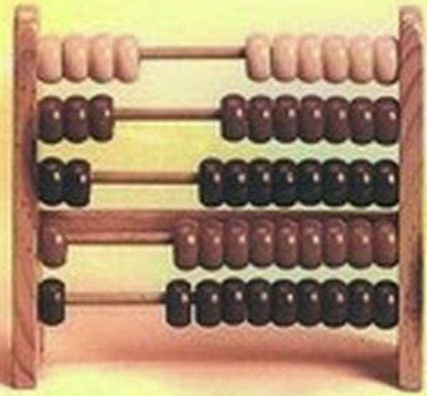
Matematik Sanatı

Jerry P. King



19. Basım

TÜBİTAK
POPÜLER BİLİM KİTAPLARI

Matematik Sanatı

Jerry P. King

TÜBİTAK

POPÜLER BİLİM KİTAPLARI

TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları 49

Matematik Sanatı
The Art of Mathematics
Jerry P. King
Çeviri: Nermin Arık

TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları'nın seçimi ve değerlendirilmesi
TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları Yayın Kurulu tarafından yapılmaktadır.

ISBN 978 - 975 - 403 - 078 - 5

İlk basımı Temmuz 1997'de yapılan
Matematik Sanatı
bugüne kadar 47.500 adet basılmıştır.

19. Basım Kasım 2010 (5000 adet)

Yayın Yönetmeni: Duran Akca
Yardımcı Yayın Yönetmeni: Dr. Oğuzhan Vıcıl
Yayıma Hazırlayan: Cem Devecioğlu
Kapak Tasarımı: Cemal Töngür
Sayfa Düzeni: Seval Özgül
Basım İzleme: Yılmaz Özben

TÜBİTAK
Popüler Bilim Kitapları
Atatürk Bulvarı No: 221 Kavaklıdere 06100 Ankara
Tel: (312) 427 06 25 Faks: (312) 427 66 77
e-posta: kitap@tubitak.gov.tr
www.kitap.tubitak.gov.tr

Semih Ofset Matbaacılık Sek. Yay. San. Tic. Ltd. Şti.
Büyük Sanayi 1. Cadde No: 74 İskitler Ankara
Tel: (312) 341 40 75 Faks: (312) 341 98 98

Matematik Sanatı

Jerry P. King

Çeviri
Nermin Arık

TÜBİTAK POPÜLER BİLİM KİTAPLARI

İçindekiler

Giriş

Yıllar önce Vermont'ta bir yaz geçirmiştik. En kuzeyde, yeşil dağlar ve ulu ağaçlar ülkesindeydik. Evimizin önünden geçen toprak yol bağımsızlık savaşından bu yana hiç değişmemişti. O kadar az kullanılıyordu ki, ne zaman bir otomobil görünse misafirimiz olduğunu anlıyorduk. Günler rahat ve sakin geçiyordu. Duyulan en yüksek ses tepenin arkasındaki bir inekten arada bir gelen "möö"den ibaretti. Gölün berrak ve soğuk sularında balıklar hızla oraya buraya yüzüyordu ve gökyüzü geceleri yıldızlarla pırıl pırıldı. Otlar yaz esintileriyle sürekli salınıyordu.

Şarabın tükenip mumların sonuna yaklaştığı ve ay ışığının kusursuz olduğu bir gece karıma, "Sen gördüğüm bütün kadınlardan daha güzelsin." demiştim.

Bunları söylerken doğrudan ona bakıyordum, o da döndü, bana baktı. Şükürler olsun ki o anda bir matematikçi gibi düşünmemişti. Öyle yapsaydı, iltifatımın saçma olduğunu, hiç de doğru olmadığını söylerdi. Çünkü sözlerim doğru olsaydı şu sonuç çıkacaktı: Gördüğüm bütün kadınların hepsinden *daha* güzel olmakla, aynı anda benim sevgi dolu bakışlarımın da hedefi olduğu için, kendisinden de daha güzel olması gerekirdi, ki bu olanaksızdı. Benim sözlerimi kesinliğin nesnel ışığında değerlendirseydi onları anlamsız bulur, o andaki atmosferi de yok ederdi.

Ama öyle yapmadı. Ne kastettiğimi *biliyordu*. Ben de biliyordum. Bir şişe şarap daha açtım ve mumları söndürdüm.

Matematikçiler, âşıkların tersine, kesin olmamaktan nefret ederler. Kesinlik matematikçinin kalite damgasıdır. Kendinizi matematiksel ifade biçimine ve çıkarım kurallarına adamazsanız matematik yapamazsınız, konuşamazsınız da. Ancak böyle bir adamadan sonra matematikçinin tüm dikkatini çekersiniz. Konularının gereken özen ve dikkatle ele alınması karşılığında size değer de verirler. Ancak hepsi o kadarla kalır. Eğer fazlasını istiyorsanız, şarap ve mum ışığı kesinlikle daha çok işe yarar.

Ben *matematik hakkında* yazıyorum; *matematik* yazmıyorum. Bu iki kavram, birbirlerinden "fizik" ile "metafizik"in farklı olduğu kadar farklıdır. *Matematik hakkında* yazarken matematikçi olmayanlar için yazarsınız. Matematikçiler, Prufrock'un denizkızları gibi, yalnız birbirleri için şarkı söylerler; bizler için değil.

Bu kitap matematikçiler için yazılmamıştır. Resim, müzik ve yazın sanatlarına ilgi duyan, matematiği de derin bir gizem veya kaçınılması gereken korkunç bir kâbus olarak algılayan okuyucu kitlesi için yazılmıştır.

Matematikçiler bizlerin bilmediği bir şeyler bilirler. Onlar matematiğin, şiirde olduğu kadar kesinlikle belirlenmiş bir estetik değeri olduğunu bilirler. Başkaları bunu bilemez. Bu bilgi matematikçi aristokrasisinin kapalı dünyasının derinliklerinde saklı kalır.

Beşeri bilimciler konser salonlarından, resim galerilerinden ve güzel kitaplardan zevk alırlar; ancak, matematik söz konusu olduğunda, Frankenstein görmüş köylüler gibi kaçışırlar. Halbuki bir matematikçinin estetik duygulanımları kendisini hem heyecanlandırır, hem de rahatlatır. Heyecan onu konuya yöneltir; rahatlatıcı etki ise bir bağımlılık yaratır ve onu tekrar tekrar konuya çeker.

Matematikçinin bu davranışı bir beşeri bilimcinin Milo Venüsü'nü görmek için Louvre'a, ya da izlenimcilerin resimlerini görmek için Orsay Müzesi'ne defalarca gitmesiyle aynı şeydir.

Matematikçiler de galerilere ve konserlere sıkça giderler - kendi söyledikleri kadar sık olmasa da. Beşeri bilimcilerin estetik deneyimleri matematikçilere de açıktır. Ancak, bunun tersi için aynı şey söylenemez; matematikçilerin estetik zevkleri beşeri bilimcilere açık değildir. Açık olmama nedeni, bu estetiğin beşeri bilimcilerin kavrama yetileri dışında olması değil, matematiğe *doğru bakış açısı*nın onlardan gizlenmiş olmasıdır.

Bu kitap bu bakış açısını açıklamayı ve bu gizemi aydınlığa çıkarmayı, bunun yanında, matematiğin güzelliğini ve gücünü algılamadan insanın entelektüel ve estetik yaşamının tam olamayacağını göstermeyi amaçlamaktadır. Daha yalın bir ifadeyle, estetik ve entelektüel doyum *matematik hakkında* bilgi sahibi olmamızı gerekli kılar. Matematiğin estetiğini çevreleyen gizem, biraz da, matematikçilerin matematik hakkında konuşmaktan hoşlanmamalarının bir sonucudur. Matematikçiler, matematik hakkında ne yazmaktan, ne de okumaktan hoşlanırlar.

Matematikçiler *matematik yapmak*tan hoşlanırlar. Matematik yapmaktan kastettikleri şey, matematiksel *araştırma* yapmaktır. Araştırmadan kastettikleri ise yeni matematik *yaratmak*tır. Yalnızca ve yalnızca budur.

Okuyucu bu ayrımı açık olarak kavramalıdır: Matematik *hakkında* yazmak, konusu matematik olan açıklama veya betimleme yazmak demektir. Matematik *yapmak* ise, araştırma yapmaktır; ki bu da tıpkı bir şairin şiir yarattığı gibi, matematik yaratmak anlamına gelir.

Matematikçiler yaptıkları matematiği dergilerde yayımlarlar. Ancak yazdıkları, matematik *hakkında* değil, matematiğin *kendisi*dir. Yazdıkları bu matematik araştırmalarını okuyanlar –eğer okuyan olursa tabii– yalnızca matematikçilerdir. Bu nedenle matematik hakkında yazılmış çok az şey vardır. Başka yönlerden geniş bilgi sahibi olan insanların, yüzlerce matematik araştırma dergisinin ve onlarda yazıları yayımlanan binlerce matematikçinin varlığından haberdar olmamasının bir nedeni de budur.

Bunların yanı sıra, matematik hakkında mevcut literatürün çoğu önemsizdir. Çünkü matematiği, veya onun özelliklerini, ya da insanların neden onunla uğraşmak istediğini anlamayan kişilerce yazılmışlardır. Arada bir, şu veya bu nedenle, gerçek bir matematikçi matematik *hakkında* bir kitap yazar. Ancak her zaman öncelikle yaptığı, bu işin kendisinin gerçek uğraşı olmadığını belirtmektir. Bu açıklayıcı kitabın yazarı, kitabın, yayımlamış olduğu araştırma yazılarının toplamının eriştiğinden daha çok okuyucuya erişeceğini bilmektedir. Ama yine de, bu kitabın matematikçi okurlar için, örneğin *Journal of the American Mathematical Society*'de (Amerikan Matematik Topluluğu Dergisi) en son yayımlanan üç sayfalık çalışmasına oranla pek değer taşımadığını kesinlikle belirtir.

G. H. Hardy adında ünlü bir matematikçi matematik hakkında bir kitap yazmıştı. Ancak kendini o ölçüde huzursuz hissetmişti ki, ilk olarak, kitabı yazmış olmasından dolayı okuyucudan özür diliyordu. Hatta kitaba *A Mathematician's Apology* (Bir Matematikçinin Savunması) adını vermişti. Hardy, ilk cümlesinde günahını itiraf eder. Şöyle yazar:[1]

> Profesyonel bir matematikçinin, matematik hakkında yazmakta olduğunu algılaması hüzün verici bir olgudur. Matematikçinin işlevi bir şeyler ortaya koymak, yeni teoremler ispatlamak, matematik bilimine katkıda bulunmaktır, kendisinin ya da diğer matematikçilerin neler yapmış olduğunu anlatmak değil. Devlet adamları politika yazarlarını, ressamlar sanat eleştirmenlerini küçümserler; filozoflar, fizikçiler ve matematikçiler de benzer duygular taşırlar. İnsanların yararına çalışan kişilerin, bu çalışmaları açıklayan kişilere duyduğundan daha derin, genellikle de daha haklı, başka bir küçümseme duygusu yoktur. Açıklama, eleştirme, övgü ikinci sınıf beyinlerin işidir.

Hardy'nin *Savunma*'sı 1940'ta yayımlandı; ancak onun matematiği açıklayıcı yazılara karşı aldığı tavır yaygınlığını sürdürmektedir. Matematikçiler matematik hakkında kitap yazmanın, olsa olsa, ikinci sınıf insanların işi olduğu kanısındadırlar. Gerçekte matematikçiler, matematik hakkında kitap yazmanın, yazarın matematikçi olarak başarısızlığını ilk bakışta açığa vurduğunu düşünürler. Matematikçilere göre, matematik *yaparak* mesleğini sürdürme gücü olan bir kimse matematik hakkında yazarak zamanını boşa harcamaz. Orijinal fikirleri tükenmiş olan, veya Hardy gibi, matematik yaşamının "bittiği"ni düşünen kişiler açıklayıcı matematik yazmak durumundadırlar. Bu durumda bile, artık inişe geçmiş olan matematikçi, yazısının bir yerinde, yazmış olma günahından duyduğu pişmanlığı dile getirmektedir.

