünülür, böylece herhangi uzamsal bir yönle ilgili hiçbir sapma söz konusu değildir. Daha sonra çeşitli birim çiftleri tekil birimler oluşturmak üzere bir araya getirilebilir ve sonuçtaki birimlerle ilgili spin değerleri kaydedilir. Ayrıca tekil birimlerin de birim çiftlerine ayrılmalarına olanak tanınır. Şekil 32.11'de bir örnek gösterilmektedir. Tüm bunları bir uzayzamanda meydana gelir biçimde hayal etmeyi seçebiliriz. Bununla birlikte orijinal spin ağı kuramı için önceden varsayılan gerçek hiçbir ardalan uzayzamanı olmamalıydı. Fikir, gerekli uzamsal kavramların tümünü basit biçimde spinlere ait ağdan ve iki birim bir üçüncüsünü elde etmek üzere bir araya getirildiğinde ortaya çıkan olasılıklardan (bunlar kuantum mekaniksel kurallar kullanılarak hesaplanabilir) inşa etmekti. Spin ağlarına ilişkin belirli bir özellik, her köşe noktasında tam olarak üç çizginin bir araya gelmesidir. Bu, olasılık hesaplamalarında bir benzersizliğe yol açar. Gerekli olan tüm şey, çizgiler üzerindeki spin sayılarının tümünün belirtilmesiyle birlikte spin ağlarına ilişkin topolojik (grafik) yapıdır.

Gerekli (esasen tümü rasyonel *olan*) olasılıkları hesaplamak üzere bütünüyle tümleşik bir işlem ("sayma") geliştirdim. Kurallar orijinal olarak spine ilişkin standart kuantum mekaniğinden gelir fakat daha sonra bunların nereden geldiğini "unutabilir" ve spin ağı sistemini basit biçimde bir tür "tümleşik evren" sağlar şekilde düşünebiliriz. Böylece geometri kavramlarını (bu durumda olağan Öklitçi 3–geometri), uygun bir anlamda "geniş" olan spin ağlarını ele alarak çıkarmak olası olur. Tablo, geniş bir spin biriminin (örneğin bir tenis topunun spin eksenine benzer biçimde düşünülen) "uzaydaki bir yön"ü tanımlar biçimde ele alınabilmesidir. Bu tür iki geniş birimle ilgili "döndürme eksenleri arasındaki açı"yı, diyelim ki, birinden bir 1–birim çıkarıp diğerine eklemek yoluyla ölçmeyi hayal edebili-

riz. Bu işlemde, bir spin yukarı giderken diğerinin aşağı gittiği bağlı olasılık spin eksenleri arasındaki *açının* bir ölçüsünü verir.[32.6]

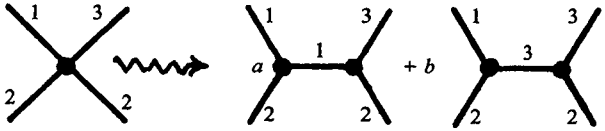
Şu haliyle bu hemen hemen çalışır fakat tam olarak değil; ek bir bileşen daha gereklidir. Ek olarak gereken şey, geniş birimler arasındaki spin eksenleri açısından kaynaklanan "kuantum olasılığı"nı, basit olarak geniş iki birim arasındaki bağlantısızlık nedeniyle ortaya çıkabilecek "habersizlik olasılığı"ndan ayırt etmenin bir aracıdır. (Bu iki olasılık kavramı arasında, §§29.3, 4'te tartışıldığı üzere, yoğunluk matrislerinden kaynaklanan incelikli etkileşimi anımsayın.) Bu "habersizlik faktörü"nün bir 1–birimin geniş bir birimden diğerine aktarımı yinelenip yalnızca olasılıkların ikinci seferde de aynı olduğu durumları seçerek giderilebileceği açığa çıkar. Durumun bu olduğu geniş birimli aileler için, kuantum olasılıkları tarafından bu biçimde tanımlanan "açı geometrisi"nin kesin biçimde olağan Öklitçi 3–uzaydaki yönler arasındaki açıların geometrisi olduğu bir geometri kuramı kanıtlanabilir.[20] Bu yolla, olağan Öklitçi geometriye ilişkin kavramların yalnızca spin ağlarıyla ilgili kuantum tümleşiklerinden kaynaklandığı görülür.

Başlangıçta sahip olduğum spin ağlarının ardındaki temel güdünün, orijinal olarak ortaya konmuş olan haliyle spin ağlarında kütleçekime ait gerçek herhangi bir yer bulunmamak üzere, uzayzaman kuantizasyonuna yönelik döngü değişkeni yaklaşımının temelinde yatandan oldukça farklı olduğu görülecektir. Bu durumda, spin ağlarının kuantum kütleçekim kuramına yönelik bu yaklaşımda böylesi önemli bir rol oynadığını görmek benim için önemli bir sürprizdi. Elbette, iki program arasında epeyce ortak bir şey söz konusudur çünkü her durumda uzay kavramı daha ayrık ve kuantum mekaniksel bir şe ye parçalanmaya çalışılır. Bununla birlikte, döngü değişkeni kapsamında n niceliğinin orijinal spin ağlarındaki spin ölçüsü olmak yerine gerçekten bir *alan* ölçüsü olması önemli bir farklılıktır. Bunlar, döngü değişkeni ifadesindeki G kütleçekim sabitinin görünmesinde yansıtıldığı üzere, boyutsal olarak farklıdır. Bu konuya ve olası önemine kısa süre içinde geleceğim.

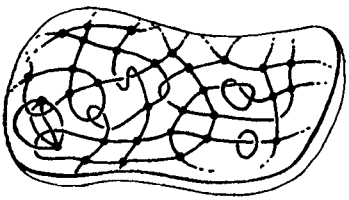
Spin ağları kuantum kütleçekim döngü değişkeninde nasıl bir rol oynamalıdır? Daha önce belirttiğim üzere, spin ağı düğümleri esasen bir döngü çiftinin kesişimi sonucu ortaya çıkmalıdır. Bu ayrıca döngü üzerindeki j değerinin böylesi bir yerde değişmesine de olanak sağlar. Buradan hareketle, benim orijinal spin ağlarım için ortaya çıkan üç yerine *dört* (ya da daha fazla) çizginin bir araya geldiği düğümlere sahip olacağız. Bu, yo-

[32.6] Olasılıklar biçimindeki açı ölçüsü nedir?

[20] *Bkz.* Penrose, 1971a, 1971b.



Şekil 32.12 Döngü değişkeni kuramındaki spin ağlarının tüm düğümleri 4–değerlidir (ya da daha fazla) ve ek "birbirine geçme" bilgisine gerek duyar. Bu, H"–tipi 3–kenarlı köşe çiftlerinin çizgisel bir birleşimi olarak ifade edilmek üzere "X"–tipi tepe biçiminde şifrelenebilir. Özel katsayılar bu belirsizliği ortadan kaldırır.



Şekil 32.13 Standart döngü değişimi yaklaşımına ilişkin spin ağları artık gövdeden bütünüyle ayrılmış tümleşik nesneler değildir fakat topolojik bağlama ve düğümleme özellikleri önemli olmak üzere, yapısız (fakat belki de analitik) bir 3–yüzeye (S gibi) gömülmek zorundadır.

rumlama benzersizliği yalnızca orijinal "üçlü" düğümlerde ortaya çıktığından, anlam bulanıklıkları sonucunu verir. Bu nedenle her düğümde ek bir belirleme ("birbirine geçme işlemcisi") gerekli olur. Bu belirlemeyi ifade etmenin bir yolu, dört çizginin bir araya geldiği bu tür bir "X"i "H"–tipi 3–kenarlı köşe çiftlerinin doğrusal bir birleşimi olarak temsil edebildiğimiz Şekil 32.12'de gösterilmektedir. Katsayıları belirtmek bulanıklıkları ortadan kaldırır.

Bu döngü değişkeni spin ağlarıyla benim daha önce ortaya koyduğum arasında görece daha önemli başka bir farklılık söz konusudur. Daha öncekiler bütünüyle tümleşik yapılarken döngü değişkeni ağları S manifolduna yerleştirilmiş olmaları durumundan ek topolojik yapı edinirler. Ağ çizgileri, örneğin, düğümlüdür ya da birbirlerine çeşitli biçimlerde bağlanabilirler ve bu durum ek bilgi sağlar (*bkz.* Şekil 32.13). Bununla birlikte bu bilgi, tümüyle topolojik bir nitelikte olmak üzere, hâlâ ayrık bir tümleşik doğaya sahiptir fakat bu, tekil düğümlerde olmakta olanı basit biçimde belirtmekten daha güçtür.

Döngü açıklamalarımız şimdiye dek bize esasen, etkin biçimde, dinamik dahil olmaksızın yalnızca *statik* bir açıklama sundu. Aslında, ele alageldiğimiz döngüler ve spin ağlarıyla, Einstein'ın genel kovaryans ilkesine tam anlamıyla dikkat ederken, genel göreliliğe ilişkin *kısıtlayıcı* denklemlerin çözümü –diğer bir deyişle S yüzeyi içerisinde sağlanması gereken koşullar– yoluyla ilgilenildi. Bu basit bir başarı değildir fakat formalizmin henüz, Einstein denklemini tümüyle bağdaştırılabilmek üzere, daha zor olan S'den ayrı (bazen "Hamilton kısıtlaması" olarak anılan) dinamik ev-

rim sorununu çözmediği görülür (*bkz.* §32.1). Thomas Thiemann'ın önemli bir çalışması bu Hamilton evrim sorununa olası bir yanıt sundu fakat bunun Einstein kuramıyla ilgili olarak gerçekten uygun olan yanıt olup olmadığı konusunda bir şüphe söz konusudur.[21]

Bu zorlu dinamik konulara yönelik tümüyle kabul gören bir çözüm beklerken döngü değişkeni formalizmini farklı yönlerde etkileyici bazı sonuçlar elde etmek üzere kullanmak yine de olanaklı oldu. Özellikle, bu spin ağ fikri kara delik entropisi konusuna yönelik olarak çok daha dolaysız ve gerçekçi görünen bir yaklaşım sağlamakta, §31.15'te değinilen sicim kuramından daha faydalı oldu. Burada kara delik geometrisi dolaysız biçimde, 4–boyutlu Einstein kuramına ilişkin bir Schwarzschild ya da Kerr çözümüne ilişkin geometridir. Kütleçekimle ilgili kuantum durumlarının sayımı uygun yaklaşıklık tahminlerinin yapıldığı spin ağları kullanılarak açık biçimde gerçekleştirilebilir. Kara delik makul biçimde genişlemeye başladığında, entropiyle ilgili yanıt ($k = c = G = h = 1$ olmak üzere) $S_{BH} = \frac{1}{4}A$ Bekenstein–Hawking denklemiyle uyum içinde ortaya çıkar fakat Hawking'in kesin $\frac{1}{4}$ katsayısını elde etmek üzere Barbero–Immirzi parametresine ilişkin tuhaf

$$\eta = \frac{\log 2}{\pi\sqrt{3}}$$

değerinin alınması gerekir. Kesinlikle tuhaf görünmesine rağmen, bu belirli seçim sonrasında, diğer biçimlerde açık bir yanıtın sağlandığı ve yük, döndürme ve kozmolojik sabitin söz konusu olabileceği tüm durumlar için, Bekenstein–Hawking entropisini doğru biçimde verir.[22]

Bununla bağlantılı olarak kuramın dayanır göründüğü çeşitli belirgin sayısal "rastlantılar" söz konusudur. Oldukça farklı iki ayrı biçimde hesaplanmış iki ayrı sonsuz dizi, terim terim uyuşmak zorundadır; esasen de uyuşur. Bu, kuantum geometrisine ilişkin fikirlerden bazılarına ilişkin derin bir iç tutarlılığı yansıtır görünür.

Yine de kara delik sonuçları, Barbero–Immirzi parametresiyle ilgili bakış açısındaki bir değişimi ortaya çıkarmış görünür. Daha önceden, η'nın sunumu, "geometrik olarak doğru" kuram $\eta = \pm$i'yi talep eder görünmek üzere, yalnızca ilerleme kaydetmekle ilgili bir araç olarak görülmüştü, η'yla ilgili gerçel bir değer almak yalnızca, tıkız olmayan SL(2, $\mathbb{C}$) yerine tıkız SU(2) grubunun ortaya çaıkacağı biçimde matematiksel bir tutarlılıktır. Çok genişçe bir ufuk sınıfıyla ilgili doğru entropi değerlerini elde et-

[21] *Bkz.* Thiemann, 1996, 1998a, 1998b, 1998c, 2001.

[22] *Bkz.* Ashtekar vd., 1998; Ashtekar vd., 2000.

mekteki etkileyici başarılar döngü değişkeni yaklaşımının belirli sayıda destekçisini, bu değerin sonuçta belki de kuantum kütleçekimle ilgili olarak gerçekten de "doğru" değer olduğuna ilişkin görüşe yöneltti.

Bu, böylesi bir seçimle ilgili herhangi bir açık geometrik sebep yokmuş gibi göründüğü için kişisel olarak onu inanılması zor bir şey gibi görsem de, elbette bir olasılıktır. η'yla ilgili, örneğin bunun gibi herhangi gerçel bir değerle birlikte, §32.3'te konuyu sunmak üzere vurguladığım kurama ilişkin *aynal* görünümün ortadan kaybolduğu yorumunda bulunmalıyım. Gerçel bir η değerine sahip Γ_η'nın ilgilendiği spinör aktarımı alışılmadık fakat sol ve sağ–elli kısımların, anlamını özellikle belirsiz bulduğum çift–elli karışımıdır. Belki de gelecekteki çalışmalar bu konuya ışık tutacaktır.

32.7 Döngü kuantum kütleçekim konumu?

Kuantum kütleçekimine yönelik Ashtekar–Rovelli–Smolin döngü değişkeni yaklaşımının başarıları ve tam gelişmiş bir gelecek kuramına dönüşme potansiyeliyle ilgili değerlendirmemi vermeyi denemeliyim. Yine okuyucuyu, böylesi herhangi bir değerlendirmeyle ilgili olabilecek olası bir sapmaya karşı uyarmalıyım. Bu duruma ilişkin olarak yalnızca bu programdan sorumlu insanların tümü çok yakın arkadaşlarım olduğu için değil fakat aynı zamanda bu konuyla ilgili temel gelişmelerin gerçekleştiği iki ABD üniversitesine (Syracuse ve Penn State) düzenli ziyaretler gerçekleştirdiğim için de bir çıkar beyanında bulunmak zorundayım. Bunun için kendi çıkarımı da spin ağı kuramına eklemek zorundayım; bu eski fikirlerin artık bu yaklaşımla önemli bir değer kazanmasını memnuniyet verici bulmam doğaldır. Yine de, Ashtekar değişkeni/döngü değişkeni kuantum kütleçekim programıyla kendi ilişkim bu alandaki temel çalışmayla bir biçimde teğet halinde oldu, böylece kenara çekilip makul biçimde nesnel olabilmeyi umut ediyorum.

Başlamak gerekirse, hem orijinal Ashtekar değişkenleri hem de döngü değişkenleri biçimindeki sonraki açıklamaların beni, bir kuantum kütleçekim kuramı arayışındaki güçlü ve son derece orijinal gelişmeler olarak etkilediğini belirtmeliyim. Bunlar, Einstein'ın gerçek genel göreliliğine QFT bağlamında, eldeki sorunla ilgili son derece yaratıcı fikirler sağlayarak dolaysız biçimde yönelirler. Aslında bu gelişmelerin kuantum kütleçekime yönelik kanonik yaklaşımdaki, konunun kendisi Dirac ve diğerleri tarafından kabaca yarım yüzyıl kadar önce başlatıldığından beri ortaya çıkan en önemli gelişmeler olduğunu söylemekte çok az tereddüte sahibim. Döngü durumlarının, genel kovaryans tarafından ortaya konan sorunların en

azından bazılarına yöneldiği görülür. Dahası bu gelişmelerin tartışmayı, uzayzaman yapısındaki ayrıklığa ilişkin memnuniyet verici bazı elemanların ortaya çıkmaya başladığı, büyüleyici ve belki de hiç de beklenmeyen bir yönde ilerlettikleri görülür. Ayrıca yeni çalışmalarda, tümüyle kütleçekimle ilgili orijinal kuram, tek başına kütleçekim dışındaki diğer fiziki etkileşimleri de dahil etme yönünde ilerledi; böylece kuram artık genel olarak temel fiziğe yönelik bir yaklaşım olma iddiasında bulunabilir.[23]

Bunun karşısında, kuramın kendisini görünüşteki "geometrik olarak doğru" Γ yerine (belirsiz bir η değerine sahip) Γ_η bağlantısını zorunlu biçimde benimsemeye saptırılmış halde bulmuş görünmesi rahatsız edici gerçeği durur. Bana göre bu yaklaşımda, kuantum kütleçekime yönelik tam olarak inanılan bir yaklaşım, orijinal Γ'nın benimsenmesinden kaynaklanır görünen güçlüklerin üstesinden gelmeye ilişkin bir yol bulunmadan ortaya çıkmayacak. Dahası, kısıtlayıcı denklemlerle spin ağları yoluyla başa çıkıldıysa da, bütünlüklü Einstein Hamiltonının döngü değişkeni çerçevesi içinde yine de açık biçimde kuşatılmak zorunda oluşuyla ilgili temel güçlük hâlâ mevcuttur.

Bu güçlüklerin, Ashtekar/döngü değişkeni kuramının (bana göre) daha az tatmin edici bir görünümüyle ilişkili olması beni olasılıkla etkiler. Kuantum kütleçekimine yönelik diğer tüm *kanonik* yaklaşımlarla ortak biçimde, formülasyonu, daha evrensel bir uzayzaman yerine dolaysız biçimde bir 3–uzay (diğer bir deyişle $\mathcal{S}$ biçiminde) açıklamasına bağlıdır. Gördüğümüz üzere, döngü/spin ağı durumlarında "genel kovaryans" sorununun 3–uzay kısmıyla güzelce ilgilenilir fakat bunun bütünlüklü bir 4–uzay genel kovaryansına genişlemesi bütün olarak sorunlarla dolu bir "Pandora kutusu" getirir. Anlayabildiğim kadarıyla şimdiye dek bunlara, döngü değişkeni yaklaşımında diğer kanonik yaklaşımlardan daha iyi biçimde yönelinmedi.[24]

Zorluk, zaman evriminin genel olarak kovaryant bir 4–uzay formalizminde, Einstein denklemi uyarınca, uygun biçimde nasıl ifade edileceği konusuyla ilgilidir. Kuantum kütleçekimindeki "zaman sorunu" (ya da bazen "donmuş zaman" sorunu) olarak bilinen şeyle ilişkilidir. Genel görelilikte zaman evrimi tek başına bir koordinat değişiminden (diğer bir deyişle bir koordinatı yalnızca bir diğeriyle değiştirmekten) ayırt edilemez. Genel olarak kovaryant bir formalizm tek başına bir koordinat değişimine

---

[23] *Bkz.* Thiemann, 1998c.

[24] *Bkz.* Hawking ve Hartle, 1983 ve notlar 32.3–5. Bu kaynakların çoğunun alındığı Smolin'e, 2003 ve Ashtekar ve Lewandowski'ye, 2004 başvurmaya direnemem. Abhay Ashtekar'a, bu bölümdeki kaynaklarla ilgili yardımı için derin teşekkürlerimi borçluyum.

kör olmalıdır, bu durumda zaman evrimi kavramı derin biçimde sorunlu hale gelir. Bu sorunla ilgili kendi bakış açım, §30.11'de belirtildiği üzere, konunun, **R** durum vektörü indirgenmesi sorununa tatmin edici biçimde yönelinmeksizin çözülmesinin olanaklı olmayacağı ve bunun da genel ilkelerde sert bir gözden geçirme gerektireceğidir.

Bu konularla ilişkili biçimde, özellikle döngü değişkeni yaklaşımı yerine genel olarak *kendiliğinden* kovaryant reçetelere sahip bir sorun olsa da, daha az tatmin edici bulduğum bir başka konu mevcuttur. Bir anlamda bu yaklaşım kendi başarısının kurbanıdır! Çünkü spin ağı tabanlı durumlar bireysel olarak hoşa giden bir koordinat bağımsız geometrik açıklamaya sahip olsalar da, böylesi taban durumlarına ilişkin kuantum *üst üste binmeleri*nin nasıl yorumlanacağı çok belirsizdir. Genel kovaryans nedeniyle bir spin ağının konumuyla kendisiyle üst üste bindirilmesi gereken diğerininki arasında hiçbir uygunluk söz konusu değildir. (Bu, §30.1'de, kütleçekimle ilgili **OR**'yi gerekçelendirmek üzere kullandığım konunun çok daha ciddi bir versiyonudur.) Tüm bunlardan neredeyse klasik bir dünyanın ortaya çıkmasını anlamamız nasıl beklenebilir?

Şu an itibariyle okuyucunun, özellikle 30. bölümdeki tartışmadan, kavramış olacağı üzere, doğru bir kuantum kütleçekim birliğinin gerekli bir özelliği olarak onun standart kuantum mekaniğinden temel bir biçimde, **R**'nin gerçekçi bir fiziki işlem (**OR**) haline geleceği şekilde, ayrılmak zorunda olduğunu düşünüyorum. Döngü değişkeni yaklaşımında buna ilişkin alan mevcut mudur? Olasılıkla evet. Döngü değişkenleriyle, spin ağı kenarlarındaki $n = 2j$ sayıları Planck uzunluk karesi birimleri cinsinden *alan*a aittir; fakat kendi orijnal spin ağları kullanımım, n spin sayıları *açısal momentum*a ait olmak üzere, ne böylesi metrik konularına ne de esasen kütleçekime ilişkin herhangi bir görünüme yöneldi. Bununla birlikte kendi orijinal fikirlerim bu sayılarının her birinin aslında, olasılıklar iki birimi bir üçüncüsünü elde etmek üzere bir araya getirerek ortaya çıkmak üzere, toplam spin değerine ilişkin tekil bir ölçümün (**R**'nin her bir kenardaki eylemi) sonucu olma zorunluluğunu talep ediyordu. **R** nesnel bir kütleçekim olgusuysa bu durumda kütleçekimle ilgili işlemlerle ilişkilerin, 30. bölümün mesajında ileri sürüldüğü gibi, bu aşamada dahil olması gerekir. Bu durumda kütleçekimi, spin ağı kuramına ilişkin olasılık konularından ayırmak olanaklı değildir. Döngü değişkeni ve spin ağı fikirlerinin bütünlüklü birleşimi, durum indirgemesini formalizme dahil etmeye gerek duyabilir. Durumun bu olduğu kanıtlanırsa, böylece bu, 30. bölümde önerildiği üzere, uygun bir kütleçekimle ilgili **OR** düzenine yönelmeyi sağlayabilir. Bununla birlikte böylesi bir formalizm yokluğunda bu tür fikirler kurgu olarak kalmak zorundadır.

Son olarak, döngü değişkeni kuramıyla ilgili diğer çalışma üzerine de yorumda bulunmalıyım. Bu, artık bu formalizmde[25] elektromanyetizma ele alınıyor olmak üzere,[26] tümüyle saf bir kütleçekim kuramı değildir. Döngü kuantum kütleçekime ilişkin spin ağlarını daha fazla "4–boyutlu" hale getirmenin önceki paragraftan, görünüşte daha az radikal biçimleri de mevcuttur. Bunlardan biri, spin ağlarının, *spin köpükleri* olarak adlandırılan yüksek boyutlu yaratıcı bir versiyonunu içerir. Bunlarda, $n = 2j$ "spin değerleri"ni taşıyan 2–yüzeyler mevcuttur. Bu tür bir spin köpüğünü zamanla evrimleşen bir spin ağı biçiminde resmedebiliriz. Louis Crane, John Barrett ve diğerleri[27] tarafından oluşturulan bu tür fikirler çeşitli başkaları tarafından daha da geliştirilip değiştirilmiştir[28] fakat kuantum kütleçekim fikirleriyle ilgili uygun bağlantılar şimdiye dek tümüyle çözümlenmemiştir. Bir sonraki bölümde, esasen burgaç kuramında içerilmiş olan temel kavramlardan bazılarına göz atacağız.

Bu kitabın bir yerlerinde ve özel olarak 30. bölümde, kuantum durum indirgeme konusunun zaman tersinme etkisi altındaki uzayzaman tekilliklerinin yapısı ve asimetrileriyle yakından ilişkili olduğunu vurgulamaya çalışmıştım. Döngü değişkeni yaklaşımının uzayzaman tekillikleriyle ilgili kuantum kuramının etkisi üzerine söyleyecek nesi olduğunu araştırmaya esasen bir giriş yapılmış olması ilginçtir.[29] Bu çalışmanın ayrıntıları hakkında, gerekli zaman asimetrisinin ortaya çıkmasına ilişkin hiçbir ipucu görmediğimi söylemek dışında yorum yapamam.

---

[25] *Bkz.* Varadarajan, 2001.

[26] Varadarajan, 2000.

[27] *Bkz.* Baez, 1998, 2000; Reisenberger, 1997, 1999); Reisenberger ve Rovelli, 2001, 2002; Barrett ve Crane, 1998; Reisenberger, 1999; Perez, 2003.

[28] *Bkz.* not 32.27'deki kaynaklar ve Perez, 2003.

[29] Bojowald, 2001; Ashtekar vd., 2003.

33

DAHA RADİKAL BAKIŞ AÇILARI; BURGAÇ KURAMI

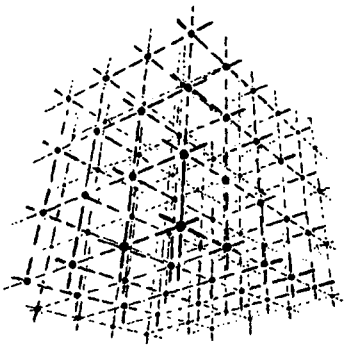
33.1 Geometrinin ayrık elemanlara sahip olduğu kuramlar

Önceki bölümlerde açıklanan kuramlar, kendisi yoluyla küçüğe ilişkin kuantum fiziğinin büyüğe ilişkin eğik uzay geometrisiyle bir biçimde birleştiği Doğanın *gerçek* düzeninin şifrelerini çözme girişimlerinde yeterince radikal miydiler? Belki de Einstein kuramı ve standart kuantum mekaniğinin dayandığı sürekli uzayzamanın gerçel manifold ayarlamasından temel olarak farklı nitelikte bir şey aramalıyız. Soru §3.3'te ortaya kondu, aslında, fiziki kuramlarda neredeyse evrensel olarak varsayılan gerçel sayılı uzayzaman sürekliliğinin Doğanın nihai bileşenlerini açıklamak üzere *gerçekten* uygun matematik olup olmadığı sorusunu sormak zorundayız.

Kuantum kütleçekime yönelik döngü değişkeni yaklaşımının bizi, sürekli ve pürüzsüz biçimde değişen bir uzayzaman standart tablosundan nasıl uzaklaştırıp daha ayrık topolojik niteliğe sahip bir şeye götürdüğünü gördük. Yine de bazı fizikçiler, "kuantum uzayzaman"ın doğasıyla ilgili uygun biçimde daha derin kavrayışlar edinilecekse uzay ve zamanla ilgili fikirlere ilişkin çok daha radikal bir gözden geçirmeye gerek duyulduğunu sağlam biçimde ileri sürmekteler. §32.6'daki (her ne kadar sınırlı da olsa) orijinal spin ağı önermesi aslında tümüyle ayrık bir nitelikteydi fakat standart döngü değişkeni tablosu hâlâ, spin ağlarının gömülü oldukları kabul edilen 3–yüzeye ilişkin sürekli doğaya bağımlıdır. Bahsedilen ikinci düzende aslında, Doğanın en küçük ölçekteki işleyişiyle uzlaşabilmemiz için gerekli olduğu hissedilen tümüyle ayrık ve belirgin biçimde "tümleşik" çerçeve elde edilmedi.

Yaklaşım olarak, amacın dünyaya ilişkin tümüyle ayrık/tümleşik bir tablo sunmak olduğu başlangıçtaki spin ağı ya da spin köpüğü düzenlerinden oldukça farklı çeşitli fikirler ileri sürüldü. Böylesi fikirlerin en ölçüsüz olanlarından (§16.1'de değinilmiş olanlarından) biri Ahmavaara (1965) tarafından ortaya konandı.[678] Geleneksel fiziğin matematiğinde te-

[678] *Bkz.* Ahmavaara, 1965.



Şekil 33.1 Snyder–Schild türü bir uzayzaman, birbiri üzerine düzenli biçimde yığılmış küplerden oluşan bir kümenin köşelerine benzer periyodik bir kafestir. (Beklenebilecek olandan oldukça fazla Lorentz değişmezliği söz konusu olabilir!)

mel olan gerçel sayı sistemi, p son derece büyük bir asal sayı olmak üzere, bir $\mathbb{F}_p$ sonlu alanıyla değiştirilmelidir. $\mathbb{F}_p$'nin, tamsayı sistemini p modülüne alarak elde edildiğini (§16.1'den) anımsayalım. Diğer öneriler uzayzamanı, birbiri üzerine düzenli biçimde yığılmış küplerden oluşan bir kümenin köşelerine benzer biçimde ayrık bir periyodik *kafes* yapısına sahip olarak kabul eder (Şekil 33.1).[679] Fiziki olarak çok daha mantıklı olan düzenler, kendisi uyarınca uzayzamanın, noktalar arasındaki *nedensel bağlantı* kavramının temel kavram olarak kabul edildiği ayrık, olasılıkla sonlu bir noktalar kümesinden oluşur biçimde değerlendirildiği, Raphael Sorkin'in nedensel küme geometrisi[680] (ya da daha önceki yakından ilişkili belirli fikirleri)[681] gibi olanlardır. Olağan klasik terimlerle bu "nedensel bağlantı", noktaların birinden diğerine bir sinyal gönderme olasılığıyla ilgilidir, böylece noktalardan biri diğerinin ışık konisi üzerinde ya da içinde bulunur. *Bkz.* Şekil 33.2. Sorkin'in düzenindeki nedensel bağlantılarla ilgili büyük orandaki rasgele doğa, özel göreliliğe ilişkin Lorentz değişmezliğinin ortaya çıkması benzeri bir şeye olanak tanırken Lorentz değişmezliği kafes tipli yapılarla (Şekil 33.1'deki gibi kafeslerle ilgili başlangıçta düşünülebilecek olandan çok daha fazla bu tür simetri söz konusu olmasına rağmen) ciddi sorunlara sahiptir. Yabancıl uzayzaman yapılarına yönelten diğer fikirler kuantum küme kuramı ya da David Finkelstein'ın dördeylerle ilgili geometrisinden,[682] Corinne Manogue ve Tevian Dray'in sekizgenler fiziğinden (§11.2, §16.1),[683] vb kaynaklanır.

---

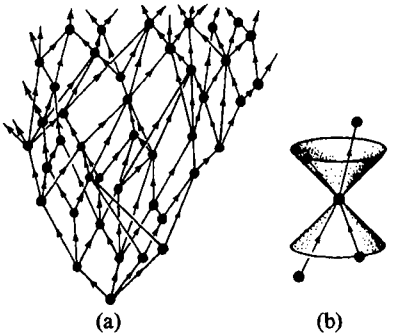
[679] *Bkz.* Schild, 1949; 't Hooft, 1984; ve Snyder, 1987.

[680] *Bkz.* Sorkin, 1991; Rideout ve Sorkin, 1999; Markopoulou ve Smolin, 1997; bu alandaki en önemli gelişmelerden biri Markopoulo, 1998.

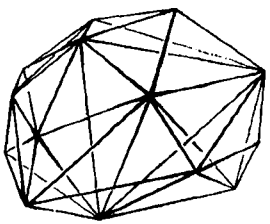
[681] *Bkz.* Kronheimer ve Penrose, 1967; Geroch vd., 1972; Hawking vd., 1976; Myrheim, 1978; 't Hooft, 1978.

[682] *Bkz.* Finkelstein, 1969.

[683] *Bkz.* Smolin, 2001; Gürsey ve Tze, 1996; Dixon, 1994; Manogue ve Schray, 1993; Manogue ve Dray, 1999.



Şekil 33.2 (a) Nedensel küme geometrisince açıklanan ayrık bir evren modeli. (b) Noktalar arasındaki ilişki, oklar boş konilerinin ya içinde ya da üzerinde uç vermek üzere, Lorentzci nedenselliği üzerine modellendi.



Şekil 33.3 "Regge analizi"nde uzayzamana, normalde 4–boyutlu "dört yüzlü"den (5–simpleks) oluşturulan 4–boyutlu bir çok yüzlüyle (bir "politop") yaklaşıklık tahmininde bulunulur. Eğrilik "kemikler" olarak adlandırılan (normalde üçgen biçimli) 2–boyutlu kenarlar üzerinde (δ fonksiyonları biçiminde) bulunur.

Ayrıca bir kuantum kütleçekim kuramıyla ilgili olarak Tullio Regge tarafından 1959'da ortaya konan, kendisi uyarınca uzayzamanın, eğriliği Regge tarafından "kemikler" olarak anılan 2–boyutlu "kenarlar" üzerindeki delta fonksiyonları (§9.7) biçiminde yoğunlaşmış, düzensiz bir "dört yüzlü" 4–boyutlu çok yüzlü (ya da "politop") olarak kabul edilen ilginç önerme de söz konusudur.[684] *Bkz.* Şekil 33.3 (ayrıca Şekil 32.3a, §32.4). Kuantum durumu, §26.6'da açıklanmış olan "Feynman geçmişler toplamı"yla uyumlu şekilde, bu tür uzayların karmaşık sayı ağırlıklı bir toplamı olarak kabul edilir. Uzayların kendilerine ilişkin açıklama, eğriliğin kuvvetini göstermek üzere her kemikte bir "açı"nın belirtilmek zorunda olması gerçeği dışında tümüyle tümleşiktir. Aslında, §28.2'de açıklanmış olan "kozmik sicim" bu türde bir geometri örneğidir.

Ayrıca, *topos kuramını* işe koşan Richard Jozsa[685] ve Christopher Isham'ınkiler[686] gibi başkaca ilgi çekici radikal önermeler de söz konusu oldu. Bu kuram, kendisi uyarınca "çelişki yoluyla kanıtlama" (§2.6, §3.1) yönteminin geçerliliğinin reddedildiği "sezgisel mantığın" (*bkz.* not 2.6) bi-

[684] Orijinal kaynak için *bkz.* Regge, 1962. Immirzi, 1997, resmi olmayan (ve açıklayıcı) bir gözden geçirme kaleme aldı.

[685] Jozsa bu fikirleri doktora tezinde geliştirdi. *Bkz.* Jozsa, 1981.

[686] *Bkz.* Isham ve Butterfield, 2000.

çimlendirilmesinden kaynaklan küme kuramının[687] bir türüdür. Bu düzenlerin hiçbirini burada tartışmayacağım, ilgilenen okur yazına başvurabilir.

Bir gün fiziki kuramda oynayacak önemli bir rol bulacak olan bir diğer fikir *kategori* kuramı ve onun n–kategori kuramına genellenmesidir. 1945'te Samuel Eilenberg ve Saunders MacLane[688] tarafından ortaya konan kategoriler kuramı oldukça ilkel (fakat kafa karıştırıcı) soyut kavramlara dayanan ve başlangıç olarak cebirsel topoloji fikirleriyle harekete geçirilmiş olan son derece genel cebirsel bir formalizmdir (ya da çerçeve). (Yöntemleri konuşma dilinde sıklıkla "soyut saçmalık" olarak anılır.) Temel bileşenlerinin, bunlar yalnızca "nesneler"i birleştiren "oklar" olmak üzere, çok basit nitelikleriyle ortaya konan büyük gücü yanıltıcıdır ve bu bölümde anılmış diğer fikirler gibi oldukça "tümleşik" bir görünüme sahiptir. Kategoriler kuramının n–kategori kuramına genişlemesi "homotopi"nin, §7.2'de kısaca tartışılmış olan, "homoloji" kavramını sadeleştirme biçimini yansıtır. Kategori kuramı burgaç kuramına (§33.9'la bağlantılı olarak) halihazırda bir girdi sunmuştur ve n–kategori kuramı döngüler, bağlar, spin köpükleri (§32.7) ve q–deformeli yapılarla (§32.5) ilişkiye sahiptir.[689] Bu kavramların, 21. yüzyıl fiziğindeki geleneksel uzayzaman kavramlarının yerini almada önemli bir rol oynadıklarını görmek beni bütün bütün şaşırtmaz.

Daha çok günümüz ana akım fikirleriyle benzerlik gösteren bir kavram özellikle Fields madalyalı matematikçi Alain Connes tarafından geliştirilen *değişmeli olmayan geometri* kavramıdır. "Değişmeli olmayan geometri" nedir? Fikri değerlendirmek üzere ilk olarak olağan bir pürüzsüz gerçel $\mathcal{M}$ manifoldunu düşünün. Daha sonra (C^∞–pürüzsüz olarak kabul edebileceğimiz, *bkz.* §6.3) $\mathcal{M}$ üzerindeki pürüzsüz gerçel değerli (skaler) fonksiyonları ele alın. Böylesi fonksiyonlar birbirleriyle toplanıp çarpılabilir ve ayrıca sıradan (sabit) gerçel sayılarla da çarpılabilirler. Aslında $\mathbb{R}$ *gerçelleri üzerinde değişmeli cebir* olarak adlandırılan bir $\mathcal{A}$ cebir sistemini oluştururlar. (§12.2 ve not 12.5'le karşılaştırın.) Şu halde $\mathcal{A}$'yı, nereden geldiğiyle ilgili hiçbir bilgi bulunmayan bir cebir olarak bilirsek bu durumda yine de $\mathcal{M}$ manifoldunu basit olarak $\mathcal{A}$ cebirinden yeniden oluşturabileceğimiz açığa çıkar.[690] Böylece $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{A}$'nın birbirlerinden oluşturulabileceğini görürüz ve buradan iki bu matematiksel yapının açık bir anlamda birbirlerine denk oldukları sonucuna ulaşılır.

---

[687] *Bkz.* Goldblatt, 1979.

[688] *Bkz.* Eilenberg ve Mac Lane, 1945; Mac Lane, 1988; Lawvere ve Schanuel, 1997.

[689] *Bkz.* Baez ve Dolan, 1998; Baez, 2000; Baez, 2001; Chari ve Pressley, 1994.

[690] *Bkz.* Connes ve Berberian, 1995.

Öte taraftan kuantum mekaniğinde sıklıkla değişmeli *olmayan* cebirlerle karşılaşılır. § 21.2'deki standart kanonik $p_b x^a - x^a p_b = i\hbar\delta^a_b$ değişme kurallarını sağlayan x^a ve p_a cebiri buna bir örnektir. Bir "manifold"u böylesi bir cebirden, üstte $\mathcal{M}$'nin $\mathcal{A}$'dan elde edildiği aynı biçimde yeniden oluşturmaya çalışırsak bu durumda *değişmeli olmayan* bir geometri olarak anılan bir şeyi elde ederiz. Diğer bir örnek olarak belirli başka bir durumu ele alabilir ve §22.8'in kuantum mekaniksel açısal momentum bileşenleri L_1, L_2, L_3'le başlayabiliriz (bunlar tarafından üretilen cebirin değişmeli olmayan $L_1L_2 - L_2L_1 = i\hbar L_3$, $L_2L_3 - L_3L_2 = i\hbar L_1$, $L_3L_1 - L_1L_3 = i\hbar L_2$ kurallarınca tanımlandığını anımsayın). Bu işlemcileri sıradan bir S^2 küresinin döndürmelerini üretir biçimde düşünebiliriz. L_1, L_2, L_3'le üretilen cebirden, "değişmeli olmayan küre" olarak adlandırabileceğimiz değişmeli olmayan bir geometri üretebileceğimiz açığa çıkar. Bu fikirle ilgili matematiksel pek çok incelik, güzel yapı ve beklenmedik uygulama söz konusudur. Değişmeli olmayan geometriye burgaç kuantizasyonuyla ilişkisi içinde kısaca (§33.7) yeniden döneceğim.

Connes ve meslektaşları değişmeli olmayan geometri fikrini, parçacık fiziği standart modelini içeren bir fiziki kuram üretme bakış açısıyla geliştirdiler.[691] Modelleri, $\mathcal{A}_1$, uzayzaman üzerindeki fonksiyonların (değişmeli) cebiri olmak (fakat pozitif belirli bir metriğe sahip kabul edilen) ve $\mathcal{A}_2$, parçacık fiziği standart modelinin iç sümetri gruplarından kaynaklanan değişmeli olmayan bir cebir olup uzayzamana ilişkin olarak "iki kopya" sunmak üzere, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ çarpımı olan bir $\mathcal{A}$ cebirini kullanır. Bu model var olan haliyle, özel göreliliğe ilişkin Lorentzci fikirleri ve kesinlikle genel göreliliği de birleştirmez. Dahası, değişmeli olmayan geometri fikrinin potansiyel zenginliği, bana şimdiye dek pek de uygun olarak kullanılmış gibi gelmiyor. Yine de model bir başlangıçta bulunur ve kendisine ait, Higgs bozonunun kütlesiyle ilgili tahminler gerektiren ilgi çekici özelliklere sahiptir.[692]

Tüm bu fikirler, ayrıklık ya da bir tür "kuantum" niteliklerine ilişkin görünümleri üzerine alan "uzayzaman" kavramlarının oluşturulmasına odaklanır. Bu bölümün geri kalanında oldukça farklı bir fikirler ailesini, diğer bir deyişle içerisinde uzayzaman üzerine özel olarak yüklenmiş hiçbir ayrıklığın bulunmadığı (kendisine 40 yılın üzerinde zamanımı adadığım!) *burgaç kuramı*na ilişkin fikirleri, açıklayacağım. Uzayzamana bir

[691] Değişmeli olmayan geometrinin ayrıca hem saf matematikte hem de fiziğe uygulanan halinde, pek çok başkaca kullanımı söz konusudur. *Bkz.* Connes, 1990, 1998. İkincisine bir örnek olarak, yeniden normalleştirmenin geniş kapsamlı bir ele alınışıyla ilgili olarak değişmeli olmayan geometri yardımıyla zarif bir formalizm geliştirildi; *bkz.* §26.9 ve Kreimer, 2000.

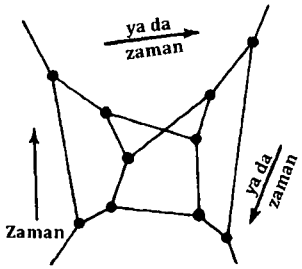
[692] *Bkz.* Connes ve Berberian, 1995.

şey yüklemek yerine, uzayzaman noktaları fiziki kuramdaki öncelikli görevlerinden arındırılır. Uzayzaman, daha ilkel burgaç kavramları üzerinden (ikincil) bir oluşum olarak kabul edilir. Burgaç kuramı, spin ağı kuramı ve Ashtekar değişkenleriyle, ayrıca olasılıkla değişmeli olmayan geometriyle fakat bu dolaysız biçimde herhangi bir "ayrık uzayzaman" kavramına yol açmaz, bazı ilişkilere sahiptir. Bunun yerine gerçel sayı sürekliliğinden ayrılması ters yönde gerçekleşir çünkü o, *karmaşık sayı sihri*ni fiziğin birincil yönlendirici ilkesi olarak talep eder. Burgaç kuramı uyarınca, karmaşık sayılarla ilgili olarak, bu aynı sayıların kuantum mekaniğindeki iyi belirlenmiş temel rollerine ek olarak, uzayzaman yapısını tanımlamaya ilişkin altta yatan temel bir rol mevcuttur. Bu yolla büyüğün fiziğiyle küçüğün fiziği arasındaki önemli bir bağlantı halkası algılanmış olur.

33.2 Işık ışınları olarak burgaçlar

21 ve 22. bölümlerde gördüğümüz üzere karmaşık sayı yapısı aslında kuantum mekaniğinde temeldir. Kuantum mekaniğinin temel çakışma yasasında katsayılar olarak görünen "genlikler", kuramla ilgili karmaşık Hilbert uzayına yol açan karmaşık sayılardır. Bu genlikler genellikle soyut nicelikler olarak değerlendirilse de, bir ölçüm gerçekleştiğinde olasılıkları sağlamakta temel bir rol oynar. Bu karmaşık sayılarla uzamsal geometri arasında güçlü bir iç bağlantı bulunduğunu (§22.9'da) görmüştük. Bunun en belirgin biçimi, spine ilişkin olası durumların bir *Riemann küresi* kavramı üzerinden farklı uzamsal yönlere karşılık geldiği, $\frac{1}{2}$-spinli bir parçacığa ilişkin kuantum mekaniğidir; dahası §22.10'da, yüksek spinle ilgili spin durumlarının ayrıca, Majorana gösterimi yoluyla Riemann küresine ilişkin uzamsal geometri biçiminde de açıklanabileceğini görmüştük. Bu kürenin, bir gözlemcinin görüş alanı da geçerli biçimde bir Riemann küresi olarak değerlendirilebileceğinden, görelilik kuramında önemli bir uzayzaman rolü oynadığını (§18.5'ten) anımsayalım. Kısa süre içinde göreceğimiz üzere bu gerçek burgaç kuramında çığır açıcı bir öneme sahiptir.

Burgaç kuramının ardındaki yönlendirici ilkelerden bir diğeri kuantum *yerelsel olmayışı*dır. §§23.3–6 tartışılmış olan tuhaf EPR etkilerinden ve daha özel olarak §23.10'da açıklanmış olan kuantum ışınlama olgusunda açıkça belirtildiği üzere, fiziki davranışın, normal "nedensel" karakterle ilgili tümüyle yerel etkiler biçiminde bütünlüklü olarak anlaşılamayacağını anımsayalım. Bu, temel bir düzeyde böylesi yerel olmayan özelliklerin içerildiği bir kuramın gerekli olduğunu ileri sürer.



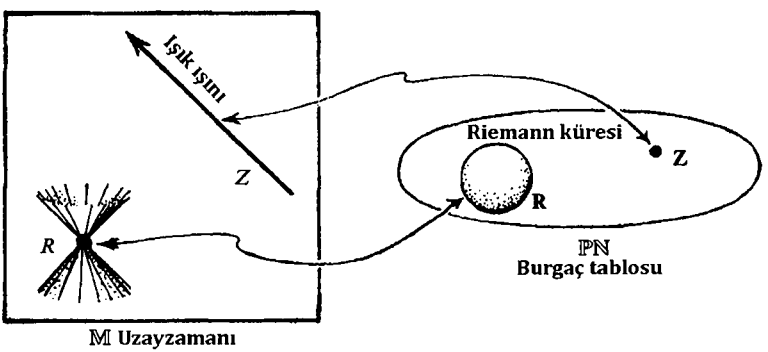
Şekil 33.4 Orijinal türdeki bir spin ağında çizgiler kudolanıklık bağları biçiminde okunabilir (bkz. §23.9 ve Şekil 23.7). Herhangi bir yön, ileriye, yan tarafa ya da geriye doğru, seçilebilir ve spin ağına ilişkin aynı geçerlilikte bir yorum elde edilir.

Bunu gerçekleştirmek üzere bir yönlendirme *spin ağı* kuramından elde edilebilir. §32.6'dan, tüm spin ağlarının başlangıç olarak EPR çiftlerinden oluşturulduğunu düşünmemiz gerektiğini anımsayalım. Bir spin ağına ilişkin sonrasında ortaya çıkan çizgiler yasal olarak kudolanıklık bağları biçiminde düşünülebilir. Kudolanıklığı temsil eden "kuantum bilgisi", bir kudolanıklık çizgisi ya da spin ağı çizgisi üzerinde şu ya da bu yönde "yolculuk edebilir". Spin ağı kuramında bir *zaman* saptaması söz konusu değildir (ve esasen orijinal spin ağları eşdeğer biçimde birkaç farklı zaman algısı, ileriye, geriye, yanlamasına, vb, kullanılarak da okunabilir, *bkz.* Şekil 33.4). Bu nedenle, kudolanıklığa ilişkin tuhaf "geriye zaman" görünümleri yalnızca, spin ağlarının bir özelliği olan bu zaman akış yönüne ilgisizliğin yansımalarıdır.

Uzayzamana ilişkin burgaç açıklamasının esasen yerel olmadığı açığa çıkar; dahası, § 33.9'da öyle olacak olsa da, bu kitapta henüz uygun biçimde karşılaşmadığımız karmaşık sihrin (aslında §9.7'deki hiper fonksiyon kuramında buna yönelik bir ipucu mevcuttu), karmaşık sayı sihrinin diğer bir görünümüyle birbirine geçen dikkat çekici bir özelliği (diğer bir deyişle holomorfik deste kohomolojisi), diğer bir deyişle kuantum alan kuramının başlıca pozitif frekans koşulunu temelleyen holomorfik niteliği (§24.3, §33.10), yoluyla ortaya çıkan fiziki alanlara ilişkin burgaç açıklamasına yönelik temel bir "holistik" nitelik söz konusudur. Böylece, burgaç kuramına ilişkin yerel görünümlerin, kendilerini temelleyen güdülerin en önemlileriyle, diğer bir deyişle karmaşık sayılara ilişkin sihri Doğanın kendisinin derin bir seviyede böylesi şeylere bağlı olabileceğine yönelik bir inançta kullanma isteğine, sıkı biçimde bağlı olduğunu görürüz. Bu ve sonraki birkaç bölümde karmaşık sayı sihrine yönelik tüm bu görünümlerin burgaç kuramsal çerçevede nasıl bir araya gelmeye başladıklarını göreceğiz. Ayrıca burgaç kuramının *genel* görelilikte nasıl dikkat çekici ve beklenmedik derin bir ilişki bulduğunu ve QFT, parçacık fiziği ve kuantum mekaniğinin olası doğrusal olmayan genellenmesi üzerine ilgi çekici bir bakış açısı sunduğunu da görmeye başlayacağız.

Aslında bu fikirler burgaç kuramında nasıl bir araya gelmeye başlar? Burgaç kuramını kavramaya yönelik bir ilk adım olarak, bir burgacı, olağan $\mathbb{M}$ (Minkowski) uzayzamanındaki bir *ışık ışını*nı gösterir biçimde düşünebiliriz. Böylesi bir ışık ışını, bir *olay* (diğer bir deyişle uzayzaman noktaları) çifti arasındaki birincil "nedensel bağ"ı sunar biçimde değerlendirilebilir. Bununla birlikte olayların kendileri ikincil oluşumlar olarak, bunlar olayların ışık ışınlarının kesişimleri biçimindeki rollerinden elde edilmek üzere, değerlendirilmelidir. Aslında R olayını (R uzayzaman noktası), R'den geçen ışık ışınları ailesi biçiminde düşünebiliriz; *bkz.* Şekil 33.5. Böylece, normal uzayzaman tablosundaki Z ışık ışını bir geometrik yer ve bir R olayı bir noktayken burgaç uzayında, artık ışık ışını bir **Z** *noktas*ı ve bir **R** olayı *geometrik yer* olarak tanımlandığından bu duruma ilişkin çarpıcı biçimde bir ters çevrilme söz konusudur.

Tekil noktaları $\mathbb{M}$'deki ışık ışınlarını gösteren, burada değinilen *burgaç uzayı* $\mathbb{PN}$'yle gösterilir.[693] (Bu notasyon §33.5'in terminolojisiyle uyumlu olmak üzere benimsenir.) Böylece, $\mathbb{PN}$ içindeki **Z** noktası $\mathbb{M}$ içindeki Z geometrik yerine (ışık ışını) ve $\mathbb{M}$ içindeki R noktası $\mathbb{PN}$ içindeki **R** geometrik yerine (Riemann küresi; *bkz.* §18.5) karşılık gelir. Burgaç kuramı felsefesinin temel bir parçası, normal olarak uzayzaman terimleriyle açıklanan olağan fiziki kavramların burgaç kuramındaki eşdeğer (fakat yerel olmayan bir biçimde ilişkili) bir tanımlamaya çevrilme gereğidir. $\mathbb{M}$ ve $\mathbb{PN}$



Şekil 33.5 $\mathbb{M}$ Minkowski uzayzamanındaki bir Z ışık ışını $\mathbb{PN}$ burgaç uzayındaki (izdüşümsel sıfır burgaç uzayı) tekil bir **Z** noktası olarak, $\mathbb{M}$'deki tekil bir R noktasıysa $\mathbb{PN}$'deki bir **R** Riemann küresiyle (bu küre R'deki ışık ışınlarının "gök küre"si olarak gösterilmek üzere) gösterilir. (Bütünlüklü bir uyum için bu Şekil 33.9'da açıklanan $\mathbb{M}^{\#}$ tıkızlaştırılmış Minkowski uzayını gerektirir.)

[693] Kesin isabet için, $\mathbb{PN}$ 'nin tanımını tamamlamak üzere bir kürenin (Riemann) "sonsuzdaki ışık ışınları"nın değerini dahil etmemiz gerekir; *bkz.* §33.3.

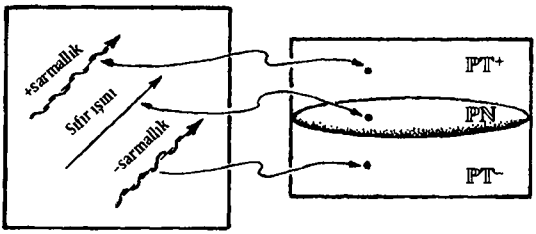
arasındaki ilişkinin aslında noktadan noktaya bir dönüşüm yerine yerel olmayan bir uyumluluk olduğunu görürüz. Bununla birlikte $\mathbb{PN}$ uzayı bize yalnızca, böylesi bir dönüşümün başlangıcını sağlar. Burgaç kuramının, son derece dikkat çekici olduğu açığa çıkan tüm zenginliği yalnızca, uzayzaman kavramlarıyla burgaç uzayı geometrisi arasındaki uygunluk daha ayrıntılı biçimde geliştirildikçe derece derece gözler önüne serilir.

$\mathbb{PN}$ içerisindeki bu **R** geometrik yeri R'deki bir gözlemcinin "gökküresi"sini (toplam görüş alanı), R'ye ilişkin gökküresi R'den geçen ışık ışınları ailesi olarak değerlendirilmek üzere, tanımlar. Yukarıda belirtildiği üzere, bu küre doğal olarak, *karmaşık 1–boyutlu uzay* (karmaşık bir eğri; *bkz.* bölüm 8) olan bir *Riemann küresi*dir. Bu nedenle uzayzaman noktalarını, burgaç kuramının temelinde yatan karmaşık sayı felsefesiyle uyumlu biçimde, $\mathbb{PN}$ burgaç uzayındaki *holomorfik nesneler* olarak düşünürüz. §§33.5, 6'da bu "holomorfik felsefe"nin daha tam bir $\mathbb{T}$ burgaç uzayı geometrisine nasıl genişletilebildiğini ve §§33.8–12'de, doğrusal ve doğrusal olmayan kütlesiz alanlardaki bilgiyi, dikkat çekici bir biçimde, şifrelemeye nasıl olanak sağladığını açık olarak göreceğiz.

Bununla birlikte ışık ışınlarına ilişkin $\mathbb{PN}$ uzayı hemen kendiliğinden "holomorfik felsefe"ye uyum sağlamaz çünkü o karmaşık bir uzay değildir. $\mathbb{PN}$ karmaşık bir manifold olamaz çünkü o, herhangi karmaşık bir n–manifold çift sayılı, $2n$, gerçel boyuta sahip olmak zorundayken (*bkz.* §12.9) *beş* gerçel boyuta sahiptir[33.1] ve beş tek bir sayıdır. Kısa süre içinde (§33.6'da), "ışık ışınları"mızı onlara hem spin (aslında sarmallık; *bkz.* §22.7) hem de enerji atayarak fiziki olarak biraz daha kütlesiz parçacıklara benzer hale getirebilirsek bu durumda esasen üç boyutu karmaşık olan karmaşık bir uzay biçiminde yorumlan*abilecek altı*–boyutlu bir $\mathbb{PT}$ uzayı elde edeceğimizi göreceğiz. $\mathbb{PN}$ uzayı $\mathbb{PT}$ içinde, onu iki karmaşık manifold parçasına, $\mathbb{PT}^+$ ve $\mathbb{PT}^-$, bölecek biçimde bulunur. $\mathbb{PT}^+$ pozitif sarmallıktaki kütlesiz parçacıkları ve $\mathbb{PT}^-$ negatif sarmallıktaki kütlesiz parçacıkları temsil eder biçimde düşünülebilir; *bkz.* Şekil 33.6. Bununla birlikte burgaçları kütlesiz parçacıklar *olarak* düşünmek doğru olmaz. Burgaçlar daha çok, kütlesiz parçacıkların, kendileri biçiminde ifade edilebileceği değişkenleri sağlar. (Bu, bir **x** konum 3–vektörünün uzaydaki bir noktayı işaretlemekteki olağan kullanımıyla kıyaslanabilir. Bir parçacık, **x** tarafından işaretlenmiş bir noktayı işgal edebilse de parçacığı **x** vektörüyle tanımlamak doğru olmaz.)

Burgaç bakış açısı bizi sıkça ortaya konandan oldukça farklı bir "uzayzaman kuantizasyonuna" yöneltir. Kuantum (alan) kuramı işlemlerinin g_{ab}

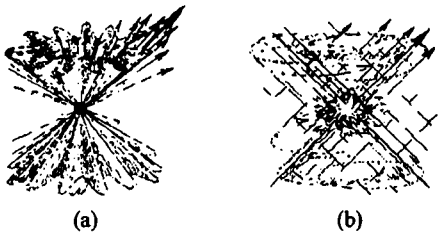
[33.1] Işık ışınları niçin beş serbestlik derecesine sahiptir?



Şekil 33.6 Gerçel ℙℕ 5–manifoldu ℙ𝕋 burgaç izdüşüm uzayını iki karmaşık 3–manifold parçasında, ℙ𝕋⁺ ve ℙ𝕋⁻, böler. Bunlar sırasıyla kütlesiz parçacıkların pozitif ve negatif sarmallıklarını temsil eder.

metrik tensörüne, bu, uzayzaman (manifold) üzerindeki bir tensör alanı biçiminde düşünülmek üzere, uygulanması gerektiğiyle ilgili "geleneksel" bakış açısı oldukça geneldir. *Kuantize metriğin*, Heisenberg belirsizlik ilkesi nedeniyle "bulanıklık" görünümleri sergileyeceği görüşü ifade edilir. Özellikle boş konilerinin ve bundan hareketle *nedensellik* kavramının, "kuantum belirsizlikleri"ne bağımlı hale geleceği şekilde bir "bulanık metriğe" sahip bir tür dört–boyutlu uzay görüntüsü sunulur (*bkz.* 33.7a). Bu nedenle bir uzayzaman vektörünün uzaysal, zamansal ya da sıfır olacağına ilişkin klasik olarak iyi tanımlı hiçbir kavram söz konusu değildir. Bu konu, herhangi çok geleneksel bir "kütleçekim kuantum kuramı"yla ilgili temel güçlükler yaratmıştı çünkü o QFT'ye ait, nedenselliğin uzaysal olarak ayrı olaylarda tanımlı alan işlemcilerinin değişmesini gerektirdiği temel bir özelliktir (§26.11). "Uzayzaman" kavramı kuantum belirsizliklerine bağlıysa (ya da kendisi bir kuantum kavramı haline geldiyse) bu durumda QFT'ye ilişkin, alan işlemcileriyle ilgili değişme bağıntılarının belirtilmesini içeren (§§26.2, 3) standart işlemler dolaysız biçimde uygulanamaz. Burgaç kuramı oldukça farklı bir tablo önerir. Şu an için uygun "kuantizasyon" işlemleri, ne olursa olsun, uzayzaman yerine burgaç uzayı içinde (ilki "geleneksel" bakış açısı olmak üzere) uygulanmak zorundadır. Geleneksel yaklaşımda "boş konileri" bulanık hale gelirken "olaylar"ın dokunulmamış bırakılmasına benzerlik kurarsak, burgaç temelli bir yaklaşımda artık "olaylar" bulanık hale gelirken dokunulmamış bırakılan "ışık ışınları"dır (*bkz.* Şekil 33.7b).

Burgaç kuramı, henüz gördüğümüz üzere, başlangıçta karmaşık sayı sihrine ilişkin, kuantum kuramında bulunanlardan farklı bir belirtimden, diğer bir deyişle gökküresinin 1–boyutlu karmaşık bir manifold olan Riemann küresi olarak değerlendirilebileceği uzayzamana ilişkin *klasik* özellikten faydalanır. Fikir, bunun bize, sonuç olarak uzayzaman yapısıyla kuantum mekaniğinin işlemlerini birleştirmek zorunda olan Doğanın



Şekil 33.7 (a) Bir noktadaki yön kavramının boş, zamansal ya da uzaysal olmasının kuantum belirsizliklerine bağlı olduğu bir tür "bulanık" ışık konisine yol açan "bulanık" metriğe sahip bir uzayzaman türünün olması gerekliliği, olası bir "kuantize uzayzaman" doğasıyla ilgili genel bir bakış açısı olagelmiştir. (b) Daha "burgaçla ilgili" bir bakış açısı burgaç uzayını (bu durumda $\mathbb{PN}$), bir çeşit varlığı alıkoyar biçimde (böylece ışık ışınları hâlâ söz konusu olur) kabul etmektir fakat bunların kesişme koşulları kuantum belirsizliklerine bağlı hale gelir. Bunun yerine "uzayzaman noktası" kavramı buradan hareketle "bulanık" hale gelir.

gerçek şeyler düzeniyle ilgili ipuçları sağlamasıdır. Uzayzaman geometrisine ilişkin bu özelliğin, esasen bildiğimiz fiziki uzayzamanın sahip olduğu belirli boyut ve imzaya özgü olması dikkate değerdir. Aslında, Riemann küresinin görelilik kuramında gökküresi olarak önemli bir rol oynaması gerçeği (§18.5), sicim kuramı ve diğer Kaluza–Klein tipi düzenleri temelleyen fikirlerle büsbütün çelişkili olarak uzayzamanın 4–boyutlu ve Lorentzci olmasına gerek duyar. Burgaç kuramının bütünlüklü karmaşık sihri, olağan (özel) görelilik kuramının 4–boyutlu uzayzaman geometrisine özgüdür ve "yüksek boyutlu" uzayzaman geometrisiyle aynı yakınlıktaki ilişkiye sahip değildir (daha sonra §33.4'e bakın).

İlerlemek üzere orijinal saf spin ağları tablosuna, kendisinde eksik olan temel şeyin uzamsal yer değiştirmeye yönelik herhangi bir kaynak olduğuna dikkat ederek, dönelim. O kuramda Öklitçi açılar saf spin ağı kuramına ilişkin bir tür "geometrik sınır" olarak ortaya çıkar; yine de o kuramda uzaklıklar ortaya çıkmaz. Döngü değişkeni mertebesinde, şeylere ilişkin "uzaklık" görünümü, çizgiler üzerindeki, spin yerine *alan*la ilgili olan sayılarca ($n = 2j$) gösterilir. Bununla birlikte bu, spin yalnızca döndürme ve açılarla ilgili olan açısal momentum olduğundan herhangi bir uzaklık ölçüsünün söz konusu olmadığı orijinal spin ağı kuramındaki yorumlamadan farklıdır. Öteleme yer değiştirmeleri ve gerçek uzaklıkları birleştirmek üzere o kuramda *çizgisel* momentumun yerini tutacak bir role gerek duyarız. Bu nedenle, döndürme grubundan bütünlüklü Öklitçi hareketler grubuna ve uygun bir görelilikçi düzen için Poincaré grubuna (§18.2) gitmeye gerek duyduğumuz açığa çıkar.[694]

[694] Bu, Poincaré grubuyla ilgili olarak yönsel olmayan uygun (skaler) niceliklere, diğer bir deyişle Casimir operatörlerine, *bkz.* §22.12, gerek duyar. Bunlar toplam spin ve durağan (kare-

1950'lerin sonu ve 60'ların başında, bu şeyler üzerine etkin biçimde düşündüğüm sırada, döngü değişkenleri kuramı henüz geliştirilmemişti ve aslında Poincaré grubunun dolaysız bir rol oynadığı spin ağlarına ilişkin bir genelleme tasarlamıştım. Bununla birlikte, kendisine ilişkin gösterimle ilgili olarak hoş olmayan anlatımlara sahip Poincaré grubunun tuhaf bir görünümüyle, onun yarı basit olmadığıyla (*bkz.* §13.7) ilgili endişeliydim. O zaman Poincaré grubunun, (yarı basit *olan*) *konformal* grup olarak bilinen şeye genişlemesinin spin ağı kuramının ilgili benzerini matematiksel olarak daha tatmin edici bir hale getirebileceği görüşüne sahiptim. Konformal grup Poincaré grubunu yalnızca, Minkowski uzay metriği yerine ışık konilerinin korunmasını talep ederek genişletir. Aslında, konformal grubun, o ayrıca aynı zamanda (idealleştirilmiş) ışık ışınlarına ilişkin $\mathbb{PN}$ uzayına ait simetri grubu da olduğundan, burgaç kuramında önemli bir yere sahip olduğu ortaya çıkar. (Konformal grubun yansımalı olmayan kısmı da ayrıca, üstte, kütlesiz parçacıkları sarmallık ve enerjiyle açıklar biçimde değinilen, $\mathbb{PT}^+$ ve $\mathbb{PT}^-$ uzaylarının her birine ilişkin simetri grubudur. Bu grubun rolünün ne olduğunu sonraki iki bölümde daha açık biçimde göreceğiz.

33.3 Konformal grup; tıkızlaştırılmış Minkowski uzayı

Üstte uzayzamana ilişkin konformal gruba değindim. Bu grubun rolünü biraz daha ayrıntılı olarak keşfetmeye çalışalım. Kütlesiz alanlarla (*örn.* Maxwell alanı) ilgili alan denklemlerinin yalnızca Poincaré grubu altında değil bu daha büyük grup altında da değişmez olduğu açığa çıktığından bu grup fizikte kütlesiz alanlarla ilgili olarak belirli bir öneme sahiptir.[695] Temel bir düzeyde kütlesiz parçacıklar/alanların, kütle daha sonraki bir aşamada devreye girecek bir şey olmak üzere, temel bileşenler olduğuna ilişkin konum savunulabilir. Esasen bu, 25. bölümde açıklandığı üzere, kütlenin Higgs bozonu yoluyla açıklanıp yalnızca bir simetri kırılımı mekanizması (§25.5) yoluyla ortaya çıktığının kabul edildiği standart modele içkin bir bakış açısı gibi görünür. Öyle bile olsa, burgaç kuramının ardındaki önemli bir temel güdü aslında kütlesiz alanlar ve konformal - grubun temel önemine yönelik inançtı. Kütlesiz parçacık ve alanların bur-

li) kütledir. Bununla birlikte durağan kütle herhangi bir şeyin integral katı olarak inşa edilmiş biçimde bilinmez, bu durumda böylesi bir düzenin tümleşik görünümleri pek açık değildir. Yine de bu yaklaşım, John Moussouris tarafından doktora tezi olarak 1983'te geliştirilmiştir; *bkz.* Moussouris, 1983. Bu, kütle ve spinin yanı sıra ağ çizgilerine eklenmiş ek bir işarete gerek duyar.