Sonuç olarak denebilir ki, dışa kapalı olan profesyonel matematikçiler çemberi dışında, matematiğin veya matematik araştırmalarının gerçek özellikleri konusunda hemen hiçbir şey bilinmez. İnsanları ilk ağızda matematik yapmaya iten kuvvet (Hardy'nin, matematiğin "salt estetik" niteliği dediği çekici güç) konusunda ise kesinlikle bir şey bilinmez. Bertrand Russell'ın matematiğin güzelliği için verdiği betimlemeyi de çoğu kimse bilmez: "En yüksek sanatın gösterebileceği kesin kusursuzluğa muktedir, yüce bir güzellik."[2]

Eğitim görmüş kesimin entelektüel deneyimlerinden, matematiğin estetik değeri olabileceği kavramı kadar uzak başka hiçbir şey yoktur. Bu uzaklık matematiğe aşina olmayanlar kadar, olanlar için de geçerlidir. Çalışmalarında matematiği her zaman kullanan mühendis ve fen bilimciler ona bir araç olarak bakarlar. Onlar için matematiğin bir mikroskop veya sis odasından daha büyük bir çekiciliği yoktur, matematik, günlük işlerinde yardımcı olan bir şeydir. Beşeri bilimciler ise, doğal olarak, matematiği hiç düşünmezler. Okulda zorunlu olarak aldıkları, taş gibi ölü, toprak gibi tatsız ve ilgi alanlarından çok uzak olan matematiğe yıllarca katlandıktan sonra onu huzurlarına yaklaştırmamaya yeminlidirler.

Matematikçiler kendilerini bir sanatçı olarak görseler de –gerçekten de öyledirler– sanatçılar onlara aynı gözle bakmazlar. Bir şairi resimleyen Diego Rivera, şairin fikirler ve sembollerle uğraştığını vurgulayan soyut bir tablo meydana getirmişti, ama fikirler ve sembollerle gerçekten de en üst düzeyde uğraşan kişi olan matematikçi için gerçekçi bir resim, çerçevesiz gözlük takmış zayıf bir insan resmi yapmıştı. Rivera matematikçiyi ciddi, beceriksiz ve dalgın bir insan olarak –hepimizin bir muhasebeciye yakıştırdığı niteliklerle– göstermişti.

Matematiğin görünmez oluşu, o alanda yapılan araştırmaların kapsam ve niceliği düşünüldüğünde, özellikle çelişkili görünüyor. Günümüzde üç ulusal matematik örgütünün toplam üye sayısı 50.000'i aşıyor. Bu üyelerin 25.000'den fazlası ulusal bir örgüt olan ve özellikle matematik araştırmalarıyla ilgilenen *American Mathematical Society*'ye (Amerikan Matematik Topluluğu) kayıtlıdır. Sayısı 1500'ü aşan matematik dergilerinde yılda en az 25.000 araştırma makalesi yayımlanır. Matematik makalelerinin özetini yayımlayan başlıca dergi olan *Mathematical Reviews*'ta (Matematiksel Tanıtımlar) açıklıkla tanımlanmış altmıştan çok matematik çalışma alanı belirlenmiştir. Matematiğin kendisi 2500 yaşında olmasına karşın, son elli yılda önceki bütün dönemlerde yaratılanlardan çok şey yaratılmıştır. Ayrıca, üniversiteler matematikçilerle dolup taşmaktadır. Herhangi bir kampüste matematik bölümü ya en büyük ya da hemen hemen en büyük akademik bölümdür. Sayıca, fizikçi ve ekonomistler kadar matematikçi de olduğu halde matematikçiler çok daha az tanınırlar ve çok daha az etkilidirler. Matematikçiler kampüste her yerde hazır ve nazırdırlar. Aynı zamanda da görünmezdirler.

Her matematikçi bu görünmezlik çelişkisi ile yaşar. Okunması gereken makalelerle dolu yeni dergiler bölüm kitaplığına sürekli olarak gelir. Konferansçılar gelir gider ve arkalarında incelenmesi ve öğrenilmesi gereken yeni ideler bırakırlar. Fraktaller ve katastroflar konularındaki yeni teorilerin incelenmesi gerekmektedir. Bieberbach veya Dört Renk Problemi gibi eski savların karara bağlanıp kanıtlarının öğrenilmesi gerekir ki aynı kavramlar başka problemlere ve başka alanlara da uygulanabilsin. Matematikçi bunlara yetişmek ve bu arada da aklını kaçırmamak için çabalar durur; büyük güzelliği olan yeni matematik üretir. Eğer şanslıysa önemli ve kalıcı bir şeyler meydana getirir. Kendi meslektaşları dışında hiç kimse kendisine veya işine en ufak bir saygı göstermez.

Bu nasıl olabilir? Kadın ve erkek bu kadar çok kişiyi adanmış sanatçılar gibi çalışmaya zorlayan ve aynı zamanda kendi dışındaki entelektüel toplumun deneyimlerinin dışında tutan şey matematiğin hangi özelliğidir? Bu çelişkinin sonuçları nelerdir? Bunun için ne yapılabilir?

Bu kitap yanıtlanması zor olan bu sorulara kısmi yanıtlar getirmektedir.

Yapılacak şey matematik *hakkında* yazmak (Konusu nedir ve insanlar neden onu seçer?) ve tabii bir de bunları özür dilemeden yazmaktır.

Bir seçenek de *matematik* yazmaktır: Bütün mantık sistemiyle ve kesinliğiyle, dikkatle ifade edilmiş varsayımlar ve çıkarılan sonuçlar ile birlikte. Ancak o zaman da kitap benim erişmek istediğim okuyucular –resim, müzik ve edebiyatla araları iyi olan eğitimli insanlar– için ulaşılmaz olur. Matematiğin estetik niteliğinden bir matematikçi gibi etkilenebilecek kişiler estetik duyarlığı olan bu tür insanlardır. Bunu yapmaya gerek duyulması, yani bunun daha önce yapılmamış olması, günümüzdeki matematik eğitiminin başarısızlığının açık bir kanıtıdır.

Bu sır açıklandıktan sonra, sanatın değerini anlayan kesim matematiğin anahtarının sıkıcılık ve teknik değil de güzellik ve zarafet olduğunu öğrenecektir. Sonra, belki de, eğitimde matematiğin estetik boyutunu vurgulayan yeni bir düzenleme için baskı yapılacaktır. Değişim için böyle bir baskı –eğer gelirse– daha önce matematik yanlısı olmayan, yeni bilgilenmiş bir kamuoyundan gelebilir. Bu yöndeki bir reformun matematikçilerden ve onların en iyi müşterisi olan akademisyen mühendislerden ve fen bilimcilerden gelme şansı olmadığı konusunda size güvence verebilirim. Ancak reform için bir yerlerden baskı gelmesi zorunludur. Şimdiki sistemin başarısızlığı çok açık ve seçiktir.

Eğer savaş generallere bırakılamayacak ölçüde önemliyse, benzer nedenlerle, matematik eğitimi de matematikçilere bırakılamayacak ölçüde önemlidir.

Matematik hakkında, hakkıyla yazmak kolay değildir. İlk olarak matematik için itici güdü olan *güzellik*, sonra, matematiğin amacı olan *doğruluk* ele alınmalıdır. Matematiğe hak ettiği önemi kazandıran şey ise, matematiksel doğruların bize *gerçeklik* hakkında verdiği bilgilerdir. Matematik hakkında yazmak için bu üçü, güzellik, doğruluk ve gerçeklik, tek tek ele alınmalıdır. Böylece de klasik felsefenin konularından üçü ile yüzleşmek zorunda kalınır. Matematik öğrenimi üzerinde de konuşmak istiyorsanız, başarısızlığın nedenleri ve bunları gidermek için neler yapılabileceği hakkında, felsefenin dördüncü konusu olan *etik* (ahlakbilim) de işe karışır.

Matematik hakkında yazmak için bu dört konuya eğilmek zorundasınız. Bunu yapmanın zorluğu, matematiği açıklayan kitapların neden bu kadar az olduğunun bir yanıtı sayılabilir. Analitik fonksiyonların Banach Uzayları konusunda bir makale yazmak çok daha kolaydır. Çok daha kolaydır, ancak eğer matematikçiyseniz.

Temel sıkıntı matematiğin kendisinden kaynaklanmaktadır. Yazdığınız konu matematiktir; bu da kesinlik gerektirir. Kesinliği, kitabın matematik dışı kişilerce anlaşılmasını olanaksız kılmayacak bir ölçüde tutmak zorundasınız. Bunun çıkış yolu şudur: Matematikçiler gerçekleri anlatmak için nasıl matematik kullanıyorlarsa, siz de matematiği mecaz ve benzetme yoluyla anlatabilirsiniz. Anlaşılabilirlik ile kesinlik arasında bir seçim yapmanız gerektiğinde kesinlikten vazgeçersiniz. Düzgün bir eğriyi tanımlarken sadece "düzgün" dersiniz ve devam edersiniz. Matematikçilerin hep yapmak zorunda oldukları gibi, önce fonksiyon, sonra fonksiyon grafiği kavramlarını tanımlayıp daha sonra da, "türevin var olması grafiğin düzgün olmasını zorunlu kılar" şeklinde tartışmanız gerekmez. Sadece eğrinin, yumurta gibi düzgün olduğunu ve kar taneciğinin kenarı gibi keskin köşeli olmadığını söylersiniz. Rousseau'yu okuyan, Beethoven'ı dinleyen ve Picasso'dan hoşlanan bütün insanlar sizi çok iyi anlayacaklardır.

Matematik kesin değilse bir hiçtir ve matematikçinin kesinliğe olan bu adanmışlığı onun açıklayıcı kitap yazmaktan sakınmasına yol açar. Ian Stewart *The Problems of Mathematics* (Matematiğin Problemleri)[3] isimli açıklayıcı ilginç kitabının başında, kendisi ile bir talk show sunucusu arasında geçen hayali bir mülakata yer verir. Bu mülakatta Stewart, matematiği sokaktaki adama anlaşılır kılmak için, kesinliğe olan doğal eğilimini yumuşatmak zorunda olduğunu istemeyerek kabul eder. Stewart, bununla, matematik dışı olan bir topluluğa hitap ettiklerinde matematikçilerin hep yaptıkları geleneksel savunmaya bir farklılık getirmiş oluyor. G. H. Hardy bir matematiksel açıklama yazmıştı, çünkü zirveyi aşmıştı ve kendisinin artık daha önemli bir şey yapmak durumunda olmadığını düşünüyordu. Stewart ise bu işi kendisine şeytanın yaptırdığını söylüyor. Veya, aynı şey demek olan *talk show* sunucusunun.

Ancak, bu kitapta beni kesinlikten ödün vermeye zorlayan ne şeytandır ne de benim matematik yapmak için yetersiz oluşum. Kesinlikten ödün vereceğim, çünkü anlaşılmak istiyorum.

Sık sık genellemeler yaparak konuşacağız - özellikle, "matematikçiler" dediğimde. Matematikçi derken kastettiğim –aşağı yukarı– araştırma üniversitelerinin matematik bölümlerinde "kadrolu" konumunda olan akademisyenlerdir. Daha sonra "uygulamalı matematikçi" terimini kullanacağım. Bununla, daha çok, belki de aynı üniversitede –belki de matematik dışındaki bir bölümde– olan ve "uygulamalı matematik süreci"ne katılan öğretim üyelerini kastediyorum. Bu deyim daha sonra açıklanacaktır, şimdilik, uygulamalı matematikçiyi gerçek dünya problemlerini çözmek için oldukça ileri düzeyde matematik kullanan insan olarak düşünün.

"Toplu suçluluk" kavramına inanmıyorum, çünkü buna inanmak "toplu suçsuzluk" gibi anlamsız bir kavrama da inanmayı gerektirir. Bu nedenle "Matematikçiler kesin olmamaktan nefret ederler." türü bir deyim yazdığımda bunu "Araştırma üniversitelerinin matematik bölümlerindeki kadrolu öğretim üyelerinin çoğu kesin olmayan bir biçimde yazmaktan ve konuşmaktan hiç hoşlanmazlar." şeklinde yorumlamalısınız.

Kesinlikten uzaklaşabileceğimi kabullenmenin daha kısa ifadeler kullanmama olanak sağlayacağını varsayıyorum. Matematikçiler dışında herkes nasıl olsa her dediğimi anlayacaktır.

Robert Frost bir ara Vermont'ta çiftçiler arasında yaşamış, onlar toprakla uğraşırken o da şiirle uğraşmıştı. Çiftçiler atların çektiği sabanlarla toprakta derin yarıklar çiziyor, Frost da beyaz kâğıtlar üzerine bu yarıklar kadar düzgün satırlarla şiirler yazıyordu. Çiftçilerle aynı tarlalarda dolaşıyor, aynı karanlık ormanları seyrediyordu. Ancak çiftçilerden farklı bir duygulanım içindeydi. Onların göremedikleri ve değerini anlayamadıkları bir şeyler görüyordu. Çiftçilerin gerçekliği gördüğü yerde Robert Frost soyutluk ve mecaz görüyordu. Kıştan kalmış ufak bir karlı leke Frost için unutulmuş bir günden kalan bir gazete parçasıydı. Çim biçicinin kesmeden bıraktığı bir öbek çiçek paylaşılan değerlerin bir sembolü oluyor, karanlık ormanlarda yağan kar dinsel boyutlu bir deneyime dönüşüyordu. Sıradan bir çayırlık karşı konulmaz bir çağrıya dönüşüveriyordu:[4]

Çayırdaki pınarı arındırmaya,
Yaprakları tırmıklamaya gidiyorum.
Beklemeye, suyun berraklaşmasını,
Uzun kalmayacağım - gelir misin benimle?

Robert Frost sıradan şeylerde çiftçilerin görmediği şeyler görürdü. Görürdü, çünkü bakmasını bilirdi ve her gerçek sanatçı gibi gördüğünün bir gerçeklik değil, bir sembol ve mecaz olduğunu bilirdi. Matematikçiler de şairler gibi mecaz ve benzeşimleri değerli bulurlar. Frost gibi onlar da mecazlarını beyaz kâğıt üzerinde enine çizgilerle çizerler. Ancak çizgileri sadece sözcüklerden değil, zarif sembollerden de oluşur: toplamlar, integraller, kendini yutan yılanlara benzeyen ve kendi üstüne dönen sonsuzlar, gözünüzü kırpınca Ay yüzeyindeki manzaralara dönüşen kar taneciklerini andıran fraktaller. Matematikçiler şiirlerini "matematik" ile yazarlar.

Bu kitabın amacı, bir ölçüde, matematikçilerin neler gördüklerini ve gördüklerinin neden değerli olduğunu açıklamaktır. Ve matematik dünyasında var olan derin estetik haz duygusunu bir biçimiyle matematik dünyası dışında olanlarla paylaşmaktır.

Görmeyi öğrenmek için bizim de Robert Frost gibi çayırlara gitmemiz gerekir. Ancak bu sefer söz konusu olan, gerçek çayırlar değil, matematiksel soyutlama çayırlarıdır. Doğru bakmayı öğrendiğimizde bunların ışıldadıklarını göreceğiz. Bunun için gereken şey biraz alıştırma yapmak ve bazı yeni fikirler geliştirmektir.

Yola birlikte çıkalım. Bu bir gezinti olacak; sakin ve rahat. Bazı yeni fikirler getirmeye gidiyorum. Gelir misiniz benimle?

I. Bölüm

Beklenmedik

Bir zamanlar, başına otomatik tabancayla ateş edilmiş birini tanımıştım. Bir şişe Chianti almak için girdiği bir dükkânda kendisini bir silahlı soygun olayıyla karşı karşıya bulmuştu. Soyguncu ona dönmüş, tabancayı kaldırmış, adamın yüzüne doğrultup ateşlemişti. Hiç beklenmedik şekilde, çabucak ve ihtarsız. Kurşun biraz yolunu şaşırmış, adam da olayı kafatasında kalıcı bir yara izi, kırmızı şaraba karşı da kalıcı bir tiksinti ile atlatmıştı. Bir de zamanın durduğu o anın canlı anısıyla.

Bana "Tetikteki bir parmak ile gözlerin arasındaki bir kara delik arasında yaşanan şey, zamanın çok farklı bir türü" demişti.

Hepimiz için zamanın çok farklı yaşandığı ender deneyimler olmuştur. Bir olay gerçekleşir (tabancayla vurulmak kadar dramatik olmasa da), öylesine duygu ve yoğunluk yüklüdür ki biyolojik saat durur. Ortam silikleşir, olayın kendisi donup kalır, bir zoom merceğindeki görüntü gibi yakınımızdadır. Görüntüyü beyninizin ta içine kilitleyen anahtarın döndüğünü bile işitebilirsiniz.

O anda tersine dönmüş bir *yaşanmışlık duygusu* yaşanır. Yaşamınız boyunca, onu belleğinizden her çıkarıp aldığınızda, kadife kutusunun içindeki bir altın gibi parıldayacağını bilirsiniz.

Eğer, soygunda vurulan kişi gibi, siz de o anı atlatabildiyseniz görüntü kendini tekrarlayacaktır. Ancak olayı atlatmış olsanız da olmasanız da o yoğunluk, gerginlik ve sıkıştırılmış zaman oradadır. James Dickey, "Falling"[1] (Düşme) adlı şiirinde, Kansas üstünden uçarken acil çıkış kapısının aniden açılmasıyla gecenin içine sürüklenen bir hostesin ölüm düşüşünü anlatır: Zamanın akışı onun için öylesine kesilmiştir ki, ölüme düşerken "insanüstü bir sağlıkla yaşayacak zamanı" olur. Gecenin içinde uçarak ayın yanından düşerken üstündekileri teker teker, düzenle çıkarır. Onu üç saat sonra bir çiftçinin tarlasındaki yumuşak saman yığınına gömülmüş bulduklarında çırılçıplaktır.

Bu olağanüstü anların birçoğu toplumsal olaylarla ilgilidir. Kennedy suikastını veya Franklin Roosevelt'in ölümünü işittiğinizde nerede olduğunuzu tam olarak anımsarsınız. Pearl Harbor bombalandığında belki altı yaşındaydınız, ama bunu her zaman hatırlayacaksınız. O gün öğleden sonra büyükler salonda oturmuş sessiz sessiz ve ciddi bir biçimde konuşuyorlardı. Bir şey onları korkutmuştu. Çok korkutmuştu. Büyükler korktuğu için siz de korkmuştunuz.

Kişisel olan ve yaşamı tehdit etmeyen bu türden anlar da vardır. Yıllar önce lisede yapılan bir futbol maçında top bana atılmıştı. Gözlerimi kırpıştırıp o sahneyi geri getirebilirim. Son bölgede, bacaklarımı olabildiğince açarak koşuyorum. Top tembel tembel, dönerek bana doğru geliyor. Atılan hiçbir top bu kadar kolay yakalanabilir olmamıştır. Top geliyor, yavaşça avuçlarıma çarpıyor, seyirciler ayağa fırlamış bağrışıyorlar. Ellerimi uzatıp onu yakalıyorum. Sonra birden, anlaşılmaz bir şekilde top ellerimden kaçıyor ve ben çimlerde, dizlerimin üstünde, topun peşinden kayıyorum. Artık çıt çıkmıyor. Yalnız canlı yeşil otlar, parlak ışık ve yuvarlanan top. Umutsuzca topa uzanıyorum. Sanki ona dokunursam her şeyi yoluna koyar, golü kurtarabilir ve oyunu kazanabilirim. Ama top uzağa yuvarlanıyor.

O topa uzanmadan geçen bir haftam olmuyor. O zaman ona dokunamamıştım. Hiçbir zaman da dokunamayacağım, ama hep uzanacağım.

Bütün bu olaylarda ortak olan şey onların *beklenmedik* şekilde, ansızın meydana gelmeleridir. Yüzünüze çevrilen tabancayı, aniden açılan kapıyı *beklemiyordunuz*. Suikastı, bomba sesini duymayı, topu yakaladığınız anda kaybetmeyi hiç beklemiyordunuz. Olayların her biri merdiven başında görünen hayalet kadar beklenmedikti. Herhangi bir sınıfta, pür matematik denilen, son derece derin ve güzel bir şeyin varlığı da öyleydi, beklenmedikti.

Sınıf

Hepimiz, az da olsa, okul matematiğinin sıkıntısını çekmişizdir. Buna matematiği öğrenmeye değer bulduğumuz için, ya da Darwin'in yaratıkları gibi ortam elverişli olduğu için dayanmadık. Dayandık, çünkü seçme hakkımız yoktu. Uzun bir zaman önce birileri matematik bilmenin yararlı olduğuna ve eğer seçim bize bırakılırsa onu öğrenmek istemeyeceğimize karar vermişti. Bu yüzden, bizler de bir ortaokul sınıfında, karatahta karşısındaki sert sıralarda oturmaya zorlanmıştık.

Kendisi de daha önce aynı yerde zorla oturmuş olan öğretmen karşımızda dikilip, matematik olduğunu sandığı şeyleri, denizin kıyıya köpük atması gibi, hiç usanmadan bize anlattı durdu. Oturduğumuz oda loş ve iç sıkıcıydı ve biz orayı Herman Melville'in *Encantadas*'ı algıladığı gibi algılıyorduk: Böyle bir yer ancak düşmüş bir dünyada var olabilirdi. Sınıf küllerle ve mağara diplerindeki yapışkan çamurlarla dolu olsaydı da bizim için fark etmezdi, orası kaplumbağalar, kertenkeleler ve örümceklere göre bir yerdi. Encantadas gibi matematik sınıfı da insanların sakınmaları gereken bir yerdi. Büyülü Adalar'da duyulabilen tek şey tıslama sesiydi, bu sınıfta ise sadece homurdanma.

Bu sınıfta, ve daha sonraları üniversite öncesi matematiğin öğretildiği diğer sınıflarda üç belirli grup insan vardı. İlk iki grup öğrencilerden oluşuyordu. Bunlardan birisinde, her nasılsa, hatta erken yaşta, bilime karşı ilgisi ve yeteneği olan öğrenciler yer alıyordu. Öbür grupta da bunlardan yoksun olan öğrenciler vardı. Bu ikinci gruptaki öğrencilerin büyük bölümü, daha sonra istedikleri dersleri almalarına izin verildiğinde, çoğunlukla edebiyat, tarih ve benzeri dersleri seçtiler. Bunlar fen bilimcilerinin tam karşıtı olarak yetiştiler. Şimdilerde genellikle "beşeri bilimciler" olarak sınıflandırılıyorlar.

Odadaki üçüncü grubun tek üyesi vardı: Öğretmen. Bu kişinin üç özelliği vardı ki bu özelliklerin daha sonra gelen ortaokul matematik öğretmenlerinde de az çok var olduğunu gördük. Matematiği sevmiyordu, matematiği anlamıyordu, matematiğin önemli olduğuna inanmıyordu.