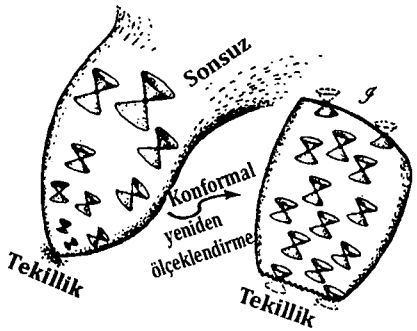
[695] *Bkz.* McLennan, 1965; Penrose, 1963, 1964, 1965a, 1986b.

gaç kuramında dikkat çekici bir özlü açıklamaya sahip olduklarını ve bu gerçeğin o kurama ilişkin temel köşe taşlarından birini oluşturduğunu göreceğiz (§33.8).

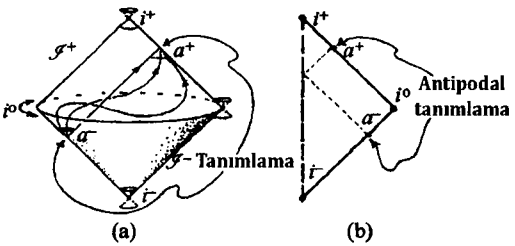
Konformal grup tam olarak nedir? Açık konuşmak gerekirse, bu grup $\mathbb{M}$ Minkowski uzayı üzerinde değil fakat $\mathbb{M}$'nin, *tıkızlaştırılmış* $\mathbb{M}^{\#}$ Minkowski uzayı olarak bilinen hafifçe genişletilmiş hali üzerinde etkir. $\mathbb{M}^{\#}$ uzayı, pek çok bakımdan Minkowski uzayının kendisinden daha zarif bir geometriye sahip hoşça bir simetrik kapalı manifolddur. Bununla birlikte onu "gerçek uzayzaman" olarak değil fakat matematiksel bir uygunluk biçiminde düşünmek zorundayız. O, burgaç geometrisi ve onun fiziki uzayzaman geometrisiyle ilişkisini anlamakta kullanışlı bir aracıdır.

Zihnimizde tutmamız gereken iyi bir tablo Riemann küresi ve onun karmaşık düzlemle olan ilişkisidir. §8.3'ten, Riemann küresinin karmaşık düzlemden kendisine bir "sonsuz eleman", diğer bir deyişle ∞'la işaretlenmiş noktayı, eklemek yoluyla elde edildiğini ve böyle yaptığımızda da başladığımız düzlemden bile daha büyük simetriye sahip bir geometrik yapı elde ettiğimizi anımsayın. Benzer bir biçimde tıkızlaştırılmış $\mathbb{M}^{\#}$ Minkowski uzayı da, olağan $\mathbb{M}$ Minkowski uzayına, bu kez, bütün bir *sonsuzdaki ışık konisi* olduğu ortaya çıkan bir "sonsuz eleman" eklemek yoluyla elde edilir. Sonuçtaki uzay Minkowski uzayının kendisinden de daha büyük bir simetriye (diğer bir deyişle konformal gruba) sahiptir.

Bunun nasıl işlediğini görelim. $\mathbb{M}^{\#}$ uzayının, Lorentzci bir konformal metriğe sahip gerçel bir 4–boyutlu tıkız manifold olduğu ortaya çıkar. §27.12'den, Lorentzci bir konformal metriğin aslında yalnızca, uzay üzerinde belirtilmiş olan boş konileri ailesi olduğunu anımsayın. Bu yapı daha çok, her yerde pozitif olan pürüzsüz bir Ω skaler alanıyla ilgili olarak $\boldsymbol{g}' = \Omega^2\boldsymbol{g}$ olursa $\boldsymbol{g}$ metriği $\boldsymbol{g}'$ metriğine denk sayılmak üzere, metriklere ilişkin bir eşdeğerlik sınıfı biçiminde ifade edilir. Bu yeniden ölçeklendirme esasen boş konilerini korur (Şekil 33.8). Şu halde (konformal bir manifold olarak değerlendirilen) $\mathbb{M}$'den tıkız konformal $\mathbb{M}^{\#}$ manifolduna geçmek üzere, üstte "sonsuzdaki ışık konisi" olarak değinilen $\mathcal{I}$ 3–yüzeyini birleştiririz. §27.12'den, Minkowski uzayına ilişkin geçmiş ve gelecek boş sonsuzlarını temsil eden (sırasıyla "scri–eksi" ve "scri artı" olarak adlandırılan) $\mathcal{I}^-$ ve $\mathcal{I}^+$ 3–yüzeylerini anımsayın (*bkz.* Şekil 27.16b). $\mathbb{M}^{\#}$'yi, $\mathcal{I}^-$'yi Şekil 33.9'da belirtilen biçimde $\mathcal{I}^+$'yla *tanımlamak* yoluyla oluşturabiliriz. $\mathcal{I}^-$'nin bir noktası, $\mathcal{I}^+$'daki, uzamsal olarak (diyagramdaki çoğu noktanın gösterdiği 2–küre üzerinde) kendisine antipodal olan ilgili noktayla aynı nokta olarak değerlendirilir. $\mathcal{I}^-$ üzerindeki bir a^- noktasına ilişkin ışık konisinin $\mathcal{I}^+$'ya ilişkin a^+ noktasında yine bir odak haline gelir ve a^- ve a^+ noktaları tanımlanmalıdır. Ek olarak zamansal ve uzamsal sonsuzları



Şekil 33.8 Lorentzci bir $\mathcal{M}$ manifoldunun boş koni yapısı ona ait konformal yapıya denktir. $\mathcal{M}$'ye ilişkin konformal bir yeniden ölçeklendirme nedensellik özelliklerini değil fakat metriğini etkiler. (Bir g metriği, Ω skaler alanı her yerde pozitif olmak üzere, $g' = \Omega^2 g$ olursa konformal olarak g''ne yeniden ölçeklendirilir.) Elverişli koşullarda böylesi yeniden ölçeklendirmeler, tekillikleri ve sonsuz bölgeleri "görüşe getirmek" üzere kullanışlı olabilir.



Şekil 33.9 $\mathbb{M}^{\#}$'yi, $\mathcal{J}^-$'yi $\mathcal{J}^+$'yla *tanımlamak* yoluyla oluşturabiliriz. $\mathcal{J}^-$'nin bir noktası, $\mathcal{J}^+$'daki, uzamsal olarak (diyagramdaki çoğu noktanın gösterdiği 2–küre üzerinde) kendisine antipodal olan ilgili noktayla aynı nokta olarak değerlendirilir. $\mathcal{J}^-$ üzerindeki bir a^- noktasına ilişkin ışık konisinin $\mathcal{J}^+$'ya ilişkin a^+ noktasında yine bir odak haline gelir ve a^- ve a^+ noktaları tanımlanmalıdır. Ek olarak zamansal ve uzamsal sonsuzları temsil eden üç noktanın, i^-, i^0, i^+, tümü de tekil i noktası olarak tanımlanır.

temsil eden üç noktanın, i^-, i^0, i^+, tümü de tekil i noktası olarak tanımlanır.[33.2] Konformal $\mathbb{M}^{\#}$ manifoldu aslında, yalnızca 10–boyutlu Poincaré - grubu yerine 15–boyutlu simetri grubuna, *konformal grup*, sahip olarak Minkowski uzayından daha fazla simetriye sahiptir.

$\mathbb{M}^{\#}$ uzayını ve kendisine ait dönüşümler grubunu açıklamanın zarif bir yolu mevcuttur. $++----$ imzasına sahip sözde Öklitçi bir $\mathbb{E}^{2,4}$ 6–uzayındaki O orijinine ilişkin $\mathcal{K}$ "ışık konisi"ni ele alın. $\mathbb{E}^{2,4}$ için standart koordinatları, $\mathcal{K}$'nin

$$w^2 + t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - v^2 = 0$$

denklemiyle verileceği şekilde w, t, x, y, z, v olarak seçin. Böylece, $\mathbb{E}^{2,4}$'e ilişkin ds^2 metriği

[33.2] $\mathbb{M}^{\#}$'nin geometrisini ayrıntılı olarak açılayabilir misiniz bakın. Bir $\mathcal{J}^-$ noktasının ışık konisine ilişkin olağan uzayzaman tanımlaması nedir? $\mathbb{M}^{\#}$'nin topolojisinin niçin $S^1 \times S^3$ olduğunu görebiliyor musunuz? Bir tek sayılı uzayzaman boyutuyla ilgili ortaya çıkacak önemli bir farklılık düşünebiliyor musunuz?

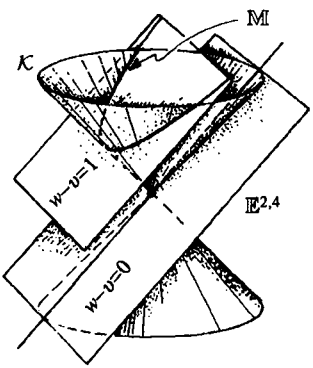
$$ds^2 = dw^2 + dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - dv^2$$

ifadesi olur. Üstteki denklem tepesi O olan 5–boyutlu bir "koni"dir. Onu Şekil 33.10'da göstermek üzere elimden gelenin en iyisini yaptım fakat resmin yanıltıcı olmasının temel biçimlerinden biri, $\mathcal{K}$'ye iki ayrı "parça" ("geçmiş" ve "gelecek") gibi görünen şey aslında "bir parça" halinde birleştirilir.[33.3] Şimdi, $\mathcal{K}$'nin $w - v = 1$ sıfır 5–düzlemi boyunca olan *kesiti*ni ele alın. Bu kesişim, $\mathbb{E}^{2,4}$'ünkinin neden olduğu içsel metriği

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

olan[33.4] bir 4–manifolddur ("paraboloid"). Bunu, olağan düz Minkowski 4–uzayına ilişkin metrik biçimi olarak tanırız (§18.1), böylece $\mathbb{E}^{2,4}$ içinde "bükülü" (Şekil 33.10'daki parabol görünümüne sahip) bir biçimde gömülü bile olsa $\mathbb{M}$'yle tanımlayabiliriz. Bu tabloda $\mathbb{M}^{\#}$'yi nasıl görmekteyiz? O, $\mathcal{K}$'ye ilişki tüm *üreteçler*in (O'dan geçen her iki yöndeki düz çizgi tek bir üreteç sayılmak üzere $\mathcal{K}$ üzerinde bulunan O'dan geçen düz çizgiler) soyut uzayıdır. Böylece $\mathbb{M}^{\#}$ üzerindeki her noktayı basit olarak $\mathcal{K}$'ye ilişkin bir üreteç biçiminde düşünebiliriz (Şekil 33.10); bu durumda $\mathbb{M}^{\#}$, $\mathbb{E}^{2,4}$'ün orijininde konumlanmış bir "gözlemci"nin "gökküresi"sidir!

Bu niçin işler? $w - v = 0$ 5–düzleminde bulunmayan her üreteç $\mathbb{M}$'yle tekil bir noktada buluşur, böylece bu üreteç ailesi $\mathbb{M}$'yle bir sürekli 1'e 1 uygunluğa sahiptir. Bununla birlikte ek olarak 5–düzlem üzerinde bulu-



Şekil 33.10 Sözde Öklitçi $\mathbb{E}^{2,4}$ içindeki tıkızlaştırılmış $\mathbb{M}^{\#}$ Minkowski uzayı, $w^2 + t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - v^2 = 0$'la verilen $\mathcal{K}$ "ışık konisi"nin uzay üreteçleri olarak tanımlanabilir. $\mathcal{K}$'nin $w - v = 1$ sıfır 5–düzlemi boyunca olan "paraboloid biçimli" $\mathbb{M}$ 4–manifold kesiti Minkowskici içsel $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ metriğine sahiptir. $w - v = 0$'daki $\mathcal{K}$'ye ilişkin üreteçler ailesi, bu üreteçler $\mathcal{I}$'ya ilişkin noktaları sağlamak üzere, $w-v = 1$'e paraleldir ve $\mathbb{M}$'yle kesişmez.

nan üreteçler de söz konusudur. Bunlar $\mathbb{M}$'yi, $\mathcal{I}$'yı oluşturan ek noktalarla destekler. Bu biçimde tanımlanan $\mathbb{M}^{\#}$, $\mathcal{K}$'nin herhangi bir yerel ara kesiti-

[33.3] Nedenini görebiliyor musunuz?

[33.4] Niçin?

ninki tarafından yerel olarak sağlanan konformal bir Lorentzci metriğine sahiptir.[33.5]

$\mathbb{E}^{2,4}$ üzerinde etkiyen O(2, 4) sözde ortogonal grubu (*bkz.* §13.8, §§18.1, 2) ds^2 metriğini koruyan "döndürmeler"den oluşur. Bu, $\mathcal{K}$'nin üreteçlerine yine $\mathcal{K}$'ye ait başkaca üreteçlere gönderir, böylece $\mathbb{M}^{\#}$'yi kendine gönderir. Dahası $\mathbb{M}^{\#}$'nin konformal yapısını korur.[33.6] $\mathbb{M}^{\#}$ üzerinde O(2, 4)'e ait, özdeşlik olarak etkiyen tam olarak iki eleman, diğer bir deyişle O(2, 4) özdeşlik elemanının kendisi ve O(2, 4)'ün negatif özdeşlik elemanı, mevcuttur; sonuncusu her üretecin yönünü basit biçimde ters çevirir. Üreteç yönlerinin bu tersinirliğinden kaynaklanan uygunluğun ikiye bir doğasından ayrı olarak O(2, 4) konformal gruptur. O, $w - v = 0$ 5–düzlemini koruyan 10–boyutlu bir alt grup içerir ve bu $\mathbb{M}$'ye ait *Poincaré grubu*nu verir.[33.7] Aslında bu argüman, olağan bir küreye ilişkin konformal dönüşümlerin O(1, 3) Lorentz grubunun bir gerçekleştirilmesini sağladığını gösterirken §18.5'te yaptığımız şeyin, *bkz.* Şekil 18.8, yalnızca daha yüksek boyutlu bir versiyonudur.

33.4 Yüksek boyutlu spinörler olarak burgaçlar

Burgaçlar tüm bunlar içinde nereye oturmaktadır? Bir (Minkowski uzay) burgacı açıklamanın en kısa fakat en açık olmayan, yolu onun O(2, 4)'le ilgili *indirgenmiş bir spinör* (ya da yarı spinör) olduğunu söylemektir. (Bu açıklamanın matematiksel özlü anlatımıyla ilgili olarak telaşlanmayın; daha fiziki bir tabloyu kısa süre içinde vereceğim!) İndirgenmiş spinör kavramının kısa bir hatırlatması için §11.5'e bakın. Sözde ortogonal bir $O(n-r, n+r)$ grubunun üzerinde etkidiği $2n$–boyutlu bir uzay için indirgenmiş spinör uzayı 2^{n-1}–boyutludur. Eldeki durumda $n = 3$'tür (ve $r = 1$), böylece indirgenmiş spinörlere ilişkin *burgaç uzayı* olarak adlandırılan 4–boyutlu bir uzaya sahip oluruz.[696]

Ne yazık ki bu tür bir tanımlamayla, bir burgacın neye benzediğiyle ilgili açık bir geometrik ve fiziki tablo elde edemeyiz. Dahası, herhangi bir $2(n-1)$ çift uzayzaman boyutu sayısıyla ilgili olarak, §33.2'nin sonuna doğru söylenmiş olan şeye karşın, bir burgaç kuramının var olması gerek-

---

[33.5] Yerel herhangi bir ara kesit tarafından sunulan konformal metrik niçin bir başkası tarafından sunulanla aynıdır? $\mathcal{T}$'nın bu biçimde tanımlanan noktaları niçin üstte verilen tanımla uyumludur? *İpucu*: *Bkz.* §18.4 ve Şekil 18.8.

[33.6] Niçin?

[33.7] Bir 6×6 matrisle ilgili, onun O(2, 4)'e ilişkin sonsuz küçük bir elemanı temsil etmesine ilişkin koşul nedir? Bu matrislerin hangileri sonsuz küçük Poincaré dönüşümleri verir?

[696] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1984.

tiğini görürüz. Üstteki oluşumu $\mathcal{K}$'yle ilgili olarak genelleriz ve $2(n-1)$–boyutlu Minkowski uzayzamanının tıkızlaştırılması, önceki gibi biri metrikte eksi ve diğeri artı işarete sahip iki yeni, v ve w koordinatını sunduğumuz üstte verilene benzer bir biçimde işler. Burgaç uzayı artık 2^{n-1} boyutludur. Bu, artık indirgenmiş spinör kavramına sahip olmamamız dışında, ayrıca bir $2n-1$ tek uzayzaman boyutu sayısıyla ilgili olarak da işler. "Burgaçlar" olarak kabul edilmesi gereken şey artık 2^n–boyutlu tüm spin uzayıdır. Bununla birlikte burgaçlara ilişkin önemli bir özellik, diğer bir deyişle (§§33.7,12,14'te daha ayrıntılı tartışacağımız) aynal doğaları, tek boyutlu durumda kaybolur. Yalnızca indirgenmiş spin uzaylarına geçtiğimizde esas olarak (sol–elli ve sağ–elli kavramların burgaçlara ilişkin farklı tanımlar alacağı şekilde; *bkz.* §33.7) aynal bir formalizmi gerçekleştiririz ve bu yolla zayıf etkileşimlere (§25.3) ilişkin aynal görünümlerin sonuç olarak birleştirilebileceğini umabiliriz. Bir burgaçla ilgili bu genel n–boyutlu tanımın, burgaç kuramını bu derece etkili kılan kilit fiziki (ve holomorfik) özellikleri niçin kaybettiğini de daha sonra göreceğiz.

Burgaçlar uzayzaman dönüşümlerine ilişkin aktif bir grupla (konformal grup) ilgili olduğundan, uzayzaman noktaları grubun etkisi altında diğer uzayzaman noktalarına gönderilmek üzere, evrensel olarak uzayzamandaki tekil noktalar yerine uzayzamanla ilgili kavramlar olarak görülür. Vektör, tensör ya da olağan spinörler gibi yerel nicelikler bir noktaya etki eden simetri grubuyla ilgilidir, *bkz.* §14.1; *örn.* döndürme ya da Lorentz grubu (§14.8). Bu durum burgaçları olağan vektör, tensör ya da spinörlerden ele alınması daha zor hale getirse de, bu evrensellik, yalnızca daha önceden verili olan bir uzayzaman manifolduna atıfta bulunarak tanımlanmak yerine uzayzamanın yerini alması amaçlanan bir formalizm aradığımızda bir avantaja sahiptir. §33.2'de belirtildiği üzere burgaç kuramının temel amaçlarından biri aslında böylesi bir formalizm elde etmektir. Bu tür bir yaklaşımın temel olumsuzluğu, konformal grup türündeki şeyler $\mathcal{M}$'ye ilişkin bir simetri biçiminde görünmediğinde böylesi bir formalizmin genel bir eğik $\mathcal{M}$ uzayzamanına nasıl uygulanabildiğini görmenin zorluğudur. §§33.11, 12'de burgaç kuramının bu tür bir güçlükle nasıl dikkat çekici bir biçimde anlaştığını göreceğiz.

Bir burgacın üstteki, O(2, 4)'e ilişkin indirgenmiş bir spinör biçimindeki tanımı bize burgaç kuramsal fikirler ve güdü hakkında yalnızca çok sınırlı bir bakış açısı sunar. Henüz belirtildiği gibi, burada bu yaklaşımla ilgili özel olarak 4–boyutlu herhangi bir şey yoktur ve bu yaklaşım bize, burgaç kuramıyla Doğaya ilişkin daha derin bir kuram arayışımızda ilerlemek üzere niçin bir kılavuzluk sunuyormuş gibi ilgilenilmesi gerektiğiyle ilgili açık hiçbir işaret vermez. Burgaç kuramının bu anlamda ne yap-

maya çalıştığını daha bütünlüklü değerlendirmek üzere 29 ve 30. bölümlerin mesajını anımsayalım. Uygun kuantum kütleçekim birliğinin fizikle ilgili temelden yeni bir bakış açısı arayışının temel bir amacı olmak zorunda oluşu genel olarak kabul edilirken o bölümlerin mesajı kuantum (alan) kuramına ilişkin kuralların kutsal dokunulmazlıkta kalmayıp, tıpkı geleneksel uzayzaman tablolarımızla ilgili geometride olduğu gibi, esnemesinin gerektiği bir gelişme arama gerekliliğimizdir. Yine de kuantum mekaniksel ilkelerdeki güzelliğin yanı sıra açıkça pek çok doğru da bulunur ve bunlar basitçe terk edilmemelidir. Burgaç kuramında, QFT kurallarını yüklemek yerine, bu kurallara bakılır ve Einstein'ın algısındakilerle birbirine geçen, görelilik ve kuantum mekaniği arasında gizli harmoniler arayan özellikler çıkarılmaya çalışılır. Daha önce belirtildiği üzere, kılavuzlukla ilgili kilit bir eleman bu kitabın pek çok yerinde belirtilmiş olan karmaşık sayı sihridir. Bir diğeri, yüksek boyutlara ya da başkaca imzalara yönelik genellemelerinden daha çok, Lorentzci 4–uzay Einstein kuramıyla olan özel harmonidir.

Lorentzci 4–uzayla ilgili olarak bu anlamda bu kadar özel olan şey nedir? §18.5 ve 33.2'de vurgulandığı üzere bir gözlemciye ait gökküresi doğal bir konformal yapıya sahiptir ve bir Riemann küresi biçiminde yorumlanabilir. Bu genel doğaya sahip bir şeyin esasen, gökküresi her zaman konformal bir manifold yapısına sahip olmak üzere, *herhangi* (sıfır olmayan) sayıda uzay ve zaman boyutunda ortaya çıktığı, zihinde canlanmalıdır.[33.8] Bununla birlikte Lorentzci 4–boyutlu duruma özgü olan şey bu konformal manifoldun *karmaşık* bir manifold (Riemann küresi) olarak doğal şekilde yorumlanabilmesidir; herhangi başka bir uzay ve zaman boyutunda ortaya çıkmayacak olan bir özellik. Bu gerçeğin önemi nedir? Burgaç kuramında karmaşık sayılara ilişkin sihirden sonuna dek yararlanılır. Burgaç uzayının yalnızca karmaşık bir manifold olduğu değil fakat bu karmaşık manifoldun dolaysız bir fiziki yoruma sahip olduğu da ortaya çıkar. Aslında genel sonuçlar bize, "burgaç uzayı"nın herhangi bir tür karmaşık uzay[697] olduğu durumların yalnızca, uzay boyutları ve zaman boyutları arasındaki fark 4'e bölündüğünde 2 kalanını veren durumlar olduğunu söyler. Bunun ne orijinal Kaluza–Klein kuramındaki ne 10 ya da 11–boyutlu süper kütleçekim kuramlarındaki ne 10–boyutlu süpersicim kuramındaki ne de 11–boyutlu süper kütleçekim ya da M–kuramındaki ne de hatta 12–boyutlu F–kuramındaki (bu durumda 2 zaman boyutu söz konusu olduğundan) durum olmaması dikkate değerdir!

[33.8] Nedenini açıklayın.

[697] *Bkz.* Harvey, 1990; Penrose ve Rindler, 1986; Budinich ve Trautman, 1988.

33.5 Temel burgaç geometrisi ve koordinatları

Olağan Minkowskici 4–uzayıyla ilgili genel bir burgaca ilişkin fiziki ya da geometrik yorum nedir? $\mathbb{M}$'ye ait bir R noktasıyla ilgili standart t, x, y, z Minkowski koordinatlarını kullanmak, ışık hızını birim, $c = 1$, olarak kabul etmek üzere, şeyleri açıklamanın en kolay yoludur. $\mathbb{M}$'ye ilişkin bütünlüklü $\mathbb{T}$ burgaç uzayı, standart karmaşık Z^0, Z^1, Z^2, Z^3 koordinatlarının kullanılabileceği, *4–boyutlu karmaşık bir vektör uzayıdır*. Bu koordinatlara sahip bir $\mathbf{Z}$ burgacının,

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ Z^1 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y & t-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix}$$

kilit matris bağıntısı geçerli olduğunda (matris notasyonu için *bkz.* §13.3) R uzayzaman noktasıyla *birlikte gelen*, ya da R'nin $\mathbf{Z}$'yle birlikte gelen, bir şey olduğunu söyleriz. Düz uzay burgaç geometrisiyle ilgili temel tüm ifadeler bu bağıntı sonucunda gelir![33.9]

§12.8'in notasyonuyla uyumlu biçimde, Z^α (soyut) indis notasyonu zaman zaman $\mathbf{Z}$ burgacını göstermek üzere ($\mathbf{Z}$'nin bileşenleri standart çerçevede Z^0, Z^1, Z^2, Z^3 olmak üzere) kullanılacaktır. Her $\mathbf{Z}$ ya da Z^α burgacı ($\mathbb{T}$'nin bir elemanı), *ikili* burgaç olan bir $\bar{\mathbf{Z}}$ karmaşık eşleniğine ($\mathbb{T}^*$ ikili burgaç uzayının elemanı) sahiptir. $\bar{\mathbf{Z}}$, indis biçiminde *alt* indisli $\bar{Z}_\alpha$ olarak yazılır ve bileşenleri (standart çerçevede)

$$(\bar{Z}_0, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3) = (\overline{Z^2}, \overline{Z^3}, \overline{Z^0}, \overline{Z^1})$$

olur. Bu notasyon olasılıkla bir miktar kafa karıştırıcıdır. Sol taraftaki dört nicelik (karmaşık sayılar) basit biçimde ikili $\bar{\mathbf{Z}}$ burgacının bileşenleridir. Sağdaki dördüyse, sırasıyla Z^2, Z^3, Z^0, Z^1 karmaşık sayılarının karmaşık eşlenikleridir. Böylece $\bar{\mathbf{Z}}$'nin $\bar{Z}_0$ bileşeni $\mathbf{Z}$'nin Z^2 bileşeninin karmaşık eşleniğidir, vb. Karmaşık eşleme gerçekleştirilirken ilk ikisinin sonraki ikisiyle yer değiştirdiğine dikkat edin. $\bar{\mathbf{Z}}$ ikili bir burgaç olduğundan onun, orijinal $\mathbf{Z}$ burgacıyla (Hermitsel) skaler çarpımını (*bkz.* §13.9 ve §22.3), (kareli) *burgaç normu*nu elde etmek üzere oluşturabiliriz:

$$\begin{aligned} \bar{Z}\bullet Z &= \bar{Z}_\alpha Z^\alpha = \bar{Z}_0 Z^0 + \bar{Z}_1 Z^1 + \bar{Z}_2 Z^2 + \bar{Z}_3 Z^3 \\ &= \overline{Z^2} Z^0 + \overline{Z^3} Z^1 + \overline{Z^0} Z^2 + \overline{Z^1} Z^3 \\ &= \tfrac{1}{2}(|Z^0 + Z^2|^2 + |Z^1 + Z^3|^2 - |Z^0 - Z^2|^2 - |Z^1 - Z^3|^2). \end{aligned}$$

[33.9] Bu denklemi olağan cebirsel notasyonla tam olarak yazın.

Bu son denklem $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha$ Hermitsel ifadesinin §13.9'la uyumlu biçimde $(++--)$ imzasına sahip olduğunu gösterir.[33.10] (Burgaç uzayı simetrisi SU(2, 2) grubunun O(2, 4) grubuna, §13.10'da değinilmiş olan, yerel denkliğini gösterir.) Üstte verilmiş olan kilit rastlantısal ilişkiden, Z^α'nın gerçel $\mathbb{M}$ Minkowski uzayındaki bir olaya yalnızca, kendisine ilişkin norm *yok olduğunda*, $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha = 0$, özgü olabileceğini görürüz.[33.11] $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha = 0$ olduğunda $\mathbf{Z}$ burgacı *boş*tur deriz.

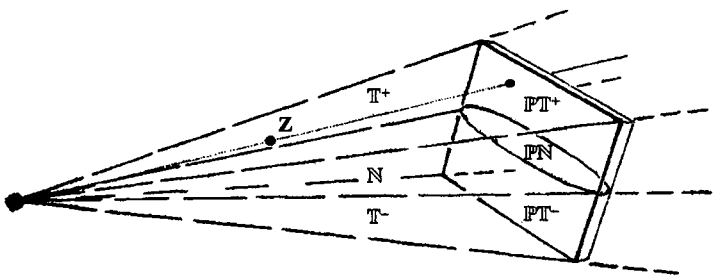
§33.2'deki tartışmayla bağlantı kurmak üzere, ilk olarak, karmaşık $\mathbb{T}$ vektör uzayından oluşturulan karmaşık izdüşüm 3–uzay olan $(\mathbb{CP}^3)$ *izdüşümsel* $\mathbb{PT}$ burgaç uzayıyla tanışmamız gerekir. (İzdüşüm uzaylarıyla ilgili genel bir tartışma için §15.6'ya bakın.) Burgaç kuramının çoğu en kolay biçimde $\mathbb{T}$ yerine $\mathbb{PT}$ biçiminde ifade edilir. Z^0, Z^1, Z^2, Z^3 sayıları artık $\mathbb{PT}$'yle ilgili, bağımsız üç

$$Z^0 : Z^1 : Z^2 : Z^3$$

oranının $\mathbb{PT}$'yee ait noktaları işaretlemeye hizmet edeceği şekilde, *türdeş koordinatlar* sağlar. *Boş* izdüşüm burgaçları, kendisiyle ilgili burgaç normunun yok olduğu,

$$\bar{Z}_\alpha Z^\alpha = 0,$$

gerçel 6–boyutlu $\mathbb{PT}$ uzayının gerçel 5–boyutlu alt uzayı olan $\mathbb{PN}$ uzayını oluşturur.



Şekil 33.11 $\mathbb{T}$ burgaç uzayı sözde Hermitsel bir netriğe sahip karmaşık bir vektör uzayıdır. $\mathbb{PT}$ izdüşüm burgaç uzayı (bir $\mathbb{CP}^3$) $\mathbb{T}$'deki ışınların (1–boyutlu alt uzaylar) uzayıdır. Böylece bir $\mathbf{Z}$ burgacı (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) koordinatlarına sahip olursa $Z^0 : Z^1 : Z^2 : Z^3$ oranları $\mathbb{PT}$'deki ilgili noktayı belirler. Gerçel 7–boyutlu (boş burgaçlara ilişkin: $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha = 0$) $\mathbb{N}$ alt uzayı $\mathbb{T}$ burgaç uzayını (pozitif burgaçlara ilişkin: $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha > 0$) $\mathbb{T}^+$ ve (negatif burgaçlara ilişkin: $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha < 0$) $\mathbb{T}^-$ karmaşık 3–uzayına böler. Bu uzaylara ilişkin ilgili izdüşüm versiyonları ($\mathbb{M}^\#$'deki ışık ışınlarını temsil eden) gerçel 5–boyutlu $\mathbb{PN}$ ve iki karmaşık 3–manifold (kütlesiz parçacıkların pozitif sarmallığını temsil eden) $\mathbb{PT}^+$ ve (kütlesiz parçacıkların negatif sarmallığını temsil eden) $\mathbb{PT}^-$'dir.

[33.10] Bu son ifadeyi doğrulayın; imzayı bize niçin söylediğini açıklayın.

[33.11] Bunu gösterin; ters taraftan $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha = 0$ olursa böylesi bir olayın Z^2 ve Z^3'ün her ikisi de yok olmamak koşuluyla her zaman var olabileceğini gösterin.

Bu denklem ayrıca $\mathbb{T}$ vektör uzayındaki izdüşümsel olmayan sıfır burgaçlarına ilişkin gerçel 7–boyutlu $\mathbb{N}$ alt uzayını da tanımlar. $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha > 0$ olduğunda *pozitif* burgaçlara ilişkin $\mathbb{T}^+$ uzayını, $\bar{Z}_\alpha Z^\alpha < 0$ olduğunda *negatif* burgaçlara ilişkin $\mathbb{T}^-$ uzayını elde ederiz. $\mathbb{PT}^+$ ve $\mathbb{PT}^-$ izdüşüm uzayları buna bağlı olarak tanımlanır. *Bkz.* Şekil 33.11 (ve Şekil 33.6'yle karşılaştırın).

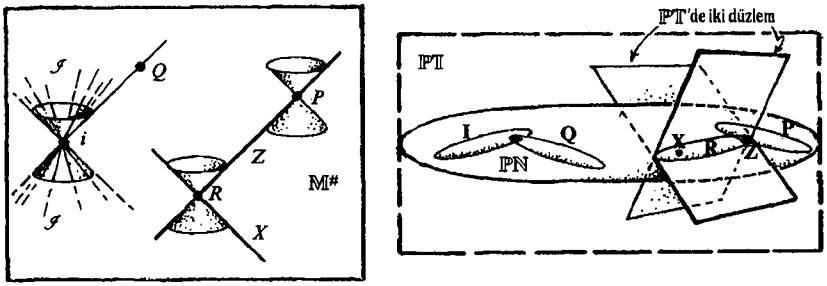
$\mathbb{PN}$ ve $\mathbb{M}$ arasındaki, bu bölümün başında verilmiş kilit rastlantısal ilişkinin bir sonucu olan ve Şekil 33.5'te gösterilmiş olan geometrik ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişkiden, sıfır olmayan aynı $\mathbf{Z}$ burgacına (zorunlu olarak bir boş burgaç) özgü olan $\mathbb{M}$'ye ait iki P, R noktasının (olaylar) birbirinden *boş–ayrık* olmak (diğer bir deyişle P ve R'nin her birinin bir diğerinin ışık konisi üzerinde bulunmak) zorunda olduğu dolaysız olarak görülebilir. Buradan $\mathbf{Z}$'nin bir *ışık ışını*, $\mathbb{M}$'deki boş düz çizgi, tanımladığı sonucuna ulaşılır çünkü $\mathbb{M}$'nin $\mathbf{Z}$'ye özgü olan tüm noktaları karşılıklı olarak boş ayrık olmak zorundadır. *Bkz.* Şekil 33.12. Dahası, λ sıfır olmayan herhangi bir karmaşık sayı olmak üzere, Z^α'yı λZ^α'yle değiştirirsek $\mathbf{Z}$ burgacı aynı ışık ışınını temsli eder. Bir (sıfır olmayan) boş izdüşüm burgacına özgü olayların geometrik yeri aslında bir ışık ışınıdır; fakat $Z^2 = Z^3 = 0$ olan özel durumda bunu açık biçimde yorumlamak zorunda oluruz çünkü $\mathbb{M}$'de Z^α'ya özgü gerçek hiçbir nokta elde etmeyiz, yine de böylesi bir boş burgacı hâlâ *sonsuzdaki bir ışık ışını*nı ($\mathbb{M}$ yerine $\mathbb{M}^\#$'de bulunan, $\mathcal{I}$'ya ait bir üreteç) açıklar biçimde değerlendirebiliriz.[33.12]

Şimdi ters durumu inceleyelim. R olayını t, x, y, z koordinatlarıyla sabitleyerek, R'ye özgü $\mathbf{Z}$ burgaçları uzayının Z^0, Z^1, Z^2, Z^3 bileşenli çizgisel iki türdeş bağıntı tarafından tanımlandığını görürüz. Bu çizgisel bağıntıların her biri $\mathbb{PT}$'de bir *düzlem* tanımlar ve *kesişimleri* ($\mathbb{PT}$'de, her iki bağıntıyı da sağlayan noktalar kümesi) bize böylece, gerektiği üzere (§§ 15.4, 6) Riemann küresi olan, $\mathbb{PT}$'deki, aslında $\mathbb{PN}$'de bulunan, bir $\mathbf{R}$ izdüşüm çizgisini (bir $\mathbb{CP}^1$) verir. Böylece $\mathbb{M}$'ye ait noktalar (olaylar), burgaç uzayında $\mathbb{PN}$ izdüşüm çizgileriyle gösterilir. $Z^2 = 0 = Z^3$ olduğunda, $\mathbb{PN}$'de, $\mathbf{I}$ olarak değindiğimiz belirli bir izdüşüm çizgisi elde ederiz. Bu özel çizgi, sonsuzdaki $\mathcal{I}$ ışık konisinin tepesi olan i noktasını temsil eder. $\mathbb{PN}$'de $\mathcal{I}$'ya ait herhangi başka bir Q noktası $\mathbf{I}$'yla kesişen bir $\mathbf{Q}$ izdüşüm çizgisiyle gösterilir.[33.13] Durum Şekil 33.12'de gösterilmektedir.

Bu karmaşık yapıların (standart uzay ve zaman boyutu sayısına sahip) Minkowski uzayını temsil etme biçimleri oldukça dikkat çekicidir. Minkowski uzayını, $\mathbb{PN}$'yi birincil ve $\mathbb{M}$'yi ikincil yapı biçiminde kabul

[33.12] Bu paragrafın değerlendirmelerini açık biçimde gösterin.

[33.13] Niçin?



(a) (b)

Şekil 33.12 Burgaç uygunluğuyla ilgili rastlantı ilişkisi tarafından verilen $\mathbb{M}^{\#}$ ve $\mathbb{PN}$'deki temel geometrik yer. (a) $\mathbb{PN}$'de bir **Z** noktasını (boş izdüşüm burgacı). **Z**'ye özgü olan $\mathbb{M}^{\#}$ noktaları (*örn.* P, R), böylesi tüm noktalar birbirine göre boş ayrık olduğundan, bir ışık ışını oluşturur. R'ye özgü olan ($\mathbb{PT}$'deki iki karmaşık düzlemin kesişimi üzerinde bulunan) $\mathbb{PN}$ noktaları (*örn.* **Z**, **X**), Riemann küresi olan bir karmaşık izdüşüm çizgisi oluşturur. Z ışık ışını üzerinde boş ayrık olan, $\mathbb{M}^{\#}$'ye ait p ve R noktaları tekil **Z** noktasında kesişen ilgili **P** ve **R** Riemann kürelerine sahiptir. (Bu Riemann kürelerini, onların ayrıca $\mathbb{PT}$'ye ait izdüşüm geometrisinde düz izdüşüm çizgileri olmaları gerçeğiyle uyuşmak üzere oldukça uzatılmış biçimde çizdim!) Bu Riemann kürelerinin özel biri, $\mathbb{M}^{\#}$'deki i noktasını temsil eden **I**'dır. i noktası uzaysal/zamansal sonsuzu belirtir; sonsuzdaki $\mathcal{I}$ ışık konisinin tepesidir. $\mathbb{PN}$'de $\mathcal{I}$'ya ait herhangi başka bir Q noktası **I**'yla kesişen bir **Q** izdüşüm çizgisiyle gösterilir.

ederek, $\mathbb{PN}$'de (ya da yalnızca sonlu uzayzaman noktalarını istersek $\mathbb{PN} - \mathcal{I}$'da) bulunan karmaşık çizgilerin uzayı olarak yeniden yorumlayabiliriz. Bu, ışık ışınlarını uzayzaman noktalarının kendilerinden daha öncelikli olarak kabul etmek anlamına gelir. Z ve X ışık ışınlarının *kesişimi* $\mathbb{PN}$ üzerindeki, $\mathbb{PN}$'ye ait ilgili **Z** ve **X** noktalarını içeren bir izdüşüm çizgisinin varlığınca gösterilir ve gördüğümüz üzere, P ve R iki uzayzaman noktasının *boş ayrık* olma koşulu $\mathbb{PN}$'deki ilgili **P R** izdüşüm çizgilerinin kesişmesi koşulunca temsil edilir (Şekil 33.12). Böylece burgaç uzayının, fiziki geometriyle ilgili olarak, normal uzayzaman tablosundan bütünüyle farklı bir bakış açısı sunduğunu görürüz. Olağan uzayzaman noktaları $\mathbb{PN}$'deki Riemann küreleri biçiminde gösterilir. $\mathbb{PN}$'ye ait noktalar uzayzamandaki ışık ışınları biçiminde gösterilir. Her durumda da uygunluk yerel değildir. Yine de bir tablodan diğerine kesin geometrik kurallar yoluyla geçiş yapabiliriz.

33.6 Spin yapan kütlesiz parçacıklar olarak burgaç geometrisi

Burgaç kuramı ardındaki en temel güdüleyici fikrin karmaşık sayı sihrinden sonuna dek yararlanmak olduğunu anımsayalım. Büyük (gerçel 4–

parametreli) bir karmaşık izdüşüm çizgileri sistemi içermesine karşın $\mathbb{PN}$'nin kendisi (§33.2'de belirtildiği üzere, tek sayılı gerçel boyuta sahip olduğundan neredeyse hiç olamayacağı gibi) karmaşık bir manifold değildir. Bununla birlikte, yalnızca bir gerçel boyut daha eklendiğinde o hale, diğer bir deyişle (bir $\mathbb{CP}^3$ olan) $\mathbb{PT}$ haline gelir. $\mathbb{PT}$'ye ilişkin bu ek noktaları fiziki olarak doğal ve anlamlı bir biçimde yorumlayabilir miyiz? Dikkat çekici biçimde (§33.2'de hissettirdiğimiz üzere), evet. Gerçek serbest fotonların, basit olarak $\mathbb{M}$'deki ışık ışınları olmaktan daha fazla yapıya sahip olduğunu anımsayın. Bir ışık ışını, sabit bir yönde ışık hızıyla hareket eden noktasal bir parçacığı tanımlar fakat gerçek fotonlar enerji ve spine sahiptir. Şimdilik bunu klasik biçimde düşünebilmekteyiz. Bir fotonun spin yapabilmesinin iki temel yolu, hareket yönünde sağ–elli ve sol–elli olandır (sırasıyla sağ–elli ve sol–elli çizgisel kutuplanmayla tanımlanan pozitif ve negatif sarmallık; *bkz.* §22.7). Bu sarmallığın büyüklüğü her durumda yalnızca $\hbar$'dir. Pozitif sarmallıktaki klasik fotonların, ek boyut fotonun enerjisinden gelmek üzere, $\mathbb{PT}^+$'nın noktaları ve negatif sarmal olanların $\mathbb{PT}^-$'nin noktaları olduğu açığa çıkar. Bu tanımlama ayrıca sıfır olmayan $\frac{1}{2}n\hbar$–spinli herhangi başka bir kütlesiz parçacık için de geçerlidir.

Bu nasıl işler? Burası ayrıntılara girmenin yeri değil fakat temel özellikler şu biçimde özetlenebilir. Bir ilk adım olarak $\mathbf{Z}$ burgacının ilk iki bileşeninin, Z^0 ve Z^1, gerçekten, $\omega^0 = Z^0$ ve $\omega^1 = Z^1$ olmak üzere (*bkz.* §22.8 ve §25.2), ω^A indis biçimine sahip bir $\boldsymbol{\omega}$ 2–spinörünün bileşenleri olduğunu fark etmek faydalıdır. $\mathbf{Z}$'ye ait kalan iki bileşen, Z^2 ve Z^3, $\pi_{0'} = Z^2$ ve $\pi_{1'} = Z^3$ olmak üzere, $\pi_{A'}$ indis biçimine sahip *apreli* bir (ikili) $\boldsymbol{\pi}$ spinörüdür. Bazen

$$\mathbf{Z} = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi})$$

yazıp $\boldsymbol{\omega}$ ve $\boldsymbol{\pi}$'yi $\mathbf{Z}$ burgacının *spinör parçaları* olarak adlandırırız. Karmaşık eşlenik $\bar{\mathbf{Z}}$ burgacı ters biçimdeki spinör parçalarına, diğer bir deyişle

$$\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}),$$

sahiptir, böylece burgaç normu

$$\bar{Z}_\alpha Z^\alpha = \bar{\mathbf{Z}} \bullet \mathbf{Z} = \bar{\boldsymbol{\pi}} \bullet \boldsymbol{\omega} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bullet \boldsymbol{\pi} = \bar{\pi}_A \omega^A + \bar{\omega}^{A'} \pi_{A'}$$

biçiminde ifade edilebilir. $\mathbf{Z}$ burgacı ve t, x, y, z Minkowski koordinatlarına sahip R uzayzaman noktası arasındaki *rastlantı* ilişkisi artık

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{i}\mathbf{r}\boldsymbol{\pi}$$

biçiminde yazılır. Bu, $\mathbf{r}$ (ya da $r^{AA'}$),

$$\begin{pmatrix} r^{00'} & r^{01'} \\ r^{10'} & r^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} t+z & x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y & t-z \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahip olmak üzere, $\omega^A = \mathrm{i}r^{AA'}\pi_{A'}$ ifadesinin yerine kullanılır.

$\boldsymbol{\pi}$ spinörü kütlesiz parçacığın *momentum*uyla, $\bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\pi}$ dış çarpanının kendisine ilişkin 4–momentumu açıklaması anlamında (çelişki yoktur; *bkz.* §14.3), ilgilidir. $\boldsymbol{\omega}$ spinörü parçacığın *açısal momentum*uyla, $\boldsymbol{\omega}$'nın $\bar{\boldsymbol{\pi}}$'yle simetriklenmiş çarpımının parçacığın 6–açısal momentumuna (§18.7, §19.2, §22.12, §32.2) ilişkin karşı–öz ikili parçayı tanımlaması ve $\bar{\boldsymbol{\omega}}$'nın $\boldsymbol{\pi}$'yle simetriklenmiş çarpımının kendisine ait öz ikili parçayı tanımlaması anlamında, ilgilidir.[698] Momentum durumunu aksine *açısal* momentum bir O uzayzaman orijini seçimine bağlıdır ve açısal momentumu zaman zaman *O dolayındaki* açısal momentum olarak adlandırırız. Bu orijin bağımlılık/bağımsızlığı, bir $\mathbf{Z}$ burgacına ait $\boldsymbol{\pi}$ ve $\boldsymbol{\omega}$ spinör parçalarına ait öteleme biçimli davranışta yansıtılır. O orijininin, O'ya göre $\boldsymbol{q}$ konum vektörüne sahip yeni bir Q uzayzaman noktasıyla yer değiştirmesi altında spinör parçalarının

$$\boldsymbol{\pi} \longmapsto \boldsymbol{\pi} \text{ ve } \boldsymbol{\omega} \longmapsto \boldsymbol{\omega} - \mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{\pi}$$

dönüşümlerine[33.14] (üstte gördüğümüz $\boldsymbol{q}$ matris biçimine sahip olarak) uğradığını görürüz. Ayrıca, momentum ve açısal momentumdan oluşturulabilecek olup orijin bağımsız olan bir skaler nicelik de, diğer bir deyişle *s sarmallığı*, söz konusudur. Sarmallığın burgaç normunun yarısı olduğu ortaya çıkar (yukarıdan, bunun yalnızca, $\bar{\boldsymbol{\omega}}\bullet\boldsymbol{\pi}$'nin gerçel parçası olduğuna dikkat edelim):

$$s = \tfrac{1}{2}\bar{Z}_\alpha Z^\alpha = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{Z}}\bullet\mathbf{Z}.$$

Aslında burgaçlar kütlesiz parçacıklarla ilgilenmek üzere, §22.12'deki geleneksel 4–vektör/tensör yaklaşımından çok daha önemli ölçüde özlü bir formalizm sunar. Artık spin halindeki kütlesiz bir klasik parçacık olarak boş olmayan bir burgaçla ilgili (gerçel θ'lı $\mathbf{Z} \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathbf{Z}$ faz ölçeklemesine değin) çok daha belirgin bir fiziki tabloya sahibiz;[33.15] Şekil 33.6'yla karşılaştırın.

Boş olmayan bir burgaca ilişkin hâlâ çok açık bir *geometrik* tabloya sahip değiliz. Bunu, *karmaşıklaştırılmış* $\mathbb{CM}$ Minkowski (ya da tıkızlaştı-

---

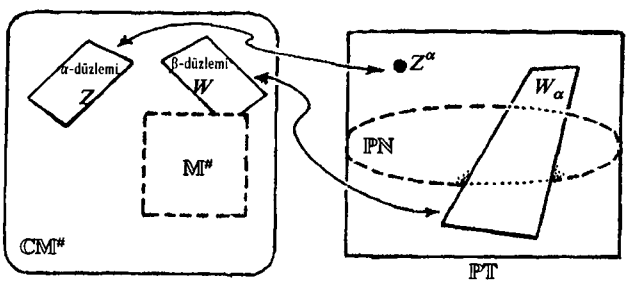
[698] *Bkz.* Huggett ve Tod, 2001.

[33.14] Bir burgaçla uzayzaman noktası arasındaki rastlantı ilişkisinin bu dönüşüm altında korunduğunu gösterin; burgaç normunun korunduğunu gösterin.

[33.15] Bu faz serbestliğinin niçin mevcut olduğunu ve verili $s > 0$ sarmallığındaki bir parçacıkla ilgili olarak parçacık *enerji*sinin niçin $\mathbb{PT}^+$'daki noktanın konumunda şifrelendiğini açıklayın.

rılmış $\mathbb{CM}^{\#}$) uzayını ele almaya hazırsak, t, x, y, z uzayzaman koordinatları artık karmaşık sayı olarak kabul edilmek üzere, elde edebiliriz. Çünkü her zaman herhangi bir (sıfır olmayan) Z^{α} burgacına özgü olan, α–düzlemi olarak adlandırılıp, kendisine tanjant olan bir 2–biçimlinin öz ikili olması anlamında *öz ikili* olan (§32.2), $\mathbb{CM}^{\#}$'ye ilişkin noktaların önemsiz olmayan karmaşık bir 2–boyutlu geometrik yer mevcuttur. Bu α–düzlemi Z^{α}'yı orantılılığa bağlı olarak temsil eder; *bkz.* Şekil 33.13. Benzer biçimde, ikili bir W_{α} burgacı, $\mathbb{CM}^{\#}$'de *karşı*–öz ikili bir karmaşık 2–düzlem olan β–düzlemini tanımlar.[33.16]

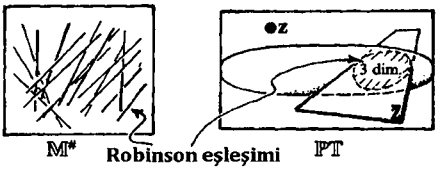
Bu bize şimdiye dek bir burgaca ilişkin yalnızca, *karmaşık* bir uzayzaman geometrik tablosu verdi. Hayalimizde gerçekten canlandırabileceğimiz "gerçel" bir tablo elde edebilir miyiz? $\mathbb{CM}^{\#}$'ye ilişkin gerçellik yapısı kendisine ait *karmaşık eşleme* işleminde içerilir (§18.1); bu, üst burgaç indislerini alt indislerle (diğer bir deyişle burgaçları ikili burgaçlarla) ve "öz ikili"le "karşı–öz ikiliği" yer değiştirmesi gerçeğine uygun olarak α–düzlemlerini β–düzlemleriyle değiştirir. İkili bir burgaç $\mathbb{PT}$'deki bir düzlemi belirlediğinden, karmaşık eşleme noktaların yerini, $\mathbb{PT}$'ye ilişkin izdüşüm geometrisi biçiminde, düzlemlerle değiştirir.[33.17] Bu gerçek bize, boş olmayan bir Z^{α} izdüşüm burgacına ilişkin gerçel uzayzaman geometrisi biçiminde bir tablo elde etme olanağı sağlar. İlk yapmamız gereken Z^{α}'yı



Şekil 33.13 (Genellikle boş olmayan) burgaçlar ve ikili burgaçlara ilişkin karmaşık uzayzaman açıklaması. Herhangi bir sıfır olmayan Z^{α} burgacı için $\mathbb{CM}^{\#}$'de her zaman, kendisine özgü noktalara ilişkin, her yerde öz ikili olup α–düzlemi olarak adlandırılan, karmaşık bir 2–boyutlu geometrik yer söz konusudur. herhangi bir sıfır olmayan W_{α} ikili burgacı için, $\mathbb{CM}^{\#}$'deki kendisine ilişkin noktalar her zaman, karşı–öz ikili olup β–düzlemi olarak adlandırılan 2–boyutlu karmaşık bir düzlem oluşturur. Bu geometrik yerlerde yalnızca, boş burgaçlar ya da ikili boş burgaçlarla ilgili herhangi gerçel noktalar söz konusudur ve böylece gerçel noktalar Şekil 33.12'yle uyumlu biçimde bir ışık ışını oluşturur.

[33.16] Bunu gösterin.

[33.17] Niçin?



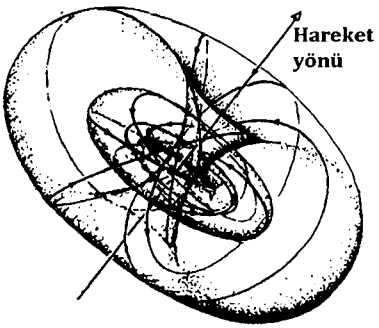
Şekil 33.14 Boş olmayan "gerçel" bir Z^α tablosunu ilk olarak, kendisine ait $\bar{Z}_\alpha$ karmaşık eşleniğine geçip $\mathbb{PT}$'de karmaşık bir izdüşüm düzlemi tanımlayarak elde edebiliriz. Bu düzlem kendisinin $\mathbb{PN}$'yle, gerçel 3–boyutlu bir geometrik yer olan kesişimi tarafından saptanır. Bu geometrik yer $\mathbb{M}^\#$'de Robinson eşleşimi olarak adlandırılan 3–parametreli bir ışık ışınları ailesini tanımlar.

kendisinin, $\mathbb{PT}$'deki karmaşık bir düzlemle ilgili, ikili bir burgaç olan karmaşık eşleniği $\bar{Z}_\alpha$'yla göstermektir. Bu düzlem onun, 3–boyutlu gerçel bir geometrik yer olan $\mathbb{PN}$'yle kesişimi tarafından belirlenir. Bu geometrik yeri $\mathbb{M}$'deki ışık ışınlarına ilişkin 3–parametreli bir aile sağlar biçimde yorumlayabiliriz. Böylece bu ışık ışınları ailesi geometrik olarak Z^α burgacını (orantılılığa bağlı biçimde) temsil eder; *bkz.* Şekil 33.14.

Işık ışınları karışık bir biçimde etrafta bükülür fakat düzenlemeye ilişkin çarpıcı bir tablo elde etmek olasıdır. $\mathbb{E}^3$ zamanına ilişkin bir anı (diğer bir deyişle Minkowski $\mathbb{M}$ uzayzamanı boyunca olağan bir Öklitçi 3–uzay kesitini; "şimdi"yi) ele alın. $\mathbb{M}$'deki herhangi bir ışık ışını $\mathbb{E}^3$'ü, kendisine ekli bir "ok"a sahip bir nokta yoluyla, ok hareket yönünü belirlemek üzere, temsil eder. Tekil **Z** burgacımızı temsil etmek üzere, bu tür ışık ışınlarına ilişkin, *Robinson eşleşimi* olarak adlandırılan, 3–parametreli bir aileyi resmetmemiz gerekir. Şekil 33.15'te, olağan $\mathbb{E}^3$ 3–uzayının tümünü dolduran bir yönlü çemberler ailesi görmekteyiz. $\mathbb{E}^3$'ün her bir noktasında ailemize ilişkin tek bir parçacık olacaktır ve bu parçacık, o noktadan geçen çembere ait yönlü tanjant tarafından belirtilen yönde (ışık hızıyla) hareket eder. Zaman ilerledikçe tüm bu düzenlemenin bir bütün olarak basitçe, tablodaki bir düz çizgi (negatif) yönünde ışık hızıyla yayılması ve bu yayılmanın burgaç tarafından tanımlanan, spin halindeki kütlesiz parçacığın hareketini temsil etmesi, oldukça dikkat çekicidir. Çemberlere ilişkin bu düzenleme esasen S^3 üzerindeki Clifford paralelleri düzenlemesine ilişkin (§15.4) olağan Öklitçi 3–uzaya yönelik stereografik yansıtmadır (§8.3, Şekil 8.7a).

Bu "ışık ışınları"nı fiziki varlıklar olarak düşünmemeliyiz; onlar bize yalnızca (izdüşümsel) bir uzayın geometrik bir gerçekleştirilişini sunar. Bu düzenleme aslında spin halindeki (klasik) kütlesiz parçacıklara ilişkin açısal momentum yapısını şifreler.[699] Kesinlikle yerel olmayan bir tablo-

[699] Uzayzamandaki herhangi bir x olayında belirtilmiş olan iki adet boş yön mevcuttur. Bu aileye ilişkin x'ten geçen ışık ışını yönü ve burgacın temsil ettiği spin halindeki parçacığa iliş-



Şekil 33.15 Robinson eşleşimiyle ilgili bir "enstantane" sunan uzamsal bir resim. ($\mathbb{S}^3$ üzerinde stereografik olarak yansıtılmış, $\mathbb{E}^3$'ün tümünü dolduran 3–parametreli bir çember ailesi olan Clifford paralellleri –ve bir düz çizgi–; bkz. şekiller 8.7a, 15.8.) $\mathbb{E}^3$'ün her bir noktasında, üzerinde bulunduğu (yönlü) çember yönünde ışık hızıyla (bir ışık ışını) düz bir çizgide hareket eden bir parçacık düşünelim. Tüm düzenleme şekildeki düz çizgiye ait (negatif) yönde ışık hızıyla yayılır. Bu, Z^α'yla açıklanan spin halindeki kütlesiz parçacığa ilişkin hareket ve açısal momentumu temsil eder.

dur. Şekil 33.15'te, yarıçapı, spinin parçacık enerjisine bölümüne eşit olan bir en küçük çember söz konusudur. Açık konuşacak olursak bu çemberin merkezi spin halindeki parçacığın "konum"unu temsil eder (fakat bu çemberin geçmişi tam olarak, kütlesiz parçacığın geçmişini temsil eden bir ışık ışını biçiminde düşünülemez çünkü o, Lorentz dönüşümleri altında uygun şekilde davranmaz).[33.18] Başlangıçta "burgaç" ismine sebep olan düzenleme budur.[700]

33.7 Burgaç kuantum kuramı

Bu, düz uzay burgaç kuramına ilişkin temel geometriyi özetler. Bununla birlikte bazı okurlar, geometrik tüm güzelliğiyle birlikte böylesi bir tablonun *fizik*te ilerlememize nasıl yardım etmesi gerektiğini merak etmek konusunda anlaşılır biçimde sabırsız olabilirler. Uzayzaman yapısıyla kuantum mekaniksel ilkeleri birleştirmek üzere burgaç kuramının söylemek zorunda olduğu şey aslında nedir? Şimdiye dek yalnızca, kütlesiz parçacıkları açıklamak üzere bazı "sevimli" geometrik ve cebirsel yolları gördük fakat ne kuantum mekaniksel ne de genel görelilikçi fikirler henüz herhangi bir rol oynamadı. Bunu görmem gerekirdi!

---

kin 4–momentum yönü söz konusudur. Bu iki boş yön, "başat boş yönler"dir, diğer bir deyişle bu parçacığın sahip olduğu x dolayında alınmış açısal momentuma (ait öz ikili ya da karşı–öz ikili parçaya) ilişkin Majorana gösterimiyle (*bkz.* §22.10) tanımlanan yönler. *Bkz.* Wald, 1984; Huggett ve Tod, 1985.

[33.18] Merkezi bulun (§33.5 koordinatlarıyla) ve genel bir Lorentz hız dönüşümü altında nasıl değiştiğini gösterin.

[700] *Bkz.* Penrose, 1975; Penrose, 1987b.

Burgaç kuramının en temel fikrine dönelim. O, tüm uzayzaman kavramlarını $\mathbb{T}$ burgaç uzayınınkilere yardımcı olarak değerlendirmek durumundadır. Bütünüyle karmaşık bir uzay olarak $\mathbb{T}$, karmaşık sayı sihrinden yararlanma potansiyelini kendilerini halihazırda standart uzayzaman çerçevesinde göstermeyen biçimlerde sunar. Buradan hareketle gerçel uzayzaman koordinatları biçiminde tanımlamalar kullanmak yerine daha çok, Z^α karmaşık burgaç değişkenleri kullanılır. Burgaç değişkenleri artık konum ve momentum değişkenlerinin karışımıdır ve şunu sormamız gerekir: standart kuantizasyon kuralının (§21.2),

$$p_a \longmapsto \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x^a}$$

(ya da $x^a \longmapsto -\mathrm{i}\hbar\partial/\partial p_a$), yerini ne alır? Yanıt, *kanonik eşlenik* değişkenler olan x^a ve p_a'yla benzer olarak, §21.2'deki işlemci değişme kuralınca, $p_b x^a - x^a p_b = \mathrm{i}\hbar\delta^a_b$, ifade edildiği üzere, Z^α ve $\bar{Z}_\alpha$ burgaç değişkenleri kanonik eşlenik işlemcileri olarak kabul edilmelidir:

$$Z^\alpha\bar{Z}_\beta - \bar{Z}_\beta Z^\alpha = \hbar\delta^\alpha_\beta.$$

Ayrı ayrı konum ve momentuma benzer biçimde burada Z^α ve $\bar{Z}_\alpha$ kendi aralarında değişir: $Z^\alpha Z^\beta - Z^\beta Z^\alpha = 0$ ve $\bar{Z}_\alpha\bar{Z}_\beta - \bar{Z}_\alpha\bar{Z}_\beta = 0$.[33.19]

Bir taraftan da, $\bar{Z}_\alpha$ ve Z^α'ya ilişkin bu *kuantum* değişmeli olmayışının, bir kuantum burgaç uzayıyla ilgili temel "koordinatlar"ın bu tür değişmeli olmayan varlıklar olduğu gerçeğini daha ciddi biçimde kabul ettiğimizde ortaya çıkabilecek türdeki "geometri"yle ilgili bazı ilgi çekici sorulara neden olduğu belirtilebilir. Klasik olarak, $\mathbb{T}$ burgaç uzayına ilişkin gerçel 8–manifold yapısını ele aldığımızda Z^α ve $\bar{Z}_\alpha$'yi değişmeli bağımsız değişkenler (*bkz.* §10.1) olarak kullanabiliriz. Bu tür bir "kuantum" çiftini, Z^α ve $\bar{Z}_\alpha$, bağımsız koordinatlar olarak kullanmaya girişmek bizi, daha önce üstte, §33.1'de, kısaca tartışılmış olan değişmeli olmayan geometri alanına yöneltir. Bu hattı daha ileriye doğru izlemek de ilginç olabilir; şimdiye dek herhangi birinin buna giriştiğini duymadım.

Şimdi, bir parçacığa ilişkin olağan bir $\psi(\mathbf{x})$ konum uzay dalga fonksiyonunda $\mathbf{p}$ momentum değişkenlerinin yer almayıp bunun yerine momentumun (üstteki gibi) $\partial/\partial x^a$ işlemcisi biçiminde gösterildiğini anımsayalım. Bunun burgaç benzeri nedir? $f(Z^\alpha)$ "burgaç dalga fonksiyonu"muzun "$\bar{Z}_\alpha$'dan bağımsız" olmasına ve $\bar{Z}_\alpha$'nın daha çok $\partial/\partial Z^\alpha$ işlemcisi biçiminde gösterilmesine gerek duyduğumuz görülüyor. Esasen bu doğrudur fakat

[33.19] Hilbert uzayına ilişkin genel değerlendirmelerden, burgaç çeviricisinde hiçbir "i"nin olmaması gerekliliğinin niçin uygun olduğunu görebiliyor musunuz?

"$\bar{Z}_\alpha$'dan bağımsız" olan f gerçekte ne anlam ifade eder? Biçimsel olarak bu "bağımsızlık", (§10.5'ten anımsayacağımız üzere) basit olarak $f(Z^\alpha)$'nin Z^α'ya ilişkin holomorfik bir fonksiyon olduğunu ileri süren Cuachy–Riemann denklemleri olan $\partial f/\partial \bar{Z}_\alpha = 0$ biçiminde ifade edilir.

Bu oldukça çarpıcı ve bir hayli dikkat çekici bir gerçektir. Burgaç dalga fonksiyonları esasen holomorfiktir;,böylece sihirli karmaşık sayı dünyasıyla uygun bağlantı kurabilir. $\bar{Z}_\alpha$ karmaşık eşlenik değişkenlerinin kuantum rolü esasen, holomorfikliğin kuantum düzeyindeki tanımlamada korunacağı şekilde holomorfik bir işlemci olan

$$\bar{Z}_\alpha \mapsto -\hbar \frac{\partial}{\partial Z^\alpha}$$

türev ifadesi biçiminde görünmesidir. Bu, burgaçlara ilişkin kütlesiz bir parçacıkla ilgili momentum ve açısal momentum biçimindeki yorumunun burgaç değişme kurallarıyla uyumlu olmasını, açısal momentum ve momentum çeviricilerinin (§22.12) doğru biçimde ortaya çıkmasını ve üstte verilmiş olan burgaç çeviricileri içinde kapsanmasını güvenceler.[701]

Özel öneme sahip *s sarmallık* niceliği artık, öz değerleri kütlesiz bir parçacık için izin verilen çeşitli olası yarı tamsayı $(\ldots, -2\hbar, -\frac{3}{2}\hbar, -\hbar, -\frac{1}{2}\hbar, 0, \frac{1}{2}\hbar, \hbar, \frac{3}{2}\hbar, 2\hbar, \ldots)$ değerleri olan bir işlemci biçiminde değerlendirilir. Değişmeli olmayış doğru biçimde hesaba katılmak üzere sarmallık işlemcisinin

$$s = \frac{1}{4}(Z^\alpha \bar{Z}_\alpha + \bar{Z}_\alpha Z^\alpha) \mapsto -\frac{1}{2}\hbar(2 + Z^\alpha \frac{\partial}{\partial Z^\alpha})$$

haline gelmesi özellikle dikkat çekicidir.[702], [33.20]

$$\Upsilon = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial Z^\alpha}$$

işlemcisi *Euler türdeşlik işlemcisi* olarak adlandırılır. (Eski dostumuz Leonhard Euler'i özellikle 5, 6, 7 ve 9. bölümlerden anımsıyoruz.) Euler'in gösterdiği üzere, Υ, kendisine ait öz fonksiyonların *türdeş* olması, türdeşlik derecesi öz değer olmak üzere, dikkat çekici özelliğine sahiptir. Bu, u bir sayı olmak üzere,

$$\Upsilon f = uf$$

denkleminin

$$f(\lambda Z^\alpha) = \lambda^u f(Z^\alpha)$$

---

[701] *Bkz.* Penrose, 1968b; Huggett ve Tod, 2001.

[702] *Bkz.* Huggett ve Tod, 2001; Penrose ve Rindler, 1986; Hughston, 1979.

[33.20] s'yle ilgili bu iki ifade arasındaki eşitliği doğrulayın.

türdeşlik özelliğinin geçerli olmasıyla ilgili koşul olması anlamına gelir.[33.21] Bunu, kesin bir S sarmallık değerine sahip kütlesiz bir parçacıkla ilgili burgaç dalga fonksiyonunun (böylece s işlemci ve S öz değer olmak üzere $sf = \hbar Sf$'dir) holomorfik olmanın yanı sıra $-2S-2$ türdeşlik derecesinde olmak zorunda olması izler.[33.22]

Böylece, özellikle, bir fotona ilişkin burgaç dalga fonksiyonu, birisi sol–elli ($S=-1$) bileşeni tanımlayıp 0 türdeşlik derecesinde ve diğeri sağ–elli ($S=1$) bileşeni tanımlayıp -4 dereceli olan iki parçanın toplamı ($S=\pm 1$) olur. Kütlesiz bir parçacık olarak kabul edilen nötrino (sarmallık $-\frac{1}{2}$ olduğundan) -1 türdeşlik derecesinde bir dalga fonksiyonuna sahipken (kütlesiz) bir karşı–nötrinonun dalga fonksiyonu -3 derecesindedir. Kütlesiz bir skaler parçacığın dalga fonksiyonu -2 türdeşlik derecesindedir. Buradaki değerlendirmelerimizle ilgili olarak en önemlisi, düz bir Minkowski ardalanındaki (geçici olarak) 2–spinli kütlesiz bir parçacık olarak kabul etmemiz gereken *graviton* durumudur ($S=\pm 2$). Sol–elli parçası ($S=-2$) 2'inci derece türdeş bir burgaç fonksiyonuna ve sağ–elli parçası da ($S=2$) -6 derecesindeki bir burgaç dalga fonksiyonuna sahiptir.