Matematiği sevmediği hemen belli oluyordu. Okuttuğu konuya ilgi duymadığı, onun hakkındaki olumsuz sözlerinden değil, matematiğe tutkulu olmadığının aşikârlığından anlaşılıyordu. İnsanın gerçekten sevdiği bir şey hakkında konuştuğu zaman, o şeyden kaynaklanan büyülenmişliğinin dinleyiciye de bir ölçüde aktarıldığını biz o yaşımızda bile biliyorduk. Hatta bu iletişim o kadar kolaylıkla yapılıyordu ki, o zamanlar tutkulu olduğumuz spor, popüler müzik ve film yıldızlarından dolayı başımız sık sık derde de giriyordu. Büyükler bizim bu önemsiz şeylere olan düşkünlüğümüzü çok iyi fark ediyor, ilgi alanlarımızı değiştirmeye çalışarak epey zaman harcıyorlardı. Tutkunun çok kolay anlaşıldığını o zaman bile biliyorduk. Ancak öğretmenin anlattıklarından, matematik hakkında temel bilgiler dışında hiçbir şey algılamıyorduk. Bizimle matematik hakkında konuşurken sözlerinde herhangi bir canlılık veya mecazi bir şey yoktu. Hafta boyunca öğrettiği matematik için, hafta sonunda bahçesinin otlarını biçerken gösterdiği kadar coşku sergilemiyordu. Biz onun matematiği sevmediğini *biliyorduk*. Ama bu nedenle onu suçlamıyorduk. Çünkü biz de sevmiyorduk.

Konuyu anlamadığını fark etmemiz daha uzun sürdü; daha ileri düzeyde matematik okuduktan sonra da bundan emin olduk. O zaman, daha önce yanlış anlaşılmış kavramlar berraklaşınca, geriye bakıp bize matematik hakkında anlattıklarından konuyu ne kadar yüzeysel olarak kavradığını kesin bir şekilde görebiliyorduk. Bize eğitim verdiği dönemde bile bilgisizliğinin kuşku götürmez işaretlerini fark ederdik. Bunlar çoğunlukla, bilmediği sorular için verdiği korku dolu ve beceriksiz yanıtlardan belli olurdu: İki negatif sayının çarpımı *gerçekten* neden pozitif oluyor? Bir üçgenin iki kenar ortayının üçgenin *içinde* kesiştiğini nereden biliyorsunuz? 1/2'den sonra gelen sayı hangisidir?

Bilgisizliği açığa vurulduğunda gösterdiği tepki hep aynıydı. Önce, aklına ne gelirse söyler, arkasından da, soruyu unutturmaya çalıştığı çabalama evresi gelirdi; tıpkı bir politikacının bir grup yaşlı seçmene neden sosyal sigortalamaya karşı oy kullandığını açıklamaya çalışırken yaptığı gibi. Hemen her zaman olduğu gibi bu başarılı olmayınca, o da bunu fark eder, biraz korkaklaşırdı. Biz gözlerindeki bu korku dolu ifadeyi görünce, bu konunun –matematiğin– öğretmeni de bizim gibi ta derinden dehşete düşürdüğünü anlardık. Ancak korku bir an sürer, sonra öğretmen otoriter bir tavır alır ve soruyu soran öğrenciyi küstahlığından dolayı şu veya bu yolla haşlardı.

Gelgelelim bizler onun matematiği bilmemesine şaşırmazdık. Şimdi aynı sıralarda oturan ve öğretmenlerinde aynı bilgisizliği gören öğrenciler de şaşırmıyorlar. İnsan, yaşamın o çağında kimseden matematiği anlamasını beklemiyor; matematik zorunlu olduğumuz sürece katlandığımız bir şey olup çıkıyor.

Doğaldır ki, ortaokulda size matematik eğitimi veren kişinin matematiği önemli bulmasını da beklemezsiniz. Neden bulsun? Tanıdığınız hiç kimse onu önemli bulmuyor ki. Ana babanız yaşamlarını matematiksiz sürdürüyorlar; onların arkadaşları da öyle. Gittiğiniz herhangi bir yerde –bakkalda, dişçide, sinemada– basit aritmetik becerisi dışında matematiğin "gerçek yaşam"da gerekli olduğuna dair hiçbir kanıta rastlamıyorsunuz. Ne gazetelerde, ne televizyonda matematikten hiç söz edilmiyor. Matematik hiçbir zaman, –duyabildiğiniz kadarıyla– bir sohbet konusu olmamış durumda.

Öğretmeniniz, doğal olarak size her gün matematiğin önemli olduğunu *söyler*. Ama siz kendisinin buna inanmadığını bilirsiniz. O da sizin bunu bildiğinizi bilir. Bu, paylaştığınız yalanlardan sadece bir tanesi. Dünyanın fakirlere miras kalacağı savı gibi.*

Biz, bu mutsuz üçlü takım, bu yolda devam ettik. Ortaokul matematik derslerini art arda aldık ve her aşamada geleceğin fen bilimcileri ile beşeri bilimcileri arasındaki ayrım daha kesin olarak belirginleşti. Fen bilimcilere, daha sonra üniversitede yapmayı planladıkları şeyi yapmak için matematik derslerini sürdürmeleri söylendi. Onlar da dişlerini sıkıp matematiğe devam ettiler; hiçbir zaman anlaşılır olmasa bile, konunun hiç olmazsa *öğrenilebilir* olduğuna karar verdiler. Müfredat ilerledikçe beşeri bilimciler, matematik öğretmenleri ve danışmanlarca giderek daha çok ihmal edildiler ve matematik derslerini bırakmalarına izin verildi; hatta bu yolda desteklendiler bile.

Beklenebileceği gibi, matematik öğretmenleri eğitim vermeye devam ettiler. Önümüzden birer birer gelip geçtiler; hiç coşku uyandırmadan kendileri de coşku duymadan - birbirleriyle domino taşları gibi bir benzerlik içinde.

Rastlantılar

Benim kuşağımdan olan matematikçilerin çoğunluğu bu mesleğe rastlantısal olarak girdiklerini kabul edeceklerdir. Çok azımız matematikçi olmaya karar vererek yola çıktık. Gerçekten de bütün ortaöğrenimde ve üniversitedeki başlangıç kurslarında matematik, konusunun yararlılığı açısından okutulduğu için hiçbirimiz böyle bir mesleğin varlığını bilmiyorduk. Lise matematiğinde yetenek gösterdiğimiz için bize mühendis veya fen bilimci olmamız öğütlenmişti. Matematik kendilerine bir uygulama aracı olarak öğretildiğinden, öğretmenlerimiz matematikte yetenekli kişilerin meslek olarak matematiği de seçebileceğini bilmiyorlardı. Gerçekten de, o günlerde –şimdi de ol-

* "Dünya fakirlere miras kalacak": Kitab-ı Mukaddes'ten bir cümle. (ç.n.)

duğu gibi– ortaöğretim matematik öğretmenlerinin "pür matematik" diye bir şeyin varlığından haberleri yoktu.

Böylece, üniversitede mühendislik eğitimine başladık. Kalkülüs, diferansiyel denklemler, lineer analiz dersleri aldık. Bütün bunlar mühendislik uygulamalarında kullanılan matematiksel teknikleri vurgulayan derslerdi. Sonra, rastlantı eseri, müfredat dışı bir ders aldık, kalkülüs sonrası bir analiz dersine yazıldık ve beklenmedik bir şekilde pür matematikle karşılaştık. Saul'un Şam yolunda başına gelenler gibi biz de bu derste adeta çarpıldık.

Geçmişimizdeki hiçbir şey bizi matematiğin estetiğine hazırlamamıştı. İlk kez, matematiği saygı ile ele alan, sembolleri tahtaya, sanki aktardıkları bilgi kadar önem hak eden şeylermiş gibi büyük bir dikkatle yazan bir profesörle karşılaşmıştık. Bu derste matematiksel bir sonuca *zarif* denildiğini duyduk. Ve zarif olduğunu da gördük.

Bu büyük bir keşif anıydı. Sanki bütün yaşamımızı büyük bir geminin ambarında geçirmiştik ve ilk kez güverteye, temiz havaya çıkarılmıştık. Birdenbire denizi gördük. W. B. Yeats'in hissettiklerini biz de hissettik:[2]

> Her şey değişti, tümden değişti:
> Korkunç bir güzellik doğdu.

O an yaşadıklarımız, bu uzun bekleyiş dönemine değerdi. Ancak biz o ana tamamen şans eseri olarak kavuştuğumuzun her zaman bilincinde olduk. Yol boyunca çok da kayıp vermiştik.

Önemsiz Şeyler

Ortaöğretim okullarında daha çok matematiksel sembollerle yapılan işlemlerin tekrarlarını içeren art arda dersler almıştık. Bu sıkıcı derslerin her biri için, bunlar iyice öğrenildiğinde bir nakil aracına benzer bir şeye sahip olacağımız gibi bir gerekçe gösterilmişti. Bu aracın bizi sınıftan çıkarıp gerçek dünya denilen belirsiz bir yere götüreceği söylenmişti. Bu yer ile matematik arasındaki bağlantı için sık sık kullandıkları sözcük "uygulama" idi.

Cebir dersinin bir uygulaması olarak, yaşı, oğlunun altı yıl sonra olacağı yaşın iki katı olan bir çiftçinin yaşını hesaplamıştık. Geometri kullanarak Nil Nehri kıyısında yer alan bazı arsaların boyutlarını, eski Mısırlıların yöntemleriyle bulmuştuk. Trigonometriyi ise, birtakım açılar bulunduktan sonra, sonu olmayan bir dizi ağacın yüksekliğini saptamak için "uygulamıştık".

Ne var ki, hayali çiftçilerin yaşı, Nil Nehri kıyısındaki arazinin boyutları, ya da ağaçların yükseklikleri bizi ilgilendirmiyordu. İçimizde bunlara ilgi duyanlar bile, bu hesaplamalar ile, ileride fizik ve kimyada karşılaşacağımızı sandığımız zor kavramlar arasında bir bağlantı olduğuna ikna olmamıştı. Bilimsel gerçeğin kendi kökenine girmek için, en az, çok ağızlı bir çakı kadar karmaşık bir alete gerek olduğundan emindik. Matematikte gördüğümüz şeyler bir dizi sıkıcı önemsiz uygulamadan ibaretti.

Diğerleri için, yani fen bilimci olmayanlarımız için, matematik daha çok bir dayanıklılık ve irade testiydi. Çiftlik, nehir ve ağaçlarda onlara ilginç gelen şeylerin, hesap kitapla hiçbir ilgisi yoktu. Onlar kırlardaki pınarları, çam ağaçlarından esen rüzgârın sesini ve pırıldayan su üzerindeki güneş ışınlarıyla ilgileniyorlardı. Matematiğin estetiğe yakınlığı, onların gözünde paslı bir alet kutusunun cilalı bir kemana olan yakınlığı kadardı.

Bu beşeri bilimciler bekliyorlardı. En az ölçüde matematik eğitimine sabırla tahammül ediyorlar, bu iş bittiğinde de matematiğin hiçbir zaman yanlarına yaklaşmasına izin vermeyeceklerine içlerinden ant içiyorlardı.

Geriye kalan bizler ise tereddüt içinde müfredata devam ediyorduk. Her matematik dersine, iki gün önce alınmış olan bisikletine yaralı dizleriyle topallayarak yaklaşan bir çocuk gibi yaklaşıyorduk. Öğretmenlerimizin söylediği gibi matematik bir vasıta olabilirdi, ama şimdiye kadar bizi istediğimiz hiçbir yere götürmemişti. Matematik şimdiye kadar bizi sadece dizlerimizin üstüne düşürmüştü.

Daha sonra, üniversitedeki kalkülüs dersi geldi, onunla birlikte de bütün umutların yıkılışı. Bütün lise yıllarında kalkülüs bir altın yüzük gibi gözlerimizin önünde sallandırılmıştı. Öğretmenlerimiz bize ondan bütün matematiksel bilgilerin kilit taşıymış gibi söz etmişlerdi. Kalkülüs ötesinde de analiz konularının var olabileceğine dair onlardan en ufak bir işaret gelmemişti. "Kalkülüs alınca matematiğin gerçekten ne işe yaradığını anlayacaksınız." demişlerdi.

Ancak, bizim karşılaştığımız, yine fiziksel uygulamalar açısından işlemler içeren bir dersti. Türevler bize hızın, integraller de alanın temsilcisi olarak takdim edilmişlerdi. Riemann İntegrali ile ters türev arasındaki tek fark birincisinin limitler arasında hesaplanmasıydı. Bu dersin amacı konusunda daha çok bilgi vermeye gerek yoktu.

Pür matematiğin varlığını ve temel kalkülüsün bize çok yanlış bir biçimde öğretildiğini beklenmedik şekilde keşfetmemiz için bir yıl daha beklememiz gerekti. Gerçek şudur: Bir fonksiyonun türevi denilen bir matematiksel kavram vardır. Bu kavram bir değişkenin bir başka değişkene göre değişme oranını ifade eder. Türev bazen hız olarak yorumlanabilir. Fakat türevin, örneğin, faiz oranları, veya olasılık yoğunluğu, ya da nüfus artışı gibi başka yorumları da vardır. Öyleyse önce türevin kendisi öğrenilmeli, uygulamalar özel durumlar olarak ele alınmalıdır.

Temel kalkülüsten tam bir yıl sonra Riemann İntegralleri ile ters türev arasındaki gerçek ilişkiyi anladık. Bu çok farklı iki kavram arasındaki bağıntının, konunun özünü oluşturduğunu ve yaratıcı insan zekâsının gerçekten büyük bir ürünü olduğunu fark ettik. Bu bağıntıyı ortaya koyan düşüncelerdeki büyük güzelliği gördük. Matematiğin, müzik ve şiirde olduğu kadar kesin bir estetik değeri olduğunu bir anda anladık.

II. Bölüm

Pür Matematik

Matematik başlıca iki ana dala ayrılır: pür matematik ve uygulamalı matematik. Bu iki dal arasındaki ayrım kesin değildir. Matematikçiler birisinin son bulup diğerinin başladığı sınırın nereden geçtiği hakkında sürekli tartışırlar. Bu tartışmalar gereksizdir. Uygulamalı matematiğin "en uygulamalı" olanının en solda, pür matematiğin "en pür" olanının da en sağda yer aldığı bir resimler dizisi düşünürsek aradaki hiçbir noktada "İşte burada insan pür matematikçi olur." diyemezsiniz, tıpkı insanın gelişimini gösteren resimlerde maymundan insana dönüşüm için kesin nokta budur diyemeyeceğiniz gibi. Ancak, insan ve maymun arasındaki fark aşikârdır, uygulamalı ve pür matematiğin uçları arasındaki fark da öyledir. Üniversitenin başka hiçbir bölümünde, çizginin bir tarafında olan matematikçi ile, bariz şekilde öbür tarafta olan matematikçi arasındaki düşmanlıktan daha şiddetli bir düşmanlık göremezsiniz.

Yıllar önce, bulunduğum üniversitedeki en üst düzeyli akademik yönetici, benden bir komitenin başkanlığını yapmamı istemişti. Bu komite, pür ve uygulamalı matematik konularındaki ayrı programları ortak bir bölüm programı içinde birleştirmekle görevlendirilmişti. Kampüste matematiksel bilimlerdeki önemli kişileri ziyaretle işe başladım. İlk ziyaretim üniversitenin en seçkin pür matematikçisine oldu. Komitenin görevini açıkladım, uygulamalı ve pür matematik programlarının birleştirilmesini gerektiren bilimsel ve yönetsel nedenleri tek tek sıraladım. Anlattıklarımın onun üzerinde yaptığı etki bir köktenci Baptist vaazının bir başpiskopos üzerinde yapacağı etki kadar oldu. Bana şöyle söyledi: "Bu işi aklınızdan çıkarın. Biz *onlarla* asla bir arada çalışmayız. Matematiğin ne olduğu hakkında en ufak bir fikirleri yoktur."

İki saat sonra, ikinci ziyaretimde kampüsteki en seçkin uygulamalı matematikçi de bana aynı şeyleri söyledi.

Her iki matematikçiye de bana zaman ayırdıkları için teşekkür ettim ve şunları söyledim: Her ikisi de ölümsüz olmadığına göre, her ikisinin de "hiçbir zaman" yapmayacakları şey üniversiteyi ilgilendirmezdi. "Uzun vadede" ise, ekonomist John Maynard Keynes'in dediği gibi, "hepimiz ölmüş olacağız". Ne var ki, bu iki ayrı programın sonunda birleştirilmesi kaçınılmazdı, çünkü üniversite, hem öğrenciler, ve hem de matematik için en iyi yolun bu olduğu apaçıktı.

Ancak o zamanlar ben, genç ve deneyimsizdim. Konuşmuş olduğum o matematikçilerin her ikisi de çoktan emekli oldukları halde, bu iki program hâlâ ayrı ayrı uygulanmakta, aralarındaki karşılıklı düşmanlık da sürüp gitmektedir.

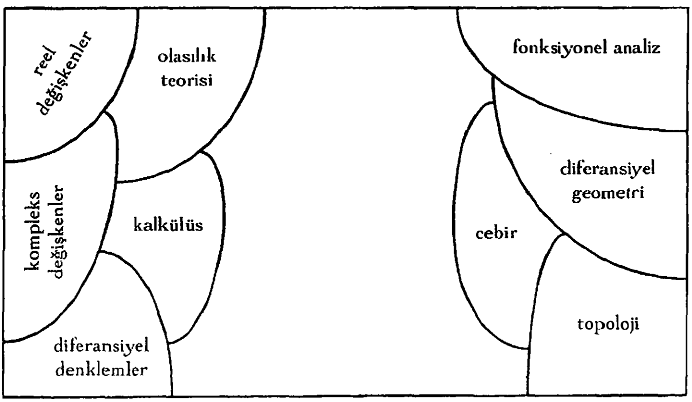
Temel olarak pür matematik, matematiğin kendisi için yapılan, uygulamalı matematik ise, "başka bir şey" için yapılan matematiktir. Uygulamalı matematiğin "başka bir şey"i, her zaman, gerçeğin bir yönüdür.

Her matematikçi için kesinlikle belirlenmiş iki ayrı dünya vardır: matematik dünyası ve gerçekler dünyası. Gerçek-dünya sizin de tahmin ettiğiniz dünyadır, yani, duyusal deneyimlerin dünyası - gördüğünüz, dokunduğunuz, hissettiğiniz dünya, yaşadığınız dünya. Bu dünyada var olan şeyler insanlar ve yer-ler, günbatımı ve pınarlar, atomlar ve okyanuslardır. Bu dünyada ölüm de vardır, hastalık ve felaketlerin var olduğu gibi. Bu, doğa dünyasıdır (iyi ya da kötü), bu dünyayı anlama ve kontrol altına alma arzusu ve gerekliliği insanoğlunun icatlar yapması ve teoriler üretmesine yol açmıştır. Bilim gereklilikten doğmuştur. Büyü ve din de öyle. Ve tabii matematik de.

Öte yandan, matematiksel-dünya bir ideler dünyasıdır. Bu dünyada yaşayan varlıklar sayılar, analitik fonksiyonlar, matrisler, diferansiyel manifoltlar (katmanlı uzaylar), diziler, topolojik uzaylar gibi matematiksel nesnelerdir.

Gerçekte, matematikte bu kitabın çerçevesi dışında kalan derin felsefi konular da vardır. Fiziksel gerçekliğin özelliklerini anlatmak niyetinde değilim. Ayrıca, görünürdeki bazı çelişkileri de önleyemem. Temel kavram kısaca şöyle ifade edilebilir: Matematiksel-dünya kafanın içinde, gerçek-dünya onun dışında yaşar.

Matematiksel-dünyayı büyük bir dikdörtgenin temsil ettiğini düşünürseniz, onu bölümlere ayırmanın bir yolu, *Mathematical Reviews* dergisinin dizininde sıralanmış olan altmış kadar matematik alanının ismini taşıyan "ülkeler"e bölmektir. Bu sınıflandırma "kategori teorisi", "kompleks değişkenler", "cebirsel topoloji" gibi isimleri olan parçalara bölünmüş soyut bir dünya ortaya koyar (bkz. Şekil 1).



Şekil 1. Matematiksel-dünya

Matematiksel-dünyayı Şekil 1'de gösterilen bölgelere ayırmak, matematiği "pür" ve "uygulamalı" olarak ayırmada olduğu gibi, belirsizliklere yol açar. "Ülkeler" arasındaki sınır bölgeleri belirgin olmayabilir. Ayrıca, bölgeler bazen birbirleriyle çakışır ve matematiğin belirli bir bölümü birden çok bölgeye ait olabilir. Örneğin, düşen bir yağmur damlasının hareketi adi diferansiyel denklem denilen bir şeyle ifade edilir, bu da, doğal olarak, matematiksel-dünyanın "diferansiyel denklemler" denilen bölgesindedir. Ancak bu denklemin temel olması Şekil 1'deki "kalkülüs" denilen bölgeye de girmesine neden olur; bu da matematiksel-dünyanın bu iki bölgesinin ara kesitinin boş olmadığını gösterir. Ayrıca, "diferansiyel denklemler" bölgesi "reel değişkenler", "kompleks değişkenler" denilen alanlarla, şekilde gösterilmiş (ya da gösterilmemiş) olan daha birçok alanla kesişir. Ancak verilen şekil tam doğru olmasa da matematiksel-dünya için elverişli bir benzetme oluşturur. Daha sonra ele alacağımız "Uygulamalı Matematik" bölümünde Şekil 1'e tekrar döneceğiz [Sırası gelmişken bazı şeyleri belirtmek isterim: *Mathematical Reviews*'taki matematik alanlarını belirten listede yalnızca "kalkülüs" adı altında bir kayıt yoktur. Sık sık adı geçtiği için Şekil 1'de böyle bir bölgeye de yer verdim. Ayrıca, matematiksel-dünyada yağmur damlaları yoktur. Yağmur damlaları gerçek-dünyada yaşarlar. Matematiksel-dünyada var olan, yağmur damlasının bir modelidir –örneğimizde bu bir diferansiyel denklemdir. Matematikçiler yağmur damlalarını değil, modelleri incelerler].

Herkes gibi matematikçi de gerçek-dünyada yaşar. Ancak üzerinde çalıştığı nesneler o dünyada yaşamazlar. Onlar öteki tarafta, matematiksel dünyada yaşarlar. O dünyada yaşayan bir şey daha vardır. Ona hakikat denir.

Hakikat

İsa elleri kolları bağlı olarak Pilatus'un karşısında dururken şöyle demişti: "Hakikatten yana olan herkes benim sesimi işitir." Pilatus şu karşılığı verdi: "Hakikat nedir?"[1] Ve sonra dışarı çıktı.

Matematikçiler filozof değildirler. İş saatlerini alışılmış felsefe sorularını tartışarak boşa geçirmezler. Ancak Pilatus gibi onlara omuz silkip geçmezler de. Matematikçiler güzellik gördüklerinde onu hemen fark ederler, çünkü onları matematik yapmaya yönelten güdü öncelikle gördükleri güzelliktir. Onlar hakikati nerede bulacaklarını da bilirler.