Bu dengesizlik çarpıcıdır ve esasen burgaç kuramının aynal doğasını gösterir. Kısa süre içinde, genel göreliliği iyice burgaç şemsiye altına sokmaya çalıştığımızda bu dengesizliğin olduğundan özellikle büyük göründüğünü göreceğiz. Şimdilik (çizgisel) burgaç dalga fonksiyonlarının nasıl yorumlandığını anlamaya çalışalım. Dengesizlik bunlarla ilgili olarak hiçbir sorun çıkarmaz ve her şey oldukça pürüzsüz şekilde çalışır. Bununla birlikte –genellikle *burgaç* fonksiyonu olarak anılan– $f(Z^\alpha)$ dalga fonksiyonumuzun nasıl yorumlanması gerektiğiyle ilgili önemli bir incelik söz konusudur. Şimdi bunu görelim.

33.8 Kütlesiz alanlara ilişkin burgaç tanımlaması

Genel spinli serbest bir kütlesiz parçacığa ilişkin dalga fonksiyonunun uzayzaman gösterimiyle ilgili olarak, Scrödinger denklemi *kütlesiz serbest alan denklemi* olarak bilinen belirli bir denkleme çevrilir.[703] Kütlesiz (Dirac–Weyl) nötrino denklemindeki $\frac{1}{2}$–spin durumunda (§25.3) bunun bir örneğini görmüştük. Burada ayrıntılara girmek uygun olmaz fakat §22.8 ve 25.2'de kullanıldığı haliyle, bir kez 2–spinör formalizmini elde ettiğimizde

[33.21] Bunu kanıtlayabiliyor musunuz bakın.

[33.22] Niçin bu değer?

[703] *Bkz.* Dirac, 1936; Fierz, 1938, 1940; Penrose, 1979b.

denklemin kendisini yazmak yeterince basittir. $S = -\frac{1}{2}n$ negatif sarmallığı için $\psi_{AB\ldots D}$ niceliğine sahip oluruz; $S = \frac{1}{2}n$ pozitif sarmallığı için apre indisli $\psi_{A'B'\ldots D'}$ niceliği söz konusu olur. Bunların her biri, kendilerine ilişkin tüm n indislerinde tümüyle simetriktir ve her biri, $\nabla^{AA'}$ yalnızca, (üst indisli biçimde yazılmış; *bkz.* §14.3) olağan ∇^a gradyan işlemcisinin 2–spinöre çevrimi olmak üzere, ilgili

$$\nabla^{AA'}\psi_{AB\ldots D} = 0,\ \nabla^{AA'}\psi_{A'B'\ldots D'} = 0$$

denklemlerini sağlayan pozitif frekansa sahiptir.[33.23] 0 spini için basit olarak, $\Box$ §24.5'te sunulmuş olağan D'Alambert olmak üzere, $\Box\psi = 0$ denklemine sahip oluruz. Aslında, bu denklemlerle ilgili uygun 2–spinör notasyonu bazı inceliklere ışık tutar. $n = 2$ (1–spin) olduğunda bu iki denklem basit biçimde, sırasıyla karşı–öz ikili ve öz ikili durumlarındaki Maxwell serbest alan denklemleri haline gelir.[33.24] $n = 4$ olduğunda, eğrilik düz $\mathbb{M}$ uzayına ilişkin sonsuz küçük bir tedirgeme olarak değerlendirilmek üzere, karşı–öz ikili ve öz ikili parçalara bölünmüş Einstein zayıf alan denklemi haline gelirler.[704]

Bu denklemlerin burgaç fonksiyonlarıyla ilgisi nedir? Dikkat çekici biçimde,[705] basitçe $f(Z^\alpha)$ burgaç kuramından başlayan üstteki kütlesiz serbest alan denklemlerine ilişkin genel pozitif frekans çözümlerini otomatik olarak ortaya koyan açık bir kontür integral ifadesinin (§7.2) mevcut olduğu açığa çıkar. Aslında ifade bu pozitif frekans gerekliliği olmaksızın da, gereklilik burgaç formalizminde §33.10'da göreceğimiz üzere kolayca sağlansa da, mükemmel biçimde iyi çalışır. Burada tüm ayrıntıları vermek uygun olmaz fakat temel fikir, pozitif sarmallık durumunda $f(Z^\alpha)$ ilk olarak, n sefer alınan (bu, n adet apreli indis sağlar) $\boldsymbol{\pi}$'yle (§33.6) çarpılır ya da negatif sarmallık durumunda ilk olarak n sefer alınan (bu, n adet apresiz spinör indisi sağlar) $\partial/\partial\boldsymbol{\omega}$ işlemcisiyle çalıştırılır; daha sonra, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{i}\boldsymbol{r}\boldsymbol{\pi}$ rastlantı bağıntısı ilk olarak $\boldsymbol{\omega}$'nın $\boldsymbol{\pi}$ ve $\boldsymbol{r}$ lehine ortadan kaldırılacağı biçimde dahil edilmek üzere, $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\pi_{0'} \wedge \mathrm{d}\pi_{1'}$ 2–biçimlisiyle çarpılır ve uygun

---

[33.23] Bu denklemleri, $-\frac{1}{2}n$ sarmallığı için, $n-r$ adet 0 ve r adet 1 bulunmak üzere, $\psi_r = \psi_{00\ldots011\ldots1}$ notasyonunu kullanarak ve ∇^{AA}'yı, tıpkı r^{AA} niceliğinin üstte açıklandığı üzere olağan t, x, y, z olağan Minkowski koordinatlarından çevrildiği biçimde ∇^a'ya çevirerek açık biçimde yazın.

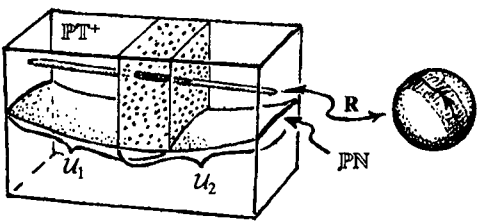
[33.24] $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} - 2\mathrm{i}\mathbf{B}$'yle (*bkz.* §19.2) birlikte $\psi_{00} = C_1 - \mathrm{i}C_2$, $\psi_{01} = -\mathrm{i}C_3$, $\psi_{11} = -C_1 - \mathrm{i}C_2$ olmak ve ilgili ifadeler $\psi_{A\ B}$ için geçerli olmak üzere bunu gösterebilir misiniz bakın.

[704] *Bkz.* Fierz ve Pauli, 1939; Penrose ve Rindler, 1986; Penrose, 1965; Penrose ve MacCallum, 1972.

[705] *Bkz.* Penrose, 1968b, 1969b, 1987; Huggett ve Tod, 2001; Hughston, 1979; Whittaker, 1903; Bateman, 1904, 1944.

bir 2–boyutlu kontür üzerinde integrali alınır. Bu integral π'yi ortadan kaldırır, böylece seçili herhangi bir R uzayzaman noktasında indisli bir $\psi_{\ldots}$ niceliğine ulaşırız (böylece $\psi_{\ldots}$, tek başına r'ye ilişkin bir fonksiyondur). Kontür (sabit her r için) $\omega = ir\pi$ geometrik yerinde; diğer bir deyişle $\mathbb{N}$'deki, R olayını temsil eden $\mathbf{R}$ çizgisi (nin izdüşümsel olmayan versiyonu)[706] içerisinde, bulunmalıdır; *bkz.* Şekil 33.16.

Pozitif frekans koşulu, kontür integralinin, $\mathbf{R}$ çizgisinin $\mathbb{PT}^+$ burgaç bölgesine tümüyle girmeye kalkışmasına izin verildiğinde hâlâ geçerli olması gerekliliğince sağlanır. $\mathbb{PT}$'deki çizgiler §33.6'da gördüğümüz üzere, "karmaşık uzayzaman noktaları"na ve tümüyle $\mathbb{PT}^+$ alt bölgesinde bulunanlar, $\mathbb{CM}$'ye ait *ön tüp* olarak bilinen $\mathbb{M}^+$ alt bölgesindeki noktalara karşılık gelir.[707] Bu konuya §33.10'da döneceğiz. Karışık sarmallıktaki kütlesiz alanlar da –örneğin, sağ–elli ve sol–elli parçaların toplamı olan düzlem kutuplu bir foton– ayrıca, farklı iki sarmallıkla ilgili burgaç fonksiyonları basit olarak eklenmek üzere, bu çerçevede açıklanabilir.



Şekil 33.16 Temel burgaç kontür integrali. $-n-2$ türdeşlik derecesindeki ($\frac{1}{2}n$ sarmallığındaki) bir f burgaç fonksiyonu π'yle n sefer çarpılır (n pozitif) ya da üzerine $\partial/\partial\omega$ işlemcisi tarafından $-n$ defa işlem uygulanır (n negatif), bunlar indisleri sağlar. Daha sonra fonksiyon, $\tau = d\pi_0 \wedge d\pi_1$, 2–biçimlisiyle çarpılır. r konum vektörüne ait seçili herhangi bir R uzayzaman noktasıyla ilgili olarak, $\omega = ir\pi$ rastlantı bağıntısınca tanımlanan $\mathbf{R}$ burgaç uzayı bölgesinde bir kontür integral gerçekleştirilir. Bu, π bağımsızlığı sonucunu verir ve kütlesiz alan denklemlerine ilişkin bir çözümle baş başa kalırız. Örneklenen durumda $\mathbf{R}$, $\mathbb{PT}^+$ burgaç uzayının üst yarısında ve f, $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ açık kümeleri birlikte $\mathbb{PT}^+$nin (ya da $\mathbb{T}^+$) tümünü kapsar biçimde düşünülmek üzere, $\mathcal{U}_1$ ile $\mathcal{U}_2$ kesişiminde holomorfik olarak kabul edilir.

---

[706] Bu, $\mathbb{PN}$'deki $\mathcal{R}$ çizgisini gösteren $\mathbb{C}^2$'dir (Şekil 33.11). Çoğu burgaç kuramcısına, bu kontür integralin tümüyle izdüşümsel bir versiyonu, kendisiyle ilgili olarak 2–biçimli $\tau = d\pi_0 \wedge d\pi_1$ yerine kullanılan 1–biçimli $\iota = \pi_0\, d\pi_1 - \pi_1\, d\pi_0$ ifadesidir. Kontür integrali artık 1–boyutludur ve burada verilmiş olan 2–boyutlu reçeteyle ilişkisi, (bir S^1 çemberiyle verilen) bu kontür boyutlarının burada verilmiş izdüşümsel olmayan versiyonları daha tanıdık izdüşümsel versiyonlara indirgemesidir. Var olan versiyonun bir avantajı onun, karışık sarmallık durumlarının açıklanmasına olanak sağlamasıdır.

[707] *Bkz.* Huggett ve Tod, 2001; Hughston, 1979; Penrose ve Rindler, 1986.

Bu tür bir ifadenin varlığı beni büyüleyici bir biçimde etkiler. Kütlesiz alan denklemlerinin, esasen "saf holomorfikliğe" çevrilerek buharlaştığı görülür. Bu ifadeyi daha dikkatli biçimde incelediğimizde bir burgaç fonksiyonunun nasıl yorumlanması gerektiğiyle ilgili önemli bir incelik bulunduğunu görürüz ve bu çarpıcı biçimde kütlesiz alanlara ilişkin pozitif/negatif frekansa ayırmayla (§33.10) ilgilidir. Bu incelik ayrıca, burgaç fonksiyonlarının kendilerini aktif olarak ortaya koyma biçimleriyle de ilgilidir ve bize eğri burgaç uzaylarını sağlar. Bu incelik nedir? Burgaç fonksiyonlarının gerçekten olağan anlamdaki "fonksiyonlar" olarak değil fakat *holomorfik deste kohomolojisi* olarak adlandırılan şey biçiminde görülmesi gerekliliğidir.[708]

33.9 Burgaç deste kohomolojisi*

Deste kohomolojisi nedir? Fikirler matematiksel olarak epeyce çok yönlü fakat esasen oldukça doğaldır. Burada yalnızca, *ilk* deste kohomolojisi olarak adlandırılan şeyle ilgileneceğiz. Belki de bu kavramı resmetmenin en kolay yolu bir manifoldun, §10.2 ve §12.2'de tartışılıp Şekil 12.5a'da gösterildiği üzere, bir sayıda koordinat yaması şeklinde oluşturulabildiği biçimde düşünmektir. Bir yama çifti arasındaki her bir çakışma üzerinde tanımlanan şey (yamaların *yapıştırılma*sını sağlayan) bir *geçiş fonksiyonu*dur. §12.2 ve Şekil 12.5a'dan bu geçiş fonksiyonlarının yamalar arasındaki üçlü çakışmalarla ilgili belirli tutarlılık koşullarına bağlı olduğunu anımsayalım.

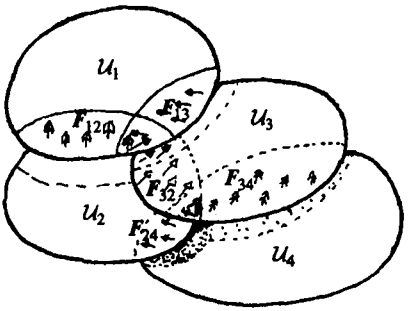
Şimdi bu şekilde oluşturulmuş bir manifoldu, geçiş fonksiyonlarının özdeşlikten yalnızca sonsuz küçük bir farklılık göstereceği biçimde düşünün. *Bkz.* Şekil 33.17. Bir $\mathcal{U}_i$ yamasıyla diğer bir $\mathcal{U}_j$ yaması arasındaki bu sonsuz küçük kayma, $\mathcal{U}_i$ tarafında $\mathcal{U}_j$'yi kaplayıp $\mathcal{U}_i$ yamasının $\mathcal{U}_j$'ye göre nasıl sonsuz küçük biçimde "yön değiştirme"si gerektiğini açıklayan bir $\boldsymbol{F}_{ij}$ vektör alanı tarafından açıklanır. Eşdeğer biçimde $\mathcal{U}_j$'yi de $\mathcal{U}_i$'ye göre fakat ters yönde, yön değiştirir biçimde düşünebiliriz. Bu, $\mathcal{U}_j$ tarafında $\mathcal{U}_i$'yi kaplayan $\boldsymbol{F}_{ji}$ vektör alanı tarafından açıklanır, bu nedenle bu çakışma üzerinde

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$$

ifadesine sahip oluruz (*bkz.* Şekil 33.18a). $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_j$ ve $\mathcal{U}_k$ yamaları arasındaki üçlü çakışma üzerindeki

[708] Burgaç kuramı, bu gerçekleştirmeye ilişkin erken bir önemli girdiyle ilgili olarak, Sir Michael Atiyah'a derinden borçludur.

* Eşbenzeti –yn.



Şekil 33.17 Bir manifoldun birkaç koordinat yamasından nasıl oluşturulduğunu anımsayın (Şekil 12.5a). (Bir yama çifti arasındaki her bir çakışma üzerinde tanımlanan şey yamaların "yapıştırılma"sını sağlayan bir "geçiş fonksiyonu"dur.) Burada, geçiş fonksiyonlarını özdeşlikten yalnızca sonsuz küçük bir farklılık göstereceği biçimde ve böylece bize, her yamanın, kapladığı diğerlerine göre nasıl "yön değiştir"mesi gerektiğini söyleyen, $\mathcal{U}_i$ ve $\mathcal{U}_j$ yamalarının her bir çakışması üzerindeki bie F_{ij} vektör alanınca verilir biçimde ele alırız. ("Yamalar" düz koordinat uzayı üzerindeki $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \ldots$ açık kümeleridir.

$$\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{jk} = \boldsymbol{F}_{ik}$$

tutarlılık bağıntısının geçerli olması gerektiğini görürüz (Şekil 33.18b).[33.25]

Ayrıca basit olarak her yamadaki (sonsuz küçük) koordinat sistemi değişikliği sonucu ortaya çıkan sonsuz küçük "önemsiz" deformasyonlar da söz konusudur. Bunları, belirli her $\mathcal{U}_i$ yamasındaki, kendi üzerinde basit biçimde bu yamanın bütününün "yönünü değiştir"en bir $\boldsymbol{H}_i$ vektör alanınca verilmiş olarak düşünebiliriz. Bu bize, yama çiftleri arasındaki çakışmalar üzerinde, manifoldu değiştirmeyen

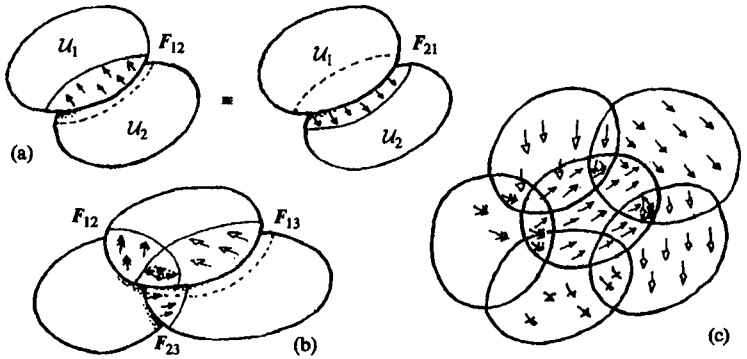
$$\boldsymbol{F}_{ij} = \boldsymbol{H}_i - \boldsymbol{H}_j$$

biçimli "önemsiz" $\boldsymbol{F}_{ij}$'lere ilşikin bir aile verir (Şekil 33.18c).

Bu fikirler bize esasen ilk deste kohomolojisinin kurallarını söyler.[709] Bununla birlikte yalnızca vektör alanlarıyla ilgilenmemiz gerekmez. f_{ij} olağan fonksiyonları da ele alageldiğimiz $\boldsymbol{F}_{ij}$ vektör alanlarının yaptığı aynı şeyi yapar. Yalnızca her f_{ij}'nin $\mathcal{U}_j$ ile $\mathcal{U}_i$'nin kesişiminde tanımlı olmasına ve üçlü her çakışma üzerinde $f_{ij} = -f_{ji}$ ve $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ olmasına ve tüm $\{f_{ij}\}$ derlemesinin, ilgili $\{f_{ij} - g_{ij}\}$ *farkları* derlemesinin her üyesi "önemsiz" $\{h_i - h_j\}$ biçimine sahipse, diğer bir $\{g_{ij}\}$ derlemesine denk olmasına gerek duyarız. $\{f_{ij}\}$'nin, esasen §16.1'de kullanılmış olan "modülo" terimiyle aynı anlama gelen $\{h_i - h_j\}$ biçimindeki *modülo* niceliklerine indirgendiğini söyleriz (ayrıca Önsöz'de anılan "eşdeğerlik sınıfı" kavramına

[33.25] $\boldsymbol{F}_{ij}$'deki karşı–simetrinin üçlü çakışma durumuna ilişkin bir tutarlılık gerekliliği olduğunu gösterin.

[709] Bu, *Čech* kohomolojisi olarak anılan şeydir. Kohomoloji kavramına ulaşmanın ayrıca pek çok diğer yolu da mevcuttur. *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1986; Huggettve Tod, 2001.



Şekil 33.18 F_{ij} vektör alanları bazı gerekliliklere bağlıdır. (a) $\mathcal{U}_j$ ile $\mathcal{U}_i$ kesişiminde $F_{ji} = -F_{ij}$ ifadesine sahip oluruz. Bu, $\mathcal{U}_1$'in $\mathcal{U}_2$ üzerine, $\mathcal{U}_1$ üzerindeki F_{12} vektörünce gösterildiği biçimde, hareketi olarak örneklenir. Bununla birlikte ilgili aynı hareket $\mathcal{U}_2$ üzerinde, bunun negatifi tarafından gerçekleştirilir. (b) $F_{ij} + F_{jk} = F_{ik}$ üçlü çakışma durumu gösterilmektedir. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ve $\mathcal{U}_3$ üçlü kesişmesi üzerinde $\mathcal{U}_1$'in $\mathcal{U}_2$ üzerindeki F_{12} hareketi, $\mathcal{U}_1$'in $\mathcal{U}_3$ üzerindeki F_{13} hareketiyle $\mathcal{U}_3$'in $\mathcal{U}_2$ üzerindeki F_{32} hareketinin toplamına eşittir. (c) Yamaların tümü kendi bireysel bütünlükleri içinde yön değiştirirse bunun (her yamadaki koordinat değişimi dışında) hiçbir etkisi olmaz. Bu, toplam yön değişiliğinin, $F_{ij} = H_i - H_j$ hiçbir anlamının olmadığı ve "çarpanlarına ayrılması" gerektiğini gösterir.

da bakın). Aslında kohomoloji kuramında ilgilenilebilecek fonksiyon sınıfı (f_{ij} ya da h_i) son derece genel olabilir. Burgaç kuramında normalde holomorfik fonksiyonlarla ilgilenilir. Bu bize, "holomorfik deste kohomolojisi" kavramını verir.

Bu kohomoloji fikri özel olarak burgaç fonksiyonlarına uygulanır. Aslında bir "burgaç fonksiyonu"nu, genellikle, basit biçimde tek bir holomorfik f fonksiyonu olarak değil fakat tekil her f_{ij}, açık $\mathcal{U}_i$ ve $\mathcal{U}_j$ kümelerinin bir çifti arasındaki çakışma üzerinde tanımlanmak üzere, holomorfik $\{f_{ij}\}$ fonksiyonlarının bir *derlemesi* tarafından sunulur biçimde düşünmemiz gerekir. Burada $f_{ji} = -f_{ij}$ olur, üçlü çakışma üzerinde $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ ifadesine sahip oluruz ve bu açık $\{\mathcal{U}_i\}$ kümeleri derlemesinin bütünü ele alınan burgaç uzayına ilişkin tüm Q bölgesini kapsar. Q üzerindeki *ilk kohomoloji elemanı* (kaplayan $\{\mathcal{U}_i\}$'ye göre), bu $\{f_{ij}\}$ derlemesi, h_i $\mathcal{U}_i$ üzerinde tanımlamak üzere $h_i - h_j$ biçimindeki niceliklerin indirgenmiş modülosu, biçiminde gösterilir. f_{ij} fonksiyonları derlemesi, kohomoloji elemanı *olarak* değil fakat gizemli "eleman"ı göstermenin bir yolunu sağlar biçimde düşünülmelidir. f_{ij}'yi, bu ilk kohomoloji elemanının *temsilcileri* olarak adlandırırız.

Bununla birlikte kohomolojinin kesin tanımıyla ilgili olarak ayrıca Q bölgesine ilişkin gittikçe daha da incelen kaplamaların limitini almayı hesaba katmak zorundayız. Şans eseri bize, *holomorfik* deste kohomolojisiy-

le ilgili olarak, $\mathcal{U}_i$ yeterince basit türdeki *Stein* kümeleri olarak adlandırılan kümeler olduğunda inceltme işlemini durdurabileceğimizi söyleyen teoremler mevcuttur.[710] (Holomorfik ilk deste kohomolojisi herhangi bir Stein kümesinde her zaman ortadan kaybolur.) Böylece, kaplamalara ilişkin ilgimizi her $\mathcal{U}_i$'nin bir Stein kümesi olmasıyla sınırlarsak Q üzerinde tanımlı bir kohomoloji elemanına atıfta bulunurken "$\{\mathcal{U}_i\}$ kaplamasına göre" dememize gerek kalmaz. Kohomoloji kavramı Stein kaplamasıyla ilgili belirli bir seçime bağlı değildir. Bir kohomoloji elemanı Q üzerinde tanımlanıp böylesi hangi kaplama kullanılırsa kullanılsın aynı biçimde ortaya çıkan bir "şey"dir.[711] Bu dikkat çekici gerçek (holomorfik) deste kohomolojisi *sihri*nin parçasıdır!

Tüm bunlar §33.8'de ele aldığımız burgaç fonksiyonları ve kontür integrallerine nasıl uygulanır? En basit durum yalnızca, birlikte ele alınan burgaç uzayı bölgesini örten iki yama, $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ söz konusu olduğunda ortaya çıkar. Şu halde hesaba katılacak yalnızca bir tek fonksiyon mevcuttur ve bu §33.8'deki "burgaç fonksiyonu"dur: $f(Z^\alpha) = f_{12} = -f_{21}$. Deste kohomolojisiyle ilgili üstteki kurallar uyarınca, fark üstteki anlamda *önemsiz*se, diğer bir deyişle, h_1 holomorfik fonksiyonu evrensel olarak $\mathcal{U}_1$ ve h_2 evrensel olarak $\mathcal{U}_2$ üzerinde tanımlı olmak üzere,

$$f - g = h_1 - h_2$$

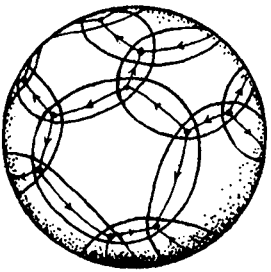
olursa, $f(Z^\alpha)$ $g(Z^\alpha)$'ya *denk*tir deriz. f'ye uygulanan uygun kontür integralinin aslında g'ye uygulananla, fonksiyonlar bu anlamda denk olduklarında, aynı olduğunu göstermenin basit bir konu olduğu açığa çıkar. Bununla birlikte bazen daha karışık yamamaları ele almak gerekir. Esasen burgaç fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik le ilgili üstteki "kohomoloji kuralları" kontür integral ifadelerinin sağladığı yanıtları korumaya yönelir. Buradaki kontür integrali kavramı artık "dallanmış kontür integrali" kavramına, her çakışma bölgesinde bir dala sahip olmak üzere, genellenmek zorundadır. Bu, Şekil 33.19'da gösterilmektedir.[712]

Kohomolojiye ilişkin önemli bir özellik onun *esasen yerel olmayı*şıdır. Bir Q bölgesinde tanımlı bir kohomoloji elemanına sahip olabiliriz. Böylece o elemanın Q'da içerilmiş daha küçük bir Q' bölgesiyle sınırlanışını hesaba katmak anlam kazanır. Kohomolojiye ilişkin yerel olmama özelliği, Q'daki yeterli derecede küçük herhangi bir Q' alt bölgesiyle ilgili olarak

[710] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1986. Gunning ve Rossi, 1965, daha kapsamlı bir tartışma sunar.

[711] *Bkz.* Gunning ve Rossi, 1965; Penrose ve Rindler, 1986.

[712] Penrose ve Rindler, 1986.



Şekil 33.19 Kendisiyle ilgili kaplamanın ikiden fazla kümeden oluştuğu burgaç fonksiyonlarının uzayzaman değerlendirmesine uygulanabilir olan (Riemann küresi üzerindeki) "dallanmış bir kontür".

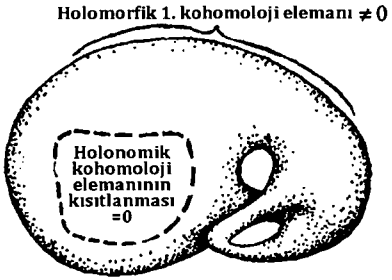
elemanın, o eleman, Q' üzerinde verili f_{ij} için Q''da her zaman $f_{ij} = h_i - h_j$ olacak şekilde h'lerin bulunabilmesi anlamında sınırlandığında, zorunlu biçimde *yok olması* gerçeğinde belirtilir.

Burgaç fonksiyonlarıyla ilgili bu yerelsel olmayış bize, f_{ij} tarafından belirli bir noktada edinilmiş değere yüklenecek herhangi bir önem olmadığını söyler. Aslında, o noktayı çevreleyen yeterince küçük bir açık bölgeyle sınırlanabiliriz ve kohomoloji elemanının bütünüyle yok olduğunu görürüz; *bkz.* Şekil 33.20. Burgaç fonksiyonlarınca (ilk kohomoloji elemanları olarak değerlendirilip) gösterildiği üzere bu yerelsel olmayış, EPR etkileri ve kudolanıklığa (§23.10) ilişkin yerel olmayan özelliklerin heyecan uyandırıcı biçimdeki anımsatıcısıdır. Bana göre burada perde arkasında devam etmekte olan, bir gün EPR olgusuna ilişkin gizemli yerel olmama doğasına anlam kazandırabilecek fakat böyleyse henüz tümüyle açıklanmaya muhtaç olan, bir şey söz konusudur.

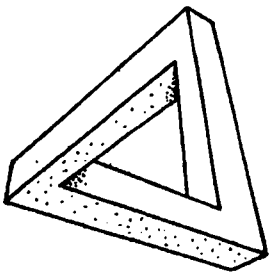
Bu "kohomoloji elemanı"nı Q uzayı üzerinde tanımlanan, biraz Q üzerinde tanımlanmış fakat temel olarak yerel olmayan bir fonksiyona benzer bir "şey" olarak düşünmeliyiz. Bu tür bir "şey"e ilişkin örnek esasen, §§15.2, 5'te tanımlanan, Q üzerindeki tüm bir (karmaşık) vektör demetidir. Bir demete ilişkin tanımda, demetin taban uzayının (burada Q) yeterince küçük bir parçası üstünde yer alan parçasının, yalnızca topolojik bir çarpım (*krş.* §15.2) olmak anlamında "önemsiz" olduğunu anımsayalım. (*Bkz.* Şekil 15.3) Bu, ilk kohomoloji elemanımızı yeterince küçük bir bölgeyle sınırlarsak onun ayrıca "önemsiz" hale geleceği, diğer bir deyişle yok olacağı, gerçeğiyle ilgili bir örnektir. Bu nedenle, bir kohomoloji elemanında ifade edilen "bilgi" temel olarak yerel olmayan karaktere sahip bir şeydir.

Belki de kohomoloji kavramını özel olarak bir grafik yoluyla gösteren temel bir örnek sunmak, yalnızca basit bir durum içinde olsa da, faydalı olur. Zaman zaman "tribar" olarak anılan bir "olanaksız nesne" çizimiyle ilgili Şekil 33.21'e bakın.[713] Çizimin açık biçimde gösterdiği "3–boyutlu

[713] *Bkz.* Penrose, 1991.



Şekil 33.20 Bir kohomoloji elemanı her zaman daha küçük bir bölgeyle kısıtlanabilir. Bununla birlikte bölge yeteri kadar küçükse kohomoloji her zaman yok olur. Bu, kohomolojinin yerelsel olmayışını gösterir.



Şekil 33.21 Bir "olanaksız nesne"ye (bir "tribar") ait çizim. Yerel olarak çizimin temsil ettiği şeyle ilgili olanaksız herhangi bir şey söz konusu değildir. "Olanaksızlık", çizimin yeterince küçük herhangi bir bölgesinde kaybolan, bir kohomoloji elemanıyla ölçülür.

nesne"nin olağan Öklitçi uzayda var olamayacağı açıktır. Yine de *yerel olarak* çizimle ilgili olanaksız herhangi bir şey söz konusu değildir. Olanaksızlık yerel olmamayla ilgilidir ve çizimde yeterince küçük bir bölge ele alınırsa yok olur. Aslında, böylesi bir çizimdeki bu "olanaksızlık" kavramı belirli bir kohomoloji elemanı olarak ifade edilebilir.[714, [33.26]] Bununla birlikte bu, $\{f_{ij}\}$ fonksiyonları sabitler olarak kabul edilmek üzere, oldukça basit türde bir kohomolojidir.

Burada deste kohomolojisiyle ilgili yalnızca temel bazı fikirlere değindim. Matematikte bu fikirlere ilişkin, tümü holomorfiklikle ilgili olmayan, pek çok uygulama söz konusudur. Burgaç kuramında temel olarak ilgilenilen "desteler" holomorfik fonksiyonlar biçiminde ifade edilenlerdir ve kohomoloji kuramında bu belirli bağlamda özel bir sihir söz konusudur. (Açık konuşmak gerekirse "deste" terimi ilgilenilen türdeki fonksiyonla ilişkilidir fakat deste kavramı aslında yalnızca olağan fonksiyonlar yerine çok daha genel biçimde uygulanır.)[715] Kohomolojinin kullanımına ilişkin,

---

[714] *Bkz.* Penrose, 1991.

[33.26] Bunu yapabilir misiniz bakın: çizimi, her biri bireysel olarak tutarlı bir 3–uzay yapısını temsil eden, örtüşen bir miktar çizim haline parçalayın ve bu 3–uzay yapısının gözlemcinin gözünden uzaklığının logaritmasını kullanarak $\{f_{ij}\}$'yi hesaplayın.

[715] *Bkz.* Penrose ve Rindler, 1986; Gunning ve Rossi, 1965; Griffiths ve Harris, 1978; Chern, 1979; Wells, 1991.

örneğin sicim kuramında (§31.4) ortaya çıkan Calabi–Yau uzayları çalışmasında önemli olan bazılarını da içeren, farklı pek çok çeşit söz konusudur. Ayrıca, deste kohomoloji elemanlarını tanımlamanın, çok farklı görünümlerine karşın, her biri matematiksel olarak denk biçimde gösterilebilecek olan oldukça farklı başkaca pek çok yolu da mevcuttur.[716] Bana göre (deste) kohomoloji, gösterilmesi seçilebilecek herhangi belirli bir biçimden çok öteye giderek –$\mathbb{C}$ karmaşık sayı sisteminin kendisi gibi– "kendi hayatına" sahipmiş gibi görünen, mükemmel bir Platoncu kavram (§1.3) örneğidir.

33.10 Burgaçlar ve pozitif/negatif frekans bölme

QFT'de son derece temel olan *pozitif frekans* koşulunu burgaç kuramıyla nasıl birleştiririz? §9.5'ten S^2 Riemann küresinin güney ve kuzey S^- ve S^+ yarı kürelerine bölündüğü biçimin bize, S^1 ekvatoru üzerinde tanımlı bir fonksiyonun pozitif ve negatif frekanslı parçalara bölünmesi olanağını sağladığını anımsayın. Pozitif frekanslı parça S^-'ye ve negatif frekanslı parça S^+'ya genişler (Şekil 33.22a). İzdüşümsel burgaç uzayı buna uygun bir şeyi, kütlesiz alanlara kendi bütünlüklerinde dolaysızca uygulanan evrensel bir biçimde gerçekleştirir. Bunu Riemann küresiyle $\mathbb{PT}$ izdüşümsel burgaç uzayı arasındaki, S^2 Riemann küresi üzerindeki bir fonksiyonun benzeri $\mathbb{PT}$ üzerindeki bir ilk kohomoloji olmak üzere, dolaysız bir benzeşme uyarınca gerçekleştirir. S^1 ekvatorunun benzeri $\mathbb{PN}$ uzayı olmalıdır ve $\mathbb{PN}$'nin (bir $\mathbb{CP}^3$ olan) $\mathbb{PT}$'yi, tıpkı S^1'in (bir $\mathbb{CP}^1$ olan) S^2'yi uygun bir şekilde[717] iki yarı küreye, S^- ve S^+, böldüğü aynı biçimde, iki yarıya, $\mathbb{PT}^+$ ve $\mathbb{PT}^-$, böldüğüne dikkat edelim (Şekil 33.22b).

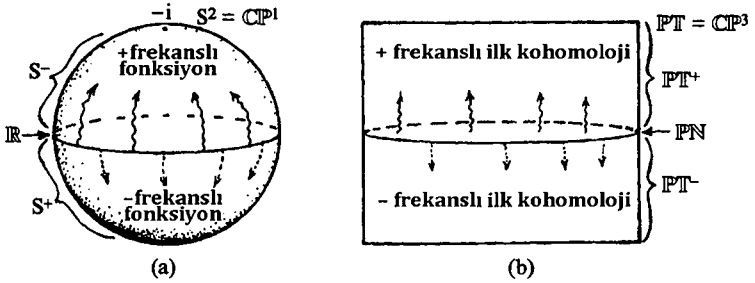
Daha açık olarak S^1 ya da S^- ya da S^+ üzerinde tanımlı olağan bir (karmaşık) fonksiyonun benzeri sırasıyla $\mathbb{PN}$ ya da $\mathbb{PT}^+$ ya da $\mathbb{PT}^-$ üzerinde tanımlı bir ilk kohomoloji elemanıdır. $\mathbb{M}$ üzerindeki (tam anlamıyla $\mathcal{M}^\#$ üzerindeki) kütlesiz alanlar $\mathbb{PN}$ üzerindeki ilk kohomoloji elemanları olarak gösterilir. Bunların her biri (esasen eşsiz biçimde) $\mathbb{PT}^+$'ya genişleyen bir elemanla $\mathbb{PT}^-$'ye genişleyen bir elemanın toplamı olarak ifade edilebilir. İlki pozitif frekanslı kütlesiz bir alanı ve ikincisi negatif frekanslı bir alanı tanımlar.[718] Uzayzaman terimleriyle, alana ait bu pozitif frekanslı parça,

---

[716] Eastwood vd., 1981, yanı sıra not 33.38'deki kaynaklara bakın.

[717] Burada + ve –'nin ters çevrilmesinin herhangi bir anlamı bulunmamaktadır. Bu yalnızca notasyonla ilgili tuhaf bir kazadır. *Bkz.* §9.2.

[718] Burada önemli olan belirli ayrıntılar söz konusudur. Orijinal alan analitik değilse (C^ω değil), ($\mathbb{M}$ üzerindeki) bu alanların §9.7'deki anlamda hiper fonksiyonel oldukları artaya çıkabilir, *bkz.* Bailey vd., 1982.



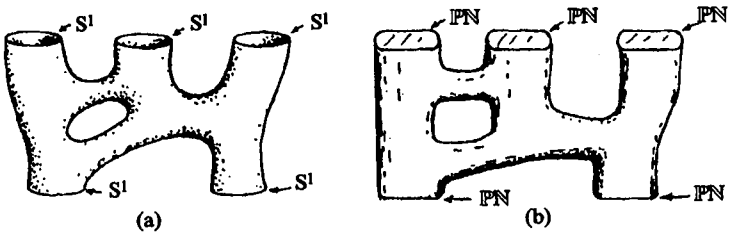
Şekil 33.22 S^2 (= $\mathbb{CP}^1$) Riemann küresiyle $\mathbb{PT}$ (= $\mathbb{CP}^3$) izdüşümsel burgaç uzayı arasındaki bir benzerlik. (a) S^2'nin gerçel $\mathbb{R}$ ekseni üzerinde tanımlı karmaşık bir fonksiyon holomorfik olarak burada S^- kuzey yarı küre olarak gösterilen şeye genişleyerek kendisine ait pozitif frekanslı parçaya ve S^+ güney yarı küreye genişleyerek negatif frekanslı parçaya bölünür. (Riemann küresi burada $\mathbb{R}$ ekvator olacak fakat − i kuzey kutbunda ve i güney kutbunda olacak biçimde çizilir; şekiller 8.7 ve 9.10 ve §9.5'le karşılaştırın.) (b) $\mathbb{PN}$ üzerinde tanımlı (ve kütlesiz bir alanı gösteren) bir ilk kohomoloji elemanı holomorfik olarak izdüşümsel burgaç uzayının $\mathbb{PT}^+$ üst yarısına genişleyerek kendisine ait pozitif frekanslı parçaya ve $\mathbb{PT}^-$ alt yarısına genişleyerek negatif frekanslı parçaya bölünür.

ça, §33.8'den anımsayacağımız, burgaç uzayında $\mathbb{PT}^+$'daki izdüşüm çizgileriyle gösterilen noktalardan oluşan $\mathbb{CM}^\#$'ye ilişkin $\mathbb{M}^+$ bölgesi olan *ön tüp* içinde tanımlanmalıdır. Bunlar $\mathbb{CM}^+$'da, konum vektörleri zamansal ve geçmişe işaret eden sanal kısımlara sahip (karmaşık) noktalardır.[33.27]

$\mathbb{PT}$ ve Riemann küresi arasındaki bu benzerlik burgaç kuramsal fikirlerin sicim kuramına ait olan bazılarıyla bir benzerlik bulabilmesine ilişkin olası bir yola yöneltir. §§31.5, 13'ten, Riemann yüzeylerinin o kuramdaki "sicim geçmişleri"ni göstermek üzere kullanıldığını anımsayın. Riemann küresi bu tür yüzeylerin en basitidir fakat çeşitli sayıda "kulba" (yüksek cins Riemann yüzeyleri, *bkz.* §8.4) sahip yüzeyler sicim geçmişlerinin daha genel türlerini göstermek üzere devreye sokulur. Bu Riemann yüzeyleri kulplara ek olarak ayrıca (S^1 sınırlarına sahip) "delikler"e de sahip olabilir (*bkz.* Şekil 31.5). Benzerlik kurarak,[719] buna uygun biçimde "kulplar" ve ayrıca ($\mathbb{PN}$'nin kopyası olan sınırlara sahip) "delikler" edinen $\mathbb{PT}$ uzayına ilişkin genellemeler ele alınabilir. Bunlar "tuzlu kraker burgaç uzayları" olarak adlandırılır ve QFT'nin bir biçimi bu uzaylara dayanarak geliştirilebilir (*bkz.* Şekil 33.23). Şimdiye dek bu fikirlere ilişkin konum tam anlamıyla öğrenilmiş değildir.

[33.27] Rastlantı denkleminden, $\mathbb{CM}$'ye ilişkin bir R noktasıyla ilgili karmaşık bir r^a konum vektörünün, r^a ancak ve ancak geçmişi işaret eden ve zamansal olursa $\mathbb{PT}^+$'daki izdüşümsel bir çizgi tarafından gösterilebileceğini gösterin.

[719] *Bkz.* Hodges vd., 1989.



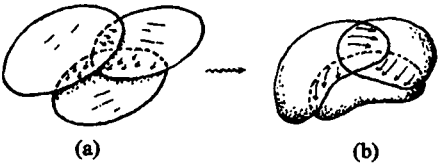
Şekil 33.23 Riemann küresinin kulpların yanı sıra sonlu büyüklükte "delikler"e de sahip olabildiği yüksek cinsten Riemann yüzeylerine genellenmesine dayanan (delikler dış bilgi beslemesinin yapıldığı yeleri gösterir; *bkz.* Şekil 31.5) konformal alan kuramı (sicim kuramı türü bir model). (b) Riemann yüzeylerine karşılık gelen bir biçimde "kulplar" ve ayrıca sınırları ℙℕ'nin kopyaları olan "delikler" ("tuzlu kraker burgaç uzayları") edinen ℙ𝕋 genellemesini işe koşan bir burgaç versiyonu.

Tarihi olarak pozitif frekans gerekliliği –ve ℙℕ'nin ℙ𝕋'yi böylesi iki yarıya bölmesiyle ilgili özellik– burgaç kuramının, kütlesiz alanların holomorfik ilk deste kohomolojisi biçiminde bir burgaç açıklamasına sahip olduğunun keşfinden 12 yıldan daha fazla süre önce 1963'te, başlangıçtaki kurgulanışında kilit bir güdü sağlamıştır.[720] Burada yine, özel olarak uzayzamanın Lorentzci imzaya sahip dört boyutluluğundan kaynaklanan bir özelliğe sahip olmamız çarpıcıdır. Ayrıca burgaç kuramının bu görünümünde, –"sıfırıncı" kohomoloji elemanları olan– olağan fonksiyonlar ya da ikinci ya da daha yüksek dereceli kohomoloji elemanları yerine ilk kohomoloji elemanlarının bir rol oynaması da özeldir. Daha yüksek dereceli kohomoloji elemanları da mevcuttur (ve burgaç kuramında oynayacak bir role sahiptir) fakat burgaç kuramı için temel olup ilk kohomolojiye özgü bir şey söz konusudur. Çünkü yalnızca bu nicelikler burgaç kuramına ilişkin *deformasyonlar* üretmekte dolaysız bir role sahiptir. Şimdi bunu görelim.

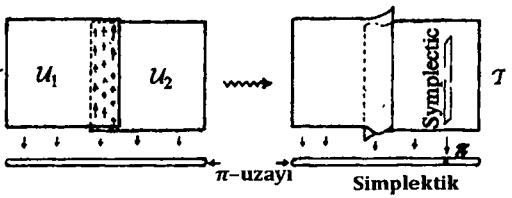
33.11 Çizgisel olmayan graviton

Şimdiye dek ele aldığımız kohomoloji elemanları (burgaç fonksiyonları), basit olarak (burgaç) uzayı "üzerine boyanmış" olmaları anlamında tümüyle "edilgen" olarak düşünülmelidir. Bu onların, yalnızca uzayzaman üzerinde bulunan uzayzaman alanlarını açıklayıp diğer alanları etkilememeleri gerçeğine karşılık gelir. Aktif bir etkiyi nasıl sağlayabildiklerini görmek üzere burgaç uzayı üzerindeki "boya"nın, uzay artık bozulmuş hale

[720] *Bkz.* Penrose, 1987b.



Şekil 33.24 Bir ilk kohomoloji vektör alanı elemanı "edilgen"dir (diğer bir deyişle uzayda henüz "boyanmış"). Aktif bir etkiye sahip olabilmesi için, her çakışma üzerindeki bir üs almanın sonucu olarak "boyanın kuruduğu"nu düşünün. Bu, bir yamanın diğeri üzerinde, sonlu bir bozulma ya da "eğik uzay" veren, sonlu bir "kayma"sı sonucunu doğurur.



Şekil 33.25 Şekil 33.24'teki fikri (iki yamaya sahip) karşı–öz ikili kütleçekime ilişkin burgaç tanımlaması durumunda uygulayın. Vektör alanı, f 2 türdeşlik derecesinde olmak üzere, $(\partial f/\partial\omega^0)\partial/\omega^1 - (\partial f/\partial\omega^1)\partial/\omega^0$ olur. Eğik bir $\mathcal{T}$ burgaç uzayı (parçası) elde ederiz. $\mathcal{T}$'nin, π uzayına evrensel bir yansıtması mevcuttur. Bu yansıtmaya ilişkin her lif, π uzayının kendisindeki gibi karmaşık bir simplektik 2–uzaydır.

gelecek şekilde "kurumakta ol"duğunu düşünelim (Şekil 33.24). Bunun nasıl olabildiğini görmek üzere, daha önceki f_{ij} edilgen burgaç uzayımızı uygun bir biçimde bir F_{ij} vektör alanıyla ilgili olarak düşünürüz. "Yamaları" bu vektör alanları yönünde sonsuz küçük bir miktarda "birbiri üzerinde kaydır"arak "boyayı kurutma"ya ve sonsuz küçük biçimde "eğik" bir burgaç uzayı oluşturmaya başlarız. Burgaç uzayına ilişkin sonlu bir deformasyon elde edilene (boya tümüyle kuruyana!) dek bu deformasyonun "üssünün alın"dığını (§14.6) hayal edebiliriz.

Bu işlemin başarılı şekilde uygulandığı ilk durum karşı–öz ikili durumundakiydi.[721] Sonsuz küçük (zayıf alan) durumunda $S = 2$ sarmallığında kütlesiz bir alana sahibiz, böylece türdeşlik derecesiyle ilgili üstteki $-2S - 2$ denklemini kullanarak 2 türdeşliğinde bir $f(= f_{ij})$ burgaç fonksiyonuna sahip oluruz. Burada, basit olması için yalnızca, her biri, §33.5'teki standart koordinatlara sahip $\mathbb{T}$ düz burgaç uzayınının bir parçası olarak kabul edilen $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ yamalarının bulunduğunu varsayarız. f'den oluşturulan gerekli F vektör alanının

[721] *Bkz.* Penrose, 1976a, 1976b; Ward, 1977; Penrose ve Ward, 1980; Penrose ve Rindler, 1986.

$$F = \frac{\partial f}{\partial \omega^0}\frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f}{\partial \omega^1}\frac{\partial}{\partial \omega^0}$$

olduğu açığa çıkar. f'ye ait türdeşlik derecesi 2'nin, izdüşümsel burgaç uzayı üzerinde etkiyecek şekilde, sıfır dereceli türdeşliğe sahip bir işlemci vermek üzere iki diferansiyel işlemcininkinin yerini tam olarak tuttuğuna dikkat edin.[33.28]

Şimdi, bir yamanın diğeri üzerindeki bu sonsuz küçük yer değişiminin üssünü aldığımızı düşünün (*bkz.* Şekil 33.25). Bu durumda *eğik* bir $\mathcal{T}$ burgaç uzayı (parçası) elde ederiz. Sonsuz küçük yama bağıntımızdaki π türevleri yokluğu, bir yamadaki burgacın diğer yamada eşleştiği burgaçla aynı π parçasına sahip olmak zorunda olduğunu ima eder. Bunu, π spinörünü yamalanmış tüm $\mathcal{T}$ uzayından "dışa yansıtma" işleminin $\mathcal{T}$'nin bütünü üzerinde uyumlu olduğu sonucu izler. Bunun anlamı, $\mathcal{T}$'nin, π spinörleri uzayına evrensel bir yansıtmasının söz konusu olmasıdır. Hem $\mathcal{T}$ hem de π uzayına ilişkin "sıfır elemanları"nı göz ardı edelim (ya da tercihen çıkaralım). Böylece $\mathcal{T}$'nin π uzayı üzerindeki bir tür lif demeti olduğunu görürüz (*bkz.* §15.2).[722] Her bir *lif*in (herhangi belirli bir π'nin ters görüntüsü, diğer bir deyişle $\mathcal{T}$'nin π "üstünde" yer alan parçası), π uzayının kendisinde olduğu gibi (*bkz.* §14.8; burada bu bir alan ölçüsünün yalnızca 2–manifold üzerinde tanımlanması anlamına gelir), simplektik yapıya sahip karmaşık bir 2–manifold olduğu ortaya çıkar; üstte verilmiş olan yamanın özel bir biçimi tarafından sunulan bir gerçek.

Bu eğik burgaç uzayından "uzayzaman" kavramına nasıl geri döneriz? Yanıt, her bir "uzayzaman noktası"nın eşsiz biçimde, $\mathcal{T}$ lifine ilişkin bir holomorfik ara kesite karşılık gelmesidir. (Holomorfik ara kesit kavramı §15.5'te verilmişti; o burada π uzayından $\mathcal{T}$'ye bir geri gönderimdir.) Bu niçin akla uygun bir tanımlamadır? Düz $\mathbb{T}$ durumununda bunun anlamı, (olasılıkla karmaşık) R uzayzaman noktasını π'yi $\mathbf{Z} = (ir\pi, \pi)$'ye gönderen bir gönderim tarafından gösterilmesidir. Bu ara kesit, düz $\mathbb{PT}$ izdüşümsel burgaç uzayı terimleriyle basit olarak, §33.5'te R'yi göstermek üzere kullandığımız $\mathbb{PT}$'deki düz $\mathbf{R}$ çizgisidir (bir Riemann küresi, $\mathbb{CP}^1$).[33.29] Bir "uzayzaman noktası"yla ilgili bu tanımın $\mathcal{T}$ eğik burgaç uzayı için de tam olarak aynı biçimde çalışması oldukça çarpıcıdır. Tıpkı düz durumdaki gi-

[33.28] Sıfır derecesi bunun niçin $\mathbb{PT}$'deki bir bölge üzerinde bir vektör alanı vereceğini ima eder? *İpucu*: F'nin Y'a ilişkin çeviricisi nedir?

[722] Oluşumdaki tüm işlemler holomorfik olmasına rağmen bunun *holomorfik* bir lif demeti olmadığına ilişkin teknik bir incelik söz konusudur çünkü o, yerel olarak π uzayında, katı biçimde holomorfik bir çarpan uzayı değildir. $\mathcal{T}$, bir *holomorfik lifleme* olarak adlandırılır. *Bkz.* Penrose, 1976a, 1976b.

[33.29] Bu çizginin $\mathbb{PT} - \mathbf{I}$'ya ilişkin bir "ara kesit" olmasındaki anlamı açıklayın.

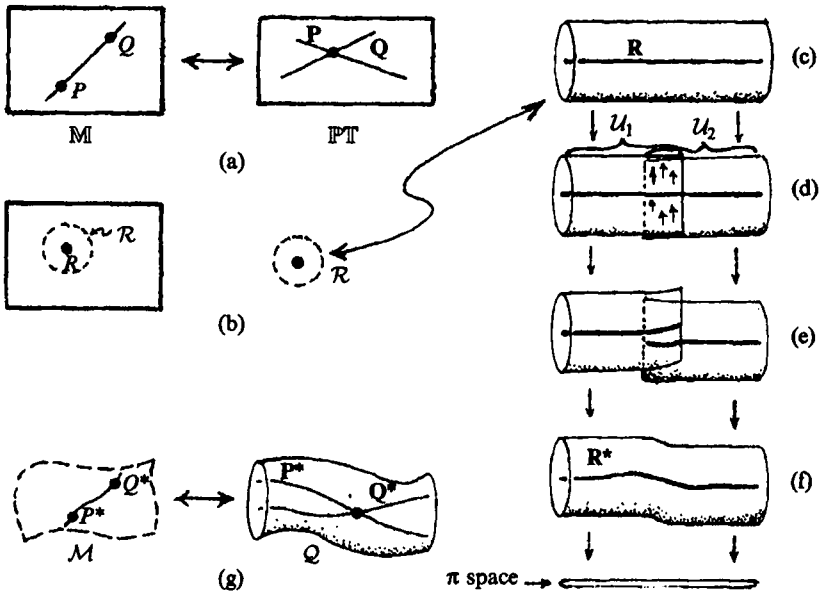
bi, holomorfik ara kesitlere ilişkin karmaşık 4–parametreli bir ailenin mevcut olduğunu görürüz.[723] ($\mathbb{P}\mathcal{T}$ izdüşüm uzayında bu, $\mathbb{CP}^1$ çizgilerine ilişkin karmaşık 4–parametreli bir ailedir.) Böylece bu aileyi temsil etmek üzere, 4–boyutlu karmaşık bir $\mathcal{M}$ manifolduna sahip oluruz. 4–boyutluluk Japon matematikçi Kunihiko Kodaira'nın teoremlerinin sonucu olan dikkat çekici bir gerçektir;[724] karmaşık yüksek boyutlara ilişkin karmaşık sihrin bir örneği. (Tek başına *gerçel* manifoldlara ilişkin deneyim bu tür şeylere ilişkin *sonsuz*–parametreli bir aile bulunduğu beklentisine yönlendirmiş olabilir; fakat §15.5'te holomorfik ara kesitlerin son derece sınırlanmış olduğunu belirtmiştik.)

Şekil 33.26'da bu işlem (izdüşüm tanımlamasında) grafik biçimli olarak gösterilmektedir. Karmaşık $\mathbb{CM}$ Minkowski uzayzamanının uygun bir $\mathcal{R}$ bölgesiyle başlayın. Basit olması için $\mathcal{R}$'yi yalnızca, $\mathbb{CM}$'deki bir R noktasının uygun bir (açık) komşuluğunda olarak kabul edelim. $\mathbb{PT}$ izdüşüm uzayının ilgili Q bölgesi, her biri R'nin bir noktasını temsil eden çizgi ailesince taranan bölgedir. Bu, $\mathbb{PT}$'deki $\mathbf{R}$ çizgisinin R'yi (Şekil 33.26a) temsil eden (*tüp biçimli* komşuluğu olarak adlandırılan) bir komşuluğu olacaktır. Q'nun topolojisini $S^2\times\mathbb{R}^4$ olarak kabul edebiliriz. S^2, $\mathbf{R}$ çizgisinin –ya da eşdeğer olarak izdüşümsel π uzayının– topolojisinden gelir ve $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{R}$'nin her noktasının yakın komşuluğundaki çapraz parçayı açıklar. S^2'yi artık, çakışmaya ilişkin bir "yaka"nın mevcut olacağı şekilde hafif biçimde genişletilmiş iki yarıküre ayrılmış olarak düşünürüz ve daha sonra Q'yu, bu hafifçe genişletilmiş yarı kürelerin her biri üzerinde bulunan örten (açık küme) $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ parçalarından oluşmuş olarak değerlendiririz (Şekil 32.26b). Deforme edilmiş izdüşümsel $\mathbb{P}\mathcal{T}$ burgaç uzayı bölgemizi elde etmek üzere, üstteki vektör alanı uyarınca $\mathcal{U}_2$'nin $\mathcal{U}_1$'e göre "yönünü değiştir"iriz (Şekil 33.26c).

π uzayına yönelik, demet yapısını veren evrensel bir yansıtma hâlâ söz konusudur (Şekil 33.26d). Bununla birlikte, $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$'deki orijinal "düz çizgiler" artık kırıktır ve bu nedenle ara kesit vermez fakat Kodaira teoremii bize, $\mathbb{P}\mathcal{T}$'de *yeni* bir 4–parametreli holomorfik eğri ailesi, bunlar demet yapısının gerçek holomorfik ara kesitleri olmak üzere, bulunduğunu söyler. Gerekli $\mathcal{M}$ uzayı, kendisine ait her bir noktanın bu ara kesitlerden birine karşılık geleceği şekilde oluşturulur (Şekil 33.26e). $\mathcal{M}$'ye bir g metriğinin doğal bir yoldan atanabileceği ve ona ait Weyl eğriliğinin karşı–öz ikili olup kendisinin düz Ricci olduğu ortaya çıkar. g'ye ilişkin boş konile-

[723] Normal koşullar altında; *bkz.* Penrose, 1976b; Penrose ve Ward, 1980; Penrose ve Rindler, 1986.

[724] *Bkz.* Kodaira, 1962.



Şekil 33.26 Doğrusal olmayan sol–elli bir gravitonun oluşturulması. (a) Standart düz uzay burgaç benzeşmesinde $\mathbb{CM}$'ye ait P ve Q noktaları $\mathbb{PT}$'deki P ve Q çizgilerinin kesiştiği her durumda sıfır ayrıktır. (b) $\mathbb{PT}$'yi bir biçimde eğik burgaç uzayına deforme etmek istiyoruz fakat matematiksel teoremler bize bunun evrensel olarak yapılamayacağını söyler. Buradan hareketle $\mathbb{CM}$'deki bir R noktasının yalnızca uygun bir (açık) $\mathcal{R}$ komşuluğunu başlangıç "uzayzaman"ımız olarak kabul ederiz. (c) Bu, R çizgisinin $\mathbb{PT}$'deki tüp biçimli bir Q komşuluğuna karşılık gelir. (d) Artık ($\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ açık kümelerinin birleşimi olarak değerlendirilen) Q'yu deforme etmek üzere Şekil 33.25'in işlemlerini uygulayabiliriz. (e) Bununla birlikte orijinal R çizgisinin artık kırık olup bir "uzayzaman noktası"na ilişkin hassas bir tanım biçiminde kullanılamayacağını görürüz. (f) Kodaira'nın bir teoremi bize, bu amaca hizmet edecek R* "çizgiler"ine ilişkin 4–parametreli bir aile (orijinal çizgilerimizle aynı topolojik sınıfa ait tıkız holomorfik eğriler) bulunduğunu söylemek üzere yardıma gelir. (g) "Çizgisel olmayan graviton" $\mathcal{M}$ uzayı (karmaşık bir 4–uzay) arayışımızla ilgili bu noktalar R* Kodaira eğrileriyle verilir. $\mathcal{M}$'ye ilişkin (karmaşık konformal) metrik ((a)'daki gibi), P^* ve Q^*'ın ilgili P* ve Q* çizgilerinin kesiştiği zamanlarda sıfır ayrık olmasıyla ilgili koşultarafından tanımlanır. $\mathcal{M}$'ye ilişkin Weyl eğriliğinin otomatik olarak karşı–öz ikili olduğu ve kendisinin, oluşum ayrıntıları nedeniyle düz Ricci olduğu ortaya çıkar.

rini, $\mathcal{M}$'ye ilişkin P ve R noktalarının ancak ve ancak $\mathbb{PT}$'deki ilgili $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{R}$ çizgilerinin kesişmesi durumunda boş ayrık olması gerçeğini kullanarak kolayca bulabiliriz (Şekil 33.26).

Okur, bu $\mathcal{M}$ "uzayzaman"ının fiziki olarak gerçekten ne anlama geldiğini merak edebilir? Onun karmaşık olduğu (ve gerçel bir manifold olarak ele alındığında 4 yerine 8–boyutlu olduğu) ortaya çıkmıştı. Düz durumda, $\mathbb{N}$'de bulunan $\mathbb{T}$'ye ait ara kesitleri alarak gerçel uzayzaman noktalarını ($\mathbb{M}$'deki olaylar) ayırabiliriz ve daha sonra $\mathcal{M}$'yi basit olarak, $\mathbb{M}$ minkows-

ki uzayındaki $\mathbb{CM}$ karmaşıklaştırması biçiminde değerlendirebiliriz. Bununla birlikte eğik durumda, bu tür bir lüksümüz bulunmaz. Aslında bu durumda, oluşturma yoluyla elde ettiğimiz "uzayzaman" zorunlu biçimde kendiliğinden karmaşık bir manifolddur ve gerçel bir Lorentzci uzayzamanmın karmaşıklaştırılması biçiminde ortaya çıkamaz.

Bunun nedeni nedir? Karşı–öz ikili Weyl eğriliğine sahip Lorentzci bir 4–manifold (sıfır öz ikili parçanın karmaşık eşleniği karşı–öz ikili parça olduğu ve böylece de sıfır olduğu için) zorunlu biçimde düz Weyl'dir. Bunun yanında ayrıca bir de düz Ricci'yse basit olarak tümüyle düzdür. Öte taraftan karmaşık durumda,[725] önemsiz olmayan karşı–öz ikili düz Ricci 4–manifoldlarının çok büyük bir ailesi söz konusudur. Bunların *tüm*ünün daha önce değinilmiş olan burgaç işlemiyle (en azından yerel olarak) elde edilebilmesi çarpıcı bir gerçektir!

Bu karmaşık $\mathcal{M}$ uzayıyla ne yapmalıyız? *Fiziki olarak* karmaşık bir karşı–öz ikili düz Ricci 4–uzayının yorumu (uygun bir anlamda "pozitif frekanslı" olduğu söylenebilirse), onun *sol–elli bir gravitonu* temsil etmesidir. Esasen o, bir tür "dalga fonksiyonu" olması anlamında *doğrusal olmayan* bir gravitondur fakat artık o çizgisel olmayan gerçek Einstein vakum denkleminin bir çözümüdür (Ricci düzlüğü), ona ilişkin yaklaşıklık tahmininin değil. Sondaki, f burgaç fonksiyonunu, "boyanın kuruması"na olanak tanıyıp böylece burgaç uzayınının kendisini deforme etmek yerine bir kohomoloji elemanı olarak kabul etseydik gerçekleşecek durum olurdu. Burgaç kuramının bizi, kuantum kuramsal fikirlerle uzayzaman yapısının birleştirilmesiyle ilgili ilginç ve önceden beklenmeyen bir yöne doğru taşıdığını görürüz. Burgaç dalga fonksiyonlarımız artık, doğrusal kuantum mekaniğine ilişkin standart kurallardan (§§22.2–4) sapmalar görülmeye başlanacağı biçimde doğrusal değillerdir.

Bu oluşturmayla ilgili özel olarak dikkate değer bir özellik söz konusudur. Eğik $\mathcal{T}$ burgaç uzayına ilişkin herhangi bir **Z** noktası alırsak, **Z**'nin yeterince küçük herhangi bir komşuluğunun (**I** "sonsuz" bölgesi üzerinde yer almayan; *bkz.* §33.5) *düz* $\mathbb{T}$ burgaç uzayına ilişkin seçili herhangi bir **Z**′ noktasına ait bir komşuluğunkiyle özdeş yapıya sahip olduğunu görürüz. Buradan hareketle burgaç uzayının sahip olduğu yerel yapı, terimin §14.8'de kullanıldığı anlamıyla "esnek"tir. Böylece, $\mathcal{M}$ uzayına ait eğrilik, vb'yle ilgili bilginin tümü, $\mathcal{T}$'de yerel olarak değil *evrensel olarak* depolanır. Bu, üstte değinilmiş olan, burgaç fonksiyonuyla tanımlanan bir kohomoloji elemanının yeterince küçük bir bölgeyle sınırlandırıldığında orta-

[725] Ya da gerçel pozitif belirli durumda (+ + ++) ya da ayrık imza durumuda (+ + −−). *Bkz.* Penrose, 1976b; Hansen vd., 1978; Atiyah vd., 1978; Dunajski, 2002.

dan kaybolmasına ilişkin gerçeğin bir yansımasıdır. Burgaç uzayında herhangi bir "alan denklemi" söz konusu değildir. Normalde uzayzamandaki alan denklemleri (bu durumda karşı–öz ikili Einstein denklemi) çözümlerinde depolanan bilgi türü burgaç uzayı oluşumunda yalnızca yerel olmayan bir biçimde depolanır görünür.[726]

33.12 Burgaçlar ve genel görelilik

Bu "doğrusal olmayan graviton oluşumu" burgaç kuramının gelişiminde 1970'lerin ortalarından beri temel önemdedir. Başlangıç haliyle, iki farklı yönde gelişmeyi işaret etmiştir. Bunların en belirgini doğrusal olmayan *sağ–elli* ilgili bir oluşuma ve bunun sol–elli olanla, (örneğin düzlem kutuplu çizgisel olmayan gravitonlar gibi) karışık kutuplanma durumlarının oluşacağı biçimde birleşmesine ilişkindir. Bu, burgaç kuramının kilit bir parçası olarak görünür. Üstte belirtildiği üzere "doğrusal olmayan graviton" kavramı, içerisinde olağan U–kuantum kuramına ilişkin standart doğrusal kuralların Einstein genel göreliliğiyle doğru birliğin elde edilebileceği şekilde esneme gerekliliğinde olduğu, 30. bölümde güçlü biçimde desteklenmiş olan, bir kuram arayışı havası içindedir. Bununla birlikte üstteki oluşumda ortaya çıkmış olan "graviton", olası iki sarmallık durumundan yalnızca birisinin dahil edildiği, "yarım bir graviton"dur.

Bazı dikkatli okurlar, Z^α burgaçları yerine *ikili* W_α burgaçları biçimindeki açıklamaya geçersek bu durumda *sağ–elli* gravitonla ilgili olarak, önceki ikili burgaçlar biçimindeki oluşumu yineleyerek doğrusal olmayan bir dalga fonksiyonu elde edilebileceğini düşünmeye cüret edebilirler.[33.30] Bu şekilde o, (W_α'da) 2 türdeşlik derecesine karşılık gelen sağ–elli graviton ve – 6 türdeşliğe karşılık gelen sol–elli graviton olur. Bununla birlikte bu bizi güçlüklerden kurtarmaz çünkü artık sol–elli sarmallık durumlarını kaybederiz; ve sağ–elli durumlar için W_α değişkenlerini ve sol–elli olanlar için Z^α değişkenlerini kullanmanın anlamı yoktur çünkü ayrıca karışık sarmallık durumlarını da tanımlamaya gerek duyarız.[727]

---

[726] Bu nedenle, §32.5'te belirtilen *topolojik QFT* kavramıyla önemli bir ilişki söz konusu gibi görünür.

[33.30] Niçin? *İpucu*: Uzamsal bir yansıtma burgaçları niçin ikili burgaçlara çevirir?

[727] Bu sorunlara yönelik, çift–burgaçlar olarak bilinen şeyleri kullanan yansıma simetrik bir yaklaşım söz konusudur ve bu, bu yönde önemli bazı kısmi başarılara sahip olmuştur; *bkz.* Penrose, 1975; LeBrun, 1985, 1990; Isenberg vd., 1978; Witten vd., 1978. Ayrıca *bkz.* Penrose ve Rindler, 1986. Düz uzaylı bir çift–burgaç temelde, $W_\alpha, Z^\alpha = 0$ olmak üzere, bir (W_α, Z^α) çiftidir ve karmaşık bir ışık ışınını tanımlar. Bununla birlikte bu, üstte benimsendiği üzere, "burgaç fonksiyonları dalga fonksiyonlarıdır" şeklindeki felsefeyle pek uyumlu değildir çün-

– 6 türdeşlikteki $f(Z^\alpha)$ burgaç fonksiyonlarının, çizgisel olmayan sağ–elli bir graviton elde etmek üzere bir biçimde "üslerini alma" sorunu (kütleçekimle ilgili) *aldatıcı* sorun olarak adlandırılmıştır. ("Aldatıcı" sözcüğü, normalde sol–elli spin bildiren bir hareketle yuvarlanır görünse de, hareket yönünde sağ–elli biçimde spin halindeki topu tanımlayan bir kriket terimidir.) Mantıklı bir çözüm bulmak yaklaşık 25 yıl aldı fakat son gelişmeler bununla ilgili uygun bir oluşum sağlar görünüyor.[728] Yine de işlemler, yazım sırasında, bazı önemli bakımlardan hâlâ varsayım olarak kalmaktadır. Bu gelişmeleri burada açıklamaya girişmeyecek ve yalnızca, temel yeni özelliğin $\mathcal{T}$ eğik burgaç uzayımızın izdüşümsel $\mathbb{P}\mathcal{T}$ uzayına yansıtılmasıyla ilgili liflerin – 6 türdeşlik derecesindeki bir burgaç fonksiyonunca tanımlanır bir biçimde "bükülü" hale geldiğini söyleyeceğim. ("Büküm", C uygun bir sabit ve f_{-6} – 6 türdeşlik dereceli bir burgaç fonksiyonu olmak üzere, yanıltıcı bir şekilde basit $Cf_{-6}Z^\alpha\partial/\partial Z^\alpha$ biçimli çakışan bir yama çifti üzerindeki bir vektör alanının üssünü almak yoluyla gerçekleştirilir.) Bu, gravitonun hem sağ–elli hem de sol–elli parçalarının bir arada birleştirilmesine olanak tanır.

Uygun şekilde asimptotik biçimde düz $\mathcal{M}$ uzayzamanı durumunda en azından, $\mathcal{T}$'ye ilişkin olarak $\mathcal{M}$ dolaysız bir açık oluşum mevcuttur. Dahası, verili bir $\mathcal{T}$'den $\mathcal{M}$ elde etmekle, diğer bir deyişle bütünüyle burgaç yapılı $\mathcal{T}$'den uzayzaman noktaları oluşturmakla ilgili, gerekli Ricci düzlüğünü (Einstein'ın vakum denklemi) doğru biçimde dahil etmeyi sağlayacağı varsayılan deneme niteliğinde bir önerme söz konusudur. Önerme, belirgin biçimlerde, Ezra T. Newman ve meslektaşlarına ait, uzayzaman noktalarını "ışık konisi kesikleri" olarak adlandırılan şeyler biçiminde, bunlar $\mathcal{M}$'deki ışık konileriyle $\mathcal{I}^+$ gelecek boş sonsuzun kesişimleri olmak üzere, yorumlamakla ilgili uzun erimli bir araştırma projesiyle ilgilidir.[729] Bununla birlikte görünüşte umut verici olsa da bu burgaç oluşumuna ilişkin bazı önemli görünümler, yazım esnasında, çözülmemiş durumdadır.[730]

Gelişmeyi işaret eden, doğrusal olmayan sol–elli orijinal graviton oluşumuyla (1975/76) ilgili diğer yön diğer ayar alanlarından kütleçekim kuramına yönelik genellemelerdeydi. Oldukça erken bir aşamada, 1976–1977'de Richard Ward genel karşı–öz ikili ayar alanlarının, kütleçekimle

---

kü çift–burgaç açıklaması daha çok, içerisinde bir dalga fonksiyonu için uygun olan şekilde ya biri ya da diğeri yerine hem bir değişken hem de ona ait eşlenik değişkenin –burada Z^α ve W_α– ortaya çıktığı klasik açıklamaya benzer. Çift–burgaç yaklaşımı ayrıca, doğrusal olmayan alanlara ilişkin açıklamasında da matematiksel bazı tuhaflıklarla karşılaşır.

[728] *Bkz.* Penrose, 2001.

[729] *Bkz.* örneğin Frittelli vd., 1997; Bramson, 1975.

[730] *Bkz.* Penrose, 1992.

ilgili olana bir biçimde benzeyen bir burgaç oluşumu kullanılarak nasıl elde edilebileceğini gösterdi. Aslında, Ward ve diğerlerine ait Ward oluşumu, özellikle *integrali alınabilir* sistemler (uygun bir anlamda, genel durumda çözülebilen doğrusal olmayan denklemler) alanında, hatırı sayılır ölçüde matematiksel kazanım ve gelişmeye yol açtı. Burada burgaç kuramı, bir bütün olarak konuyla ilgili güçlü bir genel görünüm sundu.[731] Kütleçekimle ilgili karışık sarmallık sorununa ilişkin bütünlüklü bir çözüme yönelik üstte belirtilen gelişmeler, (karışık sarmallıktaki) genel ayar alanlarının da ayrıca burgaç formalizmi içinde ele alınması gerektiğine işaret eder gibi görünüyor.

33.13 Parçacık fiziğine ilşikin bir burgaç kuramına doğru

Bu bizi burgaç kuramının, an itibariyle olmadığı, tam gelişmiş fiziki bir kurama nasıl gelişebileceği sorusuna yöneltir. Bunun gerçekleşmesi için burgaç kuramındaki iki ek çalışma alanının daha da geliştirilmesi önemlidir. İlki, QFT'nin daha gelişkin bir ele alınış biçiminin sunulmasıdır. Aslında, (1970'lerin başlarında benden ve diğerlerinden gelen bazı katkılarla birlikte) temel olarak Andrew Hodges ve öğrencileri tarafından Oxford'da geliştirilip QFT'ye, Feynman diyagramlarının *burgaç diyagramları* olarak bilinen şeylerle yer değiştirdiği tedirgeyici bir yaklaşım sağlayan dikkate değer miktarda etkinlik söz konusudur. Bunlar yüksek boyutlu kontür integral almayı içerir ve formalizm, geleneksel Feynman işlemlerini kullanırken karşılaşılan sonsuzların çoğundan kaçınmakta bazı çarpıcı başarılar elde eder.[732] Bununla birlikte yaklaşım hâlâ, beklenenden bir biçimde daha karışıktır ve bize, aracı olarak geleneksel Feynman ifadelerine başvurmaksızın tam olarak hangi kontür integrallerinin gerçekleştirileceğini söyleyen, §§26.6–8'dekine benzer, temeldeki bağımsız bir yönlendirici ilkeden yoksundur.

Bu alanların diğeri ilk olarak, sunduğum fikirler üzerinden, 1970'lerin ortasından 1980'lerin başlarına dek Zoltan Perjés, George Sparling, Lane Hughston, Paul Tod ve Florence Tsou (Tsou Seung Tsun) tarafından geliştirilmiş fakat o dönemden sonra büyük oranda hareketsiz kalmış olan *burgaç parçacık kuramı*dır. Buradaki temel fikir, kütlesiz parçacıklar tek bir burgaç değişkenine ilişkin burgaç dalga fonksiyonunca, diyelim ki $f(Z^\alpha)$, açıklanabilirken kütleli parçacıkların daha çok değişkene, *örn.*

[731] *Bkz.* Mason ve Woodhouse, 1996.

[732] *Bkz.* Penrose ve MacCallum, 1972; daha eski bazı kaynaklar için *bkz.* Penrose ve Rindler, 1986, s. 149; daha yeni bazı çalışmalar için *bkz.* Hodges, 1982, 1985, 1990, 1998.

$X^{\alpha},\ldots,Z^{\alpha}$, gerek duymasıdır. Tüm bu burgaçlardan gelen katkıların toplanmasını içeren kütleli bir parçacığın momentum ve açısal momentumuyla ilgili bir ifade söz konusudur fakat artık bu burgaç değişkenleri ve karmaşık eşlenikleri arasındaki toplam momentum ve açısal momentumu etkilemeyen dönüşümlerden kaynaklanan bir içsel simetri *grubu* mevcuttur. Belki de, elektrozayıf etkileşimlere ilişkin U(2) ve yeğin etkileşimlere ilişkin SU(3)'ü içeren fakat hafifçe genelleyen gruplar elde edilmesi dikkate değerdir. Standart model uyarınca parçacıkların standart sınıflandırılmasına ilişkin bir miktar çarpıcı ilişki belirtilmiştir fakat düzen belirli teknik sebepler nedeniyle durgunlaşmıştır. "Aldatıcı sorun"la ilgili son gelişmelerin, özellikle ayar alanlarına uygulanabilirse, konuyu yeniden açabileceğine ilişkin makul bir olasılığın var olduğu görülmektedir.

Bana göre ayrıca, bir parçacık fiziği modeline ilişkin, §25.8'de kısaca özetlenmiş Chan–Tsou önermesinin de bu gelişmelerle belirgin biçimde bağlantılı olabileceğine ilişkin önemli bir olasılık mevcuttur. O önerme, (Abelci olmayan) her parçacık simetri grubuna yönelik, orijinal ayar grubuna ek olarak, ikili bir grubun var olmasını da gerektirir. Burgaç kuramı, üstte değinilmiş olan Ward oluşumuyla –kendisine ait varsayılan "aldatıcı" versiyonla birlikte– uyumlu olarak, her grubun karşı–öz ikili ve öz ikili versiyonlarda rol alması gerektiğini ileri sürer ve öyle görünüyor ki bu, ayar grubuna ilişkin ikili biçimin, orijinal ayar grubunun rolüne ek olarak, önemli bir rol oynamasını gerektirir. Böylece, Chan–Tsou önermesindeki fikirlerin aracılığı yoluyla burgaç parçacık kuramı da bir gelecek parçacık fiziğine ilişkin görev üstlenebilir. Dahası, bu alandaki başarılı ilerlemenin, burgaç diyagram kuramına ilişkin QFT programı üzerinde önemli bir etkiye sahip olacağı da beklenmelidir.

33.14 Burgaç kuramının geleceği?

Burgaç kuramına ilişkin açıklamalarımda okuyucuya, konuyla ilgili görüşlerimin genel olarak fizik camiasının görüşlerini yansıtmadığına ilişkin uyarımı yapmayı atladım. Aslında, yaşamımın yarısından fazlasını (kesintili olarak) burgaç kuramına adadığımdan, bakış açımın, böyle yapmamış olan fizikçilerin büyük çoğunluğunun bakış açısına yakın şekilde denk düşmesi pek de olası olmayacaktır. Dahası, fizik camiasında konuya ilişkin daha fazla bilgi sahibi olanların çok az sayıda ve kesinlikle sicim kuramı ya da süpersimetriyle ilgili bir şeyler bilenlerden çok daha az olduğunu belirtmeliyim. Burgaç kuramı hiçbir biçimde bugünün kuramsal fiziğine ilişkin "ana akım" bir etkinlik olarak görülemez.

Yine de burgaç kuramı saf matematikle ilgili olarak, sicim kuramı gibi, önemli bir etkiye sahiptir ve bu onun en güçlü yönlerinden biri olarak değerlendirilir. Burgaç kuramı, (üstte kısaca değinilmiş olan) integrali alınabilir sistemler kuramı, gösterim kuramı[733] ve diferansiyel geometriyle ilgili önemli bir etkiye sahip olmuştur. (Bu alanda, "holonomi sorunu" olarak bilinen şeye orijinal doğrusal olmayan graviton oluşumuna ilişkin olanlardan geliştirilmiş olan yöntemleri kullanarak bir çözüm bulmuş A. Merkulov ve L.J. Schwachhöfer'in çalışmalarını vurgulamalıyım.[734] İlgili çalışmada burgaç kuramı "*hiperkähler* manifoldları", "Zoll uzayları", vb olarak bilinen şeylerin oluşturulmasında önemli bir değere sahiptir.)[735] Burgaç kuramı, büyük oranda matematiksel zarafet ve ilgi tarafından yönlendirilmiştir ve kuvvetinin büyük kısmını hassas ve verimli matematiksel yapısından elde eder.

Açık yürekli okuyucu haklı olarak, 31. bölümde *sicim* kuramının zayıflığının, onun büyük oranda, fiziki dünyanın doğasından gelen çok küçük bir kılavuzlukla matematiksel olarak yönlendirilmiş olduğundan yakındığımı belirtme eğiliminde olabilir. Bazı bakımlardan bu, burgaç kuramı için de geçerli bir eleştiridir. Bizi, modern gözleme dayalı bilgiden gelip burgaç kuramının modern fiziğin izlemesi gereken yolu sunduğuna inanmaya zorlayan herhangi sağlam bir sebep kesinlikle bulunmamaktadır. Ayrıca pek çokları, kurama ait güçlü biçimdeki aynal doğanın işleri uzamsal asimetri yönüne zorladığını da hissedebilir. Sonuçta, sol–sağ asimetrinin kütleçekimle ilgili fizikte oynayacak herhangi bir rolünün bulunduğuna ilişkin hiçbir fiziki kanıt mevcut değildir. 27, 28 ve 30. bölümlerde, uygun kuantum kütleçekim birliğinde zaman asimetrisine ilişkin gerekliliği vurguladım fakat uzay asimetrisiyle ilgili (belki QFT'deki CPT teoremim üzerinden dolaylı olan dışında; *bkz.* §25.4 ve §30.2) belirgin herhangi bir fiziki gereklilik söz konusu değildir.

Durum elbette, formalizmdeki uzay asimetrisinin kendisini basit olarak fiziki etkilerdeki bir asimetriye çevirmeyecek olması olabilir. Bunun doğru olabilmesini ummak için en iyi sebep, bir taraftan $(Z^\alpha, -\hbar\partial/\partial Z^\alpha)$ çifti ve diğer taraftan $(\hbar\partial/\partial\bar{Z}_\alpha, \bar{Z}_\alpha)$ çifti tarafından üretilen cebirlerin biçimsel olarak esasen özdeş olması gerçeğinde yatar. Bu, bir burgaç açıklaması (Z^α değişkenleri) kullanarak ne tür bir sonuca ulaşırsak ulaşalım bunu eşdeğer biçimde ikili burgaç açıklaması ($W_\alpha = \bar{Z}^\alpha$ değişkenleri) kullana-

[733] *Bkz.* Bailey ve Baston, 1990; Baston ve Eastwood, 1989; burgaçların matematikteki kullanımı için Mason ve Woodhouse, 1996.

[734] *Bkz.* Merkulov ve Schwachhöfer, 1998.

[735] *Bkz.* Gindikin, 1986, 1990; Lebrun ve Mason, 2002.

rak da elde edebileceğimizi ve bu benzerliğin, sonuçtaki kuramda, kütleçekimde hiçbir sol–sağ asimetrisinin ortaya çıkamayacağı denli tam olduğunu ileri sürer. Öte taraftan formalizm Doğayı yansıtacaksa, bu durumda, kuram zayıf etkileşimleri (§25.3) açıklamayla yüz yüze geldiğinde bir sol–sağ *a*simetrisine gerek duyacağız. Bununla birlikte burgaç kuramının var olan görece ilkel halinde bu farka ilişkin herhangi açık bir sebep söz konusu değildir.

Şimdilik burgaç kuramına yöneltilebilecek temel eleştiri, onun gerçek bir *fiziki* kuram olmadığıdır. O kesinlikle açık hiçbir fiziki öngörüde bulunmaz. Kendi (aşırı) iyimser bakış açım, burgaç kuramını klasik fiziğin Hamilton formalizmiyle belli belirsiz biçimde kıyaslanabilir olarak değerlendirmektir. Hamilton kuram fiziki değişimler sağlamadı fakat klasik fiziğe ilişkin, daha sonradan Schrödinger'in bölümler 21–23'te değinilen açıklamalarıyla ilgili yeni kuantum kuramında tam olarak gerekli olan şey olduğu kanıtlanan farklı bir görünüm sundu. Benzer biçimde burgaç kuramı da yalnızca, fiziki değişiklikler ortaya koyması gerekmeyen bir yeniden formülasyondur. İyimser beklenti onun çerçevesinin de, gelecekteki önemli bazı fiziki gelişmelere ilişkin bir sıçrama noktası sunabilmesidir.

Kuşkucular için elbette, bu tür gelişmelerin gerçekleşeceğine inanmak yönünde hiçbir baskı söz konusu değildir ve aslında burgaç kuramının birincil durumu, sicim kuramı (ya da M–kuramı) gibi onun estetik ya da matematiksel çekiciliğinin kuvvetinde yatar. Bununla birlikte iki kuram halihazırdaki durumlarında, matematiksel olarak uyuşmaz çünkü farklı sayıda uzayzaman boyutlarıyla işlerler. Haklı (fakat belki de fazlaca sert) olarak, sicim kuramının amaçlarının yanlış olduğuna ilişkin öngörünün burgaç kuramına ait olduğu ya da tersten burgaç kuramının amaçlarının yanlış olduğuna ilişkin öngürünün sicim kuramına ait olduğu söylenebilir! Bu uyuşmazlık, ek boyutların uzayzaman boyutları değil fakat bir tür "iç" boyutlar olarak değerlendirildiği sicim (ya da M) kuramının başkaca biçimlerine ya da yeniden yorumlamalarına genişlemez. Böylesi bir yeniden yorumlama tutarlı bir bakış açısı sağlar görünse de, normal olarak benimsendiği üzere o, sicim kuramının ardındaki itici kuvvetle bir biçimde uyuşmazlık içindedir.

Okuyucuya bu bağlamda, ilk olarak Edward Witten tarafından gerçekleştirilen, §31.8'de değinilmiş olan, oldukça yeni bir belirli çalışmayı hatırlatmalıyım.[736] Bu, Yang–Mills saçılım genliğiyle ilgili yeni bir görünüme ilişkin etkileyici bazı olasılıklara işaret eder. Burgaç kuramındaki fikirleri sicim kuramındakilerden bazılarıyla fakat bu kez 4–boyutlu bir bağlamda birleştirir!

---

[736] *Bkz.* not 31.76.

Ne olursa olsun burgaç kuramı yeni bazı girdilere gerek duymaktadır. Başarılı diğer fiziki kuramların en önemli bileşenleri arasında, alan denklemleriyle ilgilenmek üzere elverişli QFT biçimini sunan Lagrange denklemleri ve Feynman yol integralleri bulunmaktadır (*bkz.* §26.6). Bununla birlikte burgaç kuramı, alan denklemlerinin ortadan kaybolmasıyla övünür (§§33.8, 11), bu nedenle bütünlüklü bir burgaç QFT'sinin gelişmesi için bazı yeni fikirlere gerek duyulduğu görülür.[737]

Burgaç kuramı herhangi belirgin "öngörüler"e sahip midir? Bir öngörüye en yakın olduğunu düşünebildiğim şey, kuramın temelindeki güdülerin evrenin negatif uzamsal eğriliğe, diğer bir deyişle $K < 0$'a, sahip olması gerektiğini anlatır görünmesidir. Bu beklentiyle ilgili sebebi görmek için ilk olarak 27 ve 28. bölümden (özellikle §27.13), Büyük Patlamanın, FLRW modellerinden birine oldukça yakın bir benzerlik içinde, olağanüstü düzenli bir doğaya sahip göründüğünü anımsayalım. Bu modeller konformal olarak düzdür (yok olan Weyl eğriliği) ve düz bir burgaç uzayı ($\mathbb{CP}^3$) tarafından oldukça basit biçimde açıklanabilir.[738] $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$ durumlarının her birinde, tam bir simetri grubu söz konusudur fakat bu yalnızca $K < 0$ durumunda holomorfik bir gruptur. Aslında bu durumda grup kesinlikle, bizi burgaç kuramına ilişkin "karmaşık sihir"le başlatan grup, diğer bir deyişle (yansımaları göz ardı ederek) Riemann küresine ilişkin holomorfik dönüşümler grubu olan O(1,3) Lorentz grubudur. Bu Riemann küresi nerededir? O, §18.4'teki hiperbolik 3–uzaya ilişkin bir sınır olarak, §18.5'teki gökküresiye benzer hiperbolik 3–uzayın –Şekil 2.11'de yeniden üretilmiş Escher tablosundaki sınırlayıcı çember gibi– "sonsuz"udur; *bkz.* Şekil 18.10.

$K < 0$'ın pek de burgaç kuramına değil fakat temelindeki holomorfik

[737] Lagrange denklemleri burgaç kuramında, fiziki etkileşimleri anlamak üzere çevresel bir rol oynamış olsalar da, kendilerine o kuram içerisinde henüz uygun bir genel formülasyon bulunmamıştır. Burgaç kuramının, fiziki alanları, onlara ait alan denklemlerini (serbest bir kütlesiz alan durumunda türdeş burgaç fonksiyonları aracılığıyla) açık biçimde çözerek göstermesi sonucu elde ettiği başarının kendisine ait Lagrange denklemi formülasyonunda bir güçlüğe yol açmasında belki de bir ironi söz konusudur. Alan denklemleri geleneksel kuantum formülasyonunda bir "geçmişler toplamı"ndan (§26.6) ortaya çıkar. Buradaki formülasyonda, bu fikrin anlam ifade etmesi için alan denklemlerini *ihlal etmek* açık biçimde olası olmak zorundadır ve böylece klasik kurama ilişkin kuantum düzeltmeleri bu yol integralinin daha ayrıntılı biçimde incelenmesi sonucu ortaya çıkar. Formülasyon alan denklemlerinin ihlal edilmesine izin vermezse bunların tümünü kaybederiz! Bana öyle geliyor ki, burgaç kuramında ve aslında genel olarak fiziki kuramda Lagrange denklemlerine ilişkin gerçek "öz"ün ne olması gerektiğiyle ilgili bir yeniden değerlendirme gerekmektedir. Belki de bu, §26.6'nın sonunda ifade ettiğim kaygılar ve yol integralleriyle birlikte ortaya çıkan, esasen her yerde bulunan ıraksama sorunu tarafından sunulan gerçek anlamda derin konularla ilgilidir; *bkz.* §26.6.

[738] Penrose ve Rindler, 1986, §9.5.

felsefeye ait bir öngörü olduğunu görmekteyiz. Daha ileri gidip Λ kozmolojik sabitiyle ilgili herhangi bir şey söyleyebilir miyiz? Halihazırda önerilmiş olan burgaç oluşumları, Einstein vakum denklemine doğal bir biçimde yalnızca $\Lambda = 0$ durumunda uyum sağlayabilir görünür ve var olan işlemin $\Lambda \neq 0$ durumunda, uyum sağlanmak üzere nasıl değiştirilebileceğini görmek güçtür. Bu bize $\Lambda = 0$'ın burgaç kuramına ilişkin bir öngörü olduğunu mu söyler? Öyle olmasa ($\Lambda = 0$'la ilgili önceki tercihime rağmen) daha iyi! Çünkü gözleme dayalı yeni, etkileyici veri (*bkz.* §28.10) güçlü biçimde $\Lambda > 0$'ı işaret eder. Bu, burgaç kuramına yönelik yeni meydan okuyuşlar sunar. Açıktır ki burgaç kuramının, saygı duyulan fiziki bir kuram haline gelecekse, bundan çok daha iyisini yapması gerekecek!

Kuantum kuramının kurallarından ne haber? Burgaç kuramı değişimle ilgili, 30. bölümün amaçlarıyla uyumlu biçimde herhangi belirli bir yöne işaret eder mi? §33.11'deki "doğrusal olmayan graviton", burgaç yaklaşımının sonuç olarak kuantum mekaniği kurallarında (doğrusal olmayan) bir değişim gerektireceğini belirtmeye başlar. Bununla birlikte burgaç formalizminde henüz, §§30.2, 3, 9'daki tartışmalar uyarınca gerekli olduğu üzere, bu değişimlerde temel bir zaman asimetrisinin varlığını belirten pek fazla şey yoktur. Yine de bu, onların zaman asimetrik bir açıklamaya bağlı görünmemesiyle ilgili, §33.12'de kısaca tartışılmış olan belirli "aldatıcı" gelişmelerin anlamlı bir özelliği olabilir. Bu olasılığın kuvveti, gelecekteki gelişmeleri beklemek zorunda kalacaktır ve önceki paragraftaki yorumlar akılda tutulmalıdır. Bu nedenle burgaç kuramı, kuram ardındaki başlangıç güdülerinin önemli bir kısmını bu olgu sunmuş olmasına karşın, kuantum durum indirgenmesine ilişkin şu ana dek kullanışlı hiçbir şey söylememiştir.

Son olarak gelin, burgaç kuramının ardındaki temel güdülerden birini oluşturan holomorfik felsefenin temel konumu konusunu ele alalım. Bu felsefenin esasen geçerliliğini koruduğunu ve –bazı bakımlardan (örneğin kütlesiz alanlara ilişkin hem çizgisel (§§33.8, 10) hem de çizgisel olmayan (§§33.11, 12) burgaç gösterimlerindeki gibi) beklentileri aşacak biçimde– güçlü bir itici kuvvet sağladığını söylemek uygun olur. Yine de kuram bir noktada, fiziğin gerçel sayı görünümleri ve holomorfik olmayan davranışla ilgili, örneğin analitik olmayan (tek başına holomorfik olmayan biçimde bırakılan) davranışa bağdaştırmayı umduğumuz (holomorfik olmayan $z \mapsto |z|^2$ modül kare kuralıyla uyumlu biçimde) olasılık değerlerinin ve *gerçel* uzayzaman noktalarının ortaya çıkması gibi, bir şeyler söylemek zorunda kalacaktır. Analitik olmama konusuyla ilgili olarak, 9. bölümün sonunda (*bkz.* §9.7) sunulmuş olup kendisi uyarınca analitik olmayan davranışın holomorfik işlemler bağlamı içinde oldukça zarif biçimde sunula-

bileceği dikkat çekici hiper fonksiyonlar kuramından bir miktar destek sağlanmalıdır. Gelecekteki bir burgaç kuramının bu tür konulara ele alacağı kapsam geleceğe ilişkin bir konudur.

34

GERÇEĞE GİDEN YOL NEREDEDİR?

34.1 20. yüzyıl fiziğinin büyük kuramları; ya ötesi?

Gelin, kendimizi içinde bulduğumuz bu olağanüstü dünyanın temel doğasıyla ilgili fiziki kuramlarımızdan öğrendiğimiz şeylere ilişkin –İS üçüncü bin yılı keşfetmeye başladığımızdan– bir durum değerlendirmesi yapmaya çalışalım. Kavrayışla ilgili olağanüstü gelişmelerin sağlandığına ve bunların hassas fiziki gözlemler, gerçekleştirilen mükemmel deneyler, önemli derinlik ve kavrayıştaki fiziki gerekçelendirme ve sıradan fakat karışık olandan en yüksek seviyedeki ilham verici sıçramalara kadar uzanan bir matematiksel argüman yelpazesi yoluyla ortaya çıktığına hiç şüphe yok. Bunlar bizi eski Yunanların uzay geometrisine ilişkin kavrayışları yoluyla Newtoncı mekaniğe, klasik mekaniğin muhteşem yapılarına ve daha sonra Maxwell elektromanyetik kuramına ve termodinamiğe yöneltir. Çok yakın geçmişte, 20. yüzyıl bize Einstein'ın olağanüstü ve kesin olarak doğrulanmış olan genel görelilik kuramına yönelten özel görelilik kuramını sundu, ayrıca derin biçimde gizemli fakat yine de son derece tam ve geniş erimli kuantum mekaniği ve onun kuantum alan kuramına (QFT) doğru gelişimine sahibiz; özellikle parçacık fiziği ve kozmolojiyle ilgili dikkat çekici biçimde başarılı standart modellere sahibiz.

Kendinden emin kuramcılar arasında "hemen hemen orada" olduğumuz ve bir "her şeyin kuramı"nın 20.yüzyıl sonlarındaki, sonraki gelişmelerin çok ötesinde bulunmadığı görüşü pek de seyrek bir görüş değildir. "Sicim kuramı"na ilişkin zamanında güncel olan şey her neyse, onu göz önüne alan böylesi yorumlar sıklıkla yapılma eğilimindeydi. Sicim kuramının, doğası halihazırda temel olarak bilinmez kabul edilen bir şeye (M ya da F kuramı) dönüştüğüne ilişkin böylesi bir bakış açısını sürdürmek artık güçtür.

Kendi bakış açıma göre bir "son kuram"a bundan bile çok daha uzağız. 31. bölümde özetlenen gelişmelerin doğru çizgiye pek de yakın olduğuna ilişkin hiçbir inanca sahip değilim. Aslında sicim kuramsal (ve onunla il-

gili) fikirlerden dikkate değer çeşitli *matematiksel* gelişmeler ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte onların, derin fiziki fikirlerden gelen bazı girdilere sahip olsalar da, yalnızca matematiğe ait çarpıcı parçalardan çok daha başka oldukları konusuna ilişkin olarak son derece şüpheci kalmaya devam ediyorum. Uzayzaman boyutluluğu dolaysız olarak gözlemlediklerimizi (diğer bir deyişle (1 + 3)) aşan kuramlarla ilgili olarak, onların bizi kendiliğinden, *fiziki* anlayış yönünde daha ileri taşıdıklarına inanmakla ilgili herhangi bir sebep görmüyorum. Ortaya konmuş olan, çok daha uyum gösterdiğim diğer düzenlerle, örneğin temel olanları 32 ve 33. bölümlerde özetlenmiş olan düzenlerle ilgili olarak zihnimde onların ayrıca bazı önemli kavrayışlardan yoksun olduklarına ilişkin hiçbir şüphe bulunmuyor. Bu kuramların bile, herhangi bir özgüvenle, bizi fiziki gerçekliği anlamaya yönelik doğru yola yönlendirecek gerekli sıçramaları yapmaya yakın oldukları öngörüsünde bulunmak makul olmaz.

Yine de 20. yüzyılda bile insan türü hiç kuşkusuz, böylesi bir kavrayışa doğru inanılmaz bir gelişme kaydetti ve ben de bu kitapta başarılmış olan şeye ilişkin bir şeyler aktarmayı denedim. Bana göre Einstein'ın genel göreliliği yüzyılın en büyük başarısıdır. Kuantum kuramı (ve QFT) çoğu fizikçi tarafından daha büyük bir gelişme olarak değerlendirilebilir. Konuyla ilgili kişisel bakış açımdan bu görüşü paylaşamayacağım. Durum kuantum kuramının, çok daha büyük bir aralıktaki farklı olgulara ilişkin olarak genel görelilikten kuşkusuz kıyaslanamaz biçimde daha fazla şey açıklamış olmasıyken yine de kuramı, bir kuram *olarak* gerekli tutarlılığı gerçekleşmiş şekilde değerlendirmiyorum. Sorun elbette, 29. bölümde derinlemesine ele alınmış olan ölçüm paradoksudur. Bana göre kuantum kuramı tamamlanmamıştır. Tamamlandığında –ki bunun 21. yüzyıl içinde gerçekleşeceğini umuyorum– hiç kuşkusuz Einstein'ın genel göreliliğinden de büyük bir başarıyı temsil edecektir. Aslında, 30. bölümdeki iddiaların sağlam biçimde ileri sürdüğü gibi böyle eksiksiz bir kuantum kuramı, Einstein kuramını büyük kütle ve uzaklıklarla ilgili sınırlayıcı durum olarak içermelidir. (§31.8'deki uyarılarımdan, tersi pek çok iddiaya karşın kesinlikle sicim kuramını bu birliği halihazırda sağlamış olarak değerlendirmeyişimin okur için açık olduğunu umuyorum.)

Bana göre genel görelilik olasılıkla, ona ilişkin anlamsızca küçük 10^{-35}m'lik Planck uzaklığındaki ya da yoğunlukların bazı uzayzaman tekillikleri civarında suyun değerinin yaklaşık 5×10^{93} katı olan Planck değerine yaklaşabildiği andaki açıklamalarına yönelik ciddi değişiklikler beklemek zorunda olsak da, (Λ kozmolojik sabitinin varlığına Einstein kuramının bir parçası olarak izin verildiği) büyük ölçekli sınırda uzayzamana ilişkin bir açıklama olarak kalacaktır. Genel göreliliğin durumuna ilişkin

bu konum artık geleneksel konum olarak değerlendirilmek zorundadır. Kuramın, en azından yörüngedeki nötron yıldızlarına, kütleçekimle ilgili kırma etkilerine ve hatta kara deliklere ilişkin uzaklık ölçüsünün görece geniş ucundaki gözleme dayalı durumu mükemmel olarak değerlendirilmek zorundadır. Ve burada kozmolojik sabitsiz standart Einstein kuramını kastediyorum.

Peki kozmolojik sabitten ne haber? Geçmiş birkaç yıllık gözlemler ona pozitif bir değer atfeder görünmektedir. Λ gerçekten mevcutsa, olağan yerel terimlerle o kesinlikle çok küçüktür. Λ'yı bir eğrilik olarak düşünürsek böylece o bir uzaklık karesinin, bu uzaklık gözlemlenebilir evrenin yarıçapıyla kıyaslanabilir bir ölçeğe sahip olmak üzere, tersi olur; böylece Λ kozmolojik ölçeklerde neredeyse kesin olarak göz ardı edilebilir. Λ'yı bir Ω_Λ etkin yoğunluğu biçiminde yorumlarsak bu durumda yaklaşık 10^{-27}kgm^{-3} –burada dünya üzerinde üretilmiş en iyi yapay vakumdan bir hayli düşük– olan bu yoğunluk evrenimizin şimdi sahip olduğu küçük ortalama madde yoğunluğundan 2 ya da 3 kattan fazla olamaz. Yinelemek gerekirse Λ yalnızca kozmolojik ölçeklerde anlamlı olabilir. Yine de kuantum alan kuramcıları tarafından sıklıkla ifade edilen bakış açısı temelinde Λ gerçekten vakuma ait, "kuantum mekaniksel vakum dalgalanmaları" (QFT'deki Heisenberg belirsizliğinin bir özelliği; *bkz.* §21.11, ayrıca §29.6, §30.14) tarafından üretilen etkin yoğunluğun bir ölçüsüdür ve bu nedenle gözlemlenen şeyin üst sınırından bir 10^{120} kat (ya da olasılıkla yalnızca 10^{60} kat) daha büyük (Planck değeriyle kıyaslanabilir) bir değere sahip ol"malı"dır! Bu, QFT'deki, kuantum kütleçekime yönelik herhangi geleneksel bir yaklaşım ya da sicim kuramı tarafından çözümlenmemiş temel bir bulmaca olarak değerlendirilir.[739] Kendi konumum bundan, pek çok kuramcının göründüğünden daha az etkilenmiş durumdadır. Tahminimce (*bkz.* §30.14) tüm bu "vakum dalgalanmaları" konusunun, kütleçekimle ilgili daha iyi bir kuantum kuramına ve aslında daha iyi bir QFT'ye sahip olduğumuzda temelden gözden geçirilmesi gerekecektir.

Elbette var olan kuantum mekaniği ve QFT'yi destekleyen olağanüstü olgular dizisinin farkına varmak zorundayız. Öte taraftan burada 30. bölümde desteklediğim, kuantum kuramının temellerinde değişikliklerin beklenmesine ilişkin bakış açısıyla herhangi bir uyuşmazlık olmadığını belirtmeliyim. Şu ana kadarki deneylerin hiçbiri "kuantum kütleçekim"i, böylesi değişikliklerin, durum vektörü indirgenmesinin nesnel olarak ortaya çıkmasıyla (kütleçekimle ilgili OR) birlikte belirgin hale gelmesini beklediğim düzeyde keşfetmeye yaklaşmamış görünmektedir. 15km'den

[739] *Bkz. örn.* Mukohyama ve Randall, 2003.

büyük uzaklıklarda gözlenen kuantum dolanıklıkları[740] beklenen bu değişikliklerle bütünüyle uyumludur çünkü bu dolanıklıklar yalnızca 10^{-19}J enerji düzeyine sahip foton çiftlerini içerir ve kendiliğinden durum indirgenmesi kütleçekimle ilgili OR uyarınca fotonlar gerçekten ölçülene (ölçüm aygıtında OR'nin gerçekleştiği noktaya) kadar beklenmemelidir. Belirgin kütle hareketleri içerildiğinde, kuantum mekaniğinin geçerliliğiyle ilgili halihazırdaki deneysel durum en iyi biçimde, Anton Zeilinger ve meslektaşları tarafından Viyana'da gerçekleştirilmiş olan yeni deneylerle gözler önüne serilir.[741] C_{60} (ve ayrıca C_{70}) "bucky topları"yla* birlikte temel olarak bir iki yarık deneyi gerçekleştirdiler. Bunlar, her molekülün 60 karbon atomuna sahip olduğu, günümüzdeki futbol toplarının çoğundaki dikiş desenlerine benzer biçimde güzel bir simetrik düzendeki (ya da 70 karbon içeren daha az simetrik düzendeki) *fullerenler*dir. Bu fulleren moleküllerinin çapı yaklaşık bir nanometredir ve birbirine yaklaşık 10^{-7}m, bucky topunun çapından neredeyse 100 kat daha fazla, uzaklıktaki iki konumun çakışması durumunda bulunduktan sonra birbirini engeller. §30.11'de ileri sürülmüş olan düzen uyarınca bu tür bir çakışma, kütleçekimle ilgili OR'ye göre kendiliğinden biçimde indirgenmeden önce yaklaşık yüz bin yıl ya da daha fazla zaman boyunca devam eder; böylelikle burada Zellinger deneyiyle herhangi bir uyuşmazlığın söz konusu olmadığı açıktır.

Durum elbette gelecekteki bazı deneylerle birlikte farklı olabilir. §30.13'teki uzay temelli FELIX önermesi ya da daha çok Dik Bouwmeester'in Santa Barbara'daki çalışmasından çıkarsanabilecek ilgili bazı deneyler kütleçekimle ilgili OR düzenini dolaysız biçimde sınayabilir ve ayrıca 21. yüzyıl başlarında gerçekleştirilebilecek deneylerle ilgili başkaca olasılıklar da söz konusu olabilir. Bu manzarayı özellikle heyecan verici olarak değerlendiriyorum. Ayrıca bu tür deneylerin kuantum mekaniğiyle ilgili olarak var olan bakış açımızı önemli biçimde değiştirebileceğine ilişkin belirgin olanaklar da söz konusudur. En azından bunlar, kuantum mekaniğinin bir gelecek kuramı uyarınca nasıl değiştirilebileceği hakkındaki kurguları kesin biçimde sınırlayabilir.

Bu, kuantum kuramını kütleçekimle birleştirmeye yönelik diğer girişimlerle, örneğin bölümler 31–33'te özetlenmiş olanlarla ilgili halihazırdaki (ya da makul biçimde tasarlanan) deneysel durumla tümüyle çelişki-

---

[740] *Bkz.* Tittel vd., 1998.

[741] *Bkz.* Arndt vd., 1999.

* Amerikalı mimar ve tasarımcı Richard Buckminster "Bucky" Fuller ardından Buckminsterfulleren olarak adlandırılan C_{60} denklemine sahip küresel fulleren molekülü, "bucky topları" olarak da adlandırılır. –çn.

lidir. Bu tür kuantum kütleçekim önermelerini ele almak üzere tasarlanan deneylere ilişkin çoğu ele alış, var olan herhangi bir parçacık hızlandırıcısının kapasitesinin son derece ötesindeki olağanüstü biçimde yüksek enerjilerle fırlatılan parçacıkları içerir. (Buna ilişkin olarak bildiğim tek istisna, "büyük" ek boyutların varlığına ilişkin olasılığı sınamak üzere tasarlanmış, örneğin kütleçekimle ilgili ters kare yasasını küçük uzaklıklarda etkileyebilecek deneyler ya da Lorentz kovaryansının ileri sürülmüş kuantum kütleçekimsel etkiler nedeniyle yüksek enerjide çiğnenip çiğnenmeyeceğini görmeyi amaçlayan zayıf biçimde ilgili başkaca bazı önermelerdir.)[742] Aslında "geleneksel" herhangi bir kuantum kütleçekim düzenini sınamayla yüzleşmekte, bu birliğin etkileri kuantum mekaniğinin standart işlemlerini dokunulmamış bırakarak yalnızca uzayzaman yapısını (olağanüstü biçimde küçük Planck uzaklık ya da zamanlarında) değiştirmek üzere, derin bir güçlük söz konusudur. Kuantum mekaniğine ilişkin kurallar 30. bölümde önerildiği gibi değiştirilirse deneyle ilgili olarak çok daha iyi bir durumda oluruz çünkü önerilen etkiler tam da günümüz teknolojisi kapsamı içindedir. Bu tür deneyler başarılı biçimde gerçekleştirilir ve kuantum mekaniği kurallarında bir değişikliğe gerek olduğunu belirtirse böylece nihayet, mevcut kuantum kütleçekim araştırmasını hareket ettiren matematiksel büyük arzuyu destekleyecek sağlam bir fiziki yönlendiricilik ortaya çıkmış olur.

Normal kuantum kütleçekim önermeleriyle ilgili deneysel veri yokluğu kuramsal temel fizik araştırmasında tuhaf bir duruma yol açmıştı. Standart parçacık fiziği (ve kozmoloji) modelinin ötesine doğru hareket etmemiz ve bu yolla evrenin temel bileşenlerine ilişkin daha derin kavrayışlar elde etmemizle ilgili gerçek bir ilerleme sağlamak üzere, kütleçekimin yanı sıra güçlü, zayıf ve elektromanyetik kuvvetleri de kapsayan bir kuantum kuramına sahip olmak gerekeceğine ilişkin genel bir uzlaşının esasen olgunlaştığı görülüyor. Bununla ilgili nedenin (şüphesiz fiziki olarak anlamlı) bir parçası, (tek başına yeniden normalleşebilir olmak karşısında) sonlu bir QFT'nin ıraksamaların küçük Planck uzaklığında "kesilme"sini gerektireceği ve bu nedenle kütleçekimin zorunlu biçimde tablonun bir parçası olması gerektiğine ilişkin anlayış olarak görünür (*bkz.* §31.1). Yine de bu alanda deney eksikliği söz konusu olduğundan kuramcıların çabaları fazlasıyla matematiksel istekler iç dünyasına yönelmiştir.

[742] *Bkz.* Amelino-Camelia vd., 1998; Gambini ve Pullin, 1999; Amelino-Camelia ve Piran, 2001; Sarkar, 2002; ya da olası bir "çıkış yolu" için *bkz.* Magueijo ve Smolin, 2002.

34.2 Matematiksel olarak yönlendirilen temel fizik

Matematiksel fikirler ve fiziki davranış arasındaki etkileşim bu kitabın sabit bir teması olageldi. Fizik biliminin tarihi boyunca ilerleme bir tarafta matematiksel kurama ilişkin eleştiri, ayartma ve ifşalarla öte tarafta fiziki dünyanın eylemlerinin genellikle dikkatli biçimde kontrol edilen deneyler yoluyla kesin gözlemi arasındaki doğru dengeyi yakalamak yoluyla gerçekleşti. Güncel çoğu araştırmada olduğu üzere deneysel yönlendiricilik yokluğunda bu denge kullanım dışı kaldı. Matematiksel uyumluluk[743] bize "doğru yol üzerinde" olup olmadığımızı söylemeye yeterli bir ölçüt olmaktan uzaktır (ve çoğu durumda belirgin biçimde gerekli olan bu istem bile rüzgâra savrulur). Estetik matematiksel değerlerin daha önce sahip olduklarından daha büyük roller üstlenmeye başladıklarını görürüz. Araştırmacılar sıklıkla, ortaya koyulan özel kuramsal fikirlerdeki estetik çekicilik yoluyla önemli bir dereceye kadar yönlendirilmiş olmalarında, Dirac, Schrödinger, Einstein, Feynman ve diğerlerinin başarılarına işaret ederler. Bana göre, böylesi estetik değerlendirmelerin değerine ve temel fiziğe ilişkin yeni kuramlarla ilgili mantıklı önermelerin seçiminde temel olarak önemli bir rol oynamasına ilişkin herhangi bir yadsıma söz konusu değildir.

Bu tür estetik yargılardan bazıları zaman zaman yalnızca, matematiksel olarak tutarlı bir düzene duyulan açık bir gerekliliği ifade eder çünkü aslında matematiksel güzellik ve tutarlılık yakından ilişkilidir. Önerilen herhangi bir fiziki modeldeki bu tür bir tutarlılık gereksinimi bana tartışılmaz görünüyor. Dahası, çoğu estetik ölçüte karşılık matematiksel tutarlılık, kendisinin yeterince açık biçimde nesnel bir şey olması avantajına sahiptir. Estetik yargılarla ilgili güçlük genelde onların son derece öznel olma eğiliminde oluşudur.

Yine de matematiksel tutarlılığın kendiliğinden değerlendirilmesi gerekmez. Matematiksel bir fikir derlemesi üzerinde yeterince uzun ve sıkı çalışmış olanlar, belirli bir düzen içerisinde bulunabilecek incelikli ve çoğunlukla beklenmedik birliği değerlendirmek konusunda daha iyi bir konumda olabilirler. Diğer taraftan böylesi bir düzenin yabancısı olanlar onu daha çok, şaşkınlıkla izleyebilir ve şu veya bu özelliğin niçin herhangi belirli bir değere sahip olması gerektiğini ya da kuramdaki bazı şeylerin niçin diğerlerinden daha şaşırtıcı –ve belki de böylece daha güzel– olarak

[743] "Uyumluluk" sözcüğünü burada *tutarlılık*tan bir miktar daha güçlü bir şeyi aktarmak üzere kullandım. Sözcük bütünüyle *uyumlu* matematiksel bir yapıda, kendisine ait formalizmin farklı görünümleri bir arada mükemmel uyumla çalışmak üzere, tutarlılığın yanı sıra belirli bir tutumluluğu da önermektedir.

kabul edilmesi gerektiğini değerlendirmeyi güç bulabilir. Yine de daha iyi nesnel yargılarda bulunabilecek olanların bu yabancılar olduğu koşullar söz konusu olabilir; çünkü belki de, belirli bazı yaklaşımlar içerisinde ortaya çıkan matematiksel sorunlar derlemesine zorlukla odaklanarak geçirilen yıllar çarpık yargılarda bulunma sonucunu verir!

Bununla birlikte fiziki bir kuramın matematiğindeki tutarlılık ve zarafet, şüphe götürmez değerlerine karşın, yeterli olmaktan açık biçimde epeyce uzaktır. Fiziki değerlendirmeler genellikle çok daha fazla öneme sahiptir. Öte taraftan deneye dayalı yönlendiriciliğin bulunmadığı durumlarda matematiksel niteliklere daha büyük önem yüklenir. Kesinlikle bu konularla ilgili basit yanıtlar olduğunu ileri sürüyor değilim. Bireysel araştırmacıların kendi estetik itkilerini izlemekte haklı olduklarına inanıyorum. Bununla birlikte bazı meslektaşlarını, bu itkilerin yöneltebileceği sonuçlara ilişkin iddia edilen görkem karşısında tümüyle hareketsiz olduklarını görürlerse şa şırmalıdırlar. Böylesi estetik güdüleri, kuramsal bilimdeki önemli her tür yeni fikrin gelişiminin temel bir parçası olarak değerlendiriyorum. Bununla birlikte deney ve gözlemin kısıtlayıcılığı olmaksızın böylesi güdüler kuramı sıklıkla fiziki olarak doğrulanacak şeyin çok ötesine taşır.

Tarih boyunca, harika bir matematiksel düzenin başlangıçta Doğanın gizemlerini ortaya çıkarmakta yeni bir devrimci yol sunar görünüp bu başlangıç umutlarının yine de, en azından başlangıçta beklendiği biçimde gerçekleşmediği pek çok örnek görebiliriz. Bir bölme cebiri oluşturmaya ilişkin harika bir özelliğe sahip dördeyler sistemi, iyi bir örnek olmalıdır. §11.2'de gördüğümüz gibi 1843'te Hamilton tarafından bulunan bu sistem onu, ömrünün kalan 22 yılını, Doğa kurallarını bütünüyle bu çerçeve içinde gösterme girişimine adayacağı biçimde baştan çıkardı. Bununla birlikte bu "saf dördey" çalışması (bölme cebiri özelliğine sahip başlangıçtaki gerçek dördeylerini kastediyorum) temel fiziki biliminin gelişiminde görece küçük bir dolaysız etkiye sahip oldu. Hamilton'un fiziki kuram üzerindeki diğer etkileri kesinlikle devasa ve son derece dolaysızdı. Çünkü şu an "Hamiltonlar", "Hamilton ilkesi" ve "Hamilton–Jacobi denklemi" vb olarak adlandırdığımız –bunlar Newton parçacıklarıyla dalgaları arasındaki benzerliğe ilişkin araştırmanın parçasını oluşturur–, kuantum mekaniği ve QFT'ye ilişkin 200. yüzyıl gelişmelerinde sıçrama noktası oluşturan şeyler onun erken araştırmalarıydı (*bkz.* §20.2 ve §§21.1, 2). Öte taraftan dördeylerin fizik üzerinde, bölme cebiri özelliğinin bir kenara bırakılmak zorunda olduğu genellemeler yoluyla yalnızca uzaktan etkisi mevcuttur.

19. yüzyıl ortalarında dördeylerin, onlarla bölme yapılabilmesine ilişkin harika matematiksel özelliği (§11.1) tarafından büyülenmek son derece

kolay olmuş olmalı. Dördeylerin ve bir dereceye kadar birkaç cebirin sahip olduğu bu mükemmel özellik saf matematik üzerinde belirgin bir etkiye sahipken ana akım fiziğinde dolaysız bir etkisi söz konusu değildi. Fiziki kuramda devasa gelişmelerin olanaklı hale gelebilmesine nihayet izin veren şey, içerisinde uzayzamanla ilgili Lorentzci imzanın benimsendiği Pauli ve özellikle Dirac'ın sonraki fikirleriyle birlikte Clifford'un dördeyleri yüksek boyutlara genellemesiydi (§11.5, §§24.6, 7). Hamilton'un harika bölme özelliği, fizik için son derece önemli olan bu sonraki gelişmelerde zorunlu biçimde terk edildi!

Fizikle ilgili olarak başarılı olan, matematikteki güzelliğe ilişkin bu biraz gizemli konuya §34.9'da döneceğim. Bununla birlikte bu konular önemli ve büyüleyici, tamamlayıcı matematiksel "yan ürün" konusuna değinmektedir. Antik Yunan zamanlarından beridir dünya davranışına yakın biçimde oluşturulan kuramlar harika matematiğin engin arazisinde yavruladı, başlangıçta yalnızca kendi hatırına çalıştı fakat çoğu kez kaynaklandığı değerlendirmelerden oldukça uzak uygulamalar buldu. Bazen bu uygulamaların gerçekleştirilmesi (gezegen hareketlerine ilişkin 16 ve 17. yüzyıllarda Kepler ve Newton tarafından sunulan kavrayışta önemli bir rol oynayan Apollonios'un yaklaşık İÖ 200'deki çalışması ya da 20. yüzyıl sonlarında kriptografide önemli uygulama alanları bulan Fermat'nın 1640'taki "küçük teoremi" durumundaki gibi) yüzyıllar aldı. Matematik, özel olarak iyi matematik, uygulamalarını çok bambaşka alanlarda bulma alışkanlığındadır ki bu kuvvet ve sağlamlığına ilişkin nedenlerden biridir. Doğanın işleyişi sıklıkla bu tür mükemmel matematiksel fikir kaynakları sunmuştur. Doğanın matematiksel kurallarla tam olarak uyumlu biçimde işlediğini kabul edersek Doğa tarafından teşvik edilen böylesi fikirlerde kesinlik ve güvenilirlik olması gerekliliği şaşırtıcı olmaz. Daha dikkat çekici olan şey, Doğa yasalarında içerilmiş görünen matematiğe ait *incelik* ve bu tür matematiğin sahip göründüğü, orijinal amacından oldukça uzak alanlarda (özellikle Newton ve Leibniz analizindeki durum gibi; *bkz.* bölüm 14) uygulamalar bulma alışkanlığıdır.

Bununla birlikte diğer taraftan, geniş biçimde yayılmış matematiksel alanlardaki çok daha üretken araştırmanın tetiklediği varsayımsal bir fiziki kuramın, bundan dolayı fiziki inandırıcılık kazanacağını ileri sürebilir miyiz? Konu özellikle, 31, 32 ve 33. bölümlerdeki fiziki düzenlere ilişkin bir anlama sahiptir. Sanıyorum ki bu herhangi basit bir biçimde yanıtlanamaz; fakat kesinlikle son derece dikkatli olunması önerilir.

Özellikle sicim kuramı matematiksel olarak harika araştırmaları tetiklemiş ve bu matematiksel çekicilik sebebiyle önemli bir güç elde etmiştir. (Aynı şey burgaç kuramı ve Ashtekar ile Hawking yaklaşımlarının çoğu

için de söylenebilir.) Öte taraftan bunun, fiziki gerçeklikle herhangi temel bir uyumun ne dereceye kadar belirteci olduğu belirsizdir. Yine de saf matematikçilerin sıklıkla, bulmuş olabilecekleri bir sonucun fizikte uygulamalara sahip olmasının, onun yalnızca sicim kuramıyla matematiksel bir ilişkiye sahip olmasından kaynaklandığıyla ilgili hoşnutluk ifade ettiklerine şahit oldum! Çoğu saf matematikçi arasındaki, kendilerine ait güzel konulara ilişkin görünümlerin fiziki dünyanın işleyişine yönelik önemli bir uygulama bulacağıyla ilgili arzuyu elbette anlayabiliyorum. Bununla birlikte sicim kuramının fizik *ol*duğuna inanmaya ilişkin, kesinlikle güçlü fiziki amaçlar tarafından güdülense de (şimdiye dek) gözleme dayalı hiçbir gerekçe olmadığı belirtilmelidir. Ayrıca sicim kuramı birçok iyi fizikçi tarafından çalışılan bir konudur fakat bu onu fizik yapar mı? Bu, temel fiziki araştırmaya ilişkin moda konusunu gündeme getirir ve şimdi bu konuyu ele almak isterim.

34.3 Modanın fiziki kuramdaki rolü

Carlo Ravelli tarafından gerçekleştirilip Aralık 1997'de Hindistan'ın Pune şehrinde yapılan Uluslararası Genel Görelilik ve Kütleçekim Kongresi'ndeki konuşmasında sunulan bir araştırmayı aktararak başlayayım.[744] Rovelli §32.4'te açıklanan kuantum kütleçekime yönelik döngü değişkeni yaklaşımının yaratıcılarından biridir. Araştırmasını gerçekleştirmekte hiçbir profesyonellik iddia etmemiştir. Yine de ulaştığı (doğrulanmamış) sonuçlar tam olarak beklediğim şeyleri yansıtmaktadır. O, önceki yıl, Los Angeles Archives'de kayıtlı, kuantum kütleçekim konusu hakkında yayımlanmış makalelerin bir dökümünü çıkardı. Konuya yönelik çeşitli yaklaşımlardaki aylık ortalama tez sayısı kabaca şu şekildeydi:

Sicim kuramı:	69
Döngü kuantum kütleçekim:	25
Eğik uzaylardaki QFT:	8
Kafes yaklaşımları:	7
Öklitçi kuantum kütleçekim:	3
Değişmeli olmayan geometri:	3
Kuantum kozmolojisi:	1
Burgaçlar:	1
Diğerleri:	6

[744] *Bkz.* Rovelli, *Gravity and Relativity: At the turn of the Millennium*, ed. N. Dadhich and J. Narlikar, 1998.

Okuyucu, modayla ilişkin talepleri çok zayıf biçimde izlediğimi, bu kitapta kendi adıma ilgili kuramlara ayırdığım alandan algılayacaktır. (Eğik uzaylaradaki QFT'ye §30.4'te tartışılan Hawking etkisiyle ilişkisi içinde kısaca değindim. Kafes yaklaşımları sürekli olanlar yerine ayrık uzayzaman modellerini alır; *bkz.* §33.1. Öklitçi kuantum kütleçekim §28.9'da tartışılan Hawking yaklaşımında rol oynar. Kuantum kozmolojisi kütleçekimle ilgili serbestlik derecelerinin çoğunun göz ardı edildiği basitleştirilmiş uzayzamanları kullanır. Bahsedilen diğer yaklaşımlar bölümler 31–33'te tartışılmıştır.) Sicim kuramı alanında diğer alanların tümünün toplamından daha fazla makale olduğu görülecektir. Bu tür bir araştırma bugün yeniden yapılacak olsa, sicim kuramı tezlerinin üstünlüğünün daha da büyük olacağına yönelik genel bir uzlaşı olduğu görülmektedir. Bilimsel araştırmanın demokratik hükümet ilkelerince yönlendirildiğini düşünecek olsak, mutlak çoğunluğun sicim kuramcılarına ait olması nedeniyle, hangi araştırmanın yapılması gerektiğine ilişkin kararların tümünün onlar tarafından dikte edildiğini görürüz![745]

Şanslıyız ki, bilimin kıstasları demokratik hükümetinkilerle aynı değil. Azınlık etkinliklerinin, yalnızca azınlıkta olmaları gerçeği nedeniyle zarar görmemesi doğru ve uygundur. Gözleme ilişkin matematiksel tutarlılık ve uyum daha da önemlidir. Yine de moda hevesini tümüyle görmezden gelebilir miyiz? Kesinlikle hayır. Zamanında (yedi ek boyutu bir "basık 7–küre" oluşturan 11–boyutlu süper kütleçekim kavramı gibi)[746] son derece revaçta olan çok daha az güvenilir pek çok fikre ek olarak bana son derece önemli gerçekler içerir biçimde görünmüş –ve hâlâ görünmekte– olan (örneğin Regge yörüngeleri, § 31.5 ve Geoffrey Chew'in analitik S matrisi[747] gibi) geçmişin moda olup artık on yıllardır gözden düşmüş pek çok kuramını anımsatabilirim. Bir kuramın gözde oluşu ona ilişkin bilimsel olarak makul olma durumunun ölçüsünü bir dereceye –fakat yalnızca *bir* dereceye– kadar sunar.

İşe ilişkin konularla ilgili olarak daha büyük hale gelme doğal eğilimine sahip olan, küçük olandan daha çok büyük olandır. Durumun, özellikle uçak yolculuğu ve internetin olduğu, yeni bilimsel fikirlerin konferanslarda ağızdan çıkar çıkmaz e–mail yoluyla seri biçimde yayılabildiği ve in-

---

[745] Bazı meslektaşlarım bana artık durumun gerçekten bu olduğuna inandıklarını söylediler!

[746] §15.4'ten S^7'nin, S^3 üzerindeki Clifford paralellerine benzer biçimde, S^3'ler tarafından liflendiğini anımsayın. Aslında S^7, tanjant vektörlerine ilişkin 7–çerçevenin kendisine ait tüm noktalara sürekli biçimde atanabileceği anlamına gelmek üzere, "paralelleşebilir" olarak adlandırılan şeydir. S^7'nin "bastırılması" böylesi "paralel" yönler üzerinde sistematik biçimde gerçekleştirilir. *Bkz.* Jensen, 1973.

[747] Regge yörüngeleri için *bkz.* Collins, 1977; S matrisiyle ilgili olarak *bkz.* Chew, 1962.

ternetteki bilimsel makalelerde (çoğu kez atıfta bulunulmadan) aktarılabildiği modern dünyada, bilimsel modaya ilişkin olarak da niçin böyle olduğunu görmek güç değildir. Bu iletişim kolaylığının neden olduğu çoğu durumda zıvanadan çıkmış rekabetçilik, araştırmacıların, dahil olmadıkları durumda kaçırmaktan endişelendikleri "sürü psikolojisi" etkisine yol açar. Modanın, sürekli biçimde bilimsel incelemeye maruz kalan kuramsal fikirlerle ilgili olarak bu denli konu olması gerekmez. Bununla birlikte, bilimsel doğrulama ya da çürütme olasılığından kuantum kütleçekimdekiler kadar uzak olan fikirlerle ilgili olarak bir yaklaşımın gözde olmasını ona ilişkin geçerliliğin bir belirtisi olarak kabul etmekte özel olarak dikkatli olmak zorundayız.

Moda ayrıca notasyon ya da özel matematiksel formalizm gibi diğer alanlarda da oynayacak bir role sahiptir. Belki de bu üstte tartışılanlardan daha az önemli bir konudur fakat araştırmanın gelişmesi için yine de anlamlıdır. Belirli bir örneği, diğer bir deyişle van der Waerden'in daha sonraki 2–bileşenli spinör formalizmi yerine Dirac'ın son derece yaygın biçimde kullanılan 4–bileşenli spinör formalizmini açıklayayım (*bkz.* §22.8, §24.7, §25.2). Göreceğimiz üzere bu, belirli ironik görünümlere sahiptir. Aslında kuantum elektrodinamiğinde, Robert Geroch tarafından gösterildiği üzere,[748] (§ 22.8'de kısaca açıklanan) 2–spinörleri kullanmak gerçekten çok daha basitken 4–spinör formalizmi kullanılır. Dirac 1928'de kendi denklemini bulduğunda 4–spinörleri kullanmıştı. Dirac denklemi spinörlerin önemine ilişkin daha fazla ilgiyi tetikledi ve bir yıl sonra seçkin Hollandalı matematikçi Bartel L. van der Waerden güçlü 2–spinör analizini formüle etti.[749] Bununla birlikte o zamana kadar, Dirac'ın elektron denklemini keşfedişinin neden olduğu coşku çoğu fizikçinin, pek çoğu van der Waerden'in daha esnek ve gösterişli formalizminden haberdar bile olmamak üzere, Dirac'ın orijinal yaklaşımını izlediği anlamına geldi. Yine de sonuçta Dirac'ın kendisi de van der Waerden'in yapmış olduğu şeyin gücünü taktir etmiş göründü. Aslında, 1950'lerin başlarında Dirac'ın, 2–spinör analizine ilişkin güzel bir sunum yaptığı, tüm konuyu benim için, daha önce gördüğüm açıklamalarda neredeyse tümüyle şaşırtıcıyken açık hale getiren bir dersine katılmıştım.

Esasen Dirac'ın kendisi de 1936'da, 2–spinör yaklaşımını elektron denklemiyle ilgili olarak, yüksek spinli parçacıklara yönelik genellemeler bulmakta kullanmıştı.[750] Öte taraftan 2–spinör formalizmini bilmeyen ba-

---

[748] *Bkz.* Geroch, Chicago Üniversitesindeki yayımlanmamış ders notları.

[749] *Bkz.* van der Waerden, 1929; Infeld ve van der Waerden, 1933; Penrose ve Rindler, 1984, 1986; O'Donnell, 2003.

[750] *Bkz.* Dirac, 1936; yüksek spin denklemlerine ilişkin başkaca versiyonlar için *bkz.* Corson, 1953.

zı başka araştırmacılar Dirac'ın yüksek spin denklemleriyle ilgili özel durumlar keşfetmiş görünmekte ve böylesi şeyleri "Duffin–Kemmer" denklemi (0 ve 1 spinle ilgili, 1936, 1938), "Proca" denklemi (1930) ve "Rarita–Schwinger" denklemi ($\frac{3}{2}$ spinle ilgili, 1941) olarak adlandırmaktalar. İnsanların bu alandan alıntıladıkları Dirac'ın önceki çalışması değil *onların* çalışmasıdır.

Dirac moda takipçisi değildi ve öyle görünüyor ki kendi kurduğu modayı bile her zaman izlememiştir! Yine de diğerleri zaman zaman kendilerini, istemeseler de onun içine çekilmiş bulurlar. Buna ilişkin bir örnekten 1970'lerin ortalarında, süpersimetrideki temel fikirlerden bazılarını üreten Bruno Zumino'yla konuşmak üzere CERN'i ziyaret ettiğim bir sırada haberdar oldum. (Julius Wess'le[751] birlikte 1974'teki çalışmaları burgaç kuramıyla kesin bir bağlantıya sahip olmuş ve ben de bunu incelemek istemiştim.) Bana 2–spinör formalizminin gücünü takdir ettiğini söyledi. Bir keresinde kendisine ait belirli bir fikri formüle etmek üzere yazdığı tezde 2–spinörleri kullanmıştı. Bununla birlikte birkaç ay sonra, bana söylediğine göre, saygın fizikçi Abdus Salam aynı fikri bu kez 4–spinörleri kullanarak ortaya koydu. Daha sonra herkes Salam'ın tezine atıfta bulunurken kendisininkine kimse atıf yapmamıştı. Zumino buradan bir daha (teknik olarak mükemmel) 2–spinör formalizmini kullanma hatasına düşmemesi gerektiği sonucunu çıkarmıştı!

Araştırmacıların, özellikle genç olanların, araştırmayla ilgili moda çizgiden kaçmalarını, isteseler de zorlaştıran ilgili bir konu söz konusudur. Bu, modern matematiksel fizikte karşılaştıkları, tümüyle farklı ve zor matematiksel fikirlere ait şeffaf niceliktir. Çalışmaya ilişkin belirli bir çizginin küçük bir parçasını ayırmak ve ona hâkim olmaya çalışmak yeterince zordur. Çeşitli farklı çizgilerin bütünlüklü değerine ilişkin karşılaştırmalı bir yetkin çalışmayı bir seferde gerçekleştirebilmek kesinlikle çoğu genç araştırmacının yeteneklerinin ötesindedir. Seçim yapmaları gerekirse, halihazırda olgun araştırmacıların önceliklerine güvenmek zorundadırlar ve bu yalnızca, daha az bilinen diğerlerinin harcanması pahasına, çalışmaya ilişkin zaten moda olan çizginin etkisine eklenir.

Üstteki uyarılarım deneye dayalı sonuçlar tarafından sınırlanmamış türde kuramsal bir araştırmayı amaçlamış olsa da, deneyle bağlantılı olarak moda unsuru da fakat biraz farklı bir sebeple, önemsiz değildir. Bu büyük oranda, genellikle temel fizik hudutlarındaki deneylerin kurulumunda içerilen devasa masraftan kaynaklanır. Esasen çoğu deney böyle pahalı olduğundan normalde hükümet ya da büyük ticari hedeflerin des-

[751] *Bkz.* Wess and Zumino, 1974.

teğine gerek duyar ve deneye devam etmeye ya da şu veya bu tip deneyin sınırlı para kaynağının daha iyi kullanımını gerçekleştirip gerçekleştiremeyeceğine karar verecek sayısız heyete gerek duyulacaktır. Bilimsel anlamda bilgili heyet üyelerinin, mevcut bakış açılarına başarılı biçimde yol açmış fikirleri geliştirmekte kendilerini kanıtlamış kişiler olması gerekliliği doğaldır. Böylece onlar, bu belirli bakış açılarından doğal görünen sorunları dolaysızca ele alan deneyleri onaylama eğilimindedirler. Bu nedenle kuram önemli biçimde, belirli yönlere "hapsolma" eğilimine sahiptir. Böylesi bir nedenden dolayı temel herhangi bir yön değişikliği yapmak da son derece güç olabilir.

34.4 Yanlış bir kuram deneysel olarak çürütülebilir mi?

Burada herhangi gerçek bir tehlike bulunmadığı düşünülmüş olabilir çünkü yön hatalıysa bu durumda deney bunun aksini bize yeni bir yönün dayatılacağı biçimde kanıtlar. Bu, bilimin ilerleyişine ilişkin geleneksel tablodur. Aslında, iyi tanınan bilim felsefecisi Karl Popper önerilen bir kuramın bilimsel kabul edilebilirliğiyle ilgili olarak bir makul görünüm kriteri[752], diğer bir deyişle *gözlemsel olarak çürütülebilir* olmasına ilişkin bir kriter sundu. Korkarım ki bu, oldukça zorlayıcı bir kriter ve bu modern "büyük bilim" dünyasında kesinlikle son derece idealist bir bilim bakışıdır.