Matematikçiler matematik *yapar*, matematik yaparken de kendi yarattıkları şeylerle uğraşırlar. Bunlar soyutlanmış şeylerdir ve matematikçinin düş gücü dışında varlıkları yoktur. Yaratıcıları, yani matematikçiler, onlara bazı özellikler bahşetmiştir. Matematikçi bu özelliklerden, mantık ve matematik kurallarını kullanarak, başka özellikler çıkarsar. Pür matematiğin nesneleri *tam olarak algılanabilirler*, çünkü yalnız onlara atfedilen özellikler ile bunlardan çıkarsanan başka özellikleri taşırlar. Eğer çıkarsama işlemi eksiksiz ve hatasız yapılmışsa, çıkarsanan özellikler mutlak hakikate insanoğlunun yaklaşabileceği ölçüde yakın olacaktır.

Alfred Renyi adında bir matematikçi şöyle demişti:[2] "İnsanın var olmayan şeyler hakkında var olanlardan daha çok şey bilmesi ne *gizemli* değil mi?" Alfred Renyi 1970'te 49 yaşında ölen bir Macar matematikçiydi. Ardında kompleks fonksiyonlar ve olasılık teorisi konusunda hayli çalışma bıraktı. Renyi'nin çalışmaları önemlidir, ancak ben onların yeterince iyi bilinmedikleri kanısındayım. Çalışmalarına büyük saygı duyarım. Renyi aynı zamanda matematik *hakkında* da yazdı ve bunda çok başarılıydı. O, matematikçiler kuş evinde ender bulunur kuşlardandı. Çünkü matematiksel açıklamalar yazdı, bunu da özür dilemeden ve matematik yaparken gösterdiği ciddiyetle yaptı. Bundan dolayı ona daha da büyük saygı duyarım. Ancak yazdığı her şeyde onunla aynı fikirde değilim.

Yukarıdaki alıntıda italik harfleri "gizemli" sözcüğüne dikkat çekmek için ben kullandım. Çünkü Renyi'nin onu yanlış kullandığını düşünüyorum. İfade şu şekilde daha isabetli olurdu: "İnsanın var olmayan şeyler hakkında var olanlardan daha çok şey bilmesi *sıradan* bir şeydir."

Örneğin İngiliz Kralı III. Richard'ın suçlu mu, yoksa masum mu olduğu sorusunu ele alalım. İki prensin Londra Kulesi'nde öldürülmesi emrini verdi mi, vermedi mi?

Biliyoruz ki iki tane Kral III. Richard vardır. Bunlardan birisi 1452'de doğup 1485'te ölen ve 1483'ten 1485'e kadar hüküm süren gerçek bir insandır. Öteki III. Richard ise William Shakespeare'in kafasında yaratılmış olan ve *The Tragedy of King Richard III* (Kral III. Richard'ın Trajedisi) yapıtında anlatılan bir soyutlamadır.

Gerçek, çoğu şeyde olduğu gibi, tarihteki III. Richard konusunda da belirsizdir, onun hakkında bilinenler kesin değildir. Ölümünden 400 yıl sonra bile, onun küçük çocukları ölüme gönderen bir canavar mı, yoksa söylenti sonucu, ya da simgesel olarak veya doğru olmayan bilgi nedeniyle "adı kötüye çıkmış" bir insan mı olduğunu bilmiyoruz. İnsanların çoğu –Shakespeare'den esinlenerek– onun bir canavar olduğuna inanır. Diğer yanda, Josephine Tey de onun suçsuz olduğu kanısındadır. *The Daughter of Time* (Zamanın Kızı) adlı romanının baş kahramanı olan III. Richard konusunda şunları söylüyor:[3]

> Polisin bakış açısından, Richard'a karşı bir dava söz konusu değildir. Ona karşı böyle bir davanın sağlam olmayacağını, onu mahkemeye gönderecek kadar sağlam olmayacağını kastetmiyorum. Sözün tam anlamıyla, ona karşı açılacak bir dava yoktur.

Öte yandan, düş ürünü Richard için hiçbir kuşku söz konusu değildir. Oyunun dördüncü perdesinde Richard, Tyrrel'ı "kuledeki o hergeleleri" öldürmeye gönderir. Tyrrel onları öldüreceğini söylediğinde de Kral Richard haince mırıldanır: "Sesin kulaklarıma tatlı bir müzik gibi geliyor."[4]

Ancak, Shakespeare'in III. Richard'ının suçluluğu konusunda hiç kuşku olmamasına karşın, öteki III. Richard hakkında elimizde hiçbir "hakikat" yok. Onun suçlu ya da masum olması, dedenizin doğduğu gün yağmur yağıp yağmadığı kadar belirsizdir.

Asıl gizemli olan, gerçek şeyler hakkında "hakikat" denebilecek *herhangi bir şey* saptıyor olabilmemizdir. Çünkü bu anlamda hakikati saptamak için yapılan herhangi bir girişim, eninde sonunda, duyularımızı kullanmamızı gerektirir. Bugünkü hava durumunu anlamak için dışarıya şöyle bir göz atsak da, atomu oluşturan parçacıkların düzensiz hareketlerini anlamak için çağdaş deneysel fiziğin en gelişmiş aygıtlarını kullansak da, durum böyledir. Sonuçta, anlamak istediğimiz şeye *bakmak* zorundayız; ya doğrudan gözlerimizle, ya da dolaylı yoldan, buhar odasının çıkışına veya elektron mikroskopuna bakarak. Hiçbirimiz, duyularımızın bizi yanıltabileceğinden kuşku duymasa gerek. *Tek bir* başarısızlık bile, onların saptadığı herhangi bir "olgu"ya hakikat denilip denilemeyeceğini sorgulamak için yeterlidir.

Günlük deneyimlerimiz düzeyindeki insan gözlemlerinin yanıltıcılığı film senaryoları, parti oyunları ve üniversite birinci sınıf psikoloji öğrencilerinin deneyleri için bol bol hammadde sağlar. Bu durumlarda birkaç kişi aynı anda, aynı olayı gözlemlerler. Daha sonra onlardan gördüklerini anlatmaları istenir. Anlatılan gözlem verilerindeki kaçınılması olanaksız tutarsızlıklar senaryonun, ya da oyunun, veya deneyin temelini oluşturur (Sosyal bilimciler bu olguya, 1950 yapımı ünlü Japon filminden esinlenerek, "Raşomon Etkisi" derler).

Görgü tanıklarının ifadelerindeki bu kaçınılmaz –ama beklenen– tutarsızlıklar avukatları ve mahkeme salonlarını da hayli işgal eder. Bunlar, çekişmeden hoşlanan toplumumuzda "uzman tanıklığı" denilen sözde bilimsel bir mesleğin ortaya çıkmasına da neden olmuştur. Uzman görgü tanığı, dava ile ilgili konularda mahkeme ve jüri önünde daha önce normal tanıklarca yorumlanan veriler üzerinde yorum yapan yetkili ve saygın bir kişidir. Uzman tanıklığının rasyonel ve nesnel olduğu kabul edilir. Ancak her iki tarafın da birer uzman tanığı varsa işler karışır. Benim uzmanım bir şey söyler, sizinki onun tam tersini. Ve "hakikat", jürinin karar verdiği şey olarak saptanır.

İşin daha da derinine –fen bilimleri ve fen bilimci düzeyine– inildiğinde, hakikatin, yakalanması daha zor bir şey olduğu ortaya çıkar. Bilimde hakikate yaklaşım daha çok pragmatiktir. "Hakikat" gözlemlerle ve deneylerle uyuşuyor mu? Eğer uyuşmuyorsa "daha doğru bir hakikat" var demektir. Fen bilimcinin görevi de onu bulmaktır.

Aristoteles bize düzgün hareketin, ancak onu sürdürecek bir kuvvet olduğu zaman olanaklı olduğunu söylemişti. Bu "hakikat" temelde gözlemlerle uyum içindeydi. Sonra, düşen nesnelerle ilgili gözlemlerinde daha kesin sonuçlar alan Galileo tam tersini söyledi. Ancak Aristoteles'in bilimsel "hakikati" yüzyıllar boyu geçerli olmuştur. Ptolemaios MS 100 yıllarında Dünya'nın uzayda sabit olduğu varsayımından yola çıkarak gezegen hareketlerini açıklamıştı. Diğer gezegenlerin Dünya çevresinde, dairesel hareketlerin bir bileşeni olan ve episikl denilen yörüngeler üzerinde hareket ettikleri sonucuna varmıştı. Bu "hakikat" de 1500 yıldan uzun bir süre dayandı. Daha sonraları Kopernik ve ardından Kepler, gezegenlerin ve Dünya'nın çemberler veya çember bileşimi olan yörüngeler üzerinde değil, elipsler üzerinde hareket ettiğini gösterdiler. Kepler'in vardığı sonuçlar Isaac Newton'un çalışmaları ve onun aşağıdaki alıntıda nitelenen *Principia* adlı yapıtına yol açtı:[5]

> (....) bilye ve gezegenlerin, yerçekimi kuvvetleri arasındaki düzenli etkileşimler sonucu yuvarlandıkları, hareketin de durağanlık kadar "doğal olduğu" ve Tanrı'nın, onu bir kere kurduktan sonra hiçbir şey yapmasına gerek bırakmayan, on yedinci yüzyılın entelektüel zirvesini oluşturan, Newton'un saat gibi çalışan evreni.

Bu "düzenli etkileşimler" Newton'un ünlü, çekim kuvvetlerinin ters kare kuramından kaynaklanıyorlardı ve yirminci yüzyıla kadar gezegen hareketlerinin *tek ve gerçek* açıklaması olarak, hiç sorgulanmadan kabul edildiler. Yirminci yüzyılda Albert Einstein temel olan şeyin kuvvet değil, uzay-zaman geometrisi olduğunu gösterdi. Bu böylece sürüp gidiyor, bir bilimsel hakikatin yerini bir başkası alıyor ve her yeni hakikat, Jacob Bronowski'nin anlatımıyla "(....) kavramın, deneyim sonuçlarıyla sınanması ve düzeltilmesi alışkanlığı (....)" sonucu ortaya çıkıyordu. Ve yine Bronowski'ye göre "(....) basit hakikatleri deneyimle sınama alışkanlığı uygarlığın itici gücü olagelmiştir".[6]

Doğru olabilir. Gerçekten de bilimi harekete geçiren budur. Ancak sorun bu alışkanlığın bizi en sonunda "hakikat" diyebileceğimiz bir şeye götürüp götürmeyeceğidir. Yoksa bilimin, çok katlı gerçeğin katlarını birer birer kaldırıp her yeni katta yeni ve farklı bir hakikati kabul etmesi mi gerekecektir?

Dünya konusunda, bilimin bilebileceğinin ötesinde şeyler de vardır. Sir James Frazer *The Golden Bough* (Altın Dal) kitabında şöyle yazmış:[7]

> Düşünce tarihi, dünyanın bilimsel teorisinin şimdiye kadar bulunmuş en iyi teori olması nedeniyle, onun tamamlanmış ve son şeklini almış olduğu sonucuna varmamamız yolunda bizi uyarıyor. (....) Bilim nasıl kendinden önce gelenlerin yerini almışsa, kendisi de yerini, belki de, olgulara, bu kuşakta bizim hiç bilmediğimiz, tümüyle değişik bir görüş açısından bakan –gölgeleri perdeye nakşeden– daha kusursuz bir varsayıma bırakabilir. Sihirsel düşler bir gün bilimin aydınlık gerçeklerine dönüşebilir.

Gerçekten de öyle. Kesin olan tek bir şey var. Yarının gözlemleriyle değişmeyecek bir hakikat istiyorsanız onu bilimde bulmaya çalışmaz, matematikte ararsınız.

Matematikçiler Pilatus'un sorusunun yanıtını bilirler: "Sayın Romalı Vali! Hakikat, hatasız bir matematiksel argümanlar dizisinin sonunda bulduğunuz şeydir."