Modern parçacık fiziğindeki süpersimetri örneğini ele alayım. Bu, kesin bir matematiksel zarafete sahip ve yeniden normalleşebilir QFT'ler (§31.2) oluşturmak konusunda kuramcının hayatını kolaylaştıran kuramsal bir fikirdir. En önemlisi bu, sicim kuramının merkezi bir bileşenidir. Bugünlerde kuramcılar arasındaki konumu öylesine güçlüdür ki neredeyse günümüz "standart" parçacık fiziği modelinin bir parçası olarak değerlendirilir. Yine de şimdiki haliyle herhangi deneye dayalı (ciddi) bir desteğe sahip değildir. Kuram, Doğanın gözlemlenmiş olan temel tüm parçacıklarına ilişkin "süper eşler" öngörür fakat bunların hiçbiri şimdiye dek gözlemlenmemiştir. Süpersimetri kuramcılarına göre bunun nedeni, (bilinmeyen doğaya sahip) bir simetri kırılımı mekanizmasının süper eşlerin, onları yaratmak için gerekli enerjinin hâlâ günümüz hızlandırıcıları kapsamının ötesinde olacak biçimde iri kütleli olmalarına yol açmasıdır. Artan enerji kapasiteleriyle süper eşler bulunabilir ve bu yolla fiziki kuramda gelecekle ilgili önemli anlamlara sahip olacak yeni bir dönüm noktası gerçekleşebilir. Bununla birlikte süper eşlerin yine de gerçekten bulunmadı-

[752] *Bkz.* Popper, 1934.

ğını düşünün. Bu süpersimetri fikrini çürütür mü? Pek sayılmaz. Simetri kırılımı derecesinin küçüklüğüyle ilgili açıkça çok fazla iyimserlik bulunmuş olduğu iddia edilebilir ve hatta kayıp süper eşleri bulmak üzere daha yüksek enerjiler gerekebilir.

Gözde bir kuramsal fikri, kritik deneylemeye ilişkin geleneksel bilimsel yöntem yoluyla yerinden etmenin, o fikir esasen yanlış da olsa, pek de kolay olmadığını görmekteyiz. Yüksek enerji deneylerinin devasa masrafı ayrıca, bir kuramın öbür türlü olabileceği biçimi sınamayı son derece zorlaştırır. Parçacık fiziğinde, öngörülen parçacıkların herhangi ciddi bir çürütme olasılığına ilişkin olarak çok daha yüksek kütle enerjilere sahip olduğu başkaca pek çok kuramsal önerme söz konusudur. GUT'a ya da sicim kuramına ilişkin çeşitli özel versiyonlar bu türdeki sebep dolayısıyla çürütülmeye karşı korunaklı böylesi pek çok "öngürü"de bulunur.

Bu tür modellerin "Popperci olmayan" nitelikleri, onları bilimsel olarak kabul edilemez kılar mı? Böylesine zorlayıcı bir Popperci yargı bana göre kesinlikle çok katı olur. İlgi çekici bir örnek olarak tek bir manyetik tek kutbun kozmosta bir yerlerde tek başına varlığı, evrendeki her parçacığın (esasen gözlendiği üzere) sabit bir değerin tam katı olan bir elektrik yükü-ne sahip olacağı gerçeğiyle ilgili bir açıklama sunabilir. Böylesi bir tek kutbun *bir yerlerde* var olduğunu ileri süren kuram belirgin biçimde Popperci olmayan bir kuramdır. Bu kuram böylesi bir parçacığın keşfiyle oluşturulabilir fakat Popper kriterinin gerektirdiği üzere çürütülebilir görünmemektedir; çünkü kuram hatalıysa, deneyciler faydasız biçimde ne kadar araştırırsa araştırsın bir tek kutup bulma yetersizlikleri kuramın aksini kanıtlamaz![753] Yine de kuram kesinlikle, ciddi biçimde ele alınmaya değer bilimsel bir kuramdır.

Benzer bir uyarı, kozmolojiye ilişkin olarak da yapılabilir. Parçacık ufkumuz (§27.12) dışındaki evren bölgesi dolaysız gözlemin ötesindedir. Yine de bunun, bölgenin, geniş bir ölçekte, dolaysız gözlem için erişilebilir olan bölgeye benzeme gereğiyle ilgili makul bir bilimsel önerme olduğu görülür. Gözlemlenemez bölgenin gözleme dayalı olarak erişilebilir bölgeye benzemesine ilişkin –çoğu şişme düzeninin (§28.4) olmasa da, esasen standart kozmoloji modelinin (§27.8) parçası olan– kuram gözleme dayalı olarak çürütülebilir değildir.

Dahası ilgiyi evrenin yalnızca dolaysız biçimde gözlemlenebilir parçasıyla bile sınırlasak, geniş bir ölçekte türdeş ve izotropik olduğu varsayılan uzamsal geometrinin pozitif, negatif ya da sıfır eğrilikte mi olduğunu (ilgili $K > 0$, $K < 0$, $K = 0$ durumları; *bkz.* §27.8) sorabiliriz. Kuramımız

[753] Bu türdeki fikrin şen bir kullanımı için *bkz.* Aldiss and Penrose, 2000.

$K = 0$ olduğunu ileri sürerse böylece bu gözleme dayalı olarak çürütülemez olma niteliğine sahip olur çünkü uzamsal düzlükten herhangi sonlu bir sapmayla ilgili olarak yeterince kesin bir gözlem, o uzamsal eğrilik ne kadar küçük olursa olsun düzlükten bu sapmayı (belki de uygulamada olmasa dahi ilkede) ayırt edebilir. Öte taraftan kuramımız $K \neq 0$ olduğunu ileri sürerse bu durumda kuram gerçekte $K = 0$'sa çürütülemez çünkü gözlemlerde her zaman, çok hafif bir pozitif ya da negatif uzamsal eğriliğe olanak tanıyan bir belirsizlik aralığı söz konusu olur. Gerçekte $K < 0$'sa $K > 0$ durumunun ve gerçekte $K > 0$'sa $K < 0$ durumunun kural olarak çürütülebildiğini belirtelim. Öte taraftan, $K \neq 0$ gözleme dayalı olarak doğrulanabilirken (evrenin öyle olduğu ortaya çıkarsa) $K = 0$ (dolaysız biçimde) *doğrulan*amaz.[754] Böylece her iki iddia da, $K > 0$ ve $K > 0$, –gerçekte $K = 0$'sa çürütülememelerine rağmen– belirli koşullarda çürütülebilir olmaları sınırlı anlamında Popperci'dir ve ayrıca tekil olarak da doğrulanabilirdir. $K = 0$'ın kural olarak bütünüyle Popperci olup doğrulanabilir olmadığını belirtelim.

Bu çeşitli olasılıkları göz önünde tutarak Popperci bakış açısının bizi nerede terk ettiğinden emin değilim. $K > 0$, $K < 0$ ya da $K = 0$'dan her birinin eşit derecede "bilimsel" birer iddia olduğu, Popper kriteriyle ilgili bu incelikli farklara karşın bana göre açıktır. Ayrıca çoğu kozmolog, ne olursa olsun, burada benimsediğim oldukça ukala çizgiyi, diğer bir deyişle "$K = 0$"ın aslında bunun *kesin biçimde* geçerli olması gerektiği anlamına geldiğini, kabul etmez. Yine de *doğru* bir kuram, $K > 0$ ya da $K < 0$'ı öngörürse, o andan itibaren gözleme dayalı olarak doğrulanma olanağına sahip olacağından (ve bilimsel kabul edilebilirlik konusuyla ilgili Popper'in daha olumsuz bakış açısına karşın bilimsel bir kuramın aradığı şey doğrulama olduğundan) daha iyi bir hale gelir. $K = 0$'ı öngören bir kuram, onaylama elde etmek üzere başkaca gerekçelendirmelere bağlı olmak zorunda olur.

Böylesi bir gerekçelendirme $K = 0$'ın, gözleme dayalı doğrulanmasını başka bir biçimde bulan belirli bir kuramın anlatımı olmasıdır. Aslında bu, §28.4'te tartışılmış olan son derece gözde şişme kozmolojisine ilişkin olarak ileri sürülen durumdur. Süpersimetrinin parçacık fiziği standart modeline ilişkin bir "neredeyse" parça olmasına benzer biçimde şişme kozmolojisinin sıklıkla günümüz "standart" kozmoloji modelinin bir *neredeyse* parçası olarak değerlendirildiğini belirtelim! Şişmeye ilişkin konumu, Popper'in çürütülebilirlik konusuyla ilgili olarak incelemeye çalışalım.

---

[754] BOOMERanG'ın gerçekten böylesi doğrulamalar sunmuş olduğuyla ilgili güncel iddialara karşın. Örneğin, bu iddialarla ilgili (sınırlı) bir eleştiri için *bkz.* Bouchet vd., 2002.

Durumun açık olduğu ve şişmenin esasen Popperci olduğu düşünülebilir. On yıkdan fazladır $K = 0$'ın şişme fikrine ilişkin bir anlatım olduğu sürekli olarak ileri sürülmüştü[755] ve şişme yanlılarınca verilen, böylesi tahminlerin yapıldığı sayısız derse katıldığımı anımsıyorum.[756] Bu nedenle gözlemler bize ikna edidci biçimde $K \neq 0$ olduğunu söylerse şişme olanaksız olur! Bu, Popper ilkesine, aranılabilecek ölçüde açık bir bağlılık olarak görünür. Dahası, mikrodalga ardalanıyla ilgili şişmeden gelen ayrıntılı bazı öngörüler söz konusudur ve bunlar, genel bir biçimde, çoğu şişmeci beklentiyle uyum içinde özellikle dalgalanmalara ilişkin sürekli gözlemlenen *ölçek değişmezliği*yle ilgili olarak gözleme dayalı dikkat çekici bazı desteklerden faydalanır görünür. Bununla birlikte 1990'ların ortalarında evrenin Ω_d ortalama madde yoğunluğunun (baryonik artı kara), toplam uzamsal düzlük için gerekli olan şeyden daha küçük olduğuna, o değerin kabaca en fazla üçte biri olduğuna ilişkin çeşitli türdeki bağımsız gözlemden gelen kanıtlar artmaya başlıyordu. (Ω_d ve Ω_Λ yoğunluk nicelikleri *kritik* yoğunluğa ilişkin, bu Einstein kuramında kozmolojik terim olmaksızın $K = 0$ vermiş olan yoğunluk olmak üzere, bir kesir olarak kabul edilir; *bkz.* §28.10) Özel olarak Ω_d yaklaşık 0,3'tür. Gözlemlerdeki bu eğilimle uyumlu biçimde şişme kuramcıları, esasen $K < 0$ olmak üzere artık $K \neq 0$'a izin verilen şişme modelleri sağlamaya başladılar.[757] Ek olarak, (Hartle–Hawking "sınır yok" önermesiyle bağlantılı olarak; §28.9) $K > 0$'ın kesin bir öngürü olarak kabul edildiği Hawking ekolünün de $K < 0$'ın kendi düzenlerine dahil edilebileceği biçimleri fark etmeye başladığını belirtebiliriz.[758]

Bu durum, uzak süpernovalara (§28.10) ilişkin gözlemlerin bize Einstein denklemine pozitif bir kozmolojik sabit, diğer bir deyişle $\Lambda > 0$, eklenmesi gerektiğini söyler göründüğü 1998'e kadar sürdü. Bu, Ω_d madde yoğunluğuyla birlikte alındığında fark edilen $\Omega_d + \Omega_\Lambda = 1$ kritik toplamını (ya da bunun yerine orijinal Hartle–Hawking önermesi için gerekli olan

$$\Omega_d + \Omega_\Lambda > 1)$$

sunabilecek etkin bir ek Ω_Λ yoğunluğu sağlar. Bu yolla toplam uzamsal düzlük ($K = 0$), $\Omega_{\text{E}} \approx 0{,}7$ olmak üzere, gözlemle (toplam pozitif uzamsal eğ-

[755] Bondi, Gold ve Hoyle tarafından 1950'lerin başlarında ortaya konduğu üzere, *bkz.* Hoyle 1948; Bondi ve Gold 1948, kararlı durumdaki evren Bondi tarafından açık biçimde belirtildiği gibi kesin olarak Popperci'dir ve $K \neq 0$'a ilişkin kurulum da ayrıca çürütme yolları arasında yer almıştır. Bununla birlikte bu, gözlemle diğer, en önemlisi Büyük Patlamanın fiilen dolaysız bir kanıtı olan 2,7 K ardalan ışınımıyla olan, çelişkiler nedeniyle yıkıldı; *bkz.* §§27.9, 10, 12 ve §28.4.

[756] Örneğin *bkz.* Linde, 1993.

[757] *Bkz.* Bucher vd., 1995 ve Linde, 1995.

[758] *Bkz.* Hawking ve Turok, 1998.

rilikle olduğu gibi) uyumlu olur. Buna karşın çoğu şişme yanlısı, şişme kozmolojisinin bir öngörüsü olarak $K = 0$'a geri dönmüş görünür. Popper'in tüm bunlarla ilgili söylemek zorunda kalmış olacağı şeyden emin değilim.

Aslında artık, içerisinde "öz" olarak adlandırılıp negatif basınca ilişkin dinamik bir "kara enerji" yoluyla *etkin* bir kozmolojik sabit sağlayan yeni bir bileşenin (yeni bir alan) sunulduğu ilgi çekici bir şişme önermesi söz konusudur. *Bkz.* Steinhardt *vd.*, 1999. Bunun bize doğru gelen yeni bir şişme fazına işaret ediyor olabileceği ileri sürülmektedir (*bkz.* §28.10)! Bir miktar olağanüstü görünen bu tür önerilerin aslında gözleme dayalı olarak ikna edici biçimde yerleşikleşmenin seri yollarını bulacağı, uygulamada konular nadiren bu kadar açık seçik görünse de, umut edilmektedir.

Bana göre bu tür iddialarla ilgili, görünüşte yüksek nitelikli deneysel sonuçlarla desteklense bile, son derece dikkatli olmak zorundayız. Bunlar sıklıkla bazı gözde kuramlara ilişkin bakış açısıyla analiz edilir. Örneğin mikrodalga ardalanına ilişkin muhteşem BOOMERanG[759] gözlemleri başlangıçta çoklukla şişme bakış açısından yorumlandı ve aslında gözlemlerin $K = 0$ (bu nedenle $\Lambda > 0$) olduğunu gösterdiğine ilişkin güçlü iddialarda bulunuldu. Dahası geniş veri miktarına ve farklı analizlerle ilgili daha fazla kapsama sahip bazı deneylerde (BOOMERanG'da olduğu gibi), ilgili insanların (çok haklı olarak) "öncelikle gidecekleri" ham veri genel olarak birkaç yıllık süreçte ortaya çıkmayabilir. Ara süreçte verinin farklı bir bakış açısından analiz edilmesi için küçük bir alan söz konusudur. Aslında BOOMERanG durumunda Vahe Gurzadyan ekibindeki bazı üyelerle birlikte veriye gerçekten de ulaşmayı başardı ve ona eliptiklik analizini (§28.10) uygulayarak $K < 0$ olduğuna ilişkin (daha sonra kendisine ait ilgili WMAP veri analiziyle desteklenen) dolaysız bir sağlam işarete ulaştı. "Düzensiz" $\ell = 2$ (Şekil 28.19'daki düşey eksence tuhaf biçimde gizlenen) WMAP ölçümü gibi bu, şişme konumuyla pek de samimi değildir. Tüm bunlarla ilgili açık bir sonuca ulaşmadan önce ortalığın sakinleşmesini beklememiz gerekecek!

Bilimsel moda konularının, bilim insanlarından konularının nesnelliğine ilişkin yükselen geleneksel protestolara karşın, kuramsal bilimsel araştırmanın yönünü nasıl güçlü biçimde etkilediğini görmekteyiz. Yine de belirgin nesnellik yoksunluğunun Doğanın kendi hatası olmadığını mutlak biçimde vurgulamalıyım. Dışarıda nesnel bir fiziki dünya mevcuttur ve fizikçiler onun doğasını keşfetmek ve davranışını anlamayı doğru biçimde kendi görevleri olarak değerlendirir. Modaya ilişkin üstte anılmış

[759] *Bkz.* Lang vd., 2001.

olan güçlü etkilerde gördüğümüz belirgin öznellik, sosyal baskı, kaynak bulma baskısı ve insan zayıflıklarıyla sınırlılıkları halihazırda karşı karşıya olduğumuz bir miktar kaotik ve sıklıkla karşılıklı olarak tutarsız tablolarda önemli roller oynamak üzere, basit olarak bu anlayışa yönelik el yordamıyla arayışlarımızda bulunan bir özelliktir.

34.5 Sonraki fiziki devrimimizi nereden bekleyebiliriz?

Sanırım bu bölümdeki açıklamalarımda fiziğe ilişkin temel bir anlayışa yönelik mevcut gelişmelere ilişkin popüler açıklamalarda sıklıkla verilenden görece daha kötümser bir tablo sundum. Bununla birlikte ayrıca bunun çok daha gerçekçi olduğunu sanıyorum. Öte taraftan kesinlikle, bazı popülerleştiricilerin sürdürmeye çalıştıkları gibi, temel ilerlemenin hemen hemen olanaksız olduğu bir aşamaya ulaştığımız izlenimini uyandırmayı istemiyorum.[760] Aslında hâlâ anlamlı kılınması gereken gözleme dayalı devasa miktarda veri söz konusudur; ve bu, başkaca hiçbir deney gerçekleştirilmeyecek bile olsa böyledir.

Modern deneylerle ilgili veriler sıklıkla otomatik olarak depolanır ve dolaysız biçimde ilgili kuramcı ve deneyciler için, depolanmış bu bilginin yalnızca belirli bir küçük kısmı anlamlıdır. Böylece tüm veri kütlesinin yalnızca, onların ilgilendikleri sorunların ele alınacağı belirli biçimde analiz edilmesi olasıdır. Bu tür veride Doğanın yollarına ilişkin gizli kalmış pek çok ipucu olması da, onları şu an için uygun biçimde okuyamasak da, kesinlikle olasıdır. Einstein genel göreliliğinin önemli biçimde onun, gözleme dayalı veride örtük olan, Galilei zamanından (ve öncesinden) beridir orada olup tümüyle değerlendirilemeyen şeye (eşdeğerlik ilkesi; *bkz.* §17.4) ilişkin kavrayışına bağlı olduğunu anımsayın. Ölçülemeyecek derecede daha geniş modern gözlemlerde gizli başkaca ipuçları da olabilir. Hatta belki de gözlerimiz önünde, fiziki gerçekliğin doğasıyla ilgili temel olarak yeni bir bakış açısının elde edilebileceği şekilde, çevrilip farklı bir açıdan bakılmaya gerek duyan "belirgin" olanları da söz konusu.

Aslında kesinlikle yeni bir bakış açısı gerektiğine ve bakış açısındaki bu değişikliğin kuantum mekaniğindeki ölçüm paradoksunca ortaya konan derinlikli konuları ve EPR etkileriyle "kudolanıklık" konusunda içkin ilgili yerel olmayışı ele almak zorunda olacağına inanıyorum (23 ve 29. bölümler). 30. bölümde ölçüm paradoksunun genel görelilik ilkeleriyle (ve özellikle az önce değinilen Galilei–Einstein eşdeğerlik ilkesiyle) birbirine

[760] *Bkz.* John Horgan'ın kitabı *The End of Science*, 1996.

derin biçimde bağlı olmak zorunda olduğunu ileri sürdüm. Belki yeni deneyler (örneğin FELIX ya da daha yer temelli bir alternatif; §30.13) kuantum kuramına ilişkin gerekli gelişkin anlayışlara yol açabilir. Belki de kuantum kütleçekim doğasına ışık tutacak başka türde deneyler (örneğin uzayzamana yönelik yüksek boyutluluk olasılığını sınamak üzere tasarlananlar) söz konusu olacaktır. Öte taraftan belki de bizi ilerletecek şey kuramsal değerlendirmeler olacaktır.

Varsayılmış olan böylesi herhangi kuramsal gelişim kaynakları bu kitabın önceki bölümlerinde açıklanmış olan fikirlerde halihazırda bulunur mu? Açıktır ki bu konuya ilişkin sayısız farklı bakış açısı söz konusudur ve herhangi bir yanıtta kişisel bakış önemli bir rol oynamak zorundadır. Kendi özel umudum kesinlikle (esasen 40 yıldan fazla bir süredir), burgaç kuramı çerçevesinin fiziki bakış açısına ilişkin böylesi bir değişikliğe yol açabilecek kavrayışlar ortaya koyabilmesi olageldi; hâlâ da böyledir. Bununla birlikte gerçekleştirilmiş olan ilerlemeye karşın, var olan haliyle burgaç kuramının bizi, ölçüm paradoksunu çözmemize yardımcı olabilecek herhangi bir yöne doğru anlamlı biçimde yönlendirdiği söylenemez.

Açıkladığım kuramların göreli değerleriyle ilgili duruş ne olursa olsun kesinlikle yeni kavrayış ve bakış açıları gereklidir. Bunlar ne şekilde ortaya çıkmalıdır? Yalnız bir biçimde bir "yeni Einstein" çalışması ve büyük oranda iç değerlendirmelerden kaynaklanan böylesi devrimci bakışlarla karşılaşmayı mı bekleyelim? Ya da kendimizi son derece kafa karıştırıcı deneysel bulgulara zorlanır biçimde mi bulacağız? Albert Einstein'ın durumunda, onun iç kavrayışı sonuç olarak, (Einstein'ın Lorentz, Poincaré, Mach, Minkowski, Grossmann ve diğerlerinden elde ettiği önemli girdiye rağmen) büyük oranda bir "tek kişilik kuram" olan genel göreliliğe yol açtı. Öte taraftan kuantum kuramı, çok büyük miktarda hassas deneyin olağanüstü sonuçlarınca dışsal olarak desteklenmiş olmak üzere, bir "çok kişilik" kuramdı. Mevcut temel araştırma ikliminde *bireyler* için sağlam ilerleme kaydetmek Einstein zamanındakinden çok daha zor görünüyor. Ekip çalışması, devasa bilgisayar hesaplamaları, moda fikirlerin takibi; bunlar güncel araştırmada görmeye yatkın olduğumuz etkinliklerdir. Gerekli temel biçimdeki yeni bakış açılarının böylesi etkinliklerden ortaya çıktığını görmeyi bekleyebilir miyiz? Şimdilik bu görülmeye muhtaçtır fakat bununla ilgili olarak bir miktar şüpheliyim. Belki de yeni yönler, 20. yüzyılın ilk üçte birlik diliminde kuantum mekaniğinde ortaya çıkan durumdaki gibi, çok daha fazla deneysel olarak desteklenirse böylece bu tür bir "çok kişilik" yaklaşım işleyebilir. Yine de kuantum kütleçekim alanında bunun yalnızca, genel görelilikçi ilkelerin kuantum mekaniği yapısı üzerindeki etkisini açığa çıkaran (30. bölümde desteklediğim) deneyler söz

konusu olursa gerçekleşeceğini hissediyorum. Bu olmazsa daha çok Einsteincı "tek kişilik" yaklaşım benzeri bir şeyin gerekli olacağını sanıyorum. Bunun içinse zihnimde çok küçük bir kuşku söz konusudur fakat fiziki kavrayışa ek olarak o matematiksel estetik, önemli bir itici kuvvet olmak zorundadır.

Bu inanışa ilişkin sebep, temel fiziki davranışı ne kadar derinlemesine araştırırsak onun matematik tarafından o kadar kesin biçimde kontrol edildiğini görmemizdir. Dahası, bulduğumuz matematik yalnızca dolaysız biçimde hesaba dayalı bir doğada değil aynı zamanda, fizikle daha az temel bir düzeyde ilişkili matematikte görülmeyen türde bir incelik ve güzelliğin söz konusu olduğu, derin biçimde çok yönlü bir niteliktedir. Bununla uyumlu olarak daha derin bir fiziki anlayışa yönelik ilerleme, deney tarafından ayrıntılı olarak yönlendirilemeyecekse, fiziki anlam ve matematiksel derinliği değerlendirebilme ve uygun fikirleri derin biçimde hassas bir estetik matematiksel beğeninin kullanımı yoluyla "ortaya çıkarma" yetisine çok daha sıkı biçimde dayanmak zorundadır.

Sorunun doğası nedeniyle bunu gerçekleştirmek üzere güvenilir türde kriterler belirlemek son derece güçtür. Bu kitabın sonlara doğru olan bölümlerinde tartıştığımız yaklaşımlar arasındaki karşıtlıkta, her biri kendi estetik matematiksel ve fiziki kriter kümesi tarafından yönlendirilen farklı matematiksel gelişmelerin karşılıklı olarak çelişkili yönlerde nasıl geliştiğini zaten gördük. Bazıları belki de *tüm* bu yaklaşımların bir tür sentez içinde bir araya getirilebileceği yolları, belki de tümü bir araya getirilmiş olan bu gövdeden uygun olan şeyleri damıtmak yoluyla, aramamız gerektiğini ileri sürdü. Öte taraftan farklı yaklaşımlar arasındaki çelişkilerin çok büyük olduğu ve geri kalan tümü bir köşeye atılmak üzere en çok birinin ayakta kalabileceği haklı olarak ileri sürülebilir. Ben de gerçeğin bu uçlar arasında bir yerlerde bulunduğundan ve temel ilkeleri sonuç olarak terk edilecek olan kuramlarda bile hâlâ önemli bir şeyler bulunabileceğinden kuşkulanıyorum.

Birbiriyle bütünüyle uyumlu olmasa da açıkladığım kuramlardan bazıları fark edilecek düzeyde ortak temellere sahiptir. Özellikle 32. bölümdeki döngü değişkeni yaklaşımı burgaç kuramıyla (33. bölüm) önemli ortak özelliklere sahiptir ve her birinden gelecek (belki spin ağları, spin köpükleri, n–kategori kuramı ya da hatta değişmeli olmayan geometriyi içeren) fikirlerin uygun bir birleşiminin ileriye doğru bir yola yönlendirebileceğini hayal edebiliyorum. Bununla birlikte ek uzay boyutlarına bağımlı mevcut haliyle sicim kuramı bende, öngörülebilir herhangi bir birliğin ortaya çıkmasına ilişkin olarak burgaç ya da döngü değişkeni kuramından çok uzak olduğu izlenimi bırakıyor. Uyumlu olmayışın nedeni sicimlerin ken-

dileri değildir (§31.5). Süpersimetri bile burgaç fikirleriyle bir araya getirilebilmektedir[761] fakat sicim kuramının yüksek boyutlarla (özellikle burgaç kuramının holomorfik felsefesini çiğneyen o belirli boyut/imzayla; *bkz.* §33.4'ün son paragrafı) ilgili ısrarı hem burgaç hem de döngü değişkeni kuramıyla temel bir çelişki yansıtır. Çok yakın zamana kadar sicim kuramcıları tutarlı bir (1 + 3)–boyutlu kuram sağlamaya dönük herhangi bir eğilim göstermediler. Bununla birlikte, §31.18 ve §33.14'te belirtildiği üzere, çok yakın bir kayma söz konusu oldu ve böylece artık sicim kuramına ilişkin kuramsal fikirlerin olağan (1 + 3)–boyutlu uzayzamana uygulanması ciddi biçimde kabul edilmiş görünmektedir.

34.6 Gerçeklik nedir?

Okurun tüm bunlardan edineceği üzere "gerçekliğe giden doğru yol"u, üç bin beş yüz yıldan fazladır, özellikle son birkaç yüzyıldır gerçekleştirilmiş olan olağanüstü ilerlemeye karşın henüz bulduğumuzu sanmıyorum. Kesinlikle bazı temel yeni kavrayışlar gereklidir. Yine de bazı okurlar hâlâ yolun kendisinin bir serap olabileceği bakışını benimsemektedir. Doğrudur, –böyle iddia edebilirler– Doğayla dikkate değer biçimlerde uyumlu matematiksel düzenlere rastlamakta yeterince şanslıydık fakat Doğanın matematiksel bir düzenle bir bütün olarak birliği "gerçek olamayacak bir hayal"den fazlası olamaz. Diğerleri, gerçekten nesnel bir doğaya sahip "fiziki gerçeklik" kavramının kendisinin, ona ne şekilde bakmayı seçtiğimizden bağımsız olarak, bir hayal olduğu bakışını benimseyebilir.

Aslında şunu da sorabiliriz: fiziki gerçeklik ne*dir*? Bu, binlerce yıldır sorulmakta olan bir sorudur ve çağlar boyunca felsefeciler buna çeşitli yanıtlar vermeye çalıştılar. Bugün modern bilime ilişkin avantajlı konumumuzdan geçmişe bakıyor ve daha aklı başında bir konumu benimsemeyi talep ediyoruz. "Ne" sorusuna yanıt vermeye girişmek yerine çoğu bilim insanı ondan kaçınmaya çalışır. Sorunun yanlış biçimde sorulduğunu ileri sürmeye çalışırlar: gerçekliğin *ne* olduğunu sormayı değil yalnızca onun *nasıl* davrandığını sormayı denemeliyiz. Aslında "nasıl?" bu kitabın ana amaçlarından biri olarak değerlendirebileceğimiz temel bir sorudur: evrenimize ve onun içindekilere hükmeden yasaları nasıl açıklarız?

Yine de bazı okurlar şüphesiz bunun bir miktar hayal kırıklığı yaratan bir yanıt olduğunu hissedeceklerdir; bir "kaçamak" o kadar. Evrenin içindekilerin nasıl davrandığını bilmek bize davranışı yapan şeyin ne olduğu-

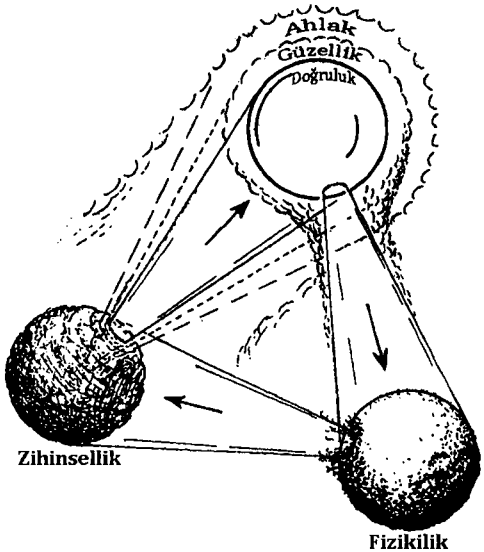
[761] *Bkz.* Ferber, 1978; Ward ve Wells, 1989; Delduc vd., 1993; Ilyenko, 1999.

na ilişkin pek fazla şey söyler görünmüyor. Bu "ne?" sorusu bir diğer derin ve eski soruyla yakından ilişkilidir; "niçin?". Evrenimizdeki şeyler niçin davrandıkları belirli biçimlerde davranır? Bununla birlikte bunların *ne* olduğunu bilmeksizin *niçin* bir şey yerine diğerini yaptıklarını görmek güçtür.

Modern bilim "ne?" sorularında olduğu gibi "niçin?" sorularına da yanıtlar vermeye girişmekte dikkatlidir. Yine de "ne?" ve "niçin?"le ilgili sorulara sıklıkla yanıtlar sağlanır. Böyle yapılması, sorular en derin düzeydeki gerçeklikle ilgili olmamak koşuluyla kabul edilebilir olarak değerlendirilir. Şu gibi sorulara bir yanıt verilmesi beklenebilir. "Bir kolesterol molekülünün bileşenleri nedir?"; "sert bir yüzeye aniden sürtüldüğünde kibrit niçin alev alır?"; "kutup ışıkları nedir?"; "güneş niçin parlar?"; "bir hidrojen atomu ya da hidrojen molekülünü bir arada tutan kuvvetler nelerdir?"; ve "bir uranyum çekirdeği niçin karasızdır?". Yine de "bir elektron nedir?" ya da "uzay niçin yalnızca üç boyuta sahiptir?" gibi sorulabilecek bazı başkaca sorular daha fazla utanca sebep olabilir. Bununla birlikte bu sorular daha temel bir fiziki gerçeklik tablosu içinde bir anlama sahip olabilir.

Özellikle bölümler 31–33'teki tartışmalardan modern fizikçilerin şeyleri istisnasız şekilde matematiksel modeller biçiminde tanımladıkları görülecektir. Bu, hangi belirli önerme ailesine bağlı olacaklarından bağımsızdır. "Gerçekliği" matematiksel ideallere ait Platoncu dünyada bulmaya çalışır gibidirler. Böylesi bir bakış önerilmiş herhangi bir "her şeyin kuramı"nın bir sonucu olarak görülür çünkü böylece fiziki gerçeklik yalnızca saf matematiksel yasaların bir yansıması olarak görünür. Bu bölümde ileri sürmekte olduğum üzere, böylesi bir kuramdan kesin olarak epey uzağız ve "her şeyin kuramı"na benzer bir şey bulunup bulunamayacağı tartışmalı bir konudur. Öyle olsa bile durum kuşkusuz, Doğanın gizemlerini ne kadar derinlemesine araştırırsak, kavrayışımızı aradığımızdan Platon'un matematiksel idealler dünyasına daha derin biçimde itileceğimiz gerçeğidir. Peki niçin böyle? Şimdilik bunu yalnızca bir gizem olarak görebilmekteyiz. Bu, §1.4'te değinilip Şekil 1.3'te gösterilen üç derin gizemden ilkidir ve burada Şekil 34.1'de yeniden çizilip biraz süslenmiştir.

Peki matematiksel kavramlar gerçekten kendi "dünya"larında yaşayan şeyler midir? Böyleyse, nihai gerçekliğimizi evine, o tümüyle soyut dünya içinde sahip olarak bulmuş görünürüz. Bazı insanlar Platon'un matematiksel dünyasını herhangi bir anlamda "gerçek" olarak kabul etmekte zorlanırlar ve fiziki gerçekliğin kendisinin yalnızca soyut kavramlardan oluştuğu bakışıyla teselli bulmazlar. Bu konuyla ilgili kendi konumum Platon'un dünyasının matematiksel kavramlara kesinlikle bir tür "gerçeklik"



Şekil 34.1 "Üç Dünya ve Üç Gizem"i gösteren diyagramın (Şekil 1.3), matematikte bulunan mutlak Doğruluğa ek olarak diğer Güzellik ve Ahlak "Platoncu mutlaklar"la süslenmiş halde yinelenmesi. Güzellik ve Doğruluk, fiziki bir kurama ilişkin güzellik kendi doğruluğunu Fiziki Dünya'yla ilişkili biçimde yönlendirecek şekilde davranmak üzere, birbirine geçmiştir. Öte taraftan tüm Ahlak konusu nihai olarak Zihinsellik Dünyası'na bağlıdır.

sağladığını benimsememiz gerektiğidir (ve bu durumu §1.3'te güçlü biçimde savundum) fakat esasen fiziki gerçekliği Platon'un dünyasının soyut gerçekliği içinde *tanımlama*ya girişmeye ayak direyebiliriz. Bu soruya ilişkin konumumu en iyi biçimde, üç dünyanın –Platoncu matematiksel, fiziki ve zihinsel– her birinin kendine özgü gerçekliğe sahip olduğu ve her birinin (derinden ve gizemli biçimde) kendinden önce gelende (dünyalar döngüsel biçimde kabul edilmek üzere) kurulduğu Şekil 34.1'in ifade ettiğini sanıyorum. Platonik dünyanın, bir anlamda, üçü arasındaki en ilkel olanı olduğunu düşünmek istiyorum çünkü matematik kendine yalnızca mantık yoluyla fiilen varlık kazandıran bir tür gerekliliktir. Böyle bile olsa, bir de bu dünyalara ilişkin döngüsel görünümle ilgili, kendisi öncelinin yalnızca küçük bir parçasına bağlı görünürken her birinin kendinden sonra geleni kendi bütünlüğü içinde kapsayabilir göründüğü, gizem ya da paradoks da mevcuttur.

34.7 Zihinselliğin fiziki kuramdaki rolleri

Her "dünya"nın, diğer ikisininkinden farklı, kendine özgü türde bir varlığa sahip olduğunu zihnimizde tutmak zorundayız. Yine de sonuç olarak bu dünyalardan herhangi birini diğerlerinden yalıtık olarak uygun biçimde değerlendirebileceğimizi düşünmüyorum. Bu dünyalardan biri zihinsellik olduğundan bu, fiziki kuramda zihnin rolü ve de ayrıca zihinselliğin ilgili olduğu (örneğin en azından yaşam, uykusuzluk, sağlıklı insan beyni gibi) fiziki yapılarda nasıl ortaya çıktığı konusunu gündeme getirir. Bu kitapta bilinçli zihniyet sorununu, sonuç olarak bu konunun fiziki gerçeklik kavrayışına ilişkin arayışımızdaki önemli bir konu olma zorunluluğu gerçeğine karşın, derinlemesine ele almaktan kasıtlı biçimde kaçındım. (Bu tür konuları ayrıntılı olarak başka bir yerde tartıştım; ortaya çıkacak tartışmalı pek çok konuyla ilgili kafa karışıklığı yaşar hale gelmek istemiyorum.)[762] Yine de zihinsellik konusundan tümüyle kaçınmaya çalışmak bana göre uygunsuz olur. Şekil 34.1 uyarınca diğer iki dünyayla birlikte ele alınmış olan zihinsellik dünyasından ayrı olarak bu kitapta bilinç konusunun fiziki olarak açık ya da örtük anlamlı bir role zaten sahip olduğu çeşitli yerler bulunmaktadır.

Bunlardan biri, §27.13'te değinilip §§28.6, 7'de bir miktar ayrıntılı biçimde tartışılmış olan antropik ilkeyle bağlantılıdır. "Gözlemlenmiş" herhangi bir evren, mantıksal bir gereklilik olarak, bilinçli zihinselliği destekleyebilmelidir çünkü bilinç kesin biçimde "gözlemci"nin nihai rolünü oynayan şeydir. Bu temel gereklilik bilinçli zihinselliğin var olabilmesi (ve olacağı) için evrenin fiziki yasaları ya da fiziki parametreleriyle ilgili kısıtlamalar da sağlayabilir. Bu nedenle antropik ilke, bilinçli gözlemciler olarak gerçekten gözlemlediğimiz evrenin bu kısıtlılıklarla tutarlı yasalar ve uygun parametre değerleriyle işlemek zorunda olduğunu ileri sürer. Böylesi kısıtlılıklar kendilerini Doğanın temel (boyutsuz) sabitleriyle ilgili, §31.1'te tartışılmış olan, belirli değerlerde açığa vurur. Aslında, gerçekten bulduğumuz değerleri antropik ilkeye ilişkin bir tür uygulamanın sonucu olarak değerlendirmek oldukça sıradanlaşmıştır.

Ne yazık ki bu sabitlerin değerleri –diyelim ki matematiksel değerlendirmeler yerine– antropik ilke tarafından bile belirlense, ilke neredeyse kullanışsızdır çünkü bilincin var olması ve esasen ortaya çıkması için gerekli koşullar hakkında çok az şey biliyoruz. O, uzamsal olarak sonsuz ve esasen düzenli ($K \leq 0$) bir evrende neredeyse tümüyle kullanışsızdır çünkü böylesi bir evrende şans eseri ortaya çıkabilecek maddi herhangi bir dü-

[762] *Bkz.* Penrose, 1989, 1994, 1997.

zenleme, ilke tarafından bilinçli yaşamla ilgili son derece elverişsiz koşullara bile olanak tanınacak şe kilde, bir yerlerde ortaya çıkacaktır; *bkz.* §28.6. Çok daha iyimser bir olasılık bana göre, bu temel sabitlerin esasen matematiksel olarak belirlenebilir sayılar olmasıdır. Uzamsal olarak sonsuz bir evrende bunun antropik ilkeyle önemli sorunlar ortaya çıkarması gerekmez.

29. bölümde (özellikle §§29.7, 8) tartışıldığı üzere kuantum mekaniğinin **R** parçasına ilişkin çoğu yorumda bilinç tarafından oynanan oldukça ayrı, önemli bir rol söz konusudur. Aslında kuantum mekaniğine ilişkin "geleneksel" yorumların neredeyse tümü sonuç olarak bir "algılayan varlığın" var olmasına bağlıdır ve böylelikle algılayan bir varlığın gerçekte ne olduğunu bilmemizi gerektirir görünür! Kopenhag yorumunun (§29.1'deki (a) bakış açısı) dalga fonksiyonunu nesnel olarak gerçek bir olarak kabul etmeyip aslında varlığı "gözlemcinin zihninde" olan bir şey olarak kabul ettiğini anımsayalım. Dahası bu yorum, en azından belirtilerinden birinde bir ölçümün, tahminen sonuç olarak bilinçli bir varlık tarafından gözlemlenen bir şey anlamına gelmek üzere, ölçüm daha pratik bir uygulanabilirlik düzeyinde "klasik" ölçüm aletlerince gerçekleştirilecek bir şey olmasına rağmen, bir "gözlem" olmasını gerektirir. Bununla birlikte klasik aletlere olan bu bağlılık, herhangi gerçek bir alet parçası hâlâ kuantum bileşenlerinden yapıldığından ve standart **U** kuantum evrimine bağlı kaldıysa gerçekte –yaklaşık olarak bile– klasik biçimde davranmayacağından, yalnızca geçici bir önlemdir. (Bu basit olarak Schrödinger'in kedisi durumudur; *bkz.* §§7, 9 ve §§30.10–13.) Çevresel evre uyumsuzluk konusu (§29.1'deki (c) bakış açısı) da bize ayrıca yalnızca geçici bir önlem konumu sunar çünkü "çevrede kaybolmuş olan" bilgiye erişilemezlik onun, nesnel bir anlamda, *gerçekten* kaybolduğu anlamına gelmez. Öte taraftan kaybın öznel olması için bizi bilinçli gözlemci sorununa geri döndüren "öznel biçimde algılanma; peki kim tarafından?" konusuna yeniden çekiliriz.

Her durumda, hatta çevresel evre uyumsuzlukla bile, evrene ilişkin "doğru" kuantum açıklamasayıla ilgili **U** evrimine hassas biçimde bağlı kalmayı sürdürürsek böylece gerçeğe ilişkin çoklu dünyalar açıklamasına (§ 29.1'deki (b) bakış açısı) itiliriz. Çoklu dünyalar bakış açısı belirgin biçimde bir "bilinçli gözlemci"yi oluşturan şeye ilişkin uygun bir anlayışa sahip olmaya bağlıdır çünkü algılanan her "gerçeklik" bir "gözlemci durumu"yla ilgilidir, böylece hangi gözlemci durumlarının olanaklı olduğunu bilene dek hangi gerçeklik durumlarının (diğer bir deyişle "dünyalar") olanaklı olduğunu bilmeyiz. Başka türlü ortaya konduğu haliyle, gerçekten algılanan görünüşteki nesnel dünyanın davranışı birinin bilincinin yolunu, sayısız kuantum üst üste binmiş alternatifler arasından nasıl geçirdi-

ğine bağlıdır. Bilinçli gözlemcilerle ilgili uygun bir kuram yokluğunda çoklu dünyalar yorumu zorunlu biçimde temel olarak eksik kalmak zorundadır (*bkz.* §29.8).[763]

Tutarlı geçmişler yaklaşımı (§29.2'deki bakış açısı) da ayrıca açık biçimde bir "gözlemci"nin olabileceği şeye ilişkin bir kavrama (kavram Gell-Mann–Hartle düzenindeki bir IGUS olarak anılır)[764] bağlıdır. Wigner tarafından önerilen bilincin (ya da genel olarak yaşayan sistemlerin) **U** evrimini *çiğne*yebileceğine ilişkin bakış açısı (§29.2'deki (f)'nin bir versiyonu) ayrıca kuantum mekaniğinin yorumlanışında zihnin (ya da "gözlemci"yi oluşturan her neyse onun) rolüne açık bir göndermede bulunan bakış açısıdır. Anlayabildiğim kadarıyla bir "bilinçli gözlemci" bakış açısına zorunlu biçimde bağlı ol*ma*yan tek yorum de–Broglie–Bohm'unkiyle (§29.2'deki (e) bakış açısı)[765] kendileri uyarınca, **U** ve **R**'nin her ikisinin de nesnel olarak gerçek bir tür fiziki evrime yönelik yaklaşıklık tahminleri olarak kabul edildiği kuantum mekaniği kurallarında temel bir değişiklik gerektirenlerin (§ 29.2'deki (f) bakış açıları) çoğudur.

Bu kitabın pek çok yerinde (özellikle 30. bölümde) ifade ettiğim üzere, kütleçekim olgusuyla birlikte **U**'nun yerini **R**'nin (diğer bir deyişle **OR**'nin) aldığı bu son bakış açısının taraftarıyım. Kütleçikimle ilgili bu **OR** kendiliğinden biçimde gerçekleşir ve herhangi bilinçli bir gözlemcinin işlemin bir parçası olmasını gerektirmez. Olağan koşullarda **OR**'nin her zaman meydana gelen sık belirtileri söz konusu olur ve bunlar, mükemmel bir yaklaşıklık tahmini olarak, büyük ölçekte ortaya çıkan klasik bir dünyaya yol açar. Buradan hareketle, bir ölçüm gerçekleştiğinde (**R**) kuantum durumunun indirgenmesini gerçekleştirmek üzere herhangi bilinçli bir gözlemciyi çağırmaya gerek yoktur.

Öte taraftan –"dışarıdaki" fiziki dünyada ortaya çıkan *gerçek* bir fiziki işlem olarak kabul ettiğim– bilinç olgusunun esas olarak gerçek **OR** işleminden yararlanacağını düşünüyorum. Bu nedenle kendi konumum temel olarak, **R** işleminin şu ya da bu yolla bilinçten sorumlu olduğu düşünülen üstte ifade edilmiş olanların tersidir. Benim bakış açımda, bilinçten (kısmen) sorumlu olan şey fiziki olarak gerçek bir **R** işlemidir![766]

Bu çekişme deneysel olarak sınanabilir midir? Öyle olduğunu sanıyorum. İlk olarak, beyindeki yapılanmalarla ilgili dolaysız biçimde anlamlı

---

[763] *Bkz.* Deutsch, 2000; Lockwood, 1989.

[764] *Bkz.* Gell-Mann, 1994 ve Hartle, 2004.

[765] Bununla birlikte bu konuyla ilgili David Bohm'un görüşlerini dinlemiş olanlar, onun bilince ilişkin konuları kuantum mekaniğininkilerle ilgisiz olarak değerlendirmediğini görecektir.

[766] *Bkz.* Penrose, 1989, 1994, 1997.

olabilecek –özellikle ilk olarak Stuart Hameroff[767] tarafından önerilmiş olan sinirlerle ilgili A–kafes mikrotüpleri (fakat belki de ayrıca yapıları C_{60} moleküllerine yakından benzeyen sinaptik klatrin[768] gibi diğer yapılar da)– belirli düşünceler söz konusudur ve bu belirli fikirleri onaylamak/çürütmek üzere önemli bir alan mevcuttur. Düzen, (yüksek sıcaklık süper iletkenliğiyle ortak özelliklere sahip; *bkz.* § 28.1)[769] beynin önemli bölgeleri boyunca geniş biçimde etkiyen bir tür büyük ölçekli kuantum uyumluluğu gerektirir ve sinirlerle ilgili A–kafes mikrotüplerinin bunda, bilinçli bir olay bu kuantum sisteminin kısmi durum indirgenmesiyle (düzenlenmiş **OR**) ilgili olmak üzere, önemli bir rol oynadığı düşünülür. Normalde bu, kütleçekimle ilgili **OR**'yi §§30.11, 12'de açıklanmış önermeyle uyum içinde etkilemek için protein moleküllerinde yeterli uyumlu hareketi gerçekleştirmek üzere, beynin pek çok farklı parçasını bir arada içerir.

Kendisi uyarınca –mikrotüp hipotezine özgü olmasa da– böylesi varsayımsal fikirlerin sınanabildiği, Andrew Duggins tarafından ortaya konmuş olan zekice bir öneri mevcuttur. Bu öneri, algılamanın farklı görünümlerinden (örneğin hareketei renge ya da biçime ilişkin görsel algılardan) beynin oldukça farklı bölgelerinin sorumlu olması fakat yine de bilincin ulaştığı görüntüde tüm bu farklı görünümlerin tek bir görüntü oluşturmak üzere bir araya gelmesi gerçeğine dayanır. Bu zaman zaman *bağlanım sorunu* olarak adlandırılır. Duggins'in fikri bilinçli görüntü oluşumunda içerilen Bell eşitsizliklerine ilişkin, büyük ölçekli kuantum etkilerinin bilinçli algılamanın bir parçası olduğunu güçlü biçimde vurgulayan EPR türü yerel olmayan olayların (§§23.3–5) varlığını belirten önemli ihlallerin söz konusu olup olmadığını görmek üzere sınamaktır. İlk sonuçlar ikna edici olmaktan uzak olmalarına rağmen cesaret verici bazı görünümlere sahiptir.[770]

Bu fikirlerin konumu ne olursa olsun bana öyle geliyor ki, fiziki olguların en derin düzeylerindeki herhangi bir tür eksikliğe yönelik iddiada bulunan "temel" bir fiziki kuram ayrıca, bilinçli zihinselliği de işin içine katacak potansiyele sahip olmalıdır. Bazı insanlar bu sorundan, bilinçli olma halinin basit biçimde bir tür "epifenomen" olarak "ortaya çıktığını" ileri sürerek kaçınmaya (ya da onu küçümsemeye) çalışır. Böylece buradan hareketle, ilgili (biyolojik olması gerekmeyen) işlemlerin temelinde bulunan kesin tipteki fizikte, bilinçli olma halinin ortaya çıkmasının hiçbir

---

[767] *Bkz.* Hameroff ve Watt, 1982; Hameroff, 1987, 1998; Hameroff ve Penrose, 1996.

[768] *Bkz.* Koruga vd., 1993.

[769] *Bkz.* örneğin Anderson, 1997.

[770] Kişisel iletişim. Bildiğim kadarıyla Duggins'in araştırmaları hemüz tamamlanmadı ve henüz herhangi bir yayın söz konusu değil.

önemi olmadığı iddia edilir. Standart bir konum, kendisi uyarınca bilinçli zihinselliği ortaya çıkaran şeyin yalnızca (uygun fakat henüz saptanmamış bir doğaya sahip) hesaba dayalı etkinlik olduğu *hesaplamalı işlevsellik* konumudur. Bu görüşe (kısmen Turing hesaplanabilirlik kavramıyla Gödel kuramına dayanan gerekçelendirmeyi kullanarak; *bkz.* §16.6) kuvvetle karşı çıktım ve aslında bilinçli olma halinin gerçekten kayıp (kütleçekimle ilgili) **OR** kuramına bağlı olduğunu belirttim.[771] İddialarım bu kayıp kuramın *hesaplamalı olmayan* (diğer bir deyişle eylemleri Turing makinesi simülasyonunun kapsamı dışında bulunan; §16.6) bir kuram olma zorunluluğunu talep etmektedir. Bu türde bir **OR** modeli üretmekle ilgili kuramsal fikirler şimdilik son derece başlangıç aşamasındadır fakat burada bazı ipuçları bulunması olasıdır.

34.8 Gerçeğe giden uzun matematiksel yolumuz

Önceki bölümlerde sunulmuş olan tartışmalardan, gerçek dünyanın doğasını anlamaya ilişkin yolumuzun hedefinden hâlâ çok uzak olduğu umarım açıklık kazanmıştır. Belki de bu hedefe asla ulaşılamayacak ya da sonuç olarak "gerçeklik" olarak adlandırdığımız şeyin kural olarak anlaşılabileceği biçimde bir nihai kuram ortaya çıkacak. Böyle olursa, o kuramın doğası şimdiye dek fiziki kuramlarda gördüğümüz şeyden devasa biçimde farklılık göstermek zorundadır. İki bin beş yüz yıldan uzun süren yolculuğumuzda ortaya çıkan en önemli anlayış matematiğin belirli alanlarıyla fiziki dünyanın işleyişi arasında, bu şekiller 1.3 ve 34.1'de gösterilmiş olan "ilk gizem" olmak üzere, derin bir birlik[772] olduğudur. "Gerçeğe giden yol" sonuçta hedefine ulaşırsa, böylece bana göre o son noktayla ilgili temelde yatan son derece derin bir basitlik söz konusu olmak zorundadır. Mevcut hiçbir önermede bunu görmüyorum.

---

[771] *Bkz.* Penrose, 1987, 1994; Hameroff ve Penrose, 1996.

[772] Bu birliğin dikkat çekici ve biraz gizemli olarak değerlendirilip değerlendirilmeyeceği uzmanlar arası bir çekişme konusu olarak görünmektedir. Son derece saygın matematiksel fizikçi Eugene Wigner, 1960, ünlü bir dersinde "matematiğin fiziki bilimlerdeki akıl almaz etkinliği"ni açıklamıştı. Bununla birlikte, güçlü teoremlerinden ikisi bu kitapta bir yerlerde sunulmuş olan, seçkin matematikçi Andrew Gleason matematik ve fiziki arasındaki uyumu yalnızca "matematiğin düzen bilimi olduğu"na ilişkin gerçeğin bir yansıması biçiminde değerlendiren karşıt bir görüşü kabul etti, 1990. Kendi kişisel bakış açım Gleason yerine Wigner'inkine daha yakındır. Fiziğin temellerindeki geçerli matematiksel yasalarda gördüğümüz yalnızca olağanüstü kesinlik değil fakat ayrıca incelik ve çok yönlülük bana, tek başına dünyanın işleyişindeki "düzen"in temelini oluşturan bir ifadeden çok daha fazlası olarak görünür.

Fiziki gerçekliğin işleyişini vurgulayan şeyin *matematik* olduğuna ilişkin bu eski Yunan sezgisi bize olağanüstü biçimde hizmet etmiştir. Amaçladığımız hedefe olan uzaklığa karşın, evrenin bildiğimiz en derin düzeylerdeki işlemlerine ilişkin dikkat çekici derecede etkileyici bir anlayışa ulaştığımızı belirgin hale getirdiğimi umuyorum. Belirli matematiksel kavramlar geçmişte özel olarak başarılı olma durumlarıyla göze çarpmaktadır. Gerçel sayı sistemi ve geometriye ilişkin fikirler bunlar arasındadır. Başlangıçta bu sistematik biçimde ilk olarak eski Yunanlar tarafından çalışılmış Öklitçi geometriydi fakat daha sonra fikirler Öklit geometrisinden Lambert, Gauss, Lobaçevski, Bolyai, Riemann, Beltrami ve diğerlerininkine doğru gelişti. Daha sonra Minkowski uzayla zamanı birleştirmemizi söyledi ve Einstein bize genel göreliliğe ilişkin muhteşem eğik uzayzaman geometrisini sundu. Arşimet, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Cauchy, Cartan ve diğer pek çoklarının integral ve türev analizleri ve ayrıca diferansiyel denklemler, integral denklemleri ve değişken türevler, bu fikirler geometriyle son derece önemli biçimlerde bağlanmış olmak üzere, dünyanın işleyişini açıklayan başarılı kuramlar için mutlak biçimde yaşamsal olduğunu kanıtladı. Maxwell, Boltzmann, Gibbs, Einstein ve diğerlerinin bize öğrettiği, çok büyük sayıda tekil bileşene sahip büyük ve karışık fiziki sistemleri ele almamıza olanak sağlayan istatistiksel fikirler de temeldi. Matematik, Heisenberg'in matris kuramı fikirlerinden Dirac, von Neumann ve pek çok diğerlerinin karmaşık Hilbert uzayları, Clifford cebiri, gösterim kuramı, sonlu boyutlu fonksiyonel analiz vb'ye kadar kuantum kuramının derin temelini oluşturur.

Matematiğin, dünyanın işleyişine ilişkin anlayışımızın temelini oluşturan yalnızca belirli iki görünümünü her birini sırasıyla tartışarak belirtmek isterim çünkü inanıyorum ki bunlar fiziki kuramımızdaki ilkelerin önemli fakat büyük oranda ele alınmamış sorunlarına üstü kapalı biçimde değinebilirler. İlki, kuantum mekaniği işlemlerinde, başarılı tüm ilk kuramların kurulmasını sağlamış olan gerçel sayı sisteminin aksine, çok temel olduğunu gördüğümüz *karmaşık sayı* sisteminin rolüdür. İkincisiyse, fiilen tüm 20. yüzyıl kuramlarında, özellikle fiziki etkileşimlere ilişkin ayar kuramının formülasyonuyla ilgili olarak merkezi bir öneme sahip olan *simetri*nin rolüdür.

İlk olarak karmaşık sayıları ele alın. Bu sayıların matematiğinde yalnızca özel bir sihir bulunması değil fakat ayrıca Doğanın kendisinin bu sihri kendi evrenini en derin düzeylerde dokumakta kullanır görünmesi de bu kitabın yinelenen bir teması olagelmiştir. Yine de bunun dünyamıza ilişkin doğru bir özellik olup olmadığını ya da bu sayıların fiziki kuramdaki geniş kullanımlarına yol açan şeyin yalnızca kendilerinin matematik-

sel faydaları olup olmadığını da sorgulayabiliriz. Sanırım çoğu fizikçi bu ikinci görüşe eğilim göstermektedir. Bununla birlikte onlara göre, temel kuantum üst üste binme ilkesini, biraz farklı biçimde Schrödinger denklemini, pozitif frekans koşulunu ve kuantum alan kuramında ortaya çıkan sonsuz boyutlu "karmaşık yapı"nın (§26.3) temelini oluşturan bu sayılara ilişkin rolün niçin kuantum kuramı çerçevesinde böylesine evrensel görünmesi gerektiğiyle ilgili hâlâ –bir tür açıklamaya gerek duyan– gizemli bir şey söz konusudur. Bu fizikçilere göre gerçel sayılar "doğal" ve karmaşık sayılar "gizemli" görünür. Bununla birlikte tümüyle matematiksel bir bakış açısından gerçel sayılarla ilgili olarak karmaşık sayılardan özellikle daha "doğal" herhangi bir şey söz konusu değildir. Aslında karmaşık sayılara ilişkin bir miktar gizemli matematiksel konuma bakarak karşıt bakış açısı da benimsenebilir ve bunlar belirgin biçimde daha "doğal" ya da gerçellerden daha "tanrı vergisi" olarak değerlendirilebilir.

Karmaşık sayıların fizik temelindeki önemi –ya da daha belirgin olarak holomorfikliğin (ya da karmaşık analitiklik) önemi– kendi özel bakış açıma göre aslında "doğal" bir şey olarak görülmelidir ve karmaşa esasen diğer türlüdür.[773] *Gerçel* yapıların fizikte böylesine önemli bir rol oynar görünmesi nasıl söz konusu olur? Kuantum mekaniğine ilişkin standart formalizmin bile, karmaşık sayılara dayanmasına rağmen, tümüyle holomorfik bir kuram olmadığı vurgulanmalıdır. Bunu, kuantum gözlemlenebilirlerinin Hermitsel işlemciler (ya da §22.5'te açıklanmış normal olanlar) tarafından açıklanmasıyla ilgili alışıldık gereklilikte ve kuantum evriminin (basit olarak karmaşık doğrusal yerine) üniter doğasında, bunlar karmaşık eşleme ($z \longmapsto \bar{z}$) kavramına bağlı olmak üzere, görürüz. Bununla ilgili olarak durumlar arasındaki önemli ortogonallik özelliği holomorfik olmayan bir kavramdır. Hermitsel özellik, ölçümlerin sonuçlarının gerçel sayılar olması ve üniterlikse, kendisi yoluyla karmaşık bir z genliğinin holomorfik olmayan

$$z \longmapsto \bar{z}z$$

işlemi uyarınca bir olasılığa çevrildiği "olasılığın korunması", diğer bir deyişle modül karesi kuralının sağlanması, sıradan talebiyle ilgilidir. Bunun temel olarak, kuantum holomorfikliğinin kırıldığı, "kuantum bilgisi"nin (diğer bir deyişle kudolanıklık; *bkz.* §23.10) "klasik bilgi"ye (ölçüm olasılığı) çevriminde olduğunu görürüz. Alternatiflere ilişkin ortogonallik bu ölçümün yine çok önemli bir özelliğidir. Bu nedenle, holomorfik olmayış tam da ölçümlerin kuantum kuramına sunulduğu noktada devreye girdiği görülür.

[773] Bu felsefe, S matrisinin holomorfik özelliklerin çok önemli olduğunu düşünen Geoffrey Chew'inkine yakın görünmektedir. *Bkz.* Chew, 1962.

Gerçel sayıların rolünü elbette ayrıca içerisine kuantum kuramı formalizminin yerleştirildiği ardalan uzayzamanda da görürüz. Küteleçekimle ilgili **OR**'nin kuantum durum indirgenmesine ilişkin doğru temel olduğu ortaya çıkarsa bu durumda gerçek uzayzamanın $z \longmapsto \bar{z}z$ işlemiyle ilgili (holomorfik olmayan) gerçel sayı yapısını bulacağız. Burada belki de burgaç kuramcıları için kuramın holomorfik işlemlere özgü güveninin eilişkin bir ders söz konusudur. Belki de öte taraftan ayrık tümleşik ilkelerle ilgili bir biçimde karmaşık sihirden ortaya çıkan bir rol aramalıyız ki böylece "uzayzaman" (§§3.3,5, §32.6 ve §33.1'de tartışıldığı üzere) gerçel sayı tabanlı bir yapı yerine temelde yatan ayrık bir yapıya sahip olsun. Ne olursa olsun burada fiziki gerçekliğe ilişkin matematiksel tabanla ilgili olarak derinden önemli konular bulunduğuna inanıyorum.

Şimdi *simetri*nin modern fiziki kuramdaki temel rolüne dönelim. Bu kavramın faydasıyla ilgili hiçbir şüphe söz konusu değildir. Hem (Lorentz grubuyla bağlantılı olarak) görelilik hem de kuantum kuramı ondan son derece önemli biçimde yararlanır. Öte taraftan simetriyi Doğanın yollarına temel olarak mı yoksa rastlantısal ya da yaklaşık bir özellik olarak mı değerlendirmeliyiz?

Simetriyi esas temel kabul etmek ve simetriden halihazırda görünen sapmaları erken evrendeki simetri kırılımının bir özelliği olarak değerlendirmek parçacık fiziğine yönelik pek çok modern yaklaşımın bir ilkesi olarak görülür. Aslında §13.1 ve §§15.2, 4'te belirtildiği üzere bütünlüklü simetri demet bağlantı fikrinin gerekli bir özelliğidir. Dahası §§25.5, 8'den elektrozayıf kurama ilişkin standart tavrın U(2) simetrisini, onun esasen elektrozayıf kuvvetlere (§§15.1, 8) ilişkin ayar kuramı biçiminde fakat normalde simetrinin kendiliğinden (Büyük Patlamadan yaklaşık 10^{-12}s sonra) kırıldığı düşünülen, bir rol oynayabileceği şekilde temel olarak bütünlüklü biçimde değerlendirmek olduğunu anımsayın. §28.3'ten erken evreni gerekli simetri kırılımını sağlamak üzere çağırmanın belirli güçlüklerinin bulunduğunu anımsayalım. Bu, elektrozayıf kuramdaki U(2) simetrisine ve de ayrıca GUT kuramlarında işe koşulan çok daha büyük simetrilere uygulanır.

Gut kuramlarına ilişkin büyük simetri grupları parçacık fiziği tablomuzu gerçekten basitleştirir mi? Ya da bu belirgin simetrilerin çoğu temel olarak başlangıçtan itibaren kırık olsaydı daha mı iyi olurdu? Bu ikinci alternatif bakış açısından temel kuramlarımızda algıladığımız simetrilerin çoğu gerçekten yalnızca temel düzeydeki yaklaşıklıklardır; böylece bu belirgin simetrilerin nereden geldiğini anlamak üzere daha derin bir araştırma yapmak zorundayız.

Olağan kuantum kuramında her iki tür kırık simetri örneklerine sahibiz. Kendiliğinden simetri kırılımının açık biçimde meydana geldiği, örneğin süper iletkenlik (U(1) kırılımı) ve diğer olgular gibi, iyi anlaşılmış durumlar söz konusudur. Öte taraftan simetri fikirlerinin bir olguya ilişkin mükemmel bir kavrayış sağlamak üzere kullanılabildiği fakat simetrinin yalnızca, daha tam fakat daha az simetrik olup temelde yatan, atoma ilişkin spektrumun sınıflandırılmasında olduğu gibi daha derin bir kuramdan kaynaklanan bir yaklaşıklık tahmini olduğu örnekler de söz konusudur.[774] Bu iki durumdan hangisinin parçacık fiziğine ilişkin daha derin bir gelecek kuramında daha büyük bir öneme sahip olacağını zaman gösterecek.[775]

İlgili bir konu olarak, bir tam simetri grubunun, başlangıç olarak herhangi bir simetrinin yüklenmediği yapılarla bile ortaya çıkabileceği durumlar söz konusudur. Bunu, herhangi bir simetriden yoksun biçimde karmaşık düzlem yamalarından bir araya getirilmiş olarak düşünebileceğimiz Riemann küresinin kendisinde görürüz. Bununla birlikte, sonuçtaki karmaşık manifoldun topolojisi S^2 olmak koşuluyla bunun, (Riemann'a ait bir teorem vasıtasıyla) karmaşık bir manifold olarak Riemann küresine *eşdeğer* olduğunu görürüz, böylece ona ilişkin simetri grubu ne kadar düzensiz biçimde bir araya getirilmiş olursa olsun tam olarak SL(2, ℂ), diğer bir deyişle yansımalı olmayan Lorentz grubu (§18.5), olur.[776]

Doğanın gizemli saf sayı sabitleriyle (§31.1) ilgili olarak bir soru söz konusudur. Bu sayılar, simetri kırılımı fikrine benzer biçimde, (§28.6'da anılan Wheeler/Smolin türü önermede olduğu gibi) son derece erken evrende mi saptanmıştır? Aslında Cabibbo ve Weinberg açılarına (§25.7) benzer bu sabitlerin bazıları normalde yalnızca bu tür bir yolla ortaya çıkmış kabul edilir. Ya da bu sayılar gerçekten matematiksel olarak, temelde yatan daha derin bir kuram tarafından saptanmış olabilir mi? Sonuncu bakış açısı kendi kişisel tercihimdir fakat bu tür güvenilir bir kurama sahip olmaktan uzak görünmekteyiz.[777]

Bununla ilgili olan ilginç bir soru, zayıf etkileşimlerin (§25.3) *aynal* asimetrisidir. Standart modele yönelik normal yaklaşımda aynal asimetri kuramın çerçevesi içerisinde inşa edilir. Öte taraftan artık nötrinoların (en azından çoğunun) kütleli parçacıklar (diğer bir deyişle sıfır olmayan durağan kütle) olduğu gözlemlenmiştir ve bu gerçek zaten orijinal stan-

[774] Dyson'daki, 1966, Freeman Dyson tarafından sunulan tanıtıcı yorumlara bakın.

[775] *Bkz.* Penrose, 1988.

[776] Bu gerçek genel görelilikteki asimptotik olarak düz uzayzamanların asimptotik simetrilerine ilişkin çalışmayla ilgili olarak önemlidir; *bkz.* Sachs, 1962; Penrose ve Rindler, 1986.