Araştırma

Pür matematik alanında araştırma yapmak, teknik anlamda, yeni matematik üretmek demektir. Gerçekçi bakış açısından ise, yeni olan, aynı zamanda da önemli ve anlamlı olan matematik üretmek demektir. Çünkü önemli *sayılan* araştırmalar –en azından akademisyen matematikçiler için– yalnızca "itibarlı ve kendilerine atıflar yapılan dergiler"de yayımlanan araştırmalardır. Orijinal olan çalışmalar içinde ancak herhangi bir açıdan önemli görülenler, bu dergilerde yayımlanmaya değer bulunurlar.

Buna göre teknik anlamda, *sizin için yeni olan* matematik yaptığınızda matematiksel araştırma yapıyorsunuz demektir. Pür matematikte bir problem çözdüğünüzde –çözümü önceden bilmediğinizi varsayarak– çok ufak ölçüde bir araştırma yapmış oluyorsunuz. Eğer problemi kendiniz önce kurup sonra çözmüşseniz yaptığınız şey matematikçilerin gerçekte yaptıklarına çok yakındır. Eğer icat edip çözdüğünüz problem yeni bir problemse, siz pür matematikte gerçekten bir araştırma yapmış olursunuz. Eğer bu yeni problem aynı zamanda önemli ise, yaptığınız yayımlanabilir bir araştırmadır.

Matematikte yeni olan (matematik literatürünü oluşturan çok sayıdaki kitap ve dergilerin hiçbirinde çözümü bulunmayan) bir problem bulmak zor değildir. Örneğin, şöyle bir problem ele alalım: Geçen pazar günü yayımlanan *New York Times* gazetesinde bulunan sözcük sayısına n diyelim. n'yi 17'nin karekökü ile çarpalım. Bu yeni sayıya da m diyelim. m sayısının ondalık ifadesindeki milyonuncu rakam nedir? Bu kuşkusuz yeni bir problemdir ve bunu çözerseniz henüz bilinmeyen bir matematiksel sonuç elde etmiş olursunuz. Ama pek ilginç olmayan, önemi ise ondan da az olan bir sonuç elde etmiş olursunuz. Bu yayımlanabilir matematik değildir.

Profesyonel bir matematikçi, deneyimleri ve matematik literatürüne vakıf olması nedeniyle, yalnızca çözümü yeni olan değil, aynı zamanda önemli de olan problemler bulur. Bu kolaydır. Zor olan, hem orijinal olma, hem de önemli olma özelliklerini taşıyan, aynı zamanda da çözümü araştırmacının çözüm bulma kapasitesi içinde olan bir problem bulmaktır. Matematik dergilerinde yayın yapanların çoğu bu işi rutin olarak ve iyi bir şekilde yapmayı öğrenmiş olan kişilerdir. *İyi* matematikçiler ise öncelikle *probleme* büyük önem veren matematikçilerdir. Önemi ve zarafeti olan bir problem dikkatlerini çektikten sonra onu çözmek için gerekli matematiksel yöntemler öğrenirler, yoksa da yaratırlar. Buna karşılık, *sıradan* matematikçiler yalnız bildikleri matematiği kullanmak ve bu *yöntemler*le çözülebilecek problemler bulmak eğiliminde olmakla nitelenebilirler. Bu da çalışmalarının büyük bölümünün zorlama, sonuçlarının da ilginçlikten uzak ve tekniğe dayalı olması demektir. Sıradan matematikçiler iyi matematikçilerden çok daha fazla olduğundan, her yıl yayımlanan 25.000 kadar araştırma makalesinin çoğu ilginç değildir, kalıcı değerleri de pek yoktur.

Görüldüğü gibi, matematiğin diğer bütün çalışma alanlarıyla ortak olan en az bir yönü vardır: Sıradan insanların iyi olanlardan çok, çok daha fazla olması. Bu olumlu bir özellik olmadığı gibi, şaşırtıcı da değildir. Bu, gerçekte, "sıradan" sözcüğünün bir tanımlaması da sayılabilir.

Matematikçiler genellikle yalnız çalışırlar. İki matematikçi tarafından yazılmış araştırma makaleleri, ender olmasalar da, azınlıkta kalırlar. İkiden çok yazarı olan makaleler ise pek enderdir. Bu durum, fiziksel bilimlerde yayımlanmış olan çok yazarlı makalelerin olağan sayıldığı araştırmalarla kıyaslanmalıdır. Örneğin kimya biliminde beş ya da altı yazarın adlarını taşıyan araştırma makaleleri yaygındır. Bu konuda, araştırmanın bir ekip işi olduğu ortadadır. "Baş araştırmacı" genellikle "fikir sahibi/yönetici" olup başlıca sorumu projeyi başlatmak ve yeterli mali kaynağı sağlamaktır. Araştırmanın kendisi –ki genellikle deneysel niteliktedir– birkaç doktora öğrencisi ve birkaç kıdemli personelden oluşan bir ekip tarafından yapılır.

Buna karşılık, bir matematikçi hemen her zaman yalnız çalışır. Araştırması için gelişmiş laboratuvar araçlarına gereksinim duyan fen bilimcilerden farklı olarak matematikçinin yalnız kâğıt kaleme gereksinimi vardır. Kimyacılar çalışırken, onları laboratuvarlarında ölçü aletlerini okurken, olayları gözlemlerken görürsünüz, büyük bir deney sırasında birbirlerini yönlendirdiklerine tanık olursunuz. Bir matematikçi matematik çalışırken çalışma odasında tek başına oturur; sonucunu daha genelleştirmeyi düşündüğü bir araştırmayı içeren, köşeleri kıvrık, yıpranmış bir metin üzerinde ya da kara tahtada yazılı olan formüllere uzun uzun bakar. Bu sessiz ve sakin bir iştir ve matematikçinin, bir şairin yaptığı gibi, hiçbir şey yapmadan oturup boş bir kâğıda uzun uzun baktığı "ölü zaman" içerir. Bir araştırmacı matematikçinin odasına girdiğinizde onu ayakları masaya dayalı, pencereden dışarı dalgın dalgın bakarken görürseniz ona "Affedersiniz, çalıştığınızı bilmiyordum." dersiniz. Onun yaptığı da gerçekten büyük olasılıkla budur.

Günümüzde her matematikçinin bir uzmanlık konusu vardır. Geçmişteki bazı büyük matematikçiler, örneğin on sekizinci yüzyılda Leonhard Euler, on dokuzuncu yüzyılda Carl Friedrich Gauss, matematiğin tümündeki gelişmeleri büyük ölçüde izleyebilmişlerdi. 1943'te ölen David Hilbert gibi bazı çağdaş matematikçiler matematiğin birkaç dalına katkıda bulunmuş ve Şekil 1'de görülen "ülkeler"in birkaçına ait olan yeni matematik üretmişlerdir. Örneğin Hilbert cebirde, sayılar teorisinde, fonksiyonel analizde ve matematiğin temelleriyle ilgili alanlarda önemli araştırmalar yapmıştır (Burada kullanılan "cebir" terimini lisede aynı ad altında okuduğunuz konuyla karıştırmamalısınız. Bu terim burada matematiğin "gruplar", "halkalar", "cisimler" olarak adlandırılan kümeleriyle uğraşan bir dalını ifade etmektedir. Bu kümelerin, elemanlarının çeşitli yollarla birleştirilmelerine izin veren bir yapısı vardır. Lise "cebir" dersinde okuduğunuz ise, büyük olasılıkla, sayıların temel işlem kurallarını içermekteydi). Matematikçi Ian Stewart, 1912'de ölen Henri Poincaré'nin "bütün matematiği tam olarak anlayan *son* matematikçi" olduğunu ileri sürer.[8]

Şimdilerde ise, tipik bir matematikçi kendisini matematiğin yalnız belirli bir konusunda "uzman" olarak düşünür. Çok büyük ölçüde matematik üretildiği için, araştırmasını Şekil 1'deki alanlardan birinin yalnız bir bölümüyle sınırlandırır. Konusunun cebir olmasına ve doktora çalışmaları sırasında yoğunlaştığı ilgi alanını da içermesine karşın, bu alanın uzmanlaşma için fazla geniş olduğunu fark eder. Bu nedenle çalışmalarını cebirin belirli bir dalıyla, örneğin grup teorisiyle sınırlar. Büyük olasılıkla bu alt bölge de ona baş edebileceğinden daha geniş gelir ve daha çok, belirli özellikleri olan gruplar üzerinde çalışmaya başlar. Yaşlandıkça, bir yandan araştırma oyunu tekniğini geliştirir, öte yandan da yaratıcı matematik yapma hevesini ve yeteneğini yitirir. Sonuçta uzmanlaşma alanı giderek daha da daralır; o da gittikçe daha az konu üzerinde çalışır. En sonunda da, "sabit olmayan operatörlerin uygulanabildiği sonlu, komütatif gruplarda dizilerin zayıf eş yayılımı" gibi konularda karar kılar. O zaman ürettikleri de çok özel bir konudaki araştırma makaleleridir. Bunlar da, eğer çekerse, tüm dünyada ancak bir avuç insanın ilgisini çeker.

Sonuçta, bizim tipik matematikçinin araştırma yazıları yalnız birkaç kişi tarafından okunur. Gerçekte sıradan bir matematik araştırma makalesini, iki kişi dışında, hemen kimse okumaz. Bu iki kişi de, makale yayımlanmadan önce onu yayımlanabilirlik yönünden değerlendiren "hakem" ile yazarın kendisidir.

Tipik bir matematik araştırma makalesini kimse okumadığı halde, bütün büyük üniversiteler herkesin –profesörlerin, öğrencilerin ve kurumun kendisinin– makaleden yararlandığını düşünürler. Hatta, düzenli olarak böyle makaleler yayımlamayan hiçbir kadrosuz öğretim görevlisi büyük üniversitelerde sürekli olarak kalamaz.

Bizim tipik matematikçi sayılarla (kelime oyunu yapmıyorum) matematik üretir. Bundan şunu kastediyorum: Grup teorisinin minicik bir alt dalında araştırma yapması için gerekli olan araçlara ve literatüre artık hâkimdir. Deneyimi ve eğitimi sayesinde, matematiğin kendi konusuna ilişkin olan bölümünde yayımlanan az sayıda makaleyi inceleyerek ne olup bittiğini takip etme olanağına sahiptir. Bu yayınlardaki boşlukları fark edebilir ve sonuçları yaygınlaştıracağı, veya kendi araştırmalarıyla dolduracağı eksik yerleri saptayabilir. Bunu yapabilmesi, sahip olduğu bir öngörü veya gerçek bir derinden kavrama yetisi ile değil, "mesleğin gereçleri"ni iyice öğrenmek için göstermiş olduğu sabır ve dikkat sayesindedir. Sonuçta ortaya çıkan araştırma derli toplu, genellikle doğru, ve her zaman da sıradan bir çalışmadır. Matematiği, tıpkı bir marangozun bir mutfak dolabını yaptığı gibi yapar.

Matematikçimiz tipik olduğu için sıradandır da. Matematikçi Alfred Adler, *New Yorker*'da yayımlanan ve tepkiler uyandıran bir yazısında şöyle diyor:[9]

> Kabul edilebilir ölçüde iyi matematikçi diye bir şey yoktur. Her kuşakta birkaç büyük matematikçi çıkar ve matematik diğerlerinin varlığının farkında bile olmaz. Onlar öğretmen olarak işe yararlar; araştırmaları kimseye zarar vermez, ama hiçbir önemleri de yoktur.