[777] *Krş.* Eddington, 1946.

dart elektrozayıf modelden bir sapmaya işaret eder. Sol–elli bir nötrino basit şe kilde, zayıf etkileşimlere ilişkin tüm aynal asimetri için "suçlan"amaz. Kütleli bir nötrino tümüyle sol–elli bir "zik" parçacığı değildir çünkü kütleyle birlikte o ayrıca sağ–elli bir "zak" parçasına da sahip olur (*bkz.* §25.2). Standart modelin (kütleli nötrinoların dahil edilebileceği biçimde hafifçe genişletilmiş) bazı biçimlerinde daha önceki sol/sağ simetrik modelinden gelen kendiliğinden bir simetri kırılımının söz konusu olduğu düşünülebilir. Bununla birlikte bu örnekte asimetrinin, erken evrendeki kendiliğinden bir simetri kırılımı yoluyla ortaya çıkması yerine, baştan itibaren orada bulunması "geleneksel" bakış açısıdır.

Ayrıca zaman asimetrisinin de (27 ve 28. bölümlerde talep edildiği üzere) bu bakış açısıyla ele alınması gereken bir konu olup olmadığını düşünebiliriz. Bununla birlikte o kesinlikle geleneksel bir "erken evrendeki kendiliğinden simetri kırılımı" yoluyla ortaya çıkamaz. Geleneksel tablo termodinamiğin ikinci yasasından *faydalanır*, onu türetmek üzere kullanılamaz.

34.9 Güzellik ve mucizeler

Gelin şimdi matematiğin, fiziki kurama en derin düzeylerinde –en azından şimdiye kadar ördüğümüz derinlikteki bir düzeyde– temel oluşturduğu görülen daha genel ve gizemli bazı görünümlerine dönelim. Kuramsal araştırmanın yönünü, nedense ciddi bilimsel yazılarda genellikle – şüphesiz, bu etkilerin uygun bilimsel işlemin katı kurallarından bir hayli uzağa sürüklenmiş görünmesine ilişkin korku nedeniyle– değinilmeyen, güçlü iki itici kuvvet şiddetli biçimde etkiledi. Bunların ilki güzellik ya da zarafettir ve bu konuya kitabın pek çok yerinde değindim. İkincisini, sıklıkla "mucizeler" olarak adlandırılan şeylerin karşı konulamaz çekiciliği, şimdiye dek yalnızca üstü kapalı çıtlattım (§19.8, §21.5 ve §31.14'te); yine de kişisel deneyimimle kefil olabileceğim üzere bunlar aslında, birinin araştırması üzerinde güçlü bir etki uygulayabilir.

Bu bölümün ana konusu olan mucizeler sorununa gelmeden önce öncelikle güzellik konusuna dönelim çünkü bu ikisi bağlantısız değildir. Üstte belirtildiği üzere fiziki kuramda temel bir gelişim gerçekleştirmiş olarak algılanan fikirlerin pek çoğu ayrıca ikna edici biçimde güzel olarak da görülecektir. Son derece tam ilk fiziki kuramın, eski Yunanlar tarafından formüle edildiği üzere uzay kuramının temelini oluşturan Öklitçi geometri şüphe götürmez bir güzelliğe sahiptir. Bin beş yüz yıl sonra, sonradan Lagrange denklemi ve Hamilton formalizmleri (§20.4) yoluyla açığa çıktığı

üzere, temelde yatan derin ve güzel simplektik yapısıyla birlikte Newtoncı dinamiğin olağanüstü zarafeti geldi. Maxwell elektromanyetizmasının matematiksel biçimi de ayrıca esasen nefistir ve Einstein genel göreliliğinin muhteşem matematiksel güzelliğine şüphe yoktur. Aynısı kuantum mekaniğinin yapısı ve ona ilişkin pek çok belirgin özellikle ilgili olarak da söylenebilir. Kuantum mekaniksel spinin, Dirac'ın görelilikçi dalga denkleminin ve Feynman tarafından geliştirilen QFT formalizmindeki yol integralinin olağanüstü matematiksel zarafetini ayırıyorum.

Yine de bu düzenlerdeki şüphe götürmez matematiksel güzelliğin, basit olarak saf matematik biçiminde, bağımsızca parlayan bir şey olup olmadığını sorgulayabilmemiz onların evrenin işleyişiyle bu denli uyumlu olmasına ilişkin dikkat çekici gerçekle ilgili değil midir? Saf matematiğin bazı değerli taşları ya da işaret ışıklarına sahip yalnızca matematiksel yapılar olarak karşılaştırılmaya nasıl katlanırlar? Oldukça iyi fakat o kadar da kararlı olmayan bir biçimde ayağa dikildiklerine inanıyorum. Saf matematik, fiziki dünyayla herhangi ayırt edilebilir bir bağa sahip olmayan ve henüz karşılaştığımız fiziki kuramlarınkine eşit ya da onu aşan bir güzelliğe sahip pek çok cisme sahiptir. (Ayrıca *bkz.* §16.2.)

Şimdi matematikteki, fizik üzerindeki etkinin –en azından şimdiye dek– asgariye indiği bazı derin ve güzel gelişmeleri ele alalım. Cantor'un sonsuz kuramı dikkate değer bir örnektir. Bana göre bu, tüm matematik tarihindeki en olağanüstü güzellikteki katkılardan biridir. Bununla birlikte bildiğimiz kadarıyla son derece küçük bir kısmı fiziki dünyanın işleyişiyle ilişkiye sahip görünür (*bkz.* §§16.3, 4, 7). Aynı konu, matematiksel kavrayışa ilişkin bir diğer heybetli başarıyla, Cantor'un sonsuz kuramıyla yakından ilgili bir devamcıyla, diğer bir deyişle Gödel'in ünlü eksiklik teoremiyle (diğer bir deyişle § 16.6) ilişkili olarak ortaya çıkar. Ayrıca, şimdiye kadar fizikle oldukça sınırlı bir bağlantısı olduğu görülen kategori kuramına (§33.1) ait geniş kapsamlı ve derin fikirler de söz konusudur.

Bu son iki alanda, 21. yüzyılda gelişebilecek fizikle önemli bir ilişkinin söz konusu olabileceğine dair makul bir belirti mevcuttur (§34.7, §33.1) fakat bu oldukça kurgusaldır. Geliştirilmiş olan derin ve güzel matematiksel kuramların büyük çoğunluğu için fizikle önemli bir bağlantının ortaya çıkması çok daha az makul görünür. Örneğin Andrew Wiles'ın, 350 yıldan fazla direnmiş olan, "Fermat'nın Son Teoremi" olarak bilinen savın doğrulanmasını gerçekleştirmekteki dikkat çekici 20. yüzyıl başarısını ele alalım. Bu, muhteşem matematiksel fikirler barındırmasına rağmen, kendilerini anladığımız biçimiyle fiziki yasalardan oldukça uzak görünür. 20. yüzyılda, hem sürekli hem de ayrık basit grupların sınıflandırılması gibi başkaca pek çok müthiş gelişme gerçekleşti. Burada kesinlikle fiziğe dö-

nük uygulamalar söz konusu oldu fakat bu basit gruplar kuramının bize bir "fiziki kuram" sağladığını söylemekten uzaktır. Matematiksel sınıflandırmalar yalnızca, fizikçilerin olasılıkların ne olduğunu görmelerine olanak sağlaması bakımından faydalıdır. Bir diğer örneği ele alalım. 19. yüzyıl Riemann'ın nefis ζ-fonksiyonu kuramı ve onun asal sayıların dağılımıyla bağıntısına şahitlik etti. Hâlâ kanıtlanamamış Riemann hipotezinin (§7.4) şüphe götürmez güzelliği ve büyük matematiksel önemine karşın bu, fizikten neredeyse eşit derecede uzaktır. Aslında burada fizikle birtakım ilgi çekici bağlantı mevcut*tur*[778] fakat Riemann kuramının bize fiziki dünyaya ait bir modele benzer herhangi bir şey sağladığını savunmak güçtür.

Geleceğin fiziğinde, daha büyük kütleye sahip derin ve güzel bir matematikle yakın bir ilişki olacağını mı beklemeliyiz? Ya da matematik ve fizik arasındaki ilişkinin gerçektekinden daha yakın olduğuna inanmakta, fiziki kuramda şimdiye dek gördüğümüz başarılar tarafından yanlış mı yönlendirilmekteyiz? Soru daha açık olarak Şekil 1.3 biçiminde ifade edilebilir. Platoncu matematik dünyanın ne kadarı "ilk gizem"i gösteren okun tabanında yer almaktadır?

Ayrıca, fiziki dünyanın davranışını yönetmekte derin bir rol bulan şeyin ne tür bir matematik olduğunu algılamanın herhangi bir yolu olup olmadığını da sorabiliriz. İlgi çekici bir konu. Belki de matematik ve fizik arasındaki gizemli ilişkiyi yöneten, temelde yatan can alıcı etmenler gelecekte daha iyi anlaşılacak.

Üsttekine benzer değerlendirmelerin okura, matematiksel güzelliğin kendisinin en iyimser görüşle, muğlak bir kılavuz olduğunu belirgin hale getirdiğini umuyorum. Yine de kitabın daha önceki pek çok yerinde belirttiğim üzere, hem matematiksel hem de fiziki yargıların, kuramsal fizik içerisinde izlenecek en verimli çizgilerle ilgili karar vermekteki dikkat çekici rolünden kuşku duymak güçtür. Bunların çoğu incelikli bir niteliğe sahiptir ve çeşitli alternatiflerden hangisinin izlenecek en etkili yol olduğuna karar vermenin son derece kişisel bir konu olduğuna inanmak kolaydır. Bununla birlikte zaman zaman fiziki dünyanın matematiksel kuramlarına ilişkin araştırmalarda, böylesi seçimler üzerinde tek başına matematiksel zarafetten çok daha güçlü bir etkiye sahip olan bir şey ortaya çıkar ve bu benim "mucize" olarak adlandırdığım şeydir.

"Kuantum kütleçekim" fikirlerinin yakın tarihinde böylesi şeylere ilişkin pek çok örnek düşünebiliyorum. Bunlardan biri, standart Einstein ge-

[778] Riemann hipotezinin fizikle olan bağlantısına ilişkin bir tartışmayla ilgili *bkz.* du Sautoy, 2004; ayrıca *bkz.* Berry ve Keating, 1999. LANLarXiv'in hızlı bir taraması (Euler) ζ-fonksiyonunun düzenli hale getirilmesinin önemini gösterir; son sayımda 136 tıklama!!!

nel görelilik kuramına ait QFT'ye yönelik tedirgeyici yaklaşım ikinci dereceden normalleşebilir olmayan ıraksamalara yol açarken süpersimetri devreye sokulduğunda ıraksak terimlerin mucizevi biçimde sadeleştikleri süper kütleçekim kuramındaydı (§31.2).[779] Bu sadeleşme çok sayıda terimi içeriyordu ve bir süreliğine pek çok süper kütleçekim araştırmacısı tarafından bu apaçık sadeleşme "mucize"sinin, kuramın, yeniden normalleşebilirliğin bu yolla tüm derecelerde beklenebileceği –ve buradan hareketle doğru kuantum kütleçekim kuramının yakında ortaya çıkacağı!– şekilde doğru yolda olduğuna ilişkin bir işaret olduğu düşünüldü. Ne yazık ki süper kütleçekim araştırmacıları üçüncü derece hesaplamayı gerçekleştirebildiklerinde yeniden normalleşebilir olmayan ıraksamalar geri döndü. Bu yüksek boyutlu değerlendirmelere yol açtı fakat işler bir süreliğine durgunlaştı. Daha sonra 1990'ların sonunda, §§31.4, 14'te açıklandığı üzere, süper kütleçekim M–kuramına götüren yolun bir parçası olarak yeniden canlandırıldı.

Sicim kuramı ve M–kuramının kendilerinin böylesi pek çok mucize tarafından yönlendirildiğinden eminim. En önemlilerinden biri kesinlikle, kendisi yoluyla açık biçimde çok farklı olan sicim kuramlarına ilişkin kafa karıştırıcı bir derlemenin, §31.14'te açıklandığı üzere, "M–kuramı" adı verilen tek bir büyük düzende birleştirilebileceğine ilişkin güçlü belirtiler elde ettiği, ayna simetrilerinin keşfiydi. Bu ayna simetrileri sihirliymiş gibi hareket etti ve daha önce birbiriyle ilgisizmiş gibi görünen sayıların, §31.14'te açıklanan Candelas ve meslektaşları tarafından gerçekleştirilen hesaplamalara ilişkin durumdaki gibi, aynı oldukları görüldü. Bu kesinlikle, sözcüğü burada kullandığım anlamda bir "mucize" olarak nitelendirilir. Candelas'ın ayna simetrisi kullandığı hesaplamasında elde edilen 317206375 sayısı sonuçta cebir geometricileri tarafından doğrulandığında bunun, yeni sicim/M–kuramının doğru yolda olmak zorunda olduğuna ilişkin ikna edici kanıt sunan bir mucize olarak selamlandığından eminim! Durum böyle olsa da olmasa da bu "mucize" kesinlikle, ayna simetrisi fikrine ilişkin matematiksel görünümlerle ilgili mükemmel bir destek sunmaktadır. Aslında sonradan bu konuya ilişkin çok daha saf bir matematiksel ilgi uyarıldı ve artık içerilen şeyin çoğuna ilişkin iyi bir saf matematiksel kavrayış elde edildi.[780]

Böylesi açık mucizeler gerçekten fiziki bir kurama yönelik yaklaşımın doğruluğuna ilişkin iyi kılavuzlar mıdır? Bu derin ve zor bir sorudur. Bazen öyle olduklarını düşünebilirim fakat bu tür şeylerle ilgili son derece

[779] *Bkz.* Wess ve Bagger, 1992 ve not 31.13.

[780] *Bkz.* not 31.57 ve not 31.58.

dikkatli olunmak zorundadır. Dirac'ın, kendisine ait dalga denkleminin elektron spinini otomatik olarak içerdiğine ilişkin keşfi de, Bohr'un hidrojene ait doğru atomik spektrumu elde etmek üzere açısal momentum kuantizasyonu kullanımında ya da benzer biçimde Einstein'ın, kendisine ait yaklaşımda, kütleçekime genel göreliliğe ait eğik uzay yoluyla yaklaşmanın gerçekten de –astronomları daha önce 70 yılın üzerinde uğraştırmış olan– Merkür'ün günberi hareketiyle ilgili doğru yanıtı verdiğini fark edişinde olduğu gibi, bu tür bir mucize olarak görülebilir. Öte taraftan bunlar açık biçimde, ortaya konmuş olan kuramların uygun fiziki sonuçlarıdır ve mucizeler ilgili kuramlara ilişkin etkileyici doğrulamalar sunmuştur. Bütünüyle matematiksel olan mucizelerin kuvvetinin ne olduğu, süper kütleçekim ya da ayna simetrisi durumlarındaki gibi, daha az belirgindir. Bu tür matematiksel bir mucizeye ilişkin matematiksel bir kavrayış nihayet elde edildiğinde bunun, bir dereceye kadar, ele alınan mucizenin "maskesini düşürme"yi sağlayabilme olasılığı söz konusu olur. Böyle olsa bile bu, her zaman kendi uygun tarihi çerçevesinden görülmek zorunda olan mucizenin kendisine ilişkin psikolojik kuvveti tümüyle ortadan kaldıramayabilir.

Bununla birlikte bir şey kesindir ki bu tür matematiksel mucizeler her zaman emin bir kılavuz olamaz. Burgaç kuramına ilişkin kendi çalışmalarım esnasında, terimi burada kullanmakta olduğum anlamıyla "mucizeler"in yönlendiriciliği altını girdiği görülen çeşitli pek çok sayıda teşvikle karşılaştım. Tekil burgaçlara ait türdeş fonksiyonların kütlesiz alan denklemlerine genel çözümler üretmesinin keşfi (§33.8) bunlardan biriydi; bir diğeriyse §33.11'deki çizgisel olmayan gravitonun oluşturulmasıydı. Bunlar burgaç kuramını "doğru çizgilerde" olduğuna ilişkin ne derece güçlü bir belirtidir? Yine dikkatli olunmak zorundadır. Burgaç kuramına ilişkin mucizelerle sicim kuramınınkiler arasında bir karşılaştırma yapmayı istemiyorum. Öte taraftan her ikisi de belirgin işaret levhası olamaz çünkü §33.14'te belirtildiği üzere, var oldukları halleriyle iki kuram birbiriyle bağdaşmamaktadır!

Yine de bu yorumlar yalnızca, bu kuramların "şu anki" durumlarından anladığım şey için geçerlidir. Yalnızca geçmiş birkaç ay içerisinde meydana gelen heyecan verici görünümlü bazı gelişmeler önceki paragrafta ulaştığım sonuç yorumlarını tümüyle alt üst edebilir. Bunlar, sicim kuramsal fikirlerin burgaç kuramı bağlamındaki, öncelikli olarak Edward Witten'e ait son derece yaratıcı bazı uygulamalarıdır (ve bunlara §31.18 ve §33.14'te kısaca değinmiştim).[781] Bu gelişmelerde sicim kuramı stan-

[781] *Bkz.* not 31.76.

dart *dört*–boyutlu uzayzaman fiziğine uygulanmaktadır ve gerçek parçacık etkileşimleriyle dolaysız ilişkiye sahip görünen ve bu yolla önceki paragrafta ifade ettiğim sicim kuramı biçiminde önemli bir kırılmayı temsil eden türdeki Yang–Mills etkileşimleriyle ilgilidir. Bu nasıl gerçekleştirilir? Esasen bu, sicim kuramına ilişkin Riemann yüzeylerinin dönüştürüleceği "hedef uzayı"nı, "standart" sicim kuramına ilişkin "ek uzamsal boyutlar"ı sağlamak üzere çağrılmış olan Calabi–Yau karmaşık 3–manifoldu (§31.14) biçiminde değil fakat $\mathbb{PT}$ *izdüşümsel burgaç uzayı* (bir $\mathbb{CP}^3$; *bkz.* §33.5) olan karmaşık 3–manifold biçiminde değerlendirmek yoluyla yapılır. Gördüğümüz üzere burgaç geometrisi açık biçimde olağan 4–boyutlu uzayzamanla ilgilidir ve *hiçbir* "ek uzay boyutu" söz konusu değildir! Bu yeni fikirler açıklandığında hâlâ içerilen bir süpersimetri söz konusudur ve $\mathbb{PT}$'ye ilişkin bu süpersimetrik versiyon esas olarak bir tür "Calabi–Yau uzayı" biçiminde değerlendirilebilir. (Bu, belirli bir "anomali"nin sadeleşeceği şekildedir fakat bana öyle geliyor ki bu tür anomali sadeleştirme gerekliliğine olasılıkla fazla değer verilmektedir ve belki de süpersimetri gerçekten gerekli değildir.) Bu yeni fikirlerde, oldukları halleriyle, Riemann yüzeyleri cins 1'e sahip olarak kabul edilir (*bkz.* §8.4); diğer bir deyişle onlar *Riemann küreleri*dir.[782] Bu, "sicim" fikirlerinin içerisine daha önceden dahil edildiği epey önceki bir burgaç kuramıyla gerçekleşecek fark edilir bir ilişkiye olanak sağlar.[783]

Sicim kuramı, bana son derece dayanıklı bir yol gibi görünen şeyle bu biçimde değişmiş hale gelebilirse o halde o kurama ilişkin "mucizeler" nasıl bir fiziki anlama sahip olur? Aslında (dolaylı da olsa) önemli bir anlama sahip olacakları ve (Richard Thomas'ın §31.18'de alıntılanmış olan yorumunda ileri sürüldüğü üzere) "sahne ardında süren" şeye ilişkin daha iyi bir kavrayışın çok daha kolay biçimde gün yüzüne çıkabileceğini tahmin ediyorum. Sicim kuramında güçlü olan bir şey özütlenip uzayzaman boyutluluğu ötesine olan gerekli bağlılıktan ayrılabilir mi? Olabilir. Esasen doğru görünen şey, Riemann kürelerinin karmaşık manifoldlara dönüştürülmesine (ya da ayrıca belki de Riemann yüzeylerinin daha yüksek cinslere dönüştürülmesine) dayanan bir kuantum alan kuramı fikrinde derin bir şey bulunmasıdır[784] ve bu tip bir şey, karmaşık manifoldların (izdüşümsel) burgaç uzayları olduğu yeni bağlamda hâlâ anlamlı olabilir.

---

[782] Bu, söz konusu Riemann yüzeylerinin, uzayzaman noktalarını gösteren burgaç uzaylarının çizgileri olmalarını kendiliğinden kısıtlamaz, *bkz.* §33.5 fakat "yüksek dereceli" eğriler olabilirler. Temel olarak "cins 0 koşulu" bize, içerilen herhangi bir "kapalı döngü"nün söz konusu olmadığı Yang–Mills işlemler ağacıyla (§ 26.8) ilgilenildiğini söyler.

[783] Shaw ve Hughston, 1990; Hodges, 1985, 1990a, 1990b.

[784] Bunlar "σ–modelleri" olarak adlandırılır; *bkz.* Ketov, 2000.

Bununla birlikte *gerçekten* neler olmakta olduğu hâlâ büyük oranda bir gizem gibi görünür.

34.10 Derin sorular yanıtlanır, daha derinleri sorulur

Daha önceki birkaç bölümde açıklananlara benzer konular günümüz fiziki kavrayışı içerisinde yanıt bulmaktan uzaktır; onlara, 21. yüzyıldaki bir gelecek fiziğinde önemli ışık tutulacağını umabiliriz. Öte taraftan 20. yüzyıl sonundaki kavrayışımızda gerçekleştirmiş olduğumuz şeye bakarsak insan ırkı haklı olarak önemli bir gurur duyabilir. Eski insanlar için son derece kafa karıştırıcı –ve bazen korkutucu– olmuş olan pek çok soru yanıtlarını buldu ve bu yanıtlar ışığında olumlu biçimde davranmak çoğunlukla olanaklıdır. Çoğu hastalık dehşeti artık yalnızca (bilimsel yöntemin paha biçilemez olduğu) modern ilaçlar nedeniyle değil fakat ayrıca (röntgen, ultrason, tomografi, vb gibi) modern teknoloji kullanımı yoluyla erken teşhis yanı sıra (ışınım, lazerler, vb gibi) çok yönlü fizik tedavi nedeniyle de herhangi bir korkuya sebep olmaz. Bu teknoloji sıkça fiziğe ilişkin, eski çağ insanlarının erişemediği derin bir kavrayışa bağlıdır. Aynı tipteki kavrayış bize hidroelektrik, elektrik aydınlatma, elementlere karşı korunma sağlayan modern malzemeler, televizyon ve mobil iletişim, bilgisayar teknolojisi, internet, çeşitli biçimlerdeki modern ulaşım ve modern yaşamlarımıza ilişkin sayısız başkaca görünümler gibi farklı pek çok şey sundu.

Bu gelişmelerin pek çoğu kesinlikle şu ya da bu biçimde fiziğe dolaysızca bağlıdır. Dahası kimyanın temel kuralları da ayrıca, bugün anlaşıldıkları biçimiyle, esasen (uygulamada değilse bile ilkede) kuantum mekaniğinin kurallarından gelen fiziki kurallardır. Biyoloji fiziki yasalara indirgenebilir olmaktan epeyce uzaktır fakat biyolojik davranışın, köken olarak, artık temel olarak anladığımız fiziki etkinliklere bütünüyle bağlı olduğuna inanmamak için (bilinçten ayrı olarak) hiçbir neden yoktur. Buradan hareketle biyoloji ayrıca sonuç olarak matematik tarafından kontrol edilir görünmektedir.

Örneğin bir tohumun yaşayan bir bitkiye gelişebildiği, her bitkinin mükemmel yapısının aynı türde tohumdan gelen diğerlerinin yapısıyla en ince ayrıntıya kadar benzer olduğu, mucizevi biçimi düşünün. Burada derin bir temel oluşturan fizik söz konusudur çünkü bitkinin gelişimini kontrol eden DNA, yapısının süreklilik ve dayanıklılığı (Schrödinger'in 1967'de, son derece etkileyici küçük kitabı *What is Life?*'da (Yaşam Nedir?)

belirttiği üzere)[785] yaşamsal biçimde kuantum mekaniği kurallarına bağlı olmak üzere, bir moleküldür. Dahası bitkinin gelişimi nihai olarak, onu oluşturan tekil parçacıkları yöneten aynı fiziki kuvvetler tarafından yönetilir. İlgili olanlar köken olarak esasen elektromanyetiktir, bununla birlikte yeğin nükleer kuvvet ne tür çekirdeklerin olanaklı olduğunu ve böylece hangi tür atomların mevcut olabileceğini belirlemekte yaşamsaldır.

Zayıf kuvvet de büyük ölçekte gördüğümüz olgularda kendi rolünü oynar ve bu kuvvetin, zayıflığına karşın (yeğin kuvvetin dayanıklılığının yalnızca 10^{-7} ve elektromanyetizma dayanıklılığının 10^{-5} katı), insan türünce deneyimlenmiş olan en dramatik olayların bazılarına sebep olabilmesi dikkat çekicidir. Çünkü, dünyanın içindeki radyoaktif bozunum yoluyla dünya magmasının ısınmasından büyük oranda sorumlu olan şey zayıf kuvvettir. Özellikle volkanik püskürmeler onun mirasıdır. Dünya tarihinde, devasa bir volkanik patlamayla etrafa saçılan tozların oluşturduğu hemen hemen sürekli bir örtü nedeniyle yaklaşık İS 535'te başlayıp birkaç yıl süren dünya çapında kıtlıklar ve tipik olmayan soğuk iklim söz konusu oldu. Volkan olasılıkla 535'te ve aynı şekilde (fakat bu kez o kadar şiddetli değil) modern çağda, 1883'te, feci biçimde püsküren Java yakınlarındaki Krakatoa'yla aynı nesneydi.

Uygar izleyicilerine daha da dramatik gelen bir şey olasılıkla Thera (Santorini) adasını harap eden, kendisinden 160 kilometre kadar güneydeki Girit'ten kolaylıkla görülebilmiş olan İÖ 1628'deki patlamaydı. Bu patlama, Thera'nın kendisi üzerindeki uygar topluluğu silip yok etti ve belki de Girit'teki, Daedalus'un ünlü labirentinin Büyük Saray'ında bulunduğu söylenen Knossos'un barışçıl ve kültürlü toplumunun çöküşünde nihai sorumlu oydu.[786] Thera'nın yıkımının Atlantis efsanesinin kaynağı olduğu ikna edici biçimde iddia edilegelmiştir.[787] Belki de geçmişin bazı felaketlerinin sonuçta öbür türlü gerçekleşmeyecek olan yeni ilerlemelerin gelişimini ortaya çıkardığı gerçeğiyle biraz olsun teselli bulabiliriz. (Bunların en dramatiği, sonuç olarak insan varlığına yol açan memeli gelişimine olanak sağlayan, bu volkanik bir etkinlik yerine bir asteroid çarpması olarak görünse de, dinazorların küresel yok oluşuydu.) Thera'daki yıkımı izleyen milenyumda eski Yunan kültürünün olağanüstü gelişimi bu feci volkanik olaya herhangi bir şey borçlu olmuş mudur?

Evrende görülen en şiddetli patlamaların tümü arasındaki –onu bir kuvvet olarak adlandırmak uygun olursa– en zayıf kuvvet (bir hidrojen

---

[785] *Bkz.* Schrödinger, 1967.

[786] Efsaneyle ilgili olarak eski bir gözde Hamilton'dur, 1999 (elbette yeni basım!).

[787] Bu fikre ilişkin yeni bir açıklama için *bkz.* Friedrich, 2000.

atomundaki elektrik kuvvetinin yalnızca yaklaşık 10^{-40} ve zayıf kuvvetin dayanıklılığının 10^{-38} katı), diğer bir deyişle, kara deliklerin inanılmaz derecede güçlü enerji kaynakları olan kuasarlara yakıt ikmali yaptığı kütleçekim nedeniyle ortaya çıkması belki de çok daha çarpıcıdır. Bununla birlikte, dünyadan görüldüğü üzere bize olan uzaklıkları o kadar büyüktür ki en parlak kuasar 3C273'ün parlaklığı, kuasarın olağanüstü gücüne karşın, yakınlardaki Sirius yıldızının parlaklığının yaklaşık 10^{-6} katıdır. Aslında sakin ve açık bir gecede gökyüzünü incelersek, evrenin enginliği karşısında dehşete düşsek de, onun devasa ölçülerinin yalnızca en küçük bir bölümünü gerçekten algılayabiliriz. Çıplak gözle görülebilir olan en uzak nesneler (Andromeda galaksisi), 3C273'ün uzaklığının yalnızca 10^{-3} ve gözlemlenebilir evrenin dış sınırına olan uzaklığın yaklaşık 10^{-4} katı uzaklıktadır!

Kara deliklerin çekirdeklerinde bulunan uzayzaman tekillikleri evrende bilinen (ya da tahmin edilen), haklarında en derin gizemlerin var olmaya devam ettiği –ve günümüz kuramlarının açıklamaya başarısız olduğu– nesneler arasındadır. Özellikle §§34.5, 7, 8'de gördüğümüz üzere, kendileriyle ilgili çok küçük bir kavrayışa sahip olduğumuz son derece gizemli başkaca konular da mevcuttur. 21. yüzyılın, 20. yüzyılın kutsadıklarından bile fazla muhteşem sezgileri açığa çıkarması olasıdır. Bununla birlikte, bunun gerçekleşmesi için bizi, halihazırda izlenmekte olanlardan belirgin biçimde farklı yönlere götürecek güçlü yeni fikirlere gerek duyacağız. Aslında belki de gerek duyduğumuz şey hepimizin yolunu gözlediği, bakış açısındaki incelikli bir değişimdir....

SONSÖZ

Doktora sonrası bir fizik öğrencisi olan Antea İtalya'nın güneyindeki küçük bir kentten geliyordu ve matematiksel yeteneklerin yanı sıra dikkate değer sanatsal becerilere de sahipti. Almanya Potsdam yakınlarındaki Golm'da bulunan Albert Einstein Enstitüsünün doğu cepheli genişçe bir penceresinden gözlerini tertemiz gece göğüne dikti. Bu prestijli araştırma enstitüsü 20. yüzyıl sonlarında, bir zamanlar Einstein'ın bir tatil evi sahibi olduğu yerin yakınlarına kurulmuştu. Araştırmaların büyük kısmı, Einstein'ın genel göreliliğinin temelini oluşturan ilkelerle kuantum mekaniğininkileri birleştirmeye çalışan can sıkıcı "kuantum kütleçekim" –dünyaya ilişkin yasaların kaynağındaki gizem– konusuyla ilgiliydi.

Antea'nın kendi araştırmasının doğrultusu buydu fakat o yeniydi ve gelenekselin dışında ve nasıl ilerleneceğiyle ilgili henüz yeterince gelişmemiş, bazıları meslektaşlarınınkilerle temelden çelişkili bazı fikirlere sahipti. O gece, diğer herkes çoktan yataklarına gittiğinde enstitünün üst kütüphanesinde gündüzün erken saatlerine dek çalışmıştı. Bazı galaksilerin merkezinde ortaya çıkan devasa enerji yayınımıyla ilgili eski bir araştırma üzerine çalışmaktaydı. Kendi kendine dünya ve güneş sisteminin bunların hiçbirine yakın olmamasının aslında ne kadar büyük bir şans olduğunu düşündü, öbür türlü, bütün olarak, neredeyse anında yok olurlardı. Bu muazzam patlamaların yerleşik açıklaması her birinin bir kara delik tarafından muazzam oranda güçlendirilmesiydi.

Antea bir kara deliğin, içerisinde –bilimsel açıklaması hâlâ son derece kaçamak ve hâlâ kayıp kuantum kütleçekim kuramına bağlı olan– "uzayzaman tekilliği" olarak bilinen bir yapının yer aldığı bir uzayzaman bölgesi olduğunu biliyordu. Bununla birlikte Antea'nın gerçek ilgisi galaktik kara delikler yerine daha da büyük korkunç bir patlamaya dönüktü: tüm patlamaları sonlandıracak olan –ya da daha çok hepsini başlatan–"Büyük Patlama" olarak bilinen patlama. Onun, tüm kötü şeylerin yanı sıra tüm iyi şeylerin de kaynağı olduğuyla ilgili bir düşünceye daldı. Yine de Büyük Patlamadaki uzayzaman tekilliği kara deliklerdekilerden bile daha büyük gizemler içeriyordu. Antea bu gizemlerin kaynağında Einstein'ın büyük ölçekli uzay, zaman ve kütleçekim kuramıyla fiziğin kuantum mekaniksel ilkelerinin nasıl birleştirildiğine ilişkin sırrın bulunduğunu biliyordu.

Sakin bir geceydi ve yıldızlar şüphe götürmez biçimde belirgindi. Antea bir süreliğine, kollarını kıvrık biçimde merdiven parmaklığına dayamış ve gözlerini yıldızların dizilimine dikmiş halde dalgın kalakaldı; ne kadar geçtiğini bilmiyordu. Devasa görünümlü yarı küre biçimli kubbedeki o minik ışık iğneciklerinin, hesaplansa da kozmolojik ölçülerin devasa büyüklüğüyle kıyaslandığında küçük kalan, büyük uzaklığını düşündüğü her zaman korkmuş hissederdi. Yine de, kozmik bir patlama *şu an* ona görünebilir olsaydı, ne kadar uzak olursa olsun, patlamaya ait minik fotonların ona ulaşmasının pek de zaman almayacağı düşüncesine daldı. Aynısı, patlamada oluşacak, bazıları Enstitü'nün 250km uzaklıktaki Hannover yakınlarındaki kütleçekimle ilgili dalga algılayıcısı tarafından fark edilebilecek olan minik gravitonlar için de geçerliydi. O patlama olayıyla esasen, hemen dolaysız bir ilişki içinde olacağı düşüncesinden etkilendi...

Orada doğuya bakarak dikilirken, şafak tam üzerine gelip sonrasında güneşin derin kırmızısı belirecekken anlık ve beklenmedik bir yeşil ışık şeridi onu ürküttü. "Yeşil parıltı" olgusu ve ona ilişkin yerleşik fiziki açıklamayı biliyordu fakat esasen daha önce buna hiç tanık olmamıştı ve bu onda tuhaf bir duygusal etkiye neden oldu. Bu deneyim, onu gece boyunca uğraştıran kafa karıştırıcı bazı matematiksel fikirlerle karıştı.

Ve birden tuhaf bir düşünceye kapıldı...

KAYNAKÇA

20. yüzyıl fiziğinde hâlâ değinmem gereken fakat yine de tümü arasındaki en önemlisi olan temel bir buluş daha söz konusudur! Bu, fizikçi ve matematikçilerin, biyolog ve bilgisayar bilimcilerinin çalışmalarının dergilere sunulmadan önce (ya da bunun yerine!) ön baskısını yapabildikleri çevrimiçi bir havuz olan arXiv.org'un takdimidir. arXiv.org bilim insanlarının, yeni fikirlerle ilgili olarak inanılmaz yüksek hızda haberleşmelerine olanak sağladı ve bunun sonucu olarak araştırma ilerleme hızı duyulmamış yüksekliklere ulaştı. Aslında arXiv.org'u geliştiren Paul Ginsparg geçenlerde buluşu için MacArthur "dâhilik" ödülü kazandı.

Bu önemli yeni akımdan, Kaynakça'daki maddelerle ilgili mümkün olduğunca arXiv.org linkleri sunarak yararlanmaya çalıştım. arXiv.org'da bir tez bulmak son derece basit. İlk olarak, www.arxiv.org'a gitmek üzere gözde internet tarayıcınızı kullanın. Daha sonra isterseniz tezi arayın ya da isterseniz "www.arxiv.org/"u takiben Kaynakça'da parantez içinde sunulmuş olan kimlik kodunu girin. Örneğin Lee Smolin'in "How far are we from the quantum theory of gravity" başlıklı 2003 tezini çağırmak için internet adresi şu şekilde girilir:

www.arxiv.org/hep-th/0303185.

Deneyin!

Bu özellik, özellikle internet erişimi olan fakat bilimsel tezlerin sıklıkla yayımlandığı özelleşmiş yayınları bulundurabilecek bir üniversite kütüphanesine uzak olan okurlar için faydalı olacaktır.

Kaynakçadaki bu yeni özelliğin sizi arXiv'deki, bu çalışmada atıfta bulunulmuş olan ve ötesindeki pek çok hoş makaleyi okumaya teşvik edeceğini umarım!

Abian, A, *The theory of sets and transfinite arithmetic*, Saunders, Philadelphia, 1965.

Abbott, B. vd., Detector Description and Performance for the First Coincidence Observations between LIGO and GEO, *Nucl. Instrum. Meth.* **A517**, 2004, s. 154–179, [gr-qc/0308043].

Adams, C. C., *The Knot Book.* Owl Books, New York, 2000.

Adams, F. J. ve Atiyah, M. F. A., On K–theory and Hopf invariant, *Quarterly J. Math.* 17, 1966, s. 31–38.

Adler, S. L., *Quaternionic Quantum Mechanics ve Quantum Fields*, Oxford University Press, New York, 1995.

Afriat, A., The Einstein, Podolsky ve Rosen Paradox, *Atomic, Nuclear, and Particle Physics*, Plenum Publishing Corp., 1999.

Aharonov, Y. ve Albert, D. Z, Can we make sense out of the measurement process in relativistic quantum mechanics?, *Phys. Rev.* **D24**, 1981, s.359–370.

Aharonov, Y. ve Anandan, J., Phase change during a cyclic quantum evolution, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1987, s. 1593–1596.

Aharonov, Y. ve Bohm, D. J., Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.* **115**, 1959, s. 485–491.

Aharonov, Y. ve Vaidman, L., Properties of a quantum system during the time interval between two measurements, *Phys. Rev.* **A41**, 1990, s. 11.

Aharonov, Y. ve Vaidman, L., The Two–State Vector Formalism of Quantum Mechanics, *Time in Quantum Mechanics*, ed. J. G. Muga vd., Springer–Verlag, 2001.

Aharonov, Y., Bergmann, P. ve Lebowitz, J. L., Time symmetry in the quantum process of measurement, *Quantum Theory and Measurement*, ed. J. A. Wheeler ve W. H. Zurek, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983; ilk basım *Phys. Rev.* **134B**, 1964, s.1410–1416.

Ahmavaara, Y., The structure of space and the formalism of relativistic quantum theory, I. *J. Math. Phys.* **6**, 1965, s. 87–93.

Aitchison, I. ve Hey, A., *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction*, cilt 1 ve 2, Institute of Physics Publishing, Bristol, 2004.

Albert, D., Aharanov, Y. ve D'Amato, S., Curious New Statistical Prediction of Quantum Mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1985, s. 5.

Aldiss, B. W. ve Penrose, R., *White Mars*, St Martin's Press, Londra, 2000.

Alpher, Bethe ve Gamow, The Origin of Chemical Elements, *Phys. Rev.* 73, 1948, s. 803.

Ambjorn, J., Nielsen, J. L., Rolf, J. ve Loll, R., Euclidean and Lorentzian Quantum Gravity: Lessons from Two Dimensions, *Chaos Solitons Fractals*, **10**, 1999, [hep-th/9805108].

Amelino–Camelia, G. ve Piran, T., Planck–scale deformations of Lorentz symmetry as a solution to the UHECR and the TeV–MATH–gamma paradoxes, *Phys. Rev.* **D64**, 036005, 2001, [astro-ph/0008107].

Amelino–Camelia, G. vd., Potential Sensitivity of Gamma–Ray Burster Observations to Wave Dispersion in Vacuo, *Nature* **393**, 1998, s. 763–765. [astro-ph/9712103].

Anderson, P. W., *The Theory of Superconductivity in the High-T_c Cuprate Superconductors*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.

Anguige, K., Isotropic cosmological singularities 3: The Cauchy problem for the inhomogeneous conformal Einstein–Vlasov equations, *Annals Phys.* **282**, 1999, s. 395–419.

Antoci, S., The origin of the electromagnetic interaction in Einstein's unified field theory with sources, 2001, [gr-qc/018052].

Anton, H. ve Busby, R. C., *Contemporary Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2003.

Apostol, T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer–Verlag, New York, 1976.

Arfken, G. ve Weber, H., *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt/ Academic Press, 2000.

Arndt, M. vd., Wave–particle duality of C_{60} molecules, *Nature* **401**, 1999, s. 680.

Arnol'd, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer–Verlag, New York, 1978.

Arnowitt, R., Deser, S. ve Misner, C. W, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1962.

Ashtekar, A, New variables for classical and quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1986, s. 2244–2477.

Ashtekar, A., New Hamiltonian formulation of general relativity, *Phys. Rev.*, 1987, s. 1587–1602.

Ashtekar, A., *Lectures on Non–Perturbative Canonical Gravity*, Ek, World Scientific, Singapur, 1991.

Ashtekar, A. ve Lewandowski, J., Relation between polymer and Fock excitations, *Class. Quant. Grav.* **18**, 2001, L117–L127.

Ashtekar, A. ve Lewandowski, J., Background Independent Quantum Gravity: A Status Report, 2004, [gr-qc/0404018].

Ashtekar, A. ve Schilling, T. A., *On Einstein's Path*, ed. A.Harvey, Springer–Verlag, Berlin, 1998.

Ashtekar, A. ve Lewandowski, J., Representation theory of analytic holonomy algebras, *Knots and Quantum Gravity*, ed. J. C. Baez, Oxford University Press, Oxford, 1994.

Ashtekar, A., Baez, J. C. ve Krasnov, K., Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy, *Adv. Theo. Math. Phys.* **4**, 2000, s. 1–95.

Ashtekar, A., Baez, J. C., Corichi, A. ve Krasnov, K., Quantum geometry and black hole entropy, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1998, s. 904–907.

Ashtekar, A., Bojowald, M., Lewandowski, J., Mathematical structure of loop quantum cosmology, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 2003, s. 233–268.

Atiyah, M. F., *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Atiyah, M. F. ve Singer, I. M., The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69**, 1963, s. 322–433.

Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. ve Singer, I. M., Self-duality in four dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A362**, 1978, s. 425–461.

Baez, J. C., Spin foam models, *Class. Quant. Grav.* 15, 1998, s. 1827–1858.

Baez, J. C., An introduction to spin foam models of quantum gravity and BF theory. *Lect. Notes Phys.* **543**, 2000, s. 25–94.

Baez, J. C., Higher-dimensional algebra and Planck-scale physics, Physics Meets Philosophy at the Planck Scale, ed. C. Callender ve N. Huggett, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, [gr-qc/9902017].

Baez, J. C. ve Dolan, D., Categorification, *Higher Category Theory* ed. E. Getzler ve M. Kapranov, Contemporary Mathematics, cilt 230, AMS, Providence, RI, [Also see http://xxx.lanl.gov/abs/math.QA/9802029].

Bahcall, N., Ostriker, J. P., Perlmutter, S. ve Steinhardt., P. J., The Cosmic Triangle: Revealing the State of the Universe, *Science* **284**, 1999, [astro-ph/9906463].

Bailey, T. N. ve Baston, R. J. (ed.), *Twistors in Mathematics and* Physics, LMS Lecture Note Series 156, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Bailey, T. N., Ehrenpreis, L. ve Wells, R. O., Jr., Weak solutions of the massless field equations, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A384**, 1982, s. 403–425.

Banchoff, T., *Beyond the Third Dimension:* Scientific American Library, 1990, 1996, ayrıca *bkz.* http://www.faculty.fairfield.edu/jmac/cl/tb4d.htm.

Bar, I., Survey of Two-Time Physics, 2000, [hep-th/0008164].

Barbour, J. B., *Absolute or Relative Motion*, cilt 1, *The Discovery of Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Barbour, J. B., *Time and the interpretation of quantum gravity*, Syracuse University Preprint, 1992.

Barbour, J. B., *The Discovery of Dynamics: A Study from a Machian Point of View of the Discovery and the Structure of Dynamical Theories*, Oxford University Press, Oxford, 2001a.

Barbour, J. B., *The End of Time*, Oxford University Press, Oxford, 2001b.

Barbour, J. B., *Absolute or Relative Motion: The Deep Structure of General Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 2004.

Barbour, J. B., Foster, B. ve O Murchadha, N., Relativity without relativity, *Class. Quant. Grav.* 19, 2002, s. 3217–3248, [gr-qc/0012089].

Barrett, J. W. ve Crane, L., Relativistic spin networks and quantum gravity, *J. Math. Phys.* **39**, 1998, s. 3296–3302.

Barrett, J. W. ve Crane, L., A Lorentzian signature model for quantum general relativity, *Class. Quant. Grav.* **17**, 2000, s. 3101–3118.

Barrow, J. D. ve Tipler, F. J., *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

Barrow, J. D. ve Tipler, F. J., *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford University Press, Oxford, 1988.

Baston, R. J. ve Eastwood, M. G., *The Penrose transform: its interaction with representation theory*, Oxford University Press, Oxford, 1989.

Becker, R., *Electromagnetic Fields and Interactions*, Dover, New York, 1982.

Begelman, M. C., Blandford, R. D. ve Rees, M. J., Theory of extragalactic radio sources, *Rev. Mod. Phys.* **56**, 1984, s. 255.

Belinskii, V. A., Khalatnikov, I. M. ve Lifshitz, E. M., Oscilliatory approach to a singular point in the relativistic cosmology, *Usp. Fiz. Nauk* **102**, 1970, s. 463–500; İngilizce çevirisi *Adv. in Phys.* **19**, s. 525–573.

Bell, J. S., *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanic,*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

Beltrami, E., Essay on the interpretation of non–Euclidean geometry, 1868, çev. Stillwell, J. C., Sources of Hyperbolic Geometry, *Hist. Math.*, **10**, AMS Publications, 1996.

Bergmann, P. G., *Helv. Phys. Acta Suppl.* **4**, 1956, s. 79.

Bergmann, P. G. Two–component spinors in general relativity, *Phys. Rev.* **107**, 1957, s. 624–629.

Bern, Z., Perturbative Quantum Gravity and its relation to Gauge Theory, *Living Rev. Relativity* **5**, 2002, [www.livingreviews.org/Articles/Volume5/2002–5bern/index.html].

Berry, M. V., Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A392**, 1984, s. 45–57.

Berry, M. V., Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase, *J. Phys. A. Math. Gen.* **18**, 1985, s. 15–27.

Berry, M. V. ve Keating, J. P., The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics, *SIAM Review* **41**, No. 2, 1999, s. 236–266.

Biedenharn, L. C. ve Louck, J. D., *Angular Momentum in Quantum Physics*, Addison–Wesley, Londra, 1981.

Bilaniuk, O.-M. ve Sudarshan, G., Particle beyond the light barrier, *Phys. Today* **22**, 1969, s. 43–51.

Birrell, N. D. ve Davies, P. C. W., *Quantum Fields in Curves Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

Bjorken, J. D. ve Drell, S. D., *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw Hill, New York & Londra, 1965.

Blanchard, A., Douspis, M., Rowan–Robinson, M. ve Sarkar, S., An alternative to the cosmological "concordance model", *Astron. Astrophys.* **412**,

2003, s. 35–44.

Blanford, R. D. ve Znajek, R. L., Electromagnetic Extraction of Energy from Kerr Black Holes, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **179**, 1977, s. 433.

Bohm, D. ve Hiley, B., *The Undivided Universe*, Routledge, Londra, 1994.

Bojowald, M., Absence of singularity in loop quantum cosmology, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2001, s. 5227–5230.

Bondi, H., Negative mass in general relativity, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 1957, 423–428; ayrıca *Math. Rev.* **19**, s. 814.

Bondi, H., Gravitational waves in general relativity, *Nature* **186**, Londra, 1960, s. 535.

Bondi, H., *Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.

Bondi, H., *Relativity and Common Sense*, Heinemann, Londra, 1964.

Bondi, H., *Assumption and Myth in Physical Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

Bondi, H. ve Gold, T., The Steady–State Theory of the Expanding Universe, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **108**, 1948, s. 252–270.

Bondi, H., van der Burg, M. G. J. ve Metzner, A. W. K., Gravitational waves in general relativity, VII. Waves from axisymmetric isolated systems, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A269**, 1962, s. 21–52.

Bonnor, W. B. ve Rotenberg, M. A., Gravitational waves from isolated sources, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A289**, 1966, s. 247–274.

Börner, G., *The Early Universe*, Springer–Verlag, 2003.

Bouchet, F. R., Peter, P., Riazuelo, A. ve Sakellariadou, M., Evidence against or for topological defects in the BOOMERanG data?, 2000, *Phys. Rev.* **D65**(2002), 021301, [astro-ph/0005022].

Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, ikinci basım, John Wiley & Sons, New York, 1968.

Braginsky, V., The Detection of Gravitational Waves and Quantum Non–Distributive Measurements, *Topics in Theoretical and Experimental Gravitation Physics*, ed. V. De Sabbata ve J. Weber, Plenum Press, New York, 1977, s. 105–122.

Brauer, R. ve Weyl, H., Spinors in n dimensions, *Am. J. Math.* **57**, 1935, s. 425–449.

Brekke, L. ve Freund, P. G. O., *p-adic numbers in physics*. North–Holland, Amsterdam, 1993.

Bremermann, H., *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.

Brody, D. C. ve Hughston, L. P., Geometric models for quantum statistical inference, *The Geometric Universe; Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998a.

Brody, D. C. ve Hughston, L. P., The quantum canonical ensemble, *J. Math. Phys.* **39(12)**, 1998b, s. 6502–6508.

Brody, D. C. ve Hughston, L. P., Geometric Quantum Mechanics, *J. Geom. and Phys.* **38(1)**, 2001, s. 19–53.

Brown, J. W. ve Churchill, R. V., *Complex Variables and Applications*, McGraw–Hill, New York & Londra, 2004.

Bryant, R. L., Chern, S. -S., Gardner, R. B., Goldschmidt, H. L. ve Griffiths, P. A, *Exterior Differential Systems*, MSRI Publications, **18**, Springer–Verlag, New York, 1991.

Bucher, M., Goldhaber, A. ve Turok, N., An open Universe from Inflation, *Phys. Rev.* D52, 1995, [hep-ph/9411206].

Buckley, P. ve Peat, F. D., *Glimpsing Reality*, University of Toronto Press, Toronto, 1996.

Budinich, P. ve Trautman, A., *The Spinorial Chessboard*, Trieste Notes in Physics, Springer–Verlag, Berlin, 1988.

Burbidge, G. R., Burbidge, E. M., Fowler, W. A. ve Hoyle, F., Synthesis of the Elements in Stars., *Revs. Mod. Phys.* **29**, 1957, s. 547–650.

Burkert, W., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, Harvard, 1972.

Burkill, J. C., *A First Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962.

Byerly, W. E., *An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics, with Applications to Problems in Mathematical Physics*, Dover, New York, 2003.

Cachazo, F., Svrcek, P. ve Witten, E., MHV Vertices and Tree Amplitudes in Gauge Theory, 2004, [hep-th/0403047].

Candelas, P., de la Ossa, X. C., Green, P. S. ve Parkes, L., A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, *Nucl. Phys.* **B359**, 1991, s. 21.

Cartan, É., *Les Systémes Différentiels Extérieurs et leurs Applications Géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

Cartan, É., *The Theory of Spinors*, Hermann, Paris, 1966.

Carter, B., Cambridge Doktora Tezi, 1962.

Carter, B., Complete Analytic Extension of the Symmetry Axis of Kerr's Solution of Einstein's Equations, *Phys. Rev.* **141**, 1966, s. 4.

Carter, B., Large Number Coincidences and the Anthropic Principle, *Confrontation of Cosmological Theory with Astronomical Data*, ed. M. S. Longair, Reidel, Dordrecht, 1974, s. 291–298; Leslie'de 1990'da yeniden basıldı.

Cercignani, C., *Ludwig Boltzmann: The Man Who Trusted Atoms.* Oxford University Press, Oxford, 1999.

Chan, H-M. ve Tsou, S. T., *Some Elementary Gauge Theory Concepts*, World Scientific Lecture Notes in Physics, cilt 47, Londra, 1993.

Chan, H-M. ve Tsou, S. T., Fermion Generations and Mixing from Dualized Standard Model, *Acta Physica Polonica B* 12, 2002.

Chandrasekhar, S., The maximum mass of ideal white dwarfs, *Astrophys. J.*, 74, 1981, s. 81–82.

Chandrasekhar, S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford, 1983.

Chari, V. ve Pressley, A., *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Chen, W. W. L., *Linear Functional Analysis*, 2002, [Available online: http:// www.maths.mq.edu.au/~wchen/lnlfafolder/lnlfa.html].

Cheng, K. S. ve Wang, J., The formation and merger of compact objects in central engine of active galactic nuclei and quasars: gamma-ray burst and gravitational radiation, *Astrophys., J.*, 521, 1999, s. 502.

Chern, S. S., *Complex Manifolds Without Potential Theory*, Springer-Verlag, New York, 1979.

Chernoff, P. R. ve Marsden, J. E., *Properties of infinite hamiltonian systems*. Lecture Notes in Mathematics, cilt 425, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

Chevalley, C., *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.

Chew, G. F., *S-Matrix Theory of Strong Interactions*, Pearson Benjamin Cummings, 1962.

Choquet-Bruhat, Y. ve DeWitt-Morette, C., *Analysis, Manifolds, and Physics*, Parts I and II, North-Holland, Amsterdam, 2000.

Christian, J., Definite events in Newton–Cartan quantum gravity, ön baskı Oxford, *Phys. Rev. D.*, 1995.

Claudel, C. M. ve Newman, K. P., Isotropic Cosmological Singularities I. Polytropic Perfect Fluid Spacetimes, *Proc. R. Soc. Lond.* 454, 1998, s. 1073–1107.

Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A. ve Holt, R. A., Proposed experiment to test local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.* 23, 1969, s. 880.

Clifford, W. K., Preliminary Sketch of Biquaternions, Proc. London Math. Soc. 4, 1873, s. 381–395.

Clifford, W. K., Applications of Grassmann's extensive algebra, *Am. J. Math.* 1, 1878, s. 350–358.

Clifford, W. K., Mathematical papers by William Kingdon Clifford, ed. R. Tucker, Londra, 1882.

Cohen, P. J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin, New York, 1966.

Collins, P. D. B., *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

Colombeau, J. F., A multiplication of distributions, *J. Math. Anal. Appl.* **94**, 1983, s. 96–115.

Colombeau, J. F., *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North Holland, Amsterdam, 1985.

Connes, A., Essay on physics and non-commutative geometry, *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, ed. D. G. Quillen, G. B. Segal ve Tsou S. T., Clarendon Press, Oxford, 1990.

Connes, A, Noncommutative differential geometry and the structure of space-time, *The Geometric Universe; Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998.

Connes, A. ve Berberian, S. K., *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1995.

Connes, A. ve Kreimer, D., Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry, 1998, [hep-th/9808042].

Conway, J. H. ve Norton, S. P., Monstrous Moonshine, *Bull. Lond. Math. Soc.* **11**, 1979, s. 308–339.

Conway, J. H. ve Smith, D. A., *On Quaternions and Octonions*, A. K. Peters, 2003.

Corson, E.M., *Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Waveequations*, Blackie and Son Ltd., Londra, 1953.

Costa de Beauregard, O., Macroscopic retrocausation, *Found. Phy. Lett.* 8(3), 1995, s. 287–291.

Cox, D. A. ve Katz, S., *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs 68. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

Cramer. J. G., An overview of the transactional interpretation of quantum mechanics, *Int. J. Theor. Phys.* 27(2), 1988, s. 227–236.

Crowe, M. J., *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, University of Notre Dame Press, Toronto, 1967; ekleme ve düzeltmelerle yeniden basım, Dover, New York, 1985.

Cvitanovič, P. ve Kennedy, A. D., Spinors in negative dimensions, *Phys. Scripta* 26, 1982, s. 5–14.

Das, A. ve Ferbel. T., *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, World Scientific Publishing Company, Singapur, 2004.

Davies, P., *How to Build a Time Machine*, Penguin, ABD, 2003.

Davis, M., What is a Computation?, *Mathematics Today: Twelve Informal Essays*, ed. L. A. Steen, Springer-Verlag, New York, 1978.

Davis, M., Mathematical logic and the origin of modern computers, *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*, ed. R. Herken, Kammerer and Unverzagt, Hamburg, 1988.

Davydov, A. S., *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1976.

de Bernardis, P. vd., A Flat Universe from High-Resolution Maps of the Cosmic Microwave Background Radiation, *Nature* **404**, 2000, s. 955–959.

Delduc, F., Galperin, A., Howe, P. ve Sokatchev, E., A twistor formulation of the heterotic D=10 superstring with manifest (8,0) worldsheet supersymmetry, *Phys. Rev.* **D47**, 1993, s. 578–593, [hep-th/9207050].

Derbyshire, J., *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, Washington, DC, 2003.

Deser, S., Nonrenormalizability of D=11 supergravity, 1999, [hep-th/9905017].

Deser, S., Infinities in quantum gravities, *Annalen Phys.* 9, 2000, s. 299–307, [gr-qc/9911073].

Deser, S. ve Teitelboim, C., Supergravity Has Positive Energy, *Phys. Rev. Lett.* 39, 1977, s. 248–252.

Deser, S. ve Zumino, B., Consistent supergravity, *Phys. Lett.* 62B, 1976, s. 335–337.

de Sitter, W., *Phys. Zeitz.*, **14**, 1913, s. 429, Almanca.

Deutsch, D., *The Fabric of Reality*, Penguin, Londra, 2000.

Devlin, K., *Mathematics: The New Golden Age*, Penguin Books, Londra, 1988.

Devlin, K., *The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time*, Basic Books, London/Perseus Books, New York, 2002.

DeWitt, B. S., *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

DeWitt, B. S. ve Graham, R. D. (ed.), *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1973.

Diósi, L., Gravitation and quantum mechanical localization of macroobjects, *Phys. Lett.* 105A, 1984, s. 199–202.

Diósi, L., Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations, *Phys. Rev.* A40, 1989, s. 1165–1174.

Dicke, R. H., Dirac's Cosmology and Mach's Principle, *Nature* **192**, 1961, s. 440–441.

Dicke, R. H., Interaction-free quantum measurements: A paradox?, *Am. J. Phys.* **49**, 1981, s. 925.

Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G. ve Wilkinson, D. T., Cosmic Black-Body Radiation, *Astrophys. J.* **142**, 1965, s. 414–419.

Dine, M., Some reflections on Moduli, their Stabilization and Cosmology, 2000, [hep-th/0001157]

Dirac, P. A. M., The quantum theory of the electron, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A117**, 1928, s. 610–624; *Age*, bölüm II, **A118**, s. 351–361.

Dirac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc.* **A136**, 1932, s. 453.

Dirac, P. A. M., The Lagrangian in Quantum Mechanics, *Physicalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Band 3, Heft 1, 1933.

Dirac, P. A. M., The Cosmological Constants, *Nature* **139**, 1937, s. 323.

Dirac, P. A. M., A new basis for cosmology, *Proc. R. Soc. Lond.* **A165**, 1938, s. 199.

Dirac, P. A. M., Generalized Hamiltonian dynamics, *Can. J. Math.* **2**, 1950, s. 129.

Dirac, P. A. M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.

Dirac, P. A. M., *Lectures in Quantum Field Theory*, Academic Press, New York, 1966.

Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics 4th edn.*, Clarendon Press, Oxford, 1982a.

Dirac, P. A. M., Pretty mathematics, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 1982b, s. 603–605.

Dirac, P. A. M., The Origin of Quantum Field Theory, *The Birth of Particle Physics*, ed. Brown ve Hoddeson, Cambridge University Press, New York, 1983.

Dixon, G., *Division Algebras, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.

Dodelson, S., *Modern Cosmology*, Academic Press, Londra, 2003.

Dolan, L., Superstring twisted conformal field theory: Moonshine, the Monster, and related topics, South Hadley, MA, 1994; *Contemp. Math.* **193**, 1996, s. 9–24.

Donaldson, S. K. ve Kronheimer, P. B., *The Geometry of Four-Manifolds*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

Douady, A. ve Hubbard, J., On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **18**, 1985, s. 287–343.

Dowker, F. ve Kent, A., On the consistent histories approach to quantum mechanics, *J. Stat. Phys.* **82**, 1996, [gr-qc/9412067].

Drake, S., *Discoveries and Opinions of Galileo*, Doubleday, New York, 1957.

Drake, S. (çev.), *Galileo Galilei: Dialogue Concerning the Two Chief World Systems—Ptolemaic and Copernican*, University of California, Berkeley, 1953 [*İki Büyük Dünya Sistemi Hakkında Diyalog*, çev. Reşit Aşçıoğlu, İş Bankası Kültür Yayınları, 2008].

Dray, T. ve Manogue, C. A., The Exceptional Jordan Eigenvalue Problem, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1999, s. 2901–2916, [math-ph/99110004].

Dunajski, M., Anti-self-dual four-manifolds with a parallel real spinor, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **458(2021)**, 2002, s. 1205–1222.

du Sautoy, M., *The Music of the Primes*, Perennial, New York, 2004.

Dunham, W., *Euler: The Master of Us All*, Math. Assoc. Amer., Washington, DC, 1999.

Dyson, F. J., *Symmetry groups in nuclear and particle physics: a lecture-note and reprint volume*, W. A. Benjamin, New York, 1966.

Eastwood, M.G., Penrose, R. ve Wells, R.O., Jr., Cohomology and massless fields, *Comm. Math. Phys.* **78**, 1981, s. 305–351.

Eddington, A. S., *The Nature of the Physical World*, Cambridge University Press, Cambridge, 1929a.

Eddington, A. S., A Symmetrical Treatment of the Wave Equation, *Proc. R. Soc. Lond.* **A121**, 1929b, s. 524–542.

Eddington, A. S., *Fundamental Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1946.

Edwards, C.H. ve Penney, D.E., *Calculus with Analytic Geometry*, 6. basım, Prentice Hall, 2002.

Ehrenberg, W. ve Siday, R. E., The refractive index in electron optics and the principles of dynamics, *Proc. Phys. Soc.* **LXIIB**, 1949, s. 8–21.

Ehrenfest, P. ve Ehrenfest, T., *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*, Cornell University Press, Ithaca, NY, 1959.

Eilenberg, S. ve Mac Lane, S., General theory of natural equivalences, *Trans. Am. Math. Soc.* **58**, 1945, s. 231–294.

Einstein, A., *S. B. Preuss. Akad. Wiss.* **22**, 1925, s. 414.

Einstein, A., A generalization of the relativistic theory of gravitation, *Ann. Math.* **46**, 1945, s. 578.

Einstein, A., A generalized theory of gravitation. *Rev. Mod. Phys.* **20**, 1948, s. 35.

Einstein, A., Relativistic theory of the non-symmetric field, Appendix II: *The Meaning of Relativity*, 5.basım, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955, s. 133–166 [*Göreliliğin Anlamı*, çev. Ercüment Akat, Alfa Bilim, 2014].

Einstein, A. ve Kaufman, B., A new form of the general relativistic field equations, *Ann. Math.* **62**, 1955, s. 128.

Einstein, A. ve Straus, E. G., A generalization of the relativistic theory of gravitation II. *Ann. Math.* **47**, 1946, s. 731.

Einstein, A., Podolsky, P. ve Rosen, N., Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, *Quantum Theory and Measurement*, ed. J. A. Wheeler ve W. H. Zurek, Princeton University

Press, Princeton, New Jersey, 1983; orijinal olarak *Phys. Rev.* **47**, 1935, s. 777–780.

Elitzur, A. C. ve Vaidman, L., Quantum mechanical interaction-free measurements, Found. Phys. **23**, 1993, s. 987–997.

Elliott, J. P. ve Dawber, P. G., *Symmetry in Physics*, cilt 1, Macmillan, Londra, 1984.

Ellis, J., Mavromatos, N. E. ve Nanopoulos, D. V., Vacuum fluctuations and decoherence in mesoscopic and microscopic systems, *Symposium on Flavour-Changing Neutral Currents: Present and Future Studies*, UCLA, 1997a.

Ellis, J., Mavromatos, N. E. ve Nanopoulos, D. V., Quantum decoherence in a D-foam background, *Mod. Phys. Lett.* **A12**, 1997b, s. 2029–2036.

Engelking, E., *Outline of General Topology*, North-Holland & PWN, Amsterdam, 1968.

Everett, H., "Relative State" formulation of quantum mechanics, *Quantum Theory and Measurement*, ed. J. A. Wheeler ve W. H. Zurek, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983; orijinal olarak Rev. Mod. Phys. **29**, 1957, s. 454–462.

Fauvel, J. ve Gray, J., *The History of Mathematics: A Reader, Macmillan,* Londra, 1987.

Ferber, A., Supertwistors and conformal supersymmetry, *Nucl. Phys.* **B132**, 1978, s. 55–64.

Fernow, R. C., *Introduction to Experimental Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Feynman, R. P., Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics, *Rev. Modern Phys.* **20**, 1948, s. 367–387.

Feynman, R. P., The theory of positrons, *Phys. Rev.* **76**, 1949, s. 749.

Feynman, R. P., *Elementary Particles and the Laws of Physics: The 1986 Dirac Memorial Lectures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

Feynman, R. P. ve A. Hibbs., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Fierz, M., Uber die Relativitische Theorie kräftefreier Teichlen mit beliebigem Spin, *Helv. Phys. Acta* **12**, 1938, s. 3–37.

Fierz, M., Uber den Drehimpuls von Teichlen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin, *Helv. Phys. Acta* **13**, 1940, s. 45–60.

Fierz, M. ve Pauli, W., On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A173**, 1939, s. 211–232.

Finkelstein, D., Space-time code, *Phys. Rev.* **184**, 1969, s. 1261–1279.

Finkelstein, D. ve J. Rubinstein, Connection between spin, statistics, and kinks, 1968; *J. Math. Phys.* 9, 1972.

Flanders, H., *Differential Forms*, Academic Press, 1963; yeni baskı Dorf, 1989.

Floyd, R. M. ve Penrose, R., Extraction of Rotational Energy from a Black Hole, *Nature Phys. Sci.* **229**, 1971, s. 177.

Fortney, L. R., *Principles of Electronics, Analog and Digital*, Harcourt Brace Jovanovich, 1997.

Frankel, T., *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

Frenkel, A., A Tentative Expresion of the Károlyházy Uncertainty of the Space-time Structure through Vacuum Spreads in Quantum Gravity, 2000, [quant-ph/0002087].

Friedlander, F. G., *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

Friedrich, W. L., *Fire in the Sea: The Santorini Volcano: Natural History and the Legend of Atlantis*, çev. A.R. McBirney, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Frittelli, S., Kozameh, C. ve Newman, E. T., Dynamics of light cone cuts at null infinity, *Phys. Rev.* **D56**, 1997, s. 8.

Fröhlich, J. ve Pedrini, B., New applications of the chiral anomaly, *Mathematical Physics 2000*, ed. A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibble ve B. Zegarlinski, Imperial College Press, Londra, 2000, s. 9–47.

Gürsey, F. ve Tze, C. -H., *On the Role of Division, Jordan, and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, Singapur, 1996.

Gambini, R. ve Pullin, J., Nonstandard optics from quantum spacetime, *Phys. Rev.* **D59** 124021, 1999.

Gandy, R., The confluence of ideas in 1936, *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*, ed. R. Herken, Kammerer and Unverzagt, Hamburg, 1988.

Gangui, A., Cosmology from Topological Defects, *AIP Conf. Proc.* **668**, 2003, [astro-ph/0303504].

Gardner, M., *The New Ambidextrous Universe*, W. H. Freeman, New York, 1990.

Gauss, C. F., *Werke*, cilt VIII, Leipzig, 1900, s. 357–362.

Gel'fand, I. ve Shilov, G., *Generalized Functions*, cilt 1, Academic Press, New York, 1964.

Gell-Mann, M., *The Quark and the Jaguar: Adventures in the Simple and the Complex*, W. H. Freeman, New York, 1994.

Gell-Mann, M. ve Ne'eman, Y., *Eightfold Way*, Perseus Publishing, 2000.

Geroch, R and Hartle, J., Computability and physical theories, *Found. Phys.* 16, 1986, s. 533.

Geroch, R., Spinor structure of space-times in general relativity I, *J. Math. Phys.* **9**, 1968, s. 1739–1744.

Geroch, R., Spinor structure of space-times in general relativity II, *J. Math. Phys.* 11, 1970, s. 343–348.

Geroch, R., *Geometrical Quantum Mechanics*, Chicago Üniversitesi ders notları, basımı yok.

Geroch, R., Kronheimer, E. H. ve Penrose, R., Ideal points for spacetimes, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A347**, 1972, s. 545–567.

Ghirardi, G. C., Grassi, R. ve Rimini, A., Continuous–spontaneous–reduction model involving gravity, *Phys. Rev.* **A42**, 1990, s. 1057–1064.

Ghirardi, G. C., Rimini, A. ve Weber, T., Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems, *Phys. Rev.* **D34**, 1986, s. 470.

Gibbons, G. W., The isoperimetric and Bogomolny inequalities for black holes, *Global Riemannian Geometry*, ed. T. Willmore ve N. J. Hitchin,

Ellis Horwood, Chichester, 1984.

Gibbons, G. W., Collapsing Shells and the Isoperimetric Inequality for Black Holes, *Class. Quant. Grav.* **14**, 1997, s. 2905–2915, [hep-th/9701049].

Gibbons, G. W. ve Hartnoll, S. A., Gravitational instability in higher dimensions, 2002, [hep-th/0206202].

Gibbons, G. W. ve Perry, M. J., Black Holes and Thermal Green's Function, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A358**, 1978, s. 467–494.

Gibbs, J., *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Dover, New York, 1960.

Gindikin, S. G., On one construction of hyperkähler metrics, *Funct. Anal. Appl.* 20, 1986, s. 82–83, Rusça.

Gindikin, S. G., Between integral geometry and twistors, *Twistors in Mathematics and Physics*, ed. T. N. Bailey ve R. J. Baston, LMS Lecture Note Series 156, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Gisin, N., Stochastic quantum dynamics and relativity, *Helv. Phys. Acta.* **62**, 1989, s. 363.

Gisin, N., *Phys. Lett.* **143A**, 1990, s. 1.

Gisin, N. vd., Two independent photon pairs versus four-photon entangled states in parametric down conversion, [quant-ph/0310167].

Glashow, S., The renormalizability of vector meson interactions, *Nucl. Phys.* 10, 1959, s. 107.

Gleason, A. M., *More Mathematical People*, ed. D. J. Albers, G. L. Alexanderson ve C. Reid, Harcourt Brace Jovanovich, Boston, 1990, s. 94.

Goddard, P. vd., Quantum dynamics of a massless, relativistic string, *Nucl. Phys.* **B56**, 1973, s. 109.

Gold, T., The Arrow of Time, *Am. J. Phys.* 30, 1962, s. 403.

Goldberg, J. N., Macfarlane, A. J., Newman, E. T., Rohrlich, F. ve Sudarshan, E. C. G., Spin-s spherical harmonics and eth. *J. Math. Phys.* **8**, 1967, s. 2155–2161.

Goldblatt, R., *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, North-Holland Publishing Company, Oxford & New York, 1979.

Goldstein, S., Stochastic mechanics and quantum theory, *J. Stat. Phys.* **47**, 1987.

Gottesman, D. ve Preskill, J., Comment on "The black hole final state", 2003, [hep-th/0311269].

Gouvea, F. Q., *P-Adic Numbers: An Introduction*, Springer-Verlag, 1993; 2. basım, Berlin & New York, 2000.

Grassmann, H. G., *Die lineare Ausdehnungslehre*, 4.basım, Springer-Verlag, 1844.

Grassmann, H. G., *Die lineare Ausdehnungslehre Vollständig und in strenger Form bearbeitit*, 1862.

Green, M. B., Superstrings and the unification of physical forces, *Mathematical Physics 2000*, ed. A. Fokas, T. W. B. Kibble, A. Grigouriou ve B. Zegarlinski, Imperial College Press, Londra, 2000, s. 59–86.

Green, M. B., Schwarz, J. H. ve Witten, E., *Superstring Theory*, cilt I & II, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

Green, M. B., Schwarz, J. H. ve Witten, E., *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Greene, B., *The Elegant Universe; Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*, Random House, Londra, 1999 [*Evrenin Zarafeti*, TÜBİTAK Yayınları, çev. Ebru Kılıç, 2011].

Griffiths, P. ve Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

Grishchuk, L. P. vd., Gravitational Wave Astronomy: in Anticipation of First Sources to be Detected, Phys. Usp. **44**, 2001, s. 1–51, [astro-ph/0008481].

Groemer, H., *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Gross, D. J. ve Periwal, V., String Perturbation Theory Diverges, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1988, s. 2105.

Gross, M. W., Huybrechts, D., Joyce, D. ve Winkler, G. D., *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Springer-Verlag, 2003.

Grosser, M., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M. ve Steinbauer, R., *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity*, Kluwer Academic Publishers, Boston and Dordrecht, The Netherlands, 2001.

Guenther, D. B., Krauss, L. M. ve Demarque, P., Testing the Constancy of the Gravitational Constant Using Helioseismology, *Astrophys. J.* **498**, 1998, s. 871–876.

Gunning, R. C. ve Rossi, H., *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

Gürsey, F., Quaternionic and octonionic structures in physics: episodes in the relation between physics and mathematics, 1983, *Symm. Phys. (1600–1980)*, San Feliu de Guíxols, Univ. Autònoma Barcelona, Barcelona, 1987, s. 557–592.

Gürsey, F. ve Tze, C.-H., *On the Role of Division, Jordan, and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, Singapur, 1996.

Gurzadyan, V. G. vd., Ellipticity analysis of the BOOMERANG CMB maps, *Int. J. Mod. Phys.* D12, 2002, s. 1859–1874, [astro-ph/0210021].

Gurzadyan, V. G. vd., Is there a common origin for the WMAP low multipole and for the ellipticity in BOOMERANG CMB maps?, 2003, [astro-ph/0312305]

Gurzadyan, V. G. vd., WMAP confirming the ellipticity in BOOMERANG and COBE CMB maps, 2004, [astro-ph/0402399].

Gurzadyan, V. G. ve Kocharyan, A. A., On the problem of isotropization of cosmic background radiation, Astron. Astrophys. **260**, 1992, s. 14.

Gurzadyan, V. G. ve Kocharyan, A. A., *Paradigms of the Large-Scale Universe*, Gordon and Breach, Lausanne, Switzerland, 1994.

Gurzadyan, V. G ve Torres, S., Testing the effect of geodesic mixing with COBE data to reveal the curvature of the universe, *Astron. and Astrophys.* 321, 1997, s. 19–23, [astro-ph/9610152].

Guth, A., *The Inflationary Universe*, Jonathan Cape, Londra, 1997.

Haag, R., *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras.* Springerverlag, Berlin, 1992.

Haehnelt, M. G., Joint Formation of Supermassive Black Holes and Galaxies, *Carnegie Observatories Astrophysics Series, Vol 1: Coevolution of Black Holes and Galaxies*, ed. L. C. Ho, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, [astro-ph/0307378].

Halverson, N. W., DASI First Results: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Angular Power Spectrum, 2001, [astro-ph/0104489].

Halzen, F. ve Martin, A. D., *Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Hameroff, S. R., Funda-mental geometry: the Penrose–Hameroff "Orch OR" model of consciousness, *The Geometric Universe; Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998.

Hameroff, S. R., *Ultimate Computing. Biomolecular Consciousness and Nano-Technology*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

Hameroff, S. R. ve Penrose, R., Conscious events as orchestrated spacetime selections, *J. Consc. Stud.* 3, 1996, s. 36–63.

Hameroff, S. R. ve Watt, R. C., Information processing in microtubules, *J. Theor. Biol.* 98, 1982, s. 549–561.

Hamilton, E., *Mythology: Timeless Tales of Gods and Heroes*, Warner Books, New York, 1999.

Han, M. Y. ve Nambu, Y., Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry, *Phys. Rev.* **139**, B1006–10, 1965.

Hanany, S. vd., MAXIMA-1: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees, *Astrophys. J.* **545**, L5, 2000.

Hanbury Brown, R. ve Twiss, R. Q., A new type of interferometer for use in radio astronomy, *Phil. Mag.* **45**, 1954, s. 663–682.

Hanbury Brown, R. ve Twiss, R. Q., Correlation between photons in 2 coherent beams of light, *Nature* **177**, 1956.

Hansen, B. M. S. ve Murali, C., Gamma Ray Bursts from Stellar Collisions, 1998, [astro-ph/9806256].

Hansen, R.O., Newman, E.T., Penrose, R. ve Tod, K.P., The metric and curvature properties of *H*-space, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A363**, 1978, s. 445–468.

Hardy, G. H., A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, Cambridge, 1940.

Hardy, G. H. ve Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 2. basım, Clarendon Press, Oxford, 1945.

Hardy, L., Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz-invariant realistic theories. Phys. Rev. Lett. **68**, 1992, s. 2981, [/astract/PRL/v68/i20/p2981_1]

Hardy, L., Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states, *Phys. Rev. Lett.* 71(11), 1993, s. 1665.

Hartle, J. B., *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco, CA & Londra, 2002.

Hartle, J. B., The Physics of "Now", 2004, [gr-qc/0403001].

Hartle, J. B. ve Hawking, S. W., The wave function of the Universe, *Phys. Rev.* **D28**, 1983, s. 2960.

Harvey, F. R., Hyperfunctions and linear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **5**, 1966, s. 1042–1046.

Harvey, F. R., *Spinors and Calibrations*, Academic Press, San Diego, CA, 1990.

Haslehurst, L. ve Penrose, R., The most general (2,2) self-dual vacuum: a googly approach, *Further Advances in Twistor Theory*, Vol.III: *Curved Twistor Spaces*, ed. L. J. Mason, L. P. Hughston, P. Z. Kobak ve K. Pulvere, 2001, s. 345–349.

Hawking, S. W., Black hole explosions, *Nature* **248**, 1974, s. 30.

Hawking, S. W., Particle creation by black holes, *Commun. Math. Phys.* **43**, 1975.

Hawking, S. W., Black holes and thermodynamics, *Phys. Rev.* **D13(2)**, 1976a, s. 191.

Hawking, S. W., Breakdown of predictability in gravitational collapse, *Phys. Rev.* **D14**, 1976b, s. 2460.

Hawking, S. W., King, A. R. ve McCarthy, P. J., A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential, and conformal structures, *J. Math. Phys.* **17**, 1976, s. 174–181.

Hawking, S. W. ve Ellis, G. F. R., *The Large-Scale Structure of Space- Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

Hawking, S. W. ve Israel, W. (ed.), *300 Years of Gravitation*, CambridgeUniversity Press, Cambridge, 1987.

Hawking, S. W. ve Penrose, R., The singularities of gravitational collapse and cosmology, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A314**, 1970, s. 529–548.

Hawking, S. W. ve Penrose, R., *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996 [*Zamanın ve Uzayın Doğası*, çev. Umur Daybelge, Alfa Bilim Dizisi, 2011].

Hawking, S. W. ve Turok, N., Open Inflation Without False Vacua, *Phys. Lett.* **B425**, [hep-th/9802030].

Hawkins, T., Weiestrass and the theory of matrices, *Arch. Hist. Exact Sci.* **17**, 1977, s. 119–163.

Hawkins, T., *Emergence of the theory of Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 2000.

Heisenberg, W., *Physics and Beyond*, Addison Wesley, Londra, 1971.

Heisenberg, W., What is an elementary particle?, *Encounters with Einstein*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.

Hestenes, D., The *Zitterwebegung* Interpretation of Quantum Mechanics, *Found. Physics.* **20(10)**, 1990, s. 1213–1232.

Hestenes, D. ve Sobczyk, G., *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*, Reidel, Dordrecht, Hollanda, 1999.

Heyting, A., *Intuitionism, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1956.

Hicks, N. J., *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand, Princeton, 1965.

Hirschfeld, J. W. P., *Projective Geometries over Finite Fields*, ikinci basım, Clarendon Press, Oxford, 1998.

Hodges, A. P., Twistor diagrams, *Physica*, **114A**, 1982, s. 157–175.

Hodges, A. P., A twistor approach to the regularization of divergences, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A397**, 1985, s. 341–74; Mass eigenstatates in twistor theory,

Age, s. 375–396.

Hodges, A. P., String Amplitudes and Twistor Diagrams: An Analogy, *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, ed. D. G. Quillen, G. B. Segal ve Tsou S. T., Oxford University Press, Oxford, 1990a.

Hodges, A. P., Twistor diagrams and Feynman diagrams, *Twistors in Mathematics and Physics,* LMS Lect. Note Ser. 156, ed. T. N. Bailey ve R. J. Baston, Cambridge University Press, Cambridge, 1990b.

Hodges, A. P., The twistor diagram programme. In *The Geometric Universe; Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998.

Hodges, A. P., Penrose, R. ve Singer, M. A., A twistor conformal field theory for four space-time dimensions, *Phys. Lett.* **B216**, 1989, s. 48–52.

Home, D., *Conceptual Foundations of Quantum Physics: An Overview from Modern Perspectives*, Plenum Press, New York & Londra, 1997.

Horgan, J., *The End of Science*, Perseus Publishing, New York, 1996.

Horowitz, G. T., Quantum states of black holes, *Black Holes and Relativistic Stars*, ed. R. M.Wald, University of Chicago Press, Chicago, s. 241–66.

Horowitz, G. T. ve Maldacena, J., The black hole final state, 2003, [hep-th/0310281].

Horowitz, G. T. ve Perry, M. J., Gravitational energy cannot become negative, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1982, s. 371–374.

Howie, J., On the SQ-universality of T(6)-groups, *Forum Math.* **1**, 1989, 251–72.

Hoyle, C. D. vd., Submillimeter Test of the Gravitational Inverse-Square Law: A Search for "Large" Extra Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **86(8)**, 2001, s. 1418–1421.

Hoyle, F., A New Model for the Expanding Universe, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **108**, 1948, s. 372.

Hoyle, F., Fowler, W. A., Burbidge, G. R. ve Burbidge, E. M., Origin of the elements in stars, *Science* **124**, 1956, s. 611–614.

Huang, On the *zitterbewegung* of the electron, *Am. J. Phys.* **47**, 1949, s. 797.

Huggett, S. A. ve Jordon, D., *A Topological Aperitif.* Springer-Verlag, Londra, 2001.

Hughston, L. P., *Twistors and Particles*, Lecture Notes in Physics No. 97. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

Hughston, L. P., Geometric Aspects of Quantum Mechanics, *Twistor Theory* ed. S. A. Huggett, Marcel Dekker, New York, 1995, s. 59–79.

Hughston, L. P., Jozsa, R. ve Wooters, W. K., A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix, *Phys. Letts.* **A183**,

1993, s. 14–18.

Ilyenko, K., Twistor Description of Null Strings, Oxford, 1999, yayımlanmamış doktora tezi.

Immirzi, G., Quantum Gravity and Regge Calculus, 1997, [gr-qc/9701052].

Infeld, L. ve van der Waerden, B. L., Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie, *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Phisik. Math.* Kl. 9, 1933, s. 380–401.

Isenberg, J., Yasskin, P. B. ve Green, P. S., Non-self-dual gauge fields, *Phys. Lett.* **78B**, 1978, s. 462–464.

Isham, C. J., *Quantum Gravity: An Oxford Symposium*, Oxford University Press, Oxford, 1975.

Isham, C. J., Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time, 1992, [gr-qc/9210011].

Israel, W., Event horizons in static vacuum space-times, *Phys. Rev.* **164**, 1967, s. 1776–1779.

Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York & Chichester, 1998.

Jennewein, T., Weihs, G., Pan, J. ve Zeilinger, A., Experimental Nonlocality

Proof of Quantum Teleportation and Entanglement Swapping, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017903, 2002.

Jensen, G., Einstein Metrics on Principal Fibre Bundles, *J. Diff. Geom.* **8**, 1973, s. 599–614.

Johnson, C., *D-Branes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

Jones, H. F., *Groups, Representations, and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 2002.

Jozsa, R., Models in Categories and Twistor Theory, Oxford, 1981, yayımlanmamış dıktora tezi.

Jozsa, R. O., Entanglement and quantum computation, *The Geometric Universe*, ed. S. A, Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998, s. 369–379.

Károlyházy, F., Gravitation and quantum mechanics of macroscopic bodies, *Nuovo Cim.* **A42**, 1966, s. 390.

Ka´rolyha´zy, F. (1974). Gravitation and Quantum Mechanics of Macroscopic

Bodies. *Magyar Fizikai Folyo´irat.* 22, 23–24. [Thesis, in Hungarian]

Károlyházy, F., Frenkel, A. ve Lukács, B., On the possible role of gravity on the reduction of the wave function, *Quantum Concepts in Space and Time*, ed. R. Penrose and C. J. Isham, Oxford University Press, Oxford, 1986, s. 109–128.

Kahn, D. W., *Topology: An Introduction to the Point-Set and Algebraic Areas*, Dover Publications, New York, 1995.

Kaku, M., *Quantum field theory: a modern introduction*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

Kane, G. (ed.), *Perspectives on Supersymmetry (Advanced Series on Directions in High Energy Physics)*, World Scientific Pub. Co, Singapur, 1999.

Kane, G., *Supersymmetry: Unveiling the Ultimate Laws of Nature*, Perseus Publishing, New York, 2001 [*Süpersimetri*, çev. Mustafa M. Dağlı, TÜBİTAK, 2009].

Kamberov, G. vd., *Quaternions, Spinors, and Surfaces (Contemporary Mathematics (American Mathematical Society), v. 299.)*, American Mathematical Society, Providence, RIO, 2002.

Kapusta, J. I., Primordial Black Holes and Hot Matter, 2001, [astro-ph/0101515]

Kasper, J. E. ve Feller, S. A., *The Complete Book of Holograms: How They Work and How to Make Them*, Dover Publications, 2001.

Kauffman, L. H., *Knots and Physics*, World Scientific Publishing, Singapur, 2001.

Kay, B. S., Entropy defined, entropy increase and decoherence understood, and some black hole puzzles solved, 1998a, [hep-th/9802172].

Kay, B. S., Decoherence of Macroscopic Closed Systems within Newtonian Quantum Gravity, *Class. Quant. Grav.* **15**, 1998b, L89–98, [hep-th/9810077].

Kay, B. S. Application of linear hyperbolic PDE to linear quantum in curved space-times: especially black holes, time machines, and a new semilocal vacuum concept, *Journées Équations aux Dérivées Partielles, Nantes 5–9 Juin 2000*, Groupement de Recherche 1151 du CNRS, 2000, [gr-qc/0103056].

Kay, B. S. ve Wald, R. M., Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on space-times with a bifurcate Killing horizon, *Phys. Rept.* **207**, 1991, s. 49–136.

Kelley, J. L., *General Topology*, van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1965.

Kerr, R. P., Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, *Phys. Rev. Lett.* 11, 1963, s. 237–238.

Ketov, S. V., *Quantum Non-Linear Sigma-Models: From Quantum Field Theory to Supersymmetry, Conformal Field Theories, Black Holes, and Strings*. Springer-Verlag, Berlin, Londra, 2000.

Kibble, T. W. B., Geometrization of quantum mechanics, *Commun. Math. Phys.* **65**, 1979, s. 189.

Kibble, T. W. B., Is a semi-classical theory of gravity viable?, *Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*, ed. C. J. Isham, R. Penrose ve D. W. Sciama, Oxford University Press, Oxford, 1981, s. 63–80.

Klein, F., Über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken, *Math. Ann.* **51**, 1898, s. 128–133.

Knott, C. G., Professor Klein's view of quaternions: A criticism, Proc. Roy. Soc. Edinb. **23**, 1900, s. 24–34.

Kobayashi, S. ve Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry.* Interscience Publishers, New York & Londra, 1963.

Kodaira, K., A theorem of completeness of characteristic systems for analytic submanifolds of a complex manifold, *Ann. Math.* **75**, 1962, s. 146–162.

Kodaira, K. ve Spencer, D. C., On deformations of complex analytic structures I, II, *Ann. Math.* **67**, 1958, s. 328–401, 403–466.

Kolb, E. W. ve Turner, M. S., *The Early Universe*, Perseus Publishing, New York, 1994.

Komar, A. B., Undecidability of macroscopically distinguishable states in quantum field theory, *Phys. Rev.* 133B, 1964, s. 542–544.

Kontsevich, M., Homological algebra of mirror symmetry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1,2,* Zürich, 1994; Birkhauser, Basel, 1994.

Kontsevich, M., Enumeration of rational curves via toric actions, *The Moduli Space of Curves*, ed. R. Dijkgraaf, C. Faber ve G. van der Geer, *Progress in Math.* **129**, 1995, s. 335–368, [hep-th/9405035].

Koruga, D., Hameroff, S., Withers, J., Loutfy, R. ve Sundareshan, M., *Fullerene C60: History, physics, nanobiology, nanotechnology*, North-Holland, Amsterdam, 1993.

Kraus, K., *States, effects and operations: fundamental notions of quantum theory*, Lecture Notes in Physics, cilt 190, Springler-Verlag, Berlin, 1983.

Krauss, L. M., *Quintessence: The Mystery of the Missing Mass*, Basic Books, New York, 2001.

Kreimer, D., *Knots and Feynman Diagrams*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Kronheimer, E.H. ve Penrose, R., On the structure of causal spaces, *Proc. Camb. Phil Soc.* **63**, 1967, s. 481–501.

Kruskal, M. D., Maximal Extension of Schwarzschild Metric, *Phys. Rev.* **119**, 1960, s. 1743–1745.

Kuchar, K., Canonical methods of quantization, Quantum Gravity 2, ed. D. W. Sciama, R. Penrose, and C. J. Isham, Oxford University Press, Oxford, 1981.

Kuchar, K. V., Time and interpretations of quantum gravity, *Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*, ed. G. Kunstatter, D. Vincent ve J. Williams, World Scientific, Singapur, 1992.

Labastida, J. M. F. ve Lozano, C., Lectures in Topological Quantum Field Theory, 1998, [hep-th/9709192].

Landsman, N. P., *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Lang, S., *Differentiable Manifolds*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

Lange, A. E. vd., First Estimation of Cosmological Parameters from BOOMERANG, *Phys. Rev.* **D63**, 042001, 2001, [astro-ph/0005004].

Laplace, P. S., *Allgemeine geographische Ephemeriden herausgegeben von F. von Zach.* iv Bd. 1., 1 Abhandl., Weimar, 1799.

Laporte, O. ve Uhlenbeck, G. E., Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations, *Phys. Rev.* **37**, 1931, s. 1380–1552.

Lasenby, J., Lasenby, A. N. ve Doran, J. L., A unified mathematical language for physics and engineering in the 21st century, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A358**, 2000, s. 21–39.

Lawrie, I., *A Unified Grand Tour of Theoretical Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1998.

Lawson, H. B. ve Michelson, M. L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1990.

Lawvere, W. ve Schanuel, S., *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

LeBrun, C. R., Ambi-twistors and Einstein's equations, *Class. and Quantum Grav.* **2**, 1985, s. 555–563.

LeBrun, C. R., Twistors, ambitwistors, and conformal gravity. In *Twistors in Mathematical Physics*, ed. T. N. Bailey and R. J. Baston, LMS Lecture Note Series 156, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

Lebrun, C. ve Mason, L.J., Zoll manifolds and complex surfaces, *J. Diff. Geom.* **61(3)**, 2002, 453–535.

Lefshetz, J., *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1949.

Leggett, A. J., Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play, prospects, *J. Phys.* **CM 14**, 2002, R415–451.

Lasenby, J., Lasenby, A. N. ve Doran, J. L., A unified mathematical language for physics and engineering in the 21st century, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A358**, 2000, s. 21–39.

Levitt, M. H., *Spin Dynamics: Basics of Nuclear Magnetic Resonance*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

Lichnerowicz, A. (ed.), *Physics on Manifolds: Proceedings of the International Colloquium in Honour of Yvonne Choquet-Bruhat, Paris, June 3–5, 1992*, Kluwer Academic Publishers, Boston and Dordrecht, The Netherlands, 1994.

Liddle, A. R., *An Introduction to Modern Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

Liddle, A. R. ve Lyth, D. H., *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Lifshitz, E. M. ve Khalatnikov, I. M., Investigations in relativistic cosmology. *Adv. Phys.* **12**, 1963, s. 185–249.

Linda, A., Comments on Inflationary Cosmology, 1993, [astro-ph/9309043].

Linde, A., Inflation with Variable Omega, *Phys. Lett.* **B351**, 1995, [hep-th/9503097].

Littlewood, J. E., *Littlewood's miscellany*, 1949; yeni basım, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

Livio, M., *The Accelerating Universe*, John Wiley & Sons, New York, 2000.

Llewellyn Smith, C. H., High energy behaviour and gauge symmetry. *Phys. Lett.* **B46(2)**, 1973, s. 233–236, [internetten ulaşılabilir].

Lockwood, M., *Mind, Brain and the Quantum; the Compound "I"*. Basil Blackwell, Oxford, 1989.

Lounesto, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

Lüders, G., Über die Zustandsänderung durch den Messprozess, *Ann. Physik* **8**, 1951, s. 322–328.

Ludvigsen, M. ve Vickers, J. A. G., A simple proof of the positivity of the Bondi mass, *J. Phys.* **A15**, 1982, L67–70.

Luminet, J.-P. vd., Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background, *Nature* **425**, 2003, 593–595.

Lyttleton, R. A. ve Bondi, H., *Proc. Roy. Soc.* (Londra) **A252**, 1959, s. 313.

MacDuffee, C. C., *The theory of matrices*, Springer-Verlag, Berlin, 1933; yeni basım Chelsea.

MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

McLennan, J. A., Jr., Conformal invariance and conservation laws for relativistic wave equations for zero rest mass, *Nuovo. Cim.*, **3**, 1956, 1360–1379.

MACRO Collaboration, Search for massive rare particles with MACRO, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **110**, 2002, s. 186–188, [hep-ex/0009002].

Magueijo, J., *Faster Than the Speed of Light: The Story of a Scientific Speculation*, Perseus Publishing, New York, 2003.

Magueijo, J. ve Smolin, L., Lorentz invariance with an invariant energy scale, 2002, [gr-qc/0112090].

Mahler, *P-Adic Numbers and Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

Majorana, E., Teoria relativistica di particelle con momento intrinsico arbitrario, *Nuovo Cimento*, **9**, 1932, s. 335–344.

Majorana, E., Teoria asimmetrica dell' elettrone del positrone, Nuovo cimento 14, 1937, s. 171–184.

Maldacena, J., The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity, 1997, [hep-th/9711200].

Manogue, C. A. ve Dray, T., Dimensional Reduction, *Mod. Phys. Lett.* **A14**, 1999, s. 93–97, [hep-th/9807044].

Manogue, C. A. ve Schray, J., Finite Lorentz transformations, automorphisms, and division algebras, *J. Math.Phys.* **34**, 1993, 3746–3767.

Markopoulou, F., Dual formulation of spin network evolution, 1997, [gr-qc/970401].

Markopoulou, F., The internal description of a causal set: What the universe looks like from the inside, *Commun. Math. Phys.* **211**, 1998, 559–583, [grqc/9811053].

Markopoulou, F. ve Smolin, L., Causal evolution of spin networks, *Nucl. Phys.* **B508**, 1997, 409–430, [gr-qc/9702025].

Marsden, J. E. ve Tromba, A. J., *Vector Calculus*, W. H. Freeman & Co., New York, 1996; yeni basım 2004.

Marshall, W., Simon, C., Penrose, R.ve Bouwmeester, D., Towards Quantum Superpositions of a Mirror, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 2003, s. 13.

Mason, L. J. ve Woodhouse, N. M. J., *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

Mattuck, R. D., *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, Dover, New York, 1976.

McLennan, J. A., Jr., Conformal invariance and conservation laws for relativistic wave equations for zero rest mass, *Nuovo. Cim.* **3**, 1956, s. 1360–1379.

Merkulov, S. A. ve Schwachhöfer, L. J., Twistor solution of the holonomy problem, *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998.

Michell, J., On the means of discovering the distance, magnitude, etc., of the fixed stars, in consequence of the diminution of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be further necessary for that purpose, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **74**, 1784, s. 35–57.

Mielnik, B., Generalized QuantumMechanics, *Commun. Math. Phys.* **37**, 1974, s. 221.

Milgrom, M., Dynamics with a non-standard inertia-acceleration relation: an alternative to dark matter, *Annals Phys.* **229**, 1994, [astro-ph/9303012].

Miller, A., Erotica, Aesthetics, and Schröedinger's Wave Equation, *It Must Be Beautiful*, ed. G. Farmelo, Granta, Londra, 2003.

Minassian, E., Spacetime singularities in (2+1)-dimensional quantum gravity, *Class. Quant. Grav.* **19**, 2002, s. 5877–5900.

Misner, C. W., Mixmaster Universe, *Phys. Rev. Lett.* 22, 1969, 1071–1074.

Misner, C. W., Thorne, K. S. ve Wheeler, J. A., Gravitation, Freeman, San Francisco.

Mohapatra, R. N., *Unification and Supersymmetry*, Springer-Verlag, Berlin & Londra, 2002.

Montgomery, D. ve Zippin, L., *Topological Transformation Groups*, Interscience, New York & Londra, 1955.

Moore, A. W., *The Infinite*. Routledge, Londra & New York, 1990.

Moroz, I. M., Penrose, R. ve Tod, K. P., Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger–Newton equations, *Class. Quant. Grav.* **15**, 1998, s. 2733–2742.

Mott, N. F., The wave mechanics of *a*-ray tracks, *Quantum Theory and Measurement*, ed. J. A. Wheeler ve W. H. Zurek, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983; orijinal olarak *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A126**, 1929, s. 79–84.

Moussouris, J. P., Quantum models of space-time based on recoupling theory, Oxford, yayımlanmamış doktora tezi.

Munkres, J. R., *Elementary Differential Topology*, Annals of Mathematics Studies, 54, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1954.

Nair, V., A Current Algebra For Some Gauge Theory Amplitudes, *Phys. Lett.* **B214**, 1988, s. 215.

Nambu, Y., *Proceedings of the International Conference on Symmetries and Quark Models*, Wayne State Uniersity, Gordon and Breach Publishers, 1970, s. 269.

Narayan, R. vd., Evidence for the Black Hole Event Horizon, *Astronomy & Geophysics*, **44(6)**, 2003, 6.22–6.26.

Needham, T. R., *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 1997.

Negrepontis, S., The Anthyphairetic Nature of Plato's Dialectics, *Interdisciplinary Approach to Mathematics and their Teaching, Volume 5*, University-Gutenberg, Athens, 2000, s. 15–77, Yunanca.

Nester, J. M., A new gravitational energy expression, with a simple positivity proof, *Phys. Lett.* **83A**, 1981, s. 241–242.

Newlander, A. ve Nirenberg, L., Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds, *Ann. of Math.* **65**, 1957, s. 391–404.

Newman, E. T. ve Penrose, R., An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients, *J. Math. Phys.* **3**, 1962, s. 896–902; errata **4**, 1963, 998.

Newman, E. T. ve Penrose, R., Note on the Bondi–Metzner–Sachs group, *J. Math. Phys.* 7, 1966, 863–870.

Newman, E. T. ve Unti, T. W. J., Behavior of asymptotically flat empty space, *J. Math. Phys.* 3, 1962, 891–901.

Newman, E. T., Couch, E., Chinnapared, K., Exton, A., Prakash, A. ve Torrence, R., Metric of a rotating charged mass, *J. Math. Phys.* 6, 1965, s. 918–919.

Newton, I., *Opticks*, 1730, Dover, 1952.

Ng, Y. J., Quantum Foam, 2004, [gr-qc/0401015].

Nielsen, H. B., sunum, *Proc. of the XV Int. Conf. on High Energy Physics*, Kiev, 1970, yayımlanmadı.

Nielsen, M. A. ve Chuang, I. L., *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Nomizu, K. *Lie Groups and Differential Geometry*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1956.

Novikov, I. D., *The River of Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

O'Donnell, P., *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*, World Scientific, Singapur, 2003.

O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

Oppenheimer, J. R., On the theory of electrons and protons, *Phys. Rev.* 35, 1930, s. 562–563.

Page, D., Sensible Quantum Mechanics: Are Only Perceptions Probabilistic?, 1995, [quant-ph/9506010].

Page, D. A., Geometrical description of Berry's phase, *Phys. Rev.* A36, 1987, s. 3479–3481.

Page, D. N., Dirac equation around a charged, rotating black hole, *Phys. Rev. D.* 14, 1976, s. 1509–1510.

Pais, A., *"Subtle is the Lord"... "The Science and the Life of Albert Einstein"*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

Pais, A., *Inward Bound: Of Matter and Forces in the Physical World*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

Parker, T. ve Taubes, C. H., On Witten's proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* 84, 1982, s. 223–238.

Pars, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, 1968; Yeni basım, Ox Bow Press, 1981.

Pearle, P., Models for reduction, *Quantum Concepts in Space and Time*, ed. C. J. Isham ve R. Penrose, Oxford University Press, Oxford, 1985, s. 84–108.

Pearle, P. ve Squires, E. J., Gravity, energy conservation and parameter values in collapse models, *Durham University preprint*, DTP/95/13, 1995.

Peitgen, H.-O. ve Reichter, P. H., *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1986.

Peitgen, H.-O. ve Saupe, D., *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

Penrose, R., The apparent shape of relativistically moving sphere, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **55**, 1959, s. 137–139.

Penrose, R., The Light Cone at Infinity, *Proceedings of the 1962 Conference on Relativistic Theories of Gravitation Warsaw*, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1962; basım 1965.

Penrose, R., Asymptotic properties of fields and space-times, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 1963, s. 66–68.

Penrose, R., Conformal approach to infinity, *Relativity, Groups and Topology: The 1963 Les Houches Lectures*, ed. B. S. DeWitt ve C. M. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1964.

Penrose, R., Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour, *Proc. R. Soc. Lond.* **A284**, 1965a, s. 159–203.

Penrose, R., Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.* **14**, 1965b, s. 57–59.

Penrose, R., *An analysis of the structure of space-time*, Adams Prize Essay, Cambridge University, Cambridge, 1966.

Penrose, R., Structure of space-time, *Battelle Rencontres, 1967*, ed. C. M. DeWitt ve J. A. Wheeler, Lectures in Mathematics and Physics, Benjamin, New York, 1968a.

Penrose, R., Twistor quantization and curved space-time, *Int. J. Theor. Phys.*1, 1968b, s. 61–99.

Penrose, R., Gravitational collapse: the role of general relativity, *Revista del Nuovo Cimento; Numero speciale* 1, 1969a, s. 252–276.

Penrose, R., Solutions of the zero rest-mass equations, *J. Math. Phys.*10, s. 38–39.

Penrose, R., Angular momentum: an approach to combinatorial space-time, *Quantum Theory and Beyond*, ed. T. Bastin, Cambridge University Press, Cambridge, 1971a.

Penrose, R., Applications of negative dimensional tensors, *Combinatorial Mathematics and its Applications*, ed. D. J. A. Welsh, Academic Press, Londra, 1971b.

Penrose, R., Twistor theory: its aims and achievements, *Quantum Gravity, an Oxford Symposium*, ed. C. J. Isham, R. Penrose ve D. W. Sciama, Oxford University Press, Oxford, 1975.

Penrose, R., The non-linear graviton, *Gen. Rel. Grav.* **7**, 1976a, s. 171–176.

Penrose, R., Non-linear gravitons and curved twistor theory, *Gen. Rel. Grav.* 7, 1976b, s. 31–52.

Penrose, R., Gravitational collapse: a Review, *Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes, LXV Corso. Soc.*, Italiana di Fisica, Bologna, İtalya, 1978, s. 566–582.

Penrose, R., Singularities and time-asymmetry, *General Relativiy: An Einstein Centenary*, ed. S. W. Hawking ve W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

Penrose, R., On Schwarzschild causality–a problem for "Lorentz-covariant" general relativity, *Essays in General Relativity* (A. Taub Festschrift), ed. F. J. Tipler, Academic Press, New York, 1980, s. 1–12.

Penrose, R., Quasi-local mass and angular momentum in general relativity, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A381, 1982, s. 53–63.

Penrose, R., Gravity and state-vector reduction, *Quantum Concepts in Space and time*, ed. R. Penrose ve C. J. Isham, Oxford University Press, Oxford, 1986, s. 129–146.

Penrose, R., Quantum physics and conscious thought, *Quantum Implications: Essays in Honour of David Bohm*, ed. B. J. Hiley ve F. D. Peat, Routledge and Kegan Paul, Londra & New York, 1987a.

Penrose, R., On the origins of twistor theory, *Gravitation and Geometry: a volume in honour of I. Robinson.*, ed. W. Rindler ve A. Trautman, Bibliopolis, Naples, 1987b.

Penrose, R., Newton, quantum theory, and reality, *300 years of Gravity*, ed. S. W. Hawking ve W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, 1987d, 1987d.

Penrose, R., Topological QFT and Twistors: Holomorphic Linking; Holomorphic Linking: Postscript, *Twistor Newsletter* 27, 1988a, s. 1–4.

Penrose, R., Fundamental asymmetry in physical laws, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 48, American Mathematical Society, 1988b, s. 317–328.

Penrose, R., *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1989.

Penrose, R. (1989), *The Emperor's New Mind* [*Kralın Yeni Usu*, çev. Tekin Dereli, TÜBİTAK Yayınları, 1999].

Penrose, R., H-space and Twistors, *Recent Advances in General Relativity*. Einstein Studies, cilt 4, ed. A. I. Janis ve J. R. Porter, Birkhäuser, Boston, 1992, s. 6–25.

Penrose, R., *Shadows of the Mind: An Approach to the Missing Science of Consciousness*, Oxford University Press, Oxford, 1994 [*Zihnin Gölgeleri*, çev. Barış Gönülşen, Alfa Bilim, basıma hazırlanıyor].

Penrose, R., On gravity's role in quantum state reduction, *Gen. Rel. Grav.* 28, 1996, s. 581–600.

Penrose, R., *The Large, the Small and the Human Mind*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997a; Canto basımı, 2000.

Penrose, R., On understanding understanding, *Internat. Stud. Philos. Sci.* **11**, 1997b, s. 7–20.

Penrose, R., Quantum computation, entanglement and state-reduction, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A356**, 1998a, s. 1927–1939.

Penrose, R., The question of cosmic censorship, *Black Holes and Relativistic Stars*, ed. R. M. Wald, University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1998b; yeni basım *J. Astrophys. Astr.* **20**, 1999, s. 233–248 .

Penrose, R., Wavefunction collapse as a real gravitational effect, *Mathematical Physics 2000*, ed. A. Fokas, T. W. B. Kibble, A. Grigouriou, ve B. Zegarlinski, Imperial College Press, Londra, 2000, s. 266–282.

Penrose, R., Towards a twistor description of general space-times; introductory comments, *Further Advances in Twistor Theory, Vol.III: Curved Twistor Spaces*, ed. L.J. Mason, L.P. Hughston, P.Z. Kobak ve K. Pulverer, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics **424**, Londra, 2001, s. 239–255.

Penrose, R., John Bell, State Reduction, and Quanglement, *Quantum [Un]speakables: From Bell to Quantum Information*, ed. R. A. Bertlmann ve A. Zeilinger, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Penrose, R. ve MacCallum, M.A.H., Twistor theory: an approach to the quantization of fields and space-time, *Phys. Repts.* **6C**, 1972, s. 241–315.

Penrose, R., On the instability of extra space dimensions, *The Future of Theoretical Physics and Cosmology, Celebrating Stephen Hawking's 60th Birthday*, ed. G. W. Gibbons, E. P. S. Shellard, S. J. Rankin, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

Penrose, R. ve Rindler, W., *Spinors and Space-Time,* Vol. I: *Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

Penrose, R. ve Rindler, W., *Spinors and Space-Time,* Vol. II: *Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

Penrose, R., Robinson, I. ve Tafel, J., Andrzej Mariusz Trautman, *Class. Quan. Grav.* **14**, 1997, A1–A8.

Penrose, R., Sparling, G. A. J. ve Tsou, S. T., Extended Regge Trajectories, *J. Phys. A. Math. Gen.* **11**, 1978, L231–L235.

Penzias, A. A. ve Wilson, R. W., A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s, *Astrophys. J.* **142**, 1965, s. 419.

Percival, I. C., Primary state diffusion, *Proc. R. Soc. Lond.* **A447**, 1994, s. 189–209.

Perez, A., Finiteness of a spinfoam model for Euclidean quantum general relativity, *Nucl. Phys.* **B599**, 2001, s. 427–434.

Perez, A., Spin foam models for quantum gravity, *Class. Quant. Grav.* **20**, 2003, R43–R104.

Perlmutter, S. vd., Cosmology from Type Ia Supernovae, *Bull. Am. Astron. Soc.* 29, 1998, [astro-ph/9812473].

Peskin, M. E. ve Schröder, P. V., *Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, Reading, MA & Wokingham, 1995.

Pirani, F. A. E. ve Schild, A., On the Quantization of Einstein's Gravitational Field Equations, *Phys. Rev.* **79**, 1950, s. 986–991.

Polchinski, J., *String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Preskill, J., Do black holes destroy information?, 1992, [hep-th/9209058].

Priestley, H. A., *Introduction to Complex Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

Randall, L. ve Sundrum, R., A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1999a, s. 3370–3373, [hep-ph/9905221].

Randall, L. ve Sundrum, R., An Alternative to Compactification, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1999b, s. 4690–4693, [hep-th/9906064].

Rarita, W. ve Schwinger, J., On the theory of particles with half-integer spin, *Phys. Rev.* **60**, 1941, s. 61.

Reed, M. ve Simon, B., *Methods of Mathematical Physics Vol. 1: Functional Analysis*, Academic Press, New York & Londra, 1972.

Reeves, J. N. vd., The signature of supernova ejecta in the X-ray afterglow of the gamma-ray burst 011211, *Nature* **416**, 2002, s. 512–515.

Reisenberger, M. P., A lattice worldsheet sum for 4-d Euclidean general relativity, 1997, [gr-qc/9711052].

Reisenberger, M. P., On relativistic spin network vertices, *J. Math. Phys.*, **40**, 1999, s. 2046–2054.

Reisenberger, M. P. ve Rovelli, C., Spacetime as a Feynman diagram: the connection formulation, *Class. Quant. Grav.* 18, 2001, s. 121–140.

Reisenberger, M. P. ve Rovelli, C., Spacetime states and covariant quantum theory, *Phys. Rev.* **D65**, 125016, 2002.

Reula, O. ve Tod, K. P., Positivity of the Bondi energy, *J. Math. Phys.* **25**, 1984, s. 1004–1008.

Rindler, W., *Essential Relativity*, Springer-Verlag, New York, 1977.

Rindler, W., *Introduction to Special Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

Rindler, W., *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press, Oxford, 2001.

Rizzi, A., Angular momentum in general relativity: A new definition, *Phys. Rev. Lett.* 81(6), 1998, s. 1150.

Rogers, A., A global theory of supermanifolds, *J. Math. Phys.* **21**, 1980, 1352–1365.

Rolfsen, D., *Knots and Links*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

Roseveare, N. T., *Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

Rovelli, C., Quantum mechanics without time: A model, *Phys. Rev.* **D42**, 1991, s. 2638.

Rovelli, C., *Quantum Gravity*, 2003, http://www.cpt.univ-mrs.fr/~rovelli/book.pdf

Rovelli, C. ve Smolin, L., Loop representation for quantum general relativity, *Nucl. Phys.* B331, 1990, s. 80–152.

Runde, V., The Banach-Tarski paradox–or–What mathematics and religion have in common, *Pi in the Sky* 2 (2000), 2002, s. 13–15, [math.GM/0202309].

Russell, B., *Principles of Mathematic*, 1903; en yeni basım W. W. Norton & Company, 1996.

Ryder, L. H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Saccheri, G., *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, 1733; Halsted, G. B. (çev.), *Euclid Freed from Every Flaw*, Open Court, La Salle, Illinois, 1920.

Sachs, R., Asymptotic symmetries in gravitational theory, *Phys. Rev.* **128**, 1962, s. 2851–2864.

Sachs, R. ve Bergmann, P. G., Structure of Particles in Linearized Gravitational Theory, *Phys. Rev.* 112, 1958, s. 674–680.

Sachs, R. K., Gravitational waves in general relativity, VI: the outgoing radiation condition, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A264**, 1961, s. 309–338.

Sachs, R. K., Gravitational waves in general relativity, VIII: waves in asymptoticaly flat space-time, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A270, 1962a, s. 103–126.

Sachs, R. K., Asymptotic symmetries in gravitational theory, *Phys. Rev.* **128**, 1962b, s. 2851–2864.

Sakellariadou, M., The role of topological defects in cosmology, Invited lectures in NATO ASI / COSLAB (ESF) School "Patterns of Symmetry Breaking", September 2002 (Cracow), 2002, [hep-ph/0212365].

Salam, A., Gauge Unification of Fundamental Forces, *Rev. Mod. Phys.* 52(3), 1980, s. 515–523.

Salam, A. ve Ward, J. C., Weak and electromagnetic interaction, *Nuovo Cimento* 11, 1959, s. 568.

Sato, M., On the generalization of the concept of a function, *Proc. Japan Acad.* **34**, 1958, s. 126–130.

Sato, M., Theory of hyperfunctions I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo,* Sect. I, **8**, 1959, s. 139–193.

Sato, M., Theory of hyperfunctions II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo,* Sect. I, **8**, 1960, s. 387–437.

Schild, A., Discrete space-time and integral Lorentz transformations, *Can. J. Math.* **1**, 1949, s. 29–47.

Schoen, R. ve Yau, S. –T., On the proof of the positive mass conjecture in the general relativity, *Comm. Math. Phys.* **65**, 1979, s. 45–76.

Schoen, R. ve Yau, S. –T., Proof that Bondi mass is positive, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1982, s. 369–371.

Schrödinger, E., *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* **24**, 1930, s. 418.

Schrödinger, E., Probability relations between separated systems, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 31, 1935, s. 555–563.

Schrödinger, E., *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, 1950.

Schrödinger, E., *Expanding Universes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.

Schwarz, J. H., String Theory, *Curr. Sci.* **81(12)**, 2001, s. 1547–1553.

Schwarzschild, K., Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin Math.-Phys. Tech.* Kl., 1916, s. 189–196.

Schwinger, J., *Proc. Nat. Acad. Sci.* 37, 1951, s. 452.

Schwinger, J, (ed.), *Quantum Electrodynamics*, Dover, 1958.

Sciama, D., *The Physical Foundations of General Relativity*, Heinemann, Londra, 1972.

Sciama, D. W., Decaying neutrinos and the geometry of the universe, *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998.

Seiberg, N. ve Witten, E., Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory, *Nucl. Phys.* **B426**, 1994, [hep-th/9407087].

Sen, A., Gravity as a spin system, *Phys. Lett.* **B119**, 1982, s. 89–91.

Shankar, R., *Principles of Quantum Mechanics*, 2. basım, Plenum Press, New York & Londra, 1994.

Shaw, W. T. ve Hughston, L. P., Twistors and strings, *Twistors in Mathematics and Physics, London Math-ematical Society Lecture Notes Series,* 156, ed. T. N. Bailey ve R. J. Baston, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Shawhan, P., The Search for Gravitational Waves with LIGO: Status and Plans. Intl., *J. Mod. Phys.* **A16**, supp. 01C, 2001, s. 1028–1030.

Shih, Y. H. vd., Optical Imaging by Means of Two-Photon Entanglement, *Phys. Rev. A, Rapid Comm.* **52**, R3429, 1995.

Shimony, A., Implications of transience for spacetime structures, *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998.

Shrock, R., *Neutrinos and Implications for Physics Beyond the Standard Model*, World Scientific Pub. Co., Singapur, 2003.

Simon, B., Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1983, s. 2160–2170.

Singh, S., *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, Londra, 1997.

Slipher, V. A., Nebulae, *Proc. Am. Phil. Soc.* **56**, 1917, s. 403.

Smolin, L., The physics of spin networks, *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou ve N. M. J. Woodhouse, Oxford University Press, Oxford, 1998.

Smolin, L., *The Life of the Cosmos*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

Smolin, L., The exceptional Jordan algebra and the matrix string, 2001, (hep-th/ 0104050).

Smolin, L., *Three Roads To Quantum Gravity*, Basic Books, New York, 2002.

Smolin, L., How far are we from the quantum theory of gravity?, 2003, [hep-th/0303185].

Smolin, L., Space and time in the quantum universe, *Conceptual Problems in Quantum Gravity*, ed. A. Ashtekar ve J. Stachel, Birkhauser, Boston, 1991.

Smoot, G. F. vd., Preliminary results from the COBE differential microwave radiometers: large-angular-scale isotropy of the Cosmic Microwave Background, *Astrophys. J.* **371**, L1, 1991.

Sorkin, R. D., Quantum Measure Theory and its Interpretation, *Proceedings of 4th Drexel Symposium on Quantum Nonintegrability*, 8–11 Sep., Philadelphia, PA, 1994, [gr-qc/9507057].

Spergel, D. N., First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Determination of Cosmological Parameters, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 2003, s. 175.

Stachel, J., History of relativity, *History of 20th Century Physics*, ed. L. Brown, A. Pais, ve B. Pippard, 4. Bölüm, American Institute of Physics (AIP) and British Institute of Physics (BIP), 1995.

Stapp, H. P., S-matrix Interpretation of Quantum Mechanics, *Phys. Rev.* **D3**, 1971, s. 1303–1320.

Stapp, H. P., Whiteheadian Approach to Quantum Theory and the Generalized Bell's Theorem, *Found. Phys.* **9**, 1979, s. 1–25.

Steenrod, N. E., *The Tapology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

Steinhardt, P. J. ve Turok, N., A Cyclic Model of the Universe, *Science* **296(5572)**, 2002, s. 1436–1439, [hep-th/0111030].

Strominger, A. ve Vafa, C., Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy, *Phys. Lett.* **B379**, 1996, s. 99–104.

Strominger, A., Yau, S-T. ve Zaslow, E., Mirror symmetry is T-duality, *Nucl. Phys.* **B479**, 1996, s. 1–2, 243–259.

Sudarshan, G. ve Dhar, J., Quantum Field Theory of Interacting Tachyons, *Phys. Rev.* **174**, 1968, s. 1808.

Sudbery, A., Division algebras, (pseudo) orthogonal groups and spinors, *J. Phys.* **A17**, 1987, s. 939–955.

Susskind, L., Structure of Hadrons Implied by Duality, *Nuovo Cimento* **A69**, 1970, s. 457.

Susskind, L., "Twenty Years of debate with Stephen", *The Future of Theoretical Physics and Cosmology*, ed. G. W. Gibbons, P. Shellard ve S. Rankin, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

Susskind, L., Thorlacius, L. ve Uglum, J., The stretched horizon and black hole complementarity, *Phys. Rev.* **48**, s. 3743, [hep-th/9306069].

Sutherland, W. A., *Introduction to Topology*, Oxfrord University Press, Oxford, 1975.

Swain, J., The Majorana representations of spins and the relation between *SU(∞) and S Diff* (S^2), 2004, hep-th/0405004.

Synge, J. L., *Relativity: The Special Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1956.

Szekeres, G., On the Singularities of a Riemannian Manifold, *Publ. Mat. Debrecen,* **7**, 1960, s. 285–301.

't Hooft, G., On the phase transition towards permanent quark confinement, *Nucl. Phys.* **B138**, 1978, s. 1.

Tait, P. G., On the claim recently made for Gauss to the invention (not the discovery) of quaternions, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* **23**, 1900, s. 17–23.

Terrell, J., Invisibility of the Lorentz contraction, *Phys. Rev.* **116**, 1959, s. 1041–1045.

Thiele, R., *Leonhard Euler*, Leipzig, 1982, Almanca.

Thiemann, T., Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional Lorentzian quantum gravity, *Phys. Lett.* **B380**, 1996, s. 257–264.

Thiemann, T., Quantum spin dynamics (QSD), *Class. Quant. Grav.* **15**, 1998a, s. 839–873.

Thiemann, T., QSD III: Quantum constraint algebra and physical scalar product in quantum general relativity, *Class. Quant. Grav.* **15**, 1998b, s.

1207–1247.

Thiemann, T., QSD V: Quantum gravity as the natural regulator of matter quantum field theories, *Class Quant. Grav.* **15**, 1998c, 1281–1314.

Thiemann, T., QSD VII: Symplectic Structures and Continuum Lattice Formulations of Gauge Field Theories, *Class. Quant. Grav.* 18, 2001, s. 3293–3338.

Thomas, I., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics,* Vol. I: *From Thales to Euclid*, The Loeb Classical Library, Heinemann, Londra, 1939.

Thirring, W. E., *A Course in Mathematical Physics: Quantum Mechanics of Large Systems*, Springer-Verlag, Berlin & Londra, 1983.

Thorne, K., *Black Holes: The Membrane Paradigm*, Yale University Press, New Haven, 1986.

Thorne, K., *Black Holes and Time Warps*, W. W. Norton & Company, 1995a.

Thorne, K., Gravitational Waves, 1995b, [gr-qc/9506086].

Tipler, F. J., *The Physics of Immortality*, Anchor, 1997.

Tipler, F. J., Clarke, C. J. S. ve Ellis, G. F. R., Singularities and horizons–a review article, *General Relativity and Gravitation,* cilt II, ed. A. Held, Plenum Press, New York, 1980, s. 97–206.

Tittel, W., Brendel, J., Zbinden, H. ve Gisin, N., Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1998, s. 3563.

Tod, K. P. ve Anguige, K., Isotropic cosmological singularities 1: Polytropic perfect fluid spacetimes, *Annals Phys.* **276**, 1999a, s. 257–293, [gr-qc/9903008]

Tod, K. P. ve Anguige, K., Isotropic cosmological singularities 2: The Einstein-Vlasov system, *Annals Phys.* **276**, 1999b, s. 294–320, [gr-qc/9903009]

Tonomura, A., Matsuda, T., Suzuki, R., Fukuhara, A., Osakabe, N., Umezaki, H., Endo, J., Shinagawa, K., Sugita, Y. ve Fujiwara, F., Observation of Aharonov–Bohm effect with magnetic field completely shielded from the electronic wave, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1982, s. 1443.

Tonomura, A., Osakabe, N., Matsuda, T., Kawasaki, T., Endo, J., Yano, S. ve Yamada, Evidence for Aharonov–Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1986, s. 792–795.

Trautman, A., Radiation and boundary conditions in the theory of gravitation, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. -Math., Astr. Phys.* **6**, 1958, 407–412.

Trautman, A., Fibre bundles associated with space-time, *Rep. Math. Phys.* (Torún) 1, 1970, s. 29–34.

Trautman, A., Clifford and the "Square Root" Ideas, *Contemporary Mathe-*

matics **203**, 1997.

Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. Lond. Math. Soc.* **42(2)**, 1937, s. 230–265; bir düzeltme, **43**, 1937, s. 544–546.

Unruh, W. G., Notes on black hole evaporation, *Phys. Rev.* **D14**, 1976, s. 870.

Vafa, C., Evidence for F-theory, *Nucl. Phys.* **B469**, 1996, s. 403.

Valentini, A., Signal-Locality and Subquantum Information in Deterministic Hidden-Variables Theories, *Non-Locality and Modality*, ed. T. Placek and J. Butterfield, Kluwer, 2002, [quant-ph/0112151].

van der Waerden, B. L., Spinoranalyse, *Nachr. Akad. Wiss. Götting. Math. Physik*, **Kl.**, 1929, s. 100–109.

van der Waerden, B. L., *A History of Algebra: From al-Khwrizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, 1985, s. 166–174.

van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1967.

van Kerkwijk, M. H., Neutron Star Mass Determinations, 2000, [astro-ph/0001077].

Varadarajan, M., Fock representations from U(1) holonomy algebras, *Phys. Rev.* **D61**, 104001, 2000.

Varadarajan, M., M. Photons from quantized electric flux representations, *Phys. Rev.* **D64**, 104003, 2001.

Veneziano, G., *Nuovo Cimento*, **57A**, 1968, s. 190.

Vilenkin, A., *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

von Neumann, J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1955.

Wald, R. M., *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

Wald, R. M., *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, Chicago, 1994.

Ward, R.S. ve Wells, R.O., Jr., *Twistor Geometry and Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Weinberg, S., A model of leptons, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1967, 1264–1266.

Weinberg, S., Precision Tests of Quantum Mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1989, s. 485–488.

Weinberg, S., *Dreams of a Final Theory: The Scientists Search for the Ultimate Laws of Nature*, Pantheon Books, New York, 1992.

Werbos, P., Bell's theorem: the forgotten loophole and how to exploit, *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, ed. M. Kafatos, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1989.

Wells, R. O., *Differential analysis on complex manifolds*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

Werbos, P. J. ve Dolmatova, L., The Backwards-Time Interpretation of Quantum Mechanics: Revisited With Experiment, 2000, [http://arxiv.org/ftp/quant-ph/papers/0008/0008036.pdf].

Wess, J. ve Bagger, J., *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, Princeton, 1992.

Weyl, H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig, 1928; 2. basım İnglizce çeviri, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York.

Weyl, H., *Z.Phys.* **56**, 1929a, s. 330.

Weyl, H., Elektron und Gravitation I, *Z. Phys.* **56**, 1929b, s. 330–352.

Wheeler, J. A., *Neutrinos, Gravitation and Geometry: contribution to Rendi-conti della Scuola Internazionale di Fisica' Enrico Fermi-XI, Corso, July 1959*, Zanichelli, Bologna, 1960; yeni basım, 1982.

Wheeler, J. A., Geometrodynamics and the issue of the final state, *Relativity, Groups and Topology*, ed. B. S. ve C. M. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1965.

Wheeler, J. A., Assessment of Everett's "Relative State" Formulation of Quantum Theory, *Rev. Mod. Phys.* 29, 1975, s. 463–465.

Wick, G. C., Spectrum of the Bethe-Salpeter equation, *Phys Rev.* **101**, 1956, s. 1830.

Wigner, E. P., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics, *Commun. Pure Appl. Math.* **13**, 1960, s. 1–14.

Wilder, R. L., *Introduction to the foundations of mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1965.

Wiles, A., Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Ann. Maths* **142**, 1995, s. 443–551.

Williams, R.K., Extracting X-rays, γ-rays, and Relativistic Pairs from Supermassive Kerr Black Holes Using the Penrose Mechanism, *Phys. Rev.* **D51**, 1995, s. 5387.

Williams, R.K., Production of the High Energy–Momentum Spectra of Quasars 3C279 and 3C273 Using the Penrose Mechanism, 2002, [astro-ph/0306135]; Astrophysical Journal'de 2004'te yayımlanmak üzere kabul edildi.

Williams, R.K., Collimated Escaping Vortical Polar e^-e^+ Jets Intrinsically Produced by Rotating Black Holes and Penrose Processes, 2004, [astro-ph/ 0404135].

Willmore, T. J., *An Introduction to Differential Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

Wilson, K., *Phys. Reps.* **23**, 1975, s. 331.

Wilson, K., Quarks on a lattice, or the colored string, model, *Phys. Rep.*

23(3), 1976, s. 331–347.

Winicour, J., Angular momentum in general relativity, *General Relativity and Gravitation*, cilt 2, ed. A. Held, Plenum Press, New York, 1980, s. 71–96.

Witten, E., A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* 80, 1981, s. 381–402.

Witten, E., Supersymmetry and Morse theory, *J. Diff. Geom.* **17**, 1982, s. 661–692.

Witten, E., Topological quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* 118, 1988, s. 411.

Witten, E., String theory in various dimensions, *Nucl. Phys.* **B443**, 1995, s. 85.

Witten, E., Reflections on the Fate of Spacetime, 1996, *Phys. Today,* Nisan 1996.

Witten, E., Anti de Sitter Space and Holography, 1998, [hep-th/9802150].

Witten, E., Perturbative Gauge Theory as a String Theory in Twistor Space, 2003, [hep-th/0312171].

Witten, L., Invariants of general relativity and the classification of spaces, *Phys. Rev.* 113, 1959, 357–362.

Woodhouse, N. M. J., *Geometric Quantization,* 2. basım, Clarendon Press, Oxford, 1991.

Woodin, W. H., *The Continuum Hypothesis*, Parts I & II. Notices of the AMS, 2001, http://www.ams.org/notices/200106/fea-woodin.pdf.

Wooters, W. K. ve Zurek, W. H., A single quantum cannot be cloned, *Nature* **299**, 1982, s. 802–803.

Wykes, A., *Doctor Cardano: Physician Extraordinary*, Frederick Muller, Londra, 1969.

Yang, C. N. ve Mills, R. L., Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, *Phys. Rev.* **96**, 1954, s. 191–195.

Yui, N. ve Lewis, J. D., *Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry*, Fields Institute Communications, V. 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

Zee, A., *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

Zeilinger, A., Gaehler, R., Shull, C. G. ve Mampe, W., Single and double slit diffraction of neutrons, *Rev. Mod. Phys.* 60, 1988, s. 1067.

Zel'dovich Ya, B., Number of quanta as an invariant of the classical electromagnetic field, *Soviet Phys.-Doklady* 10, 1966, s. 771–772.

Zimba, J. ve Penrose, R., On Bell non-locality without probabilities: more curious geometry, *Stud. Hist. Phil. Sci.* **24**, 1993, s. 697–720.

Zinn-Justin, J., *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

DİZİN

Abel, Niels Henrik, 277
Abelci gruplar, 277
Abelci olmayan ayar kuramı, 685
açık bölgeler, 250
açısal frekans, 184, 192
açısal momentum, 298
  burgaçlar, 1018
  görelilikle ilgili kuantum, 461, 465
  Newton formülasyonu, 458, 460
Adams, W. S., 494
ADS/CFT Maldacena varsayımı, 972, 975
afin parametreleri, 333, 347
afin uzaylar, 320, 381, 441
ağaç grafikleri, 712
Aharonov–Bohm etkisi, 480
ahlak, 39, 50
Ahmavaara, Y., 90, 383, 1008, 1107
aksiyomlar, 37, 54
  seçme aksiyomu, 41, 42, 43, 393, 394, 399
aldatıcı sorun, 1055
Alexander polinomu, 995
alfa (α) bozunumu, 666
alt gruplar, 279, 280, 281
Analitik fonksiyonlar, 140, 196, 197
analitik sürdürme, 158, 159, 160, 161, 813, 960
Anderson, Carl, 659, 1089, 1108
antipodal noktalar, 365, 760
antropik ilke, 770, 798, 799, 800, 801, 803, 820, 1086
Argand, Jean Robert, 106
Aristotelesçi fizik, 410
Ashtekar değişkenleri, 983
  aynal girdiler, 985
  biçim, 988
Ashtekar, Abhay, 22, 925, 940, 971, 982, 984, 1005
Ashtekar–Rovelli–Smolin–Jacobson döngü değişkenleri
  kuantum kütleçekim, 390, 1004
Asimptot, 72
asimptotik serbestlik, 716
ayar bağlantıları, 319
ayar değişmezliği, 477, 517, 518
ayar dönüşümü, 477, 480, 548
aykırılıklar, 392
ayrık sayılar, 93

Baez, John, 22, 495, 919
bağlantı, 45, 49, 194, 285, 291, 326, 329, 335, 340, 343, 344, 350, 352, 374, 423, 476, 587, 597, 600, 620, 635, 640, 683, 699, 705, 783, 828, 864, 895, 933, 963, 990, 1009, 1013, 1027, 1036, 1093, 1097
Banach–Tarski teoremi, 394
Barbero–Immirzi parametresi, 990, 1003
baryonlar, 680, 681, 768, 771

evrendeki sayı, 755, 756, 758, 770
basit gruplar, 279, 282, 283, 302, 319, 1096
basit harmonik hareket, 506, 509
Becquerel, Henri, 661
Bekenstein, Jacob, 867
Bekenstein–Hawking denklemi, 754, 755, 768, 866, 970
belirli integraller, 156
Bell eşitsizlikleri, 613, 614, 846
Bell, John S., 614
Beltrami, Eugenio, 65, 66, 71, 72, 73, 167, 452, 1091, 1110
benzer üçgen yasası, 111, 115, 121
Berry, Michael, 22
Beta β–bozunumu, 667, 669
beyaz delikler, 874, 876
zamanda tersinmiş kara delikler, 886
Bianchi özdeşliği, 331
Bianchi simetrisi, 331, 348
bileşenler, 25, 242, 254, 262, 266, 268, 269, 286, 288, 290, 293, 294, 305, 306, 313, 316, 460, 469, 472, 519, 596, 690, 702, 724, 827, 898, 1019
bilgi toplama ve kullanma sistemi, 854
1–biçimliler, 214, 221, 261
n–manifoldlar, 252
yoğunluk, 259, 260
bir matrisin determinantı, 289, 681
birikme noktası, 263
birleşik büyük kuramlar, 920
Bloch küresi, 836, 838, 839, 843
Bohm, David, 614, 1088, 1135
Bohm–tipi EPR, 615
düşünce deneyleri, 616, 619
Bohr, Niels, 545, 561, 823, 848
Boltzmann entropisi, 728
Boltzmann istatistiği, 729
Boltzmann sabiti, 530, 728, 733, 754, 915
Boltzmann, Ludwig, 467, 727, 1091
Bolyai, János, 71, 1091
Bombelli, Raphael, 96, 98, 101, 116
Bondi, Hermann, 94, 419, 447, 496, 759, 790, 1078, 1111, 1130, 1133, 1137, 1139
Born, Max, 567
Bose–Einstein yoğunlaşma bozonları, 628
elektrozayıf simetri grubu, 676
kuantum durumları, 628
boş küme, 91, 92, 396
Bouwmeester, Dik, 901, 904, 1066, 1131
boyutlar, 249
karmaşık ve gerçel, 207
bozulma basıncı, 746
bozulmalar, 293, 600
Brahmagupta, 91, 116
Brooks, R., 44
burgaç kuramı
burgaç deste kohomolojisi, 1040
burgaç diyagramları, 1056
burgaç fonksiyonları, 1037, 1039, 1042, 1043, 1055
burgaç uzayı, 1024, 1027, 1049
doğrusal olmayan gravitonlar, 1054
gelecek beklentileri, 1057
genel görelilik, 1054

ışık ışınları, 1013
karmaşık uzayzaman, 1032
konformal grup, 1019
kuantum kuramı, 1034
kütlesiz alanlar, 1037
parçacık fiziği, 1056
pozitif/negatif frekans, 1046
sarmallık, 1031
spin yapan kütlesiz parçacıklar olarak, 1029
temel burgaç geometrisi ve koordinatlar, 1026
tıkızlaştırılmış Minkowski uzayı, 1019
yüksek boyutlu spinörler olarak, 1023
Büyük Çekici, 413, 757
Büyük Çöküş, 758, 768, 771, 797, 801, 802, 820, 859
Büyük Patlama, 20, 678, 721, 722, 741, 751, 755, 756, 758, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 771, 773, 777, 781, 782, 783, 786, 787, 790, 794, 797, 801, 803, 805, 806, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 820, 859, 860, 861, 883, 1104
antropik ilke, 801, 802, 803
başlangıç noktası, 758
mikrodalga ardalan ışınımı, 766
özgüllük, 741, 766

C^∞–pürüzsüz fonksiyonlar, 135, 140
Calabi, Eugenio, 961
Calabi–Yau uzayları, 355, 960, 961, 962, 964, 982, 1046
Candelas, Philip, 965
Cantor, Georg, 85
Cardano, Gerolamo, 96
Carnot, Sadi, 726
Cartan, Élie, 259
Newton uzayzamanı, 421
Carter, Brandon, 798, 875
Casimir işlemcileri, 600
Cauchy, Augustin, 104, 150
Cauchy–Riemann denklemleri, 149, 151, 154, 166, 221, 222, 223, 224, 273
Cayley, Arthur, 230, 288
cebir, geometrik gösterimi, 106
CERN (Cenevre, İsviçre), 679, 1074
Chan, Hong-Mo, 22
Chandrasekhar, Subrahmanyan, 747, 753
Chen Ning Yang, 240, 667
Chew, Geoffrey, 1072, 1092
Christoffel, Elwin, 347
Clausius, 467, 727
Clifford cebiri, 231, 237, 238, 239, 240, 241, 652, 654, 655, 666, 695, 1091
Clifford demeti, 361, 364, 365, 366, 373, 381, 595
Clifford paralelleri, 324, 361, 363, 439, 777, 1033, 1072
Clifford, William Kingdon, 231, 652, 1113
Cohen, Paul, 42, 399
Compton saçılımı, 673
Connes, Alain, 251, 1011
Cooper çiftleri, 628
CPT teoremi, 651, 672, 673, 859, 1058
Curie noktası, 774

çakışmalar, 1041
çarpan uzay, 282, 355, 978, 1050
çarpan–düzenleme problemi, 525

çarpım grubu, 283, 681
çarpım uzayı, 355, 356, 360, 361, 376, 413
çarpımsal kuantum sayısı, 127
çelişki yoluyla kanıtlama, 69, 77, 396, 1010
çembersel kutuplanma, 578, 588, 986
çevresel evre uyumsuzluk, 825, 827, 837, 844, 845, 853, 909
çıplak yükler, 714, 922
çift yarık deneyi, 539
fullerenler, 1066
çifte–doğrusal dönüşüm, 175
Çifte–doğrusallık, 311

D'Alembert işlemcisi. bkz. dalga işlemcisi
dağılımlar, 147, 408
dalga fonksiyonu, 526, 608
burgaç fonksiyonu, 1037
elektronlar, 536
faz, 538
holistik doğası, 540
normalleştirilmiş, 547
olasılık dağılımı, 546
dalga işlemcisi, 652
dalga işlemcisi (D'Alembert işlemcisi), 650
dalga işlemcisi (D'Alembert işlemcisi)
Clifford-Dirac karekökü, 651
dalgaların yayılımı, 180
dallanma noktaları, 165, 173
Davisson, C. J., 528
de Broglie frekansı, 664
de Broglie, Prens Lois, 529
de Sitter uzayı, 787, 788
karşı–de Sitter uzayı, 788
Dedekind, Richard, 85
değişmeli olmayan geometri, 251, 715, 984, 1011, 1012, 1013, 1035, 1082
del Ferro, Scipione, 101
demetler. *bkz. Lif demetleri*
Desargues, 369, 386
deste kohomolojisi, 206, 1014, 1040, 1041, 1042, 1045, 1048
dışsal kalkülüs, 259
temel teoremi, 151
dışsal kalkülüsün temel teoremi, 263, 468
Dicke, Robert, 576, 742, 798
dik açılar, 53, 54, 55, 113, 459
dinamik, 88, 409, 410, 411, 412, 419, 466, 498, 503, 511, 534, 535, 549, 554, 565, 566, 567, 587, 722, 723, 724, 725, 726, 733, 737, 738, 739, 753, 769, 773, 856, 888, 889, 897, 901, 943, 944, 945, 953, 976, 978, 1002, 1003, 1079
Diophantos, 40
Dirac delta fonksiyonu, 204, 205, 549
Dirac denizi, 658
kuantum alan kuramı (QFT), 699
Dirac denklemi, 653
pozitronlar, 657
Dirac işlemcisi, 653
Dirac notasyonu, 561
Dirac, Paul, 94, 563, 649, 691
pozitronlarm tahmini, 656
Dirichlet serisi, 161, 977
doğal (sayma) sayılar, 82, 90, 91, 92, 93, 389, 394, 403
doğal logaritmalar, 117
doğrusal dönüşümler, 25, 283, 287, 288, 295, 308, 563, 581
kanonik biçimler, 294

ortogonal, 284
Doppler etkisi, 741, 818
dönermıknatıslık oranı, 875, 876
döngü değişkenleri, 390, 983, 992, 994, 997, 1004, 1019
döngü grubu, 125, 127, 284, 295, 298, 681
dönme elipsoidi, 424
dönüşüm çarpanı, 27, 126, 127, 233, 672
dördey uzayda döndürmeler, 232
döndürmenin dönüşüm çarpanı, 233
oluşturma, 235
spinörler ve spinör nesneler, 233
dördeyler, 226, 227, 228, 230
bölme halkası, 228
eşlenikler, 228
fiziki rol, 228
geometrisi, 232
ikinci dereceli biçim, 229
ters, 228
Duggins, Andrew, 22, 1089
durağan eylem ilkesi (Hamilton ilkesi), 501
durum indirgemesi (R işlemi), 557, 832, 953
U'nun doğrusallığının anlamları, 558
zaman asimetrisi, 861
durum vektörleri, 556, 563, 840
düğümler ve bağlar, 994
dünya çizgisi, 415, 416, 425, 435, 437, 440, 441, 446, 447, 448, 455, 463, 465, 487, 601, 750, 764, 872, 877, 878, 997
dünya, kaçma hızı, 745
düzenli düzlem geometrisi, 75
düzlem elemanları, 254, 256, 258
düzlem kutuplanması, 578, 588
D–zarlar, 913, 970, 976, 977, 978

e (doğal logaritmaların tabanı), 118
Eddington, Sir Arthur, 734, 914
eğrilik, 25, 75, 132, 136, 330, 332, 336, 338, 340, 347, 348, 350, 379, 380, 415, 416, 438, 441, 479, 488, 489, 491, 751, 758, 769, 783, 809, 810, 813, 818, 819, 887, 888, 924, 942, 993, 996, 1038, 1053, 1065, 1077
eğrilik tensörü, 25, 330, 336, 347, 348, 350, 380, 438, 489, 491
Eilenberg, Samuel, 1011, 1117
Einstein, Albert, 19, 21, 37, 74, 76, 85, 88, 89, 90, 163, 165, 209, 267, 268, 285, 321, 324, 331, 332, 337, 352, 353, 409, 416, 417, 418, 421, 424, 426, 427, 428, 433, 437, 438, 444, 449, 461, 464, 466, 467, 468, 477, 479, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 493, 494, 495, 517, 519, 520, 521, 527, 529, 531, 554, 613, 628, 631, 641, 643, 647, 649, 660, 690, 691, 716, 729, 741, 748, 751, 756, 758, 759, 762, 790, 793, 809, 815, 816, 819, 822, 858, 859, 860, 870, 891, 893, 894, 898, 906, 907, 917, 922, 926, 928, 929, 936, 937, 940, 942, 943, 944, 945, 958, 969, 975, 983, 984, 988, 991, 1002, 1003, 1004, 1005, 1008, 1025, 1038, 1053, 1054, 1055, 1061, 1063, 1064, 1065, 1068, 1078, 1080, 1081, 1091, 1096, 1097, 1099, 1104, 1107, 1108, 1112, 1117, 1123, 1124, 1126, 1129, 1133, 1135, 1137, 1138, 1142

Einstein'ın genel görelilik kuramı
burgaç kuramı, 1054
enerji–momentum tensörü, 481
kuantum fiziğiyle çatışma, 895
Einstein'ın genel görelilik kuramı, 321, 426, 436
Einstein'ın kütle–enerji denklemi, 461
parçacık/karşı–parçacık çiftleri, 643
Einstein–Cartan–Sciama–Kibble spin/torsiyon kuramları, 330
Einstein–Podolski–Rosen (EPR) etkileri
Bohm-tipi, 614, 618
yoğunluk matrisleri, 840
elektrik yükü, 93, 419, 476
korunumu, 473
elektromanyetik potansiyel, 476, 478, 480, 491, 518, 655, 685
elektronlar, 680
Cooper çiftleri, 628
dalga fonksiyonu, 540
Dirac denklemi, 653
dönermıknatıslık oranı, 875
vakum kutuplanması tarafından korunan çıplak yük, 713
zikzak tablo, 662
elektrozayıf etkileşim, 686, 1057
eliptik geometri, 74
Elitzur, Avshalom, 575
Ellingstrud, Geir, 964
enerji
eş dağılımı, 732
görelilikle ilgili formülasyon, 461
görelilikle ilgili formülasyon üzerine problemler, 647
kuantum mekaniğinde pozitivite, 645
Newton formülasyonu, 458
entropi, 726
kara delikler, 752
kavramın sağlamlığı, 729
yalıtık sistemler, 736
zamanda asimetri, 736
ergoküre, 880, 881
Escher, M. C., 23, 60, 167, 760
eşdeğerlik sınıfı, 17, 18, 19, 202, 384, 392, 478, 762, 837, 1020, 1041
eşdeğerlik ilkesi, 418
eşit açılı spiral, 122
etkileşimler
parçacıkların yeğin etkileşimleri, 686
Eudoksos, 84, 85, 116
Euler türdeşlik işlemcisi, 1036
Euler, Leonhard, 104, 131, 150, 1036, 1141
Eulerci fonksiyon kavramı, 138
Euler–Lagrange denklemleri, 501, 514
fonksiyonel türev, 514
Hamilton ilkesi (durağan eylem ilkesi), 501
Everett, III. Hugh, 824
evren. *ayrıca bkz. Büyük Patlama*
izotropik, 756
kapalı, 760
konformal diyagramlar, 762
uzamsal olarak sonsuz, 770
yaratımı, 769
evren, erken gelişim
antropik ilke, 798, 801
Büyük Patlamaya uygulanan

antropik ilke, 803
dalgalanmaların kökeni, 907
Hartle-Hawking sınır yok önermesi, 815
kozmik topolojik bozukluklar, 778
kozmolojik parametreler, 815
simetri kırılımı, 773
simetri kırılımına ilişkin sorunlar, 781
şişkinliğe neden olan kozmoloji, 786
şişkinliğe neden olan kozmoloji, geçerlilik, 792
Weyl eğirilik hipotezi, 806
eylemsizlik hareketi, 415, 437

faktöriyeller (çarpınımlar), 118
Fano düzlemi, 388, 389
Faraday, Michael, 427, 467
faz geçişi, 776, 791
faz uzayları, 248, 321, 349, 352, 407, 503
Fermat, Pierre de, 40
Fermi, Enrico, 667, 1144
fermiyonlar, 126, 626, 672, 681, 682, 694, 695, 918, 998
kuantum durumları, 628
ferromanyetizma, 774, 822
Feyman–grafik diyagramları
Lagrange denklemi, 717
oluşumu, 708
sicim kuramı, 930
Feynman yol integralleri (geçmiş toplamları), 703, 1060
Feynman, Richard, 653, 667, 673, 702
Feynman–grafik diyagramları, 664
Finkelstein, David, 1009
fiziki uzay
ayrık sayılar, 93
doğal sayılar, 90
gerçel sayıların varlığı, 86
hiperbolik uzayla ilişki, 74
Öklit geometrisiyle ilişki, 73
uzaklıklar, 84
Fock uzayı, 701
Fock, V. A., 701
fonksiyonlar, 129
C^∞–pürüzsüz, 135
C^ω–pürüzsüz, 140
eğimleri, 132
Eulerci kavram, 138
geçiş fonksiyonları, 214
hiperfonksiyonlar, 200
periyodik, 181
Fonksiyonların eğimleri, 133
bükülme noktaları, 134
Fontana, Niccoló, 101
foto elektrik etki, 529
fotonlar, 429, 435, 455, 472, 531, 626, 630, 636, 659, 660, 665, 674, 743, 784, 854, 861, 1030, 1066
çift-yarık deneyi, 531
eletrozayıf simetri grubu, 675
foto elektrik etki, 529
huzme ayırıcı örneği, 541
kutuplanma, 590
parametrik aşağı dönüşüm, 636
sarmallık durumları, 578
spin, 577
Fourier analizi (ayrışma), 181, 510
karmaşık düzlem, 185
Fourier dönüşümü, 181, 191, 192, 551, 571
frekans bölme, 194
uygun fonksiyonlar, 197

Fourier serisi, 180
kare–dalga fonksiyonu, 197
Fourier, Joseph, 181, 197
Fowler, William, 800
Frege, Gottlob, 392
Friedmann, Alexander, 741
Friedmann–Lamaître–Robertson–Walker(FLRW) modelleri, 756, 758, 767, 768, 770, 771, 783, 787, 789, 790, 797, 808, 809, 810, 907, 908, 909, 911, 912, 1060

Galileici görelilik, 411, 414, 459
Newtoncı dinamik, 414
Galileo Galilei, 391, 411, 1116
eğik Pizza Kulesi deneyi, 418
Gauss dağılımı, 731
Gauss eğriliği, 336
bir düzlemin, 70
Gauss yasası, 474
Gauss, Carl Friedrich, 71, 106, 226
geçiş fonksiyonları, 214, 250, 273, 1040
gelgit kuvvetleri, 751, 752
Gell–Mann, Murray, 681
genel kovaryans ilkesi, 486, 894, 909, 941, 1002
genlikler, 570, 587, 711, 851, 861, 862, 863, 1013
geometrik kuantizasyon, 525
gerçek sayı, 77, 951
gerçeklik
20. Yüzyıl fiziğinin büyük kuramları, 1063
derin sorular yanıtlanır, daha derinleri açığa çıkar, 1101
gerçeğe giden matematiksel yol, 1090
gerçeklik nedir?, 1083
güzellik ve mucizeler için arayış, 1095
matematiksel olarak türetilmiş temel fizik, 1068
modanın fiziki kuramdaki rolü, 1071
Platon'un matematiksel biçimler dünyası, 1085
sonraki fiziki devrim, 1080
yanlış bir kuram deneysel olarak çürütülmesi, 1075
zihniyetin fiziki kuramdaki rolü, 1086
gerçel sayılar, 26, 80, 82, 84, 86, 90, 92, 97, 101, 106, 107, 117, 131, 165, 201, 207, 226, 227, 231, 241, 250, 289, 303, 389, 395, 398, 568, 753, 828, 833, 839, 923, 1092
fiziksel dünyadaki varlık, 86
gereksinim, 79
Germer, L. H., 528
Geroch, Robert, 1073
Gibbons–Perry kara delik sıcaklığı, 870
gluonlar, 94, 626, 661, 685, 921
Gold, Thomas, 790
Goldbach varsayımı, 405
Goudsmit, Samuel, 656
Gödel, Kurt, 399, 401, 405
gösterim kuramı, 320, 1058, 1091
tensör gösterim uzayları, 299
gözlemlenebilirler, 550, 568, 569
projektörler, 572
Grassmann cebiri, 231, 240, 241, 243, 244, 693, 919, 922
Grassmann çarpımları, 256
Grassmann, Hermann, 231
Graves, John, 230
gravitonlar, 987, 1105
çizgisel olmayan, 1048

sarmallık, 985
Green, Michael, 934, 938
grup çarpımı, 294
grup çeviriciler, 296
Gurzadyan, Vahe, 22, 818, 1079
Guth, Alan, 786, 793
güçlü antropik ilke, 799, 800, 801, 802
güneş, 743
dünyaya enerji sunumu, 744

hacimler, 84, 129, 740
hadronlar, 127, 626, 674, 680, 930
yeğin etkileşimler, 680
Hall, Aspeth, 858
Hameroff, Stuart, 1089
Hamilton akışı, 559
Hamilton fonksiyonlar, kuantum mekaniksel, 523
Hamilton formalizmi, 501
küçük salınımlar, 506
simplektik geometri, 511
Hamilton ilkesi (durağan eylem ilkesi), 501, 515, 705, 1069
Hamilton, William Rowan, 226, 652
Hardy, G. H., 69
Hardy, Lucien, 22, 615, 621, 842, 852
harmonikler, 182, 185, 593, 594, 596, 597, 598, 600
Harriot, Thomas, 325
Hartle, James, 806, 811
Hartle–Hawking sınır yok önermesi, 814
Hawking ışınımı, 870, 879, 880, 888, 970
Hawking patlamaları, 882
Hawking, Stephen, 806, 811, 826, 847, 867, 885, 886, 955, 1136
Heaviside basamak fonksiyonu, 131, 204
Heaviside, Oliver, 131, 147, 520
Heisenberg belirsizlik ilkesi, 537, 552, 1017
Heisenberg tablosu, 558, 565, 567, 568
Heisenberg, Werner, 605, 691, 713, 857
Hermite, Charles, 310
Hermitsel eşleme, 313, 720
Hermitsel işlemci, 313, 565, 828, 1092
Hermitsel matris, 313, 318, 676, 828, 839
Hermitsel skaler çarpımı, 562, 696
Hertz, Heinrich, 428, 472, 529
hesaplanabilirlik, 402, 406, 1090
Higgs alanı, 661, 678
Higgs parçacığı, 662, 678, 914
Hilbert uzayı, 27, 407, 561, 563, 564, 565, 566, 569, 571, 573, 581, 584, 586, 587, 588, 612, 613, 616, 623, 646, 694, 696, 699, 827, 828, 834, 837, 838, 844, 890, 1013, 1035
Hilbert, David, 517
hiper fonksiyonlar, 549, 550, 1014
keserek çıkarma teoremi, 202
hiperbolik (Lobaşevskiyen) geometri
fiziki uzayla ilişki, 73
izdüşümsel gösterim, 64
kareler, eşdeğerleri, 68
konformal tanım, 59
Minkowski uzayı, 449
sözde küreler, 72
sözde yarıçap, 62
tarihsel görünüm, 69

uzaklık, 62
varlığı, 67
yarı küresel gösterim, 65
hiperbolik geometrinin konformal gösterimi, 66
hiperbolik geometrinin yarı küresel gösterimi, 59
hiperfonksiyonlar, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 224, 225, 408
Hodge ikilileri, 469
Hodges, Andrew, 22, 1056
holografik ilke, 972, 974
holomorfik ara kesitler, 1051
holomorfik fonksiyonlar, 150, 159, 163, 179, 180, 198, 200, 202, 203, 206, 207, 208, 226, 273, 696, 1045
holomorfik deste kohomolojisi, 1042
HOMFLY polinomu, 995
homolog deformasyon, 151
homotopik deformasyon, 151
Hopf liflemesi, 361
Hopf, Heinz, 361
Hoyle, Fred, 790, 798, 799
Hubble, Edwin, 490, 741
Hughston, Lane, 22, 1056
Hulse, Russell, 493
Hurwitz, 231

ısı enerjisi, 459, 726, 971
ısıl denge, 731, 732, 735, 739, 743, 745, 753, 766, 767, 771, 786, 866
ısıl vakum, 868, 869
ışık. *ayrıca bkz. fotonlar*
dalga doğası, 429
devasa nesneler etrafında bükülme, 494
ışık ışınları olarak burgaçlar, 1015
ışıktan daha hızlı yolculuk, 877
konileri, 428
konisi, 429
sabit hızı, 426
ışık hızı, 76, 416, 417, 427, 428, 429, 432, 433, 441, 444, 445, 447, 453, 455, 461, 462, 468, 472, 479, 491, 582, 619, 647, 663, 745, 746, 748, 754, 895, 911, 915, 958, 1026, 1030, 1033
ışık yılı, 433, 541, 542, 544, 849
ışınlama, 631, 633

i (eksi birin karekökü), 95, 96
i üssüne, 123
üsleri, 276
iç boyutlar, 353, 354, 355
ikili uzay, 205, 299, 300, 305, 311, 312, 563
ikiz paradoksu. *bkz. saat paradoksu*
imza, 229, 306, 309, 317, 318, 350, 351, 440, 452, 453, 515, 787, 1053
ince yapı sabiti, 799, 914
indirgenebilirlik, 299
integral alma, 259
irrasyonel sayılar, 77
ikinci dereceden irrasyonel sayılar, 82
Isham, Christopher, 1010
istisnai (ayrıklı) gruplar, 687
işlevsel türev alma, 514
izdüşümsel uzaylar, 371, 372

Jacobi denklemi, 337, 350, 1069
Jacobi özdeşliği, 297
Jacobson, Ted, 22, 992
jeodeziler, 332, 337, 347, 363,

416, 423, 437, 450, 487, 488, 807, 896
paralelkenar oluşturma, 332
sapma, 337
Jones polinomu, 995
Jozsa, Richard, 1010
Jüpiter güneş kütleçekim sistemi, enerji kaybı, 493

Kähler manifoldları, 961
kalın taneleme, 727, 728, 729, 731, 739
kalkülüs, 129, 139, 141, 209, 334, 467, 514, 654, *ayrıca bkz. türev alma; integral alma*
dışsal kalkülüs, 259, 261, 265, 473, 474
kalkülüsün temel teoremi, 261, 265, 591, 647
Kaluza, Theodor, 353, 926
Kaluza–Klein modeli, 927, 928, 929
kama çarpımı, 241, 243, 244, 258, 260, 262, 268, 336, 630, 925
kanonik eşlenik değişkenler, 1035
kaonlar, 651
kaotik sistemler, 724, 849
kara cisim ışınımı, 530, 743, 786, 822
kara delikler, 20, 437, 723, 738
buharlaşması, 865, 886, 887, 890
çift yıldız sistemleri, 749
entropinin sicim kuramı, 967
entropisi, 752, 755
ergoküre, 880, 881
Hawking ışınımı, 879, 880
Hawking patlamaları, 882
Hawking sıcaklığı, 865, 866, 869, 870, 874, 879, 968
karmaşık periyodiklik sıcaklığı, 870
Killing vektörleri, 876, 881
olay ufukları, 751
tekillikler, 887, 888
ufuk konumu, 881, 884
zamanda tersinmiş beyaz delik, 886
kara enerji, 490, 815, 819, 1079
kara madde, 815
kardinal sayılar, 391, 392
kareler, 36, 38, 51, 52, 57, 67, 646
hiperbolik geometri eşdeğeri, 68
simetriler, 276
karmaşık düzlem, 107, 150, 151, 157, 159, 163, 175, 178, 207, 209, 232, 480, 586, 1020, 1094
aritmetik işlemlerin gönderimleri, 178
Mandelbrot kümesi, 23
karmaşık eşleme, 207, 208, 273, 277, 312, 313, 442, 445, 662, 698, 1032, 1092
karmaşık fonksiyonlar, 160, 648
karmaşık pürüzsüzlükten üslü seriler, 154
kontür integral alma, 149, 151, 156, 712
pürüzsüzlük, 155, 156, 166
karmaşık manifoldlar, 272, 274, 1100
neredeyse karmaşık yapılar, 274
karmaşık sayılar, 26, 81, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 108, 117, 179, 231, 232, 272, 276, 277, 294, 362, 568, 569, 922, 1026, 1092
argümanı (fazı), 113
denklemleri çözmek, 649

karmaşık üsler, 122
kökleri, 648
Mandelbrot kümesinin oluşturulması, 109
modülü, 113, 114
üslü serilerin yakınsaması, 200
karmaşıklaştırma, 445, 870
karşı–de Sitter uzayı, 787, 788, 972
karşı–doğrusallık, 311
karşı-holomorfik fonksiyon, 149, 169, 200, 209, 222, 229, 367, 407
karşı–nötron, 661, 671
karşı–parçacıklar, 641, 642, 673, 677, 697
kuantum alan kuramı, 672, 690, 859
kuantum alanları, 641, 642
pozitronlar, 659, 661, 671, 673, 674, 699
zamanda geriye yolculuk yapma, 673
karşı–protonlar, 94, 95, 661, 671
Kartezyen koordinatlar, kutupsal koordinatlara dönüşümleri, 113
kategori kuramı, 1011, 1082, 1096
Kauffmann cebiri, 995
Kauffmann polinomu, 995
Kepler, Johannes, 606, 722, 753, 1070
keserek çıkarma teoremi, 202
kesirler
ondalık ilerlemenin periyodik doğası, 82
sürekli kesirler, 81
ket vektörleri, 564, 838
kırmızıya kayma, 741, 766, 783
kısmi türevler, 209, 212, 218, 223
Killing biçimi, 303
Killing vektörleri, 348, 483, 876, 895
görelilik ve kuantum fiziği arasındaki çatışma, 892
zamansal, 868
Killing, Wilhelm, 282
kinetik enerji, 459, 464, 502, 508, 644, 647, 705, 726, 745
Kirschner, Robert, 816
klasik gruplar, 282, 315, 319
Klein gösterimi, 72
Klein, Oskar, 353, 917, 926
Kodaira, Kunihiko, 1051
kohomoloji, eşbenzeti, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046
kombinasyonal (tümleşik) fizik, 90, 998
konformal diyagramlar, 763, 765, 787, 809, 872
konformal dönüşümler, 150, 167, 169, 1023
konformal yeniden ölçeklendirme, 477
kontür integral alma, 149, 150, 1056
analitik sürdürme, 156
kapalı kontürler, 153
konum durumları, 551, 552, 571
koordinat yamaları, 210, 213, 223, 249, 251, 406
kotanjant uzayı, 253
kovektör alanları, 253, 369
kozmik sansür, 752, 809, 885
kozmoloji, 490, 597, 737, 752, 756, 781, 793, 796, 1067, 1076, 1077
kozmolojik sabit, 489, 490, 491, 790, 806, 807, 814, 815, 816, 819, 820, 1003, 1061, 1064,

1065, 1078, 1079
Kronecker deltası, 256, 287, 306, 307, 313, 346, 522, 571
kuantizasyon, 526, 610
geometrik, 525
kuantum alan kuramı (QFT), 95, 105, 295, 367, 441, 582, 626, 642, 651, 672, 1100
alternatif vakumlar, 700
etkileşimler, 702
Feynman grafikleri, Lagrange denkleminden, 717
Feynman grafikleri, oluşturulması, 708
Feynman grafikleri, vakum seçeneği, 719
ıraksak yol integralleri, 706
karşı-parçacıklar, 697
sonsuz-boyutlu cebirler, 696
topolojik kuantum alan kuramı, 996
yaratma ve yok etme işlemcileri, 692
yeniden normalleştirme, 712
kuantum bilgisayarlar, 612
kuantum bilgisi, 635, 1014, 1092
kuantum dolanıklığı, 435, 608, 614
Bell eşitsizlikleri, 613
iki gizem, 623
kuantum elektrodinamiği, 655, 660, 665, 712, 1073
kuantum fiziği
∂/∂t'nin değişmezliği, 649
Bell eşitsizlikleri, 613
bir dalga fonksiyonunda olasılık dağılımı, 546
bir kuram olarak uygunluk, 857
Bohm tipi EPR, 616
boş ölçümler, 574
bozonlar ve fermiyonlar, 626
bozonlar ve fermiyonlar, kuantum durumları, 628
burgaç kuantum kuramı, 1034
çevresel evre uyumsuzluk, 825
çok parçacıklı sistemler, 608
çok parçacıklı uzay durumunun büyüklüğü, 610
dalga fonksiyonları, 526
dalga fonksiyonlarının holistik doğası, 540
dalga-parçacık ikiliği, 533
deneysel altyapı, 528
diğer geleneksel ontolojilerle Schrödinger'in kedisi, 850
Dirac notasyonu, 563
Einstein'ın genel göreliliğiyle çatışma, 895
enerji pozitifliği, 645
evet/hayır ölçümleri, 572
geleneksel olmayan ontolojiler, 826
geleneksel olmayan ontolojilerle Schrödinger'in kedisi, 855
geleneksel ontolojiler, 822
genel yalıtık kuantum nesnesi, 602
gerçekliği, 535
görelilik ile uyumsuzluk, 641
görelilikle ilgili açısal momentum, 599
gözlemlenebilirler, 568
Hardy'nin EPR örneği, 621
Heisenberg tanımı, 566
Hilbert uzayı, 563
ışınlama, 631
iki-durumlu sistemlerin Riemann küresi, 584

konum durumları, 549
Kopenhag ontolojisiyle Schrödinger'in kedisi, 847
kuantum durum indirgemesinde zaman asimetrisi, 861
kuantum sıçraması, 544
kuantumun iki gizemi, 623
küresel harmonikler, 596
Majorana tanımı, 591
momentum uzay tanımı, 551
projektörler, 572
sarmallık, 577
Schrödinger dalga denklemi, 526
spin ve spinörler, 580
U ve R işlemleri, 555
U'nun çizgiselliği ve R için anlamları, 559
üniter evrim, 565
yoğunluk matrisleri, 825
yoğunluk matrisleri, EPR durumları, 840
yoğunluk matrisleri, spin 1/2, 836
yüksek spin durumları, 590
kuantum girişimi, 480
kuantum ışınlama, 631, 636, 822, 1013
kuantum kromodinamiği, 680, 685, 716, 719
kuantum kütleçekim, 267, 752, 802, 806, 858, 859, 865, 879, 893, 905, 917, 939, 940, 941, 968, 972, 983, 985, 988, 990, 991, 992, 1001, 1004, 1006, 1007, 1010, 1025, 1058, 1065, 1067, 1071, 1072, 1081, 1098, 1104, *ayrıca bkz. kütleçekim*
Ashtektar'ın kanonik değişkenleri, 990
döngü değişkenlerinin durumu saks, 1004
gravitonların aynallığı, 985
sicim kuramı, 939
kuantum noktaları, 612
kuantum sayıları, toplamsal, 94
kuarklar, 94, 127, 626, 651, 674, 681, 683, 717, 899, 921
hapsedilme, 717
nitelikler, 681
renklendirilmiş, 683
kuarklık, 127
kuasarlar, 752, 783, 880
enerji kaynağı, 882
kutupsal koordinatlar, 113
küresel, 593
kuvvet yasası, 416, 717, 722
kümeler, 31, 92, 250, 384, 391, 392, 393, 394, 396, 399, 400, 401, 403, 657, 796, 1043
küreler
bir elipsoide doğrusal dönüşüm, 284
dönel simetri, 278
küresel harmonikler, 593, 594, 595, 596, 597, 605, 817
küresel kutupsal koordinatlar, 748
kütle, 95, 418
görelilikle ilgili formülasyon, 461
korunumu, 460
kütleçekim, 23, 34, 90, 245, 420, 483, 484, 485, 495, 507, 519, 737, 738, 743, 754, 771, 896, 897, 905, 940, 985, 1071, *ayrıca bkz. kuantum kütleçekim*
Einstein formülasyonu, 418, 486
enerji yoğunluğu, 481

Galilei'nin Eğik Pizza Kulesi deneyi, 418
gelgit etkisi, 424
ilgili alan dalgalar, 493, 495
ilgili alan enerjisi, 492
kaçma hızları, 745
nesnel indirgenme OR, 900, 904, 906
nesnel indirgenme, FELIX ve ilgili önermeler, 903, 904
Newton yasası, 416
öz eenerji, 896
serbestlik dereceleri, 767
tercih edilmiş Schrödinger-Newton durumları, 899
kütlesiz parçacıklar, 455, 531, 807, 1016, 1019, 1056
spin halindeki kütlesiz parçacıklar olarak burgaçlar, 1029
kütlesiz serbest alan denklemi, 1037

Lagrange denklemi formalizmi, 27, 498, 499, 500, 504, 505, 506, 507, 509, 510, 513, 514, 515, 517, 518, 519, 520, 522, 523, 691, 701, 702, 719, 721, 833, 937, 943, 1060, 1095
alanlar, 514
Hamilton ilkesi (durağan eylem ilkesi), 501
kurulum, düzenleme uzayı, 498
modern kuramlar, 516
Lagrange teoremi, 83, 405
Lagrange, Joseph L., 705
Lambert, Johann Heinrich, 61, 70
Laplace denklemi, 224, 225, 226, 229
Laplace işlemcisi, 224, 524, 593, 594, 652, 949, 950
Laplace, Pierre Simon, 745
Laurent serisi, 184, 185, 187, 196, 199
kare–dalga fonksiyonu, 198
yakınsaklık halkası, 186
Lawrence, Richard, 23
Lazer–Interferometri X–ışınlarıyla serbest yörünge deneyi (FELIX), 901, 903, 904, 906, 1066, 1081
Leggett, Tony, 625
Leibniz yasası, 142, 327, 328, 522
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 259
Lenard, Philipp, 529
leptonlar, 674, 680, 921
Levi–Civita, Tullio, 347
Lie cebiri, 294, 296, 297, 298, 303, 318, 340, 444, 560, 580, 581, 582, 599, 918, 919
Lie grubu, 298, 304, 339
Lie parantezi, 297, 338, 339, 342, 344, 350
Lie türevi, 338, 342, 343, 351, 487, 511
Lie, Sophus, 296
Lif demetleri, 352, 380
ara kesit, 360
bağlantılardaki önemsiz olmayış, 373
bükülü, 356
Clifford demeti, 361
eğrilik, 377
Galileici G uzayzamanı, 413
izdüşümsel uzaylar, 369
karmaşık vektör demetleri, 366
kotanjant demetleri, 369
matematiksel fikir, 355

tanjant demetleri, 368
Liouville teoremi, 889
Lobaçevski, Nikolay İvanoviç, 71, 1091
logaritmalar
doğal logaritma (e tabanı), 63, 118, 119
kaydırma kuralı ölçekleri, 116
tabanı, 118
Lorentz grubu, 308, 318, 443, 477, 483, 811, 1023, 1024, 1060, 1093, 1094
Lorentz, Hendrick Antoon, 428
Lüders noktası, 579

Mach ilkesi, 793, 998
MacLane, Saunders, 1011
Maclaurin serisi, 139, 155
Mahavira, 91
Majorana spinör alanı, 698
Majorana tanımlaması, 591, 592, 596, 597
Majorana, Ettore, 591
Maldacena, Juan, 972
Mandelbrot kümesi, 43, 44, 46
oluşturma, 109
Mandelbrot, Benoit, 43
manifoldlar, 173, 209, 250, 272, 345, 406, 467, 499, 951, 961, 964
basit bağlantılı, 247
çoklu bağlantılı, 247
karmaşık, 366, 1016
n–manifoldlar üzerindeki koordinat yamaları, 210
n–manifoldlar üzerindeki skalerler, vektörler ve kovektörler, 251
n–manifoldların hacim elemanları, 266
n-manifoldların toplama uzlaşısı, 267
pürüzsüz manifold, 209, 322, 941
Riemanncı, 346, 350, 908
simplektik, 349
türevleme, 211
yüksek boyutlu, 245, 273
manyetik moment, 591, 655, 707, 875
manyetik tek kutuplar, 475, 661
ayar tek kutupları, 781
Dirac manyetik tek kutupluları, 778
Marshall, William, 22, 901, 904
Matelski, J. P., 44
matematik ve doğruluk, 35
çelişki yoluyla kanıtlama, 69
gerçel sayılar ve fiziki dünya, 86
kavramlar, 42
matematiksel kanıt, 36
matematiksel modeller, 38
nesnellik, 41
matrisler, 283, 287, 293, 295, 302, 306, 308, 318
determinantlar, 289
devrik, 300
eşlenik devrik, 313
Hermitsel matrisler, 313
izler, 290
ortogonal, 308
öz değerler ve öz vektörler, 291
Maxwell dağılımı, 731, 732
Maxwell elektromanyetik kuramı (denklemler), 467, 468, 472, 475, 611, 660, 734
ayar eğriliği olarak Maxwell alanları, 88, 179, 353, 381, 427, 428, 429, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472,

474, 475, 476, 477, 478, 479, 482, 483, 491, 514, 518, 519, 521, 529, 531, 539, 606, 607, 611, 660, 676, 688, 696, 697, 702, 731, 732, 734, 778, 823, 857, 928, 929, 969, 986, 987, 1019, 1038, 1063, 1091, 1096, 1129
korunum ve akış yasaları, 473
Maxwell, James Clark, 427, 467, 731
ışığın dalga doğası, 429
membranlar (p-zarlar, zarlar), 966, 968
D-zarlar, 913
Merkulov, Sergei A., 1058
Merkür, yörünge anomalisi, 494
Metrikler, 241, 349, 478, 811, 876, 947
Lorentzci, 811
mezonlar, 127, 626, 651, 680
Michell, John, 745
Mie kuramı, 517, 518
Miletli Thales, 36
Millikan, Robert, 529
Minding, Ferdinand, 73
Minkowski uzayı, 436, 439, 483, 746, 859, 975, 1020
Minkowski, Hermann, 433
Minkowskici Geometri, 652
bir Riemann küresi olarak gökküresi, 455
görelilikle ilgili enerji ve açısal momentum, 461
hiperbolik geometri, 449
Lorentzci ortogonallik, 445
Newton enerji ve açısal momentumu, 458
Öklitçi ve Minkowskici 4-uzay, 439
saat (ikiz) paradoksu, 447
simetri grupları, 442
Minkowskici uzayzaman, 434
M–kuramı, 20, 240, 960, 966, 979, 980, 1025, 1059, 1098
D–zarlar, 977
momentum
görelilikle ilgili formülasyon, 461
Hamilton formalizm, 504
klasik parçacıkların, 249
kuantum mekaniksel parçacıkların, 193
Newton formülasyonu, 459
momentum uzayı, 552, 708, 720
mozaikleme, 52
Möbius (çifte-doğrusal) dönüşümü, 169, 170
Möbius demeti, 358, 359, 361, 374
Möbius şeridi, 264, 357
mutlak fonksiyon, 335

Nambu, Yoichiro, 931
Ne'eman, Yuval, 681
nedensellik ihlali, 912
negatif sayılar, 90
Newlander–Nirenberg teoremi, 274
Newman, Ezra T., 875, 1055
Newton, Isaac, 72
Newton'ın ikinci yasası, 416, 419
Newton'ın üçüncü yasası, 416, 419, 518
Newtoncı dinamik, 414
kütleçekimle ilgili yasanın, 416
ötesindeki evrim, 466
Newtoncı uzayzamanı, 421
enerji ve açısal momentum,

459
n–manifoldlar, 209, 226, 245
Noether teoremi, 465, 484, 516, 517, 522
normal alt gruplar, 280
nötrinolar, 577, 583, 626, 670, 686, 698
nötron yıldızları, 746, 749, 1065
PSR 1913 + 16 çift sistemi tarafından yayılan kütleçekimle ilgili dalgalar, 493
nötronlar, 127, 233, 540, 583, 626, 628, 651

O(3) grubu, 279, 280, 281, 284, 295, 307, 444, 580
oktonyonlar, 230
omniyum, 824, 825, 829, 830
ontolojiler
diğer geleneksel, 850
geleneksel olmayan, 853
Oppenheimer, J. Robert, 659, 750
ortogonal, 60, 61, 62, 65, 73, 279, 284, 304, 307, 308, 310, 315, 317, 318, 319, 320, 432, 445, 446, 452, 470, 491, 509, 529, 569, 570, 572, 573, 574, 586, 587, 590, 592, 601, 602, 621, 633, 694, 696, 828, 836, 840, 842, 851, 852, 854, 1023
ortogonal gruplar, 317
ortogonal tümleyen, 432, 445, 446, 470
ortogonallik, 432, 445, 569, 592, 596, 621, 696, 851, 1092

Öklit geometrisi, 37, 66, 74
fiziki uzayla ilişki, 73
kareler ve dik açılar, 53
önermeler, 54
Öklitçileştirme, 707, 811, 812, 813, 820
ön tüp, 1039, 1047
önermeler, 37, 55, 901, 1010
öteleme (geometrik işlem), 52, 53, 175, 236, 393, 444, 516, 523, 527, 580, 603, 1031
öz fonksiyonlar (öz durumlar), 534
özdeşlik (birim) elemanı, 287, 298, 318, 340, 488, 1023

palindromik (nükseden) diziler, 83
Pappos, 369, 386
paralel taşıma, 324, 325, 326, 331, 333, 335, 336, 340, 347, 352, 989
paralelkenar yasası, 111, 236, 340
paralellik önermesi, Öklit'in, 55
parçacık fiziği, 19, 22, 27, 88, 444, 475, 642, 661, 682, 914, 920, 925, 948, 951, 952, 962, 1012, 1014, 1057, 1063, 1067, 1075, 1077, 1093
burgaç kuramı, 1056
elektronun zikzak tablosu, 662
elektrozayıf etkileşimler, 666
elektrozayıf simetri grubu, 675
renklendirilmiş kuarklar, 683
standart modelin kökeni, 660
standart modelin ötesinde, 687
yeğin etkileşen parçacıklar, 680
yük eşlemesi, 672
Pauli dışarlama ilkesi, 628, 629,

656
Pauli matrisleri, 581, 656
Pauli, Wolfgang, 656, 685
Pauli–Lubanski spin vektörü, 601
periyot, 181
bir fonksiyonun, 183
Perjés, Zoltan, 1056
Perlmutter, Saul, 816
Philiponos, Ioannes, 418
pi π sayısı, 58
pionlar, 661
Pisagor teoremi, 36, 51, 58
başarısızlığı, 346
benzer alanlar kanıtı, 57
hiperbolik geometride uygulanabilirlik, 76
ikinin karekökü, 77
mozaikleme kanıtı, 52
Planck birimleri, 582, 728, 754, 755, 798, 875, 915
Planck ölçeği, 88, 846, 908, 917, 946, 947, 948, 956
Planck sabiti, 193, 479, 523, 528, 531, 552, 754, 915
Planck uzaklığı, 927, 948, 1064, 1067
Planck, Max, 466, 530, 915
Plato, 392, 1132
Platon'un matematiksel dünyası, 38
gerçeği, 38, 1084
iyi ve güzel, 49
Playfair aksiyomu, 56
–Podolski–Rosen (EPR) etkileri, 613
Poincaré diski, 61, 167
Poincaré grubu, 444, 599, 601, 603, 811, 1018, 1019, 1021, 1023
Poincaré önsavı, 262, 475
Poincaré, Henri, 428, 444
Poisson parantezi, 350, 511
Poisson, Siméon Denis, 350
Polchinski, Joseph, 940
Popper kriteri, 1076, 1077
potansiyel enerji, 459, 492, 497, 501, 502, 508, 524, 705, 745
Powell, C. F., 680
pozitif belirli, 303, 306, 307, 308, 315, 345, 346, 347, 437, 441, 488, 502, 508, 509, 510, 562, 564, 604, 646, 648, 651, 763, 811, 958, 1012, 1053
pratik tüm amaçlar için çevresel evre uyumsuzluk (FAPP), 846
projektörler, 572, 828
protonlar, 127, 233, 583, 626, 628, 660, 680
pürüzsüz fonksiyonlar
C^∞–pürüzsüz fonksiyonlar, 137
C^ω–pürüzsüz fonksiyonlar, 140
n-manifoldlar, 252
yüksek dereceli türevler, 135
pürüzsüzlük sorunu, 787, 794
q–deformeli yapılar, 995

radyan, 594
rasyonel sayılar, 77, 79, 80, 82, 85, 90, 95, 96, 383, 390, 391, 392, 394
Regge analizi, 993
Regge yinelenmeleri, 681
Regge yörüngeleri, 932, 1072
Regge, Tullio, 1010
Ricci skaleri, 488
Ricci tensörü, 487, 491, 790, 807, 928, 942, 947, 955, 957, 996
Riemann dönüşüm kuramı, 177, 178

Riemann hipotezi, 161, 1097
Riemann küresi, 170, 172, 173, 178, 188, 189, 191, 194, 195, 196, 200, 203, 207, 209, 362, 363, 366, 455, 586, 587, 590, 636, 656, 1013, 1015, 1017, 1020, 1025, 1028, 1046, 1047, 1050, 1060
bir Laurent serisi için yakınsaklık halkası, 186
frekans bölme, 188
gökküresi, 455
iki-durumlu sistemler, 584
izdüşümsel uzay, 372
Majorana tanımı, 591
Riemann yüzeyleri, 162, 165, 166, 207, 210, 439, 933, 1047, 1100
cinsi, 173
modül, 173
Riemann, Bernhardt, 163, 345, 347
Riemann–Christoffel tensörü, 348
Riemanncı geometri, 348, 812
Riemanncı manifoldlar, 350, 947
Robinson eşleşimi, 1033
Rovelli, Carlo, 992
Russell paradoksu, 399, 400
Russell, Bertrand, 399

saat (ikiz) paradoksu, 438, 445, 447, 448
Weyl'in ayar kuramı, 478
Saccheri, Jesuit Girolamo, 69
Sachs, Rayner, 496
saçılım matrisi, 711
Salam, Abdus, 679, 685, 1074
Samoslu Pisagor, 36
takipçiler (Pisagorcular), 36
sanal parçacıklar, 710
sarmallık, 574, 577, 578, 589, 602
burgaçlar, 1030
Sato, Katsuoko, 786
Sato, Mikio, 200
sayı, kavram, 84
Scherk, Joël, 938
Schmidt, Brian, 816
Schrödinger (üniter) evrimi (U işlemi), 557, 560, 561, 623, 830
doğrusallık, 558
konum durumları, 549
kuantum dolanıklığı, 623
üniter yapı, 561
Schrödinger denklemi, 526, 527, 535, 545, 547, 549, 556, 558, 559, 605, 608, 610, 611, 623, 645, 646, 648, 649, 650, 651, 654, 657, 723, 823, 847, 856, 891, 892, 893, 894, 896, 899, 908, 984, 1092
Schrödinger, Erwin, 89
Schrödinger'in kedisi, 598
Kopenhag ontolojisi, 847
Lazer-Interferometri X-ışınlarıyla serbest yörünge deneyi kurulumu, 901
Schrödinger–Newton denklemi, 899, 900
Schwachhöfer, L. J., 1058, 1131
Schwarz, John, 938
Schwarzschild, Karl, 748
Sen, Amitabha, 984
Shapiro, Erwin, 495
sıfır, keşfi, 90
sınıflar, 384, 400
sıra sayıları, 91
sicim bağlaşım sabiti, 970
sicim kuramı, 510
bir dünya kuramına doğru, 934
dinamik, 943

ek uzayzaman boyutları, 937
fiziksel durum, 979
ikinci süpersicim devrimi, 963
kara delik entropisi, 967
kuantum kütleçekimi, 939
modüller sorunu, 951
orijinal hadronik uyarlama, 930
sicimin sonluluğu (QFT), 958
süpersimetriyle birleşme, 938
sigma parçacıkları, 661
sihirli diskler, 386
simetri grupları
alt gruplar ve basit gruplar, 279
doğrusal dönüşümler ve matrisler, 283
dönüşüm grupları, 275
düzen, 278
grup aksiyomları, 277
indirgenebilirlik, 301
Minkowski uzayı, 442
ortogonal gruplar, 304
simplektik gruplar, 315
temsil kuramı, 294
tensör temsil uzayları, 299
üniter gruplar, 310
simetri kırılımı, 678
erken evren, 773
simit, 957, 961
Simon, Christoph, 22, 901, 904
Simplektik gruplar, 315
Hamiltoncı dinamik, 511
simplektik manifoldlar, 349, 350, 369, 503, 961
simplektik yapı, 321, 349, 350, 503, 964, 991, 1050, 1096
skaler alanlar, 251, 252, 339
skaler çarpımlar, 219, 565, 570, 741, 832
skaler nicelikler, 25, 93
Smolin, Lee, 22, 802, 992, 1106
Snyder, Hartland, 750
SO(3) grubu, 279, 280, 281, 282, 284, 318, 580, 581, 582, 583, 584, 597, 775
sonsuz, 391
Cantor'un köşegen yöntemi, 394
fizikteki sonsuzun boyutları, 406
sonsuz geometri, 385
sonsuz küçük grup elemanları, 296
Sorkin, Raphael, 1009
sözde metrik, 307, 345, 349
sözde yarıçap, 62, 71, 453
Sparling, George, 22, 1056
spin, 555, 577, 601, 654, 663, 991
bozonlar ve fermiyonlar, 626
kuantum mekaniksel, 90
serbestlik derecesi, 584, 651
toplam spin, 998
yüksek spin durumları, 591
spin ağları, 90, 95, 389, 793, 983, 998, 1000, 1001, 1002, 1003, 1005, 1006, 1007, 1008, 1014, 1018, 1019, 1082
spin köpükleri, 1007, 1011, 1082
spinör alanlar, 355, 366, 367, 961, 962
spinörler ve spinör nesneler, 233, 238, 239, 240, 366, 580, 596, 626, 662, 989, 1024
fermiyonlar, 628
yüksek boyutlu spinörler olarak burgaçlar, 1023
Stapp, Henry, 22, 615
Starobinski, Alexei, 786
Stein kümeleri, 1043

Stern–Gerlach aygıtı, 591
Stevin, Simon, 418
Stokes vektörü, 590
Stoney birimleri, 915
Stoney, George Johnstone, 93, 915
Strominger, Andrew, 968
Strømme, Stein Arilde, 964
Susskind, Leonard, 885, 931, 1141
süper iletkenlik, 774, 777, 822, 1094
süper kütleçekim, 330, 353, 354, 917, 922, 923, 925, 927, 966, 977, 1025, 1072, 1098, 1099
süper manifoldlar, 923, 925
süpernovalar, 748
süpersicimler, 938
  ikinci süpersicim devrimi, 980
süpersimetri, 231, 913, 917
  cebir ve geometri, 922
  sicim kuramıyla birleşme, 938
sürat, 453
süreklilik hipotezi, 42, 399

şişme, 786
  geçerlilik, 792

't Hooft, Gerard, 22, 716
taban uzayı, 355, 359, 361, 362, 366, 376, 377, 413, 782, 929, 990
tamsayılar, 26, 80, 81, 88, 93, 94, 116, 126, 384, 394, 606
tanjant demetleri, 375
tanjant uzayı, 253, 321, 324, 340, 352, 429, 431, 432
tauon, 674, 680, 686
Taylor, Joseph, 493
Taylor, Richard, 981
tedirgeme genişlemesi, 717
tensörler, 269
  cebir kullanan, 267
  diyagram biçimli notasyon, 270
  eğrilik, 330
  Riemann-Christoffel tensörü, 348
  soyut indis notasyonu, 269
  temsil uzayları, 299
  torsiyon, 330
termodinamik, 467, 726, 728, 873, 971
termodinamik, birinci yasası, 726
termodinamik, ikinci yasası, 725
  türev alma, 733
  zamanda asimetri, 734
ters simetri, 316
Theaetetos, 83
Thiemann, Thomas, 1003
Thomas, Richard, 22, 979, 1100
tıkızlık, 303, 601, 607, 947
titreşim frekansı, 593
Tod, Paul, 22, 1056
toplama uzlaşısı, 266, 267, 268, 269, 285, 286, 297, 503, 504
toplama ve çarpmanın birleşme kuralları, 227, 276
topoloji, 152, 176, 250, 356, 711, 992, 1011
topolojik kuantum alan kuramı, 996
topolojik torsiyon, 248
topos kuramı, 1010
torsiyon tensörü, 344
traktris, 72, 73
Tsou, Florence (Tsou Seung Tsun), 1056
Tsung Dao Lee, 240, 667
Turing makineleri, 401, 403, 404

Turing, Alan, 401
Turok, Neil, 814, 978, 1078, 1112, 1124, 1141
tutarlı geçmişler yaklaşımı, 829, 853
türev alma, 129, 132, 133, 142, 143, 146, 147, 149, 227, 252, 254, 275, 321, 322, 326, 329, 338, 348, 523, 526, 533, 551, 610
  C∞–pürüzsüz fonksiyonlar, 135
  Cω–pürüzsüz fonksiyon, 140
  dışsal türev, 261
  Heaviside yöntemi, 521
  işlevsel, fonksiyonal, 514
  kuralları, 141
  Lie türevi, 338
  manifoldlar, 320
  vektör alanlarının kovaryant türevi, 326
  yer değiştirme özelliği, 522
türevler
  ikinci derece ve daha yüksek dereceli türevler, 132, 135, 212

Uhlenbeck, George, 656
uzayın aynallığı (el benzerliği), 990
  Ashtekar değişkenleri, 985
uzayzaman, 88, 229
  Aristoteles fiziği, 409
  Einstein uzayzamanı, 436
  eşdeğerlik ilkesi, 417
  Galileici görelilik, 413
  holografik ilke, 972
  ışığın sabitlenmiş hızı, 426
  ışık konileri, 428
  kuantum kararlılığı, 951
  Minkowskici uzayzaman, 434
  M-kuramı, 966
  mutlak zamanın terki, 431
  Newton dinamiği, 414
  Newton uzayzamanı, 421
  yüksek boyutların belirgin yokluğu, 945
  yüksek boyutların klasik kararsızlığı, 955
  yüksek boyutlu, 925

üçgenler
  açılar toplamı, 59
  benzer, 58
üniter evrim. bkz. Schrödinger evrimi
üniter gruplar, 315, 317, 318
üs alma, 116, 298, 340, 560
üslü seriler
  ıraksak, 107
  karmaşık sayıları kullanarak yakınsama, 108
  yakınsak, 108
üstel fonksiyon, 118
  karmaşık üsler, 122

Vafa, Cumrun, 968
Vaidman, Lev, 575
vakum durumları
  Dirac denizi, 699
  Feynman grafikleri, 719
  kuantum alan kuramı (QFT), 699
vakum kutuplanması, 714
van der Waerden, Bartel L., 102, 231, 282, 654, 662, 1073, 1126, 1143
varlığın doğası, 38
  üç dünya ve üç derin gizem, 44
vektör alanları, 221, 252, 273, 322, 327, 340, 344, 406, 869,

894, 1041, 1042, 1049
kovaryant türev, 326
n–manifoldlar, 252
sabitlik, 322
vektör uzayı, 227, 228, 253, 277, 283, 284, 286, 287, 289, 293, 297, 299, 300, 304, 305, 311, 312, 313, 320, 321, 352, 355, 356, 359, 360, 361, 362, 366, 369, 371, 372, 374, 380, 407, 534, 547, 559, 563, 572, 684, 696, 697, 828, 990, 1026, 1027, 1028
vektörler
bra, 564
döndürmeleri temsil etmek, 236
ket, 564
Veneziano, Gabriele, 931
Voigt, Woldemar, 982
von Neumann, John, 91, 573, 1091, 1143

W bozonları, 661, 666, 674
elektrozayıf simetri grubu, 676
Ward, Richard, 1055
Warren, John, 106
Weber, Tullio, 900
Weinberg (zayıf karma) açısı, 677, 686
Wessel, Caspar, 106
Weyl eğriliği, 806, 808, 809, 810, 887, 986, 987, 1051, 1052, 1053, 1060
Weyl tensörü, 489, 491, 492, 807, 986, 987, 996
Weyl, Hermann, 477, 659
Wheeler, John A., 408, 673, 801
Wick döndürmesi, 811, 959, 963
Wick, Gian Carlo, 811
Wiles, Andrew, 40, 405, 981, 1096
Wilson döngüsü, 992
Wilson, Kenneth, 992
Witten, Edward, 935, 944, 963, 980, 996, 1059, 1099
Woodhouse, Nick, 22, 218
Wu, Chien-Shiung, 240, 667

yakınsaklık halkası, 186, 187, 188
Yang–Mills kuramı, 685, 919, 964, 973
yansıma asimetrisi, 666
yansımalı olmayan simetriler, 279
yapı sabitleri, 297, 298, 303, 919
yaratma işlemcileri, 605, 692, 693, 697, 720
Yau, Shing–Tung, 961
yeğin etkileşimler, 680, 717, 777
asimptotik serbestlik, 716
öz durum, 686
yeğin kuvvet, 1102
yeniden normalleştirme, 700, 701, 713, 714, 715, 717, 718, 815, 914, 916, 917, 921, 1012
yineleme, 592, 989
yinelenen kümeler, 404
Yoğunluk matrisleri, 825, 833, 834, 835
1/2 spin, 836
EPR durumları, 840
yok etme işlemcileri, 692, 693, 694, 695, 700, 701
Yukawa, Hideki, 680
yük eşlemesi, 27
yük–akım vektörü, 469, 471

Z bozonları, 661, 666, 674
elektrozayıf simetri grubu,

675
zaman
Aristoteles fiziği, 409
dinamik evrimde simetri, 722
entropi asimetrisi, 734
kozmolojik zamanda asimetri, 859
kuantum durum indirgemesinde asimetri (R işlemi), 861
mutlak zamanın terki, 431
nedensellik ihlali, 436
saat (ikiz) paradoksu, 448
Weyl ayar kuramı, 477
zaman yolculuğu, 436, 876, 878
zarlar. *bkz. membranlar*
zayıf antropik ilke, 799
zayıf kuvvet, 660, 717, 1102
Zeilinger, Anton, 22, 901, 1066
zeta fonksiyonu, 161
zincir kuralı, 215, 218, 220, 222, 223, 256
Zumino, Bruno, 1074

ALFA Bilim Dizisi

SINIRLARIN ÖTESİ
Beyin ve Makineyi Birbirine Bağlayan Yeni Nöroloji ve Değişen Hayatlarımız
Miguel Nicolelis /
çev. Kerem Çiftçioğlu

URANYUM SAVAŞLARI
Nükleer Çağı Başlatan Bilimsel Rekabet
Amir D. Aczel / çev. Barış Gönülşen

ÇOKLU EVRENLER
Kuantum Fiziğinin Evrenleri
John Gribbin /
çev. Emin Karabal

21. YÜZYIL İÇİN EINSTEIN
Bilim, Sanat ve Modern Kültüre Bıraktığı Miras
Peter L. Galison, Gerald Holton ve Silvan S. Schweber
çev. Nursel Yıldız

GÜVENEN BEYİN
Nörobilim Ahlak Hakkında Bize Ne Anlatır?
Patricia S. Churchland
çev. Yelda Türedi

BEYİN
Beynin Yapısı, Görevi ve Bozuklukları Üzerine Resimli Bir Rehber
Rita Carter /
çev. Güneş Kayacı

HAYATIN KÖKLERİ
İlk Canlılar Nasıl Oluştu?
Mahlon B. Hoagland
çev. Şen Güven

DARWİN ve EVRİM TEORİSİ
Evrimi Anlamak İçin Binbir Hayvan Hikayesi
Marc Giraud /
çev. Özgü Berksoy

BÜYÜK PATLAMANIN IŞIĞI
Zamanın Başlangıcından Gelen Mesaj
Marcus Chown /
çev. Çiğdem Çevrim

SON MODA SAÇMALAR
Postmodern Aydınların Bilimi Kötüye Kullanmaları
Alan Sokal & Jean Bricmont /
çev. Barış Gönülşen

BİRAZ KUANTUMDAN ZARAR GELMEZ
Evren Hakkında Kışkırtıcı Bir Kılavuz
Marcus Chown /
çev. Taylan Taftaf

BİLİMSEL GERÇEKÇİLİK ve ZİHNİN ESNEKLİĞİ
Paul M. Churchland /
çev. Ekrem Berkay Ersöz

CEVİZ KABUĞUNDAKİ EVREN
Stephen Hawking
çev. Kemal Çömlekçi

FEYNMAN'IN KAYIP DERSİ
David L. Goodstein/
Judith R. Goodstein
çev. Zekeriya Aydın

ÜÇÜNCÜ ŞEMPANZE
İnsan Türünün Evrimi
Jared Diamond
çev. Çağatay Tarhan

BAY TOMPKİNS'İN SERÜVENLERİ
Kuantumun Şaşırtıcı Dünyası
George Gamow
çev. Tuncay İncesu

EMİNİM ŞAKA YAPIYORSUNUZ BAY FEYNMAN
Meraklı Bir Şahsiyetin Maceraları
Richard P. Feynman /
çev. Tuncay İncesi

KARA DELİKLER ve BEBEK EVRENLER
Stephen Hawking /
çev. Nezihe Bahar

DERİN BASİTLİK
Kaos, Karmaşa ve Yaşamın Ortaya Çıkışı
John Gribbin /
çev. Arda Barişta-Alkım Kızıltuğ

HAYVANLAR NE İSTER?
Hayvan Bilinci, Hayvan Refahı ve İnsanın Esenliği
Marian Stamp Dawkins /
çev. Çağatay Tarhan

ALTI KOLAY PARÇA

Richard P. Feynman /
çev. Zekeriya Aydın

BAŞKALARININ NE DÜŞÜNDÜĞÜNDEN SANA NE
Richard Feynman
çev. Lale Aykent Tunçman-Tuna Aykent Tunçman

ZAMANIN RESİMLİ KISA TARİHİ
Stephen Hawking /
çev. Barış Gönülşen

ZAMANIN KISA TARİHİ
Stephen Hawking /
çev. Barış Gönülşen

ÇİPLER, KLONLAR VE 100 YAŞ ÖTESİ YAŞAM
Biyolojik Bilimler Bizi Ne Kadar Uzaklara Götürecek
Joyce A. Schoemaker-Paul J.H. Schoemaker / çev. Aybey Eper

KÖKEN AĞACI
Primat Davranışı İnsanın Toplumsal Evrimi İçin ne Söyleyebilir?
Frans B.M. de Waal /
çev. Dilek Eylül Dizdaroğlu

ERWİN SCHRÖDİNGER VE KUANTUM DEVRİMİ
John Gribbin /
çev. Prof. Dr. Bahattin Mehmet Baysal

KÜLTÜR
Önde Gelen Bilim İnsanları Toplum, Sanat, İktidar ve Teknolojiyi Tartışıyor
John Brockman /
çev. Ferhat İyidoğan

DÜNYA DIŞI YAŞAMLA İLK TEMAS
Astrobiyoloji hakkında merak ettiğiniz her şey
Marc Kaufman /
çev. Aybey Eper

DARWIN'İN TEHLİKELİ FİKRİ
Evrim ve Hayatın Anlamı

Daniel C. Dennett /
çev. Aybey Eper-Bahar Kılıç

BİLİM KURGULARI
Bilimsel Temellere Dayanan Gelecek Tasarımları

Gerard't Hooft /
çev. Tufan Göbekçin

BEYNİN ÖTESİ
Beden ve Çevre, Hayvan ve İnsan Zihnini Nasıl Şekillendirir
Louise Barrett /
çev. İlkay Alptekin Demir

TANRI BEYNİ
Beyin Neden İnanç Üretir?

Lionel Tiger/Michael McGuire
çev. Seda Toksoy

DELİLİK VE MODERNİZM

Louis A. Sass /
çev. Ender Gürol

KENDİNİ YİNELEYEN ZİHİN
İnsan Dilinin, Düşüncesinin ve Uygarlığının Kökenleri
Michael C. Corballis /
çev. Ahmet Birsen

ZİHİN

Editör: John Brockman /
çev. Zeynel Gül-Beyza Bilal

ALBERT EINSTEIN-MILEVA MARİĆ AŞK MEKTUPLARI

Jürgen Renn ve Robert Schulmann /
çev. Nursel Yıldız

BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROGRAMLARININ METODOLOJİSİ

Imre Lakatos/
çev. Duygu Uygun

ALTI ZOR PARÇA

Richard P. Feynman /
çev. Zekeriya Aydın

BİLİM TARİHİ

Robert Winston /
çev. Murat Metehan Türkoğlu-Simin Yıldız-Serhat Atay

EVRENİ YÖNETEN DÖRT YASA
Enerji, Termodinamik, Entropi ve Zaman Hakkında Bilmek İstediğiniz Her Şey
Peter Atkins /
çev.

BEYİN NASIL OKUR?
Okumanın Bilimi ve Evrimi
Stanislas Dehaene /
çev. Ozan Karakaş

BİLİM TARİHİ

John Gribbin /
çev. Barış Gönülşen

VAROLMANIN HAFİFLİĞİ
Fizikte Birleşik Kurama Doğru
Frank Wilczek /
çev. Nezihe Bahar

ZİHNİN SİHİRBAZLIĞI
Zihnimiz Bizi Nasıl Aldatır?
Stephen L. Macknik,
Susana Martinez-Conde /
çev. Gülçin Vardar

BEŞ MİLYAR YILLIK YALNIZLIK
Yıldızlar Arasında Yaşam Arayışı
Lee Billings /
çev. Ozan Karakaş

TANRI VE YENİ FİZİK

Paul Davies /
çev. Barış Gönülşen

FARKLI BİR EVREN
Fiziği En Baştan İcet Etmek
Robert B. Laughlin /
çev. Ulaş Apak

OLASILIK VE TÜMEVARIM MANTIĞINA GİRİŞ

Ian Hacking /
çev. İrfan Özdabak

ÜÇÜNCÜ KÜLTÜR
Bilimsel Devrimin Ötesi
John Brockman /
çev. Yelda Türedi

GELECEKTE BİLİM
Bilimde Son Gelişmeler
Editör: Max Brockman /
çev. Ferhat İyidoğan

SONSUZLUK YAPBOZU
Kuantum Alan Kuramı ve Higgs
Frank Close /
çev. Irmak Kamcez

EVRİM
Bir Fikrin Zaferi
Carl Zimmer /
çev. Hasan Erol Eroğlu

KAOS
Yeni Bir Bilim Ortaya Çıkarken
James Gleick /
çev. İlkay Alptekin Demir

MANTIKSAL ATOMCULUK FELSEFESİ
Bertrand Arthur William Russell / çev. Dilek Arlı Çil, Kurtul Gülenç, Önder Kulak, Cenk Özdağ

ÖYKÜCÜ BEYİN
Bir Nöroloğun Bizi İnsan Kılanın Ne Olduğuna Dair Arayışı
V.S. Ramachandran /
çev. Ayşe Cankız Çevik

YILDIZLARARASI BİLİM

Kip Thorne /
çev. Barış Gönülşen

KANT VE KESİN BİLİMLER

Michael Friedman /
çev. Sibel Şan Öget

Bu kitabın amacı okuyucuya insanlığın 4000 yıldır giriştiği en önemli ve heyecan verici yolculuklarından biri hakkındaki son bilgileri aktarmaktır. Amacın temel olarak matematik ve fizik arasındaki ilişki ile evren hakkında daha iyi bir kuram için arayışlarımızın temellerini güdüleyen iki güçlü etki arasındaki etkileşimin nasıl şekillendiğiyle ilgili olduğu söylenebilir. Penrose, matematiksel denklemlerin okuyucu sayısında ciddi düşüşlere yol açacağına ilişkin uyarılara rağmen kitabında bundan kaçınmamış. Ancak okuyucuya denklemleri anlamadığı yerde atlamasını öneriyor. Öklit teoremlerinden genel göreliliğe kadar, kuantum ve sicim kuramları da dahil, fiziğin temelinde yer alan matematik kavramlarını kapsayan bu kitap, gerçeğe giden yolu aydınlatıyor.

"Dünyanın en özgün düşünürlerinden birinden, bütün resmi görmemizi sağlayan bir fizik rehberi."
The New York Times

"Olağanüstü şaşırtıcı...Penrose bu kadar çok şeyi bir kitapta anlatmayı başarmış."
American Scientist

"Harika bir kitap, baştan sona haz verici."
Nature

"Fizik hayranları için, son yılların en iyi kitabı Gerçeğin Yolları."
The Guardian

ALFA
www.alfakitap.com
/alfakitap
/alfakitap

ALFA BILIM
ISBN 978-605-171-060-0