Doğaldır ki Adler'in "büyük matematikçiler"i bizim tipik matematikçinin yaptığı gibi matematik yapmazlar. Onlar öncelikle dikkatlerini matematiğin küçücük bir alt cümlesiyle sınırlamazlar, matematik dünyasının daha geniş alanlarını görerek o alanlarda çalışırlar. Büyük matematikçiler sayılara takılarak matematik yapmazlar. Tipik matematikçi sıradan bir satranç oyuncusunun satranç oynadığı gibi matematik yapar. Satranç oyuncusu ileriye bakıp tahtadaki taşların bir veya iki hamle sonra konulabilecekleri yerleri dikkatle inceler. Kendi kendine şöyle der: "Eğer ben piyonu buraya getirirsem o da kalesini şuraya getirir. Eğer fili buraya getirirsem atı ile üzerinden atlar ve sonra (....)" ve bu böylece sürer gider. Bu inceleme çabuk sonuçlanır, çünkü olanaklı hamlelerin sayısı çok artar ve sıradan oyuncu bunları aklında tutamaz. Sıradan matematikçi de "matematiksel hamle"lerini aynı biçimde düzenler. Ancak onun karşısında olan başka bir oyuncu değil, matematiksel literatürdür. Bizim matematikçinin yaptığı, mantıksal nesneleri bilinen kurallara göre hareket ettirip literatürdeki boşluklara atlamaya çalışmaktır. Büyük bir satranç oyuncusuna gelince o, bir kuklacının kuklaların hareketlerini yöneten iplerle oynadığı gibi, taşları ve onların hareketleri üstündeki sınırlamaları tek tek düşünmez. Büyük oyuncu daha çok "oyun"u görür. Pek anlamadığı ve üzerinde eğitilmediği zihinsel bir süreçle, tek tek hareketleri değil, oyunun akışını sürekli bir bütün olarak görür. Büyük matematikçi de, aynı şekilde, konunun özünü kavrama yetisi ve içgüdüsü ile matematiği, bir bütün olarak değilse de, büyük parçalar halinde "görür".

Büyük matematikçi, matematiği bizlerin bilmediği bir şekilde *duyumsar*. Sahip olduğu matematik dehası da hemen fark edilebilir. Gauss sekiz yaşındayken öğretmenleri sınıftan 1'den 100'e kadar olan tamsayıların toplamını bulmalarını istemiş. Çocuklar büyük bir gayretle çalışmaya koyulmuşlar. Gauss dışındaki bütün çocuklar 1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, ... toplamlarıyla işe başlamışlar. Gauss 1, 2, 3, ..., 99, 100 tamsayılarının (1, 100), (2, 99), (3, 98), ..., (50, 51) şeklinde eşlenebileceğini fark etmiş. Her bir ikilinin toplamı 101'dir ve tam 50 tane de sayı ikilisi vardır. Öyleyse aranılan toplam 50 kere 101, yani 5050'dir. Gauss bu sayıyı yazıp öğretmenine vermiş. Bütün bu iş ise yalnızca birkaç saniyesini almış.

Gauss'un matematikte görkemli bir yeri vardır ve onun gelmiş geçmiş en büyük matematikçi olduğunu ileri sürenler kanıt sıkıntısı çekmezler. Sınıfta yaptığı keskin görüşlü hesaplama, önemli matematik olmasa da, onun dehasının erken bir belirtisiydi. Onun niteliklerine sahip, ya da onunkilere yakın niteliklere sahip matematikçilerin çoğunluğunda olduğu gibi Gauss da en iyi çalışmalarını genç denebilecek yaşlarında yapmıştır. İngiliz matematikçi G. H. Hardy şöyle yazıyor: "Hiçbir matematikçi şunu aklından çıkarmamalıdır: Matematik, diğer bütün sanat veya bilim dallarında olduğundan daha çok bir gençlik oyunudur."[10]

Ayrıca, matematikte büyüklüğe erişmek için yapabileceğiniz pek bir şey de yoktur. O aşamaya erişen kadınlar ve erkekler bunu konuyu, açıklanamayacak bir şekilde, duyumsamaları sayesinde başarmışlardır. Kuşkusuz, matematik üzerinde yeterince çalışarak, sözü geçer bir matematikçi, hatta belki de sözü geçer bir araştırmacı matematikçi olabilirsiniz. Ancak bir futbol yıldızı olmayı, ya da 100 metreyi 10 saniyede koşmayı öğrenemeyeceğiniz gibi, büyük matematikçilerin yaptığı gibi matematik yapmayı da öğrenemezsiniz. Ya yapabilirsiniz, ya da yapamazsınız. Eğer *yapabiliyorsanız* bunu erkenden fark edersiniz. Eğer erişkinseniz ve bir büyük matematikçi değilseniz, ileride de olamayacaksınız demektir.

Yaratma

Pür matematikte araştırma yapmanın yeni matematik *üretmek* olduğunu yukarıda söylemiştim. Burada "üretmek" sözcüğü biraz tuhaf kaçıyor, onun yerine "yaratmak", ya da "keşfetmek" daha uygun olurdu. Ancak ben, şimdiye kadar, matematikçinin çalışmalarını tanımlamak için, üretmek ve ona benzer sözcükler kullandım, çünkü yeni matematiğin *yaratıldığı* mı, yoksa *keşfedildiği* mi sorusu matematik çevrelerince sürekli tartışılan bir konudur. Biz, kısaca da olsa, bu ayrımı incelemeliyiz.

Fiziksel dünyanın var olması gibi, matematiğin de insan eylem ve düşüncesinden bağımsız olarak var olduğu görüşü en az Platon'un felsefesi kadar eskidir. Bertrand Russell'ın sözcükleriyle, Platon "matematiksel doğrular üzerinde düşünmeye Tanrılara yaraşır bir şey olarak" bakardı.[11] Çağdaş matematiğe Platoncu bakış açısıyla yaklaşıldığında, matematik ve matematiksel doğrular hep vardırlar –çok uzaklardaki yıldızlar gibi, oralarda bir yerlerde– ve matematikçinin yaptığı da onları *keşfetmek*tir. Mutlakçılara göre bu doğrular yeni galaksilerin veya kimyasal elementlerin keşfedildikleri gibi keşfedilirler. Bu görüşe göre, deneylerle değil de düşünce yoluyla bulunmaları, onların daha önce var olmadıkları anlamına gelmez. Mutlakçıların yaptığı, sadece, eski çağların bir felsefe ilkesi olan doygunluk ilkesinin –yani bir şey düşünülebiliyorsa, o şeyin bir yerde var olduğu ilkesinin– genişletilerek matematiğe uygulanmasıdır (Burada dikkatli olmak zorundayız. Matematiksel nesneler düş gücünün nesneleridir. Matematiksel nesneler *vardır* demek, onun, matematiğin mantığı ve kurallarıyla tutarlı olacak şekilde, *düşünülmüş* olması anlamına gelir. Bu mantık, örneğin, iç açıların toplamı 200° olan üçgenlerin var olduklarını kabul etmez. Karesi negatif olan bir doğal sayıyı da kabul etmez).

Mutlakçının görüşü, örneğin, şöyle bir mantıksal sonuç içerir: Eğer bazı tür diferansiyel denklemlerin çözümlerinden oluşan *yeni* bir matematiksel nesne (buna öbek diyebiliriz) icat edersem, ve onun elemanları üzerinde gerçekleşen bazı işlemler tanımlarsam, o zaman bu yeni nesnenin bütün özellikleri, süreklilik halindeki evrende hidrojen atomu gibi, birden var olma durumuna geçer. Mutlakçılara göre bu öbek hakkındaki her bir gerçek bir anda var olur. Onlara göre, ben bu şeyi karanlık bir gece yarısında, odamda yalnız başıma *üretmiş* olsam da, bu böyledir. Başka hiçbir insan matematiksel öbeği görmüş ya da duymuş olmasa bile onun hakkındaki bütün gerçekler mevcuttur. Matematikçinin yaptığı onu keşfetmektir.

İkinci bakış açısına göre, matematiksel sistemler *yaratılırlar* ve onların, kendilerini yaratan kişiden veya onları inceleyenlerden bağımsız olan bir varlıkları yoktur. Bu görüş, soyutlamaların birbiri üstüne katlandığı ve araştırmanın nihai nesnelerinin herhangi bir fiziksel yorumdan kat kat uzakta olduğu pür matematiğin doğasıyla tam bir uyum içindedir. Örneğin, sayıların yerini benzer özellikleri olan genel nesneler alır. Bu nesnelerin kendileri de "uzaylar" oluşturur ve bu uzaylar üzerinde bazı "fonksiyonlar" tanımlanır. Hiçbir doğal şeyin soyutlaması olarak düşünülemeyecek olan dördüncü soyutlama katındaki bu fonksiyonlar matematikçinin ilgisinin temel nesnelerini oluşturur. Gerçek dünyadan bu denli uzağa düşmüş olan bu nesnelere bağımsız bir varlık sağlamak için, Platon yanlısı bakış açısını çok incelinceye kadar esnetmek gerekecektir.

Ancak, yaratım yanlısı bu görüş, son derece pür ve soyut olan bazı matematiksel yapıların çoğu kez uygulanabilir olduğunun ortaya çıkmasını açıklamayı başaramamıştır. Örneğin Riemann geometrisi, tıpkı bildiğimiz Eukleides geometrisi gibi, bir grup aksiyomdan matematiksel bir kesinlikle elde edilmiştir. Ancak Eukleides Aksiyomları, yaşadığımız üç boyutlu uzay bakımından noktalar ve doğrular hakkında "gerçek olgular"ı ifade ettiklerinden "doğal"dırlar. Bernhard Riemann 1850'de Eukleides Aksiyomları'ndan önemli farkları olan bir grup aksiyom ortaya koydu. Riemann, Eukleides'in tersine, özellikle bir doğru ile onun üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan *hiçbir* doğrunun var olmadığını varsaydı. Ayrıca, iki noktanın birden çok doğru belirleyebileceği –Eukleides ve onun ardıllarının 200 yıl boyunca aşikâr olduğunu kabul ettikleri gibi tek bir doğru değil– aksiyomunu da getirdi. Riemann'ın, doğaya aykırı olan bu aksiyomlarını kullanarak ispat ettiği sonuçlar Eukleides geometrisinin sonuçları kadar doğruydular. Ancak, aynı zamanda pür matematik dışında herhangi bir anlam taşımaları da olanaksız görünüyordu. Lobaçevski (1793-1856) ve Bolyai'nin (1802-1860) isimlerini taşıyan Eukleides-dışı geometriler de aynı durumdalar: Eukleides Aksiyomları'ndan farklı bir aksiyomlar grubundan mantık yoluyla elde edilmişlerdir, ve de bizim gözlemlediğimiz gerçek olgulardan çılgınca farklı sonuçlar verirler.

Çağdaş fizikçiler, Einstein'ın fikirlerinden hareketle, gerçek uzayın Eukleides uzayı olmayıp Riemann'ınkine daha yakın olduğunu keşfettiler. Bu keşif, matematiğin değerinin, matematikçinin gerçek dünyadan, tahmin yoluyla, "doğru aksiyomları" bulmasında ve gerçeği yansıtan eşsiz teoremler ortaya koymasında yattığını düşünen kişiler arasında şaşkınlık yarattı. *Mathematics in Western Culture* (Batı Kültüründe Matematik) kitabının yazarı Morris Kline şöyle der:[12]

> Eukleides-dışı geometrinin yaratılması, gerçeklik tarlasına dalan bir tırpan etkisi yapmıştır. (....) Matematiği bir gerçeklikler koleksiyonu olma konumundan yoksun bırakmakla, Eukleides-dışı geometriler insanın en saygın gerçeklerini ve hatta herhangi bir şey hakkında kesinliğe ulaşma umudunu çalıp götürmüştür.

Kuşkusuz Riemann ve diğerleri böyle bir şey yapmadılar. Bütün yaptıkları, matematiğin öteden beri yaratıldığı yöntemle, yani aksiyomlar belirleyip teoremler kanıtlama yoluyla, yeni matematik *yaratmak*tı. Aksiyomların "doğal olmaması" matematikçiyi ilgilendirmez. Kaldı ki, bu Eukleides-dışı geometrilerin 1915'te Albert Einstein'ın genel görecelik teorisi için gerek duyduğu modeli sağlamaları, fiziksel evrenin gerçek geometrisini doğal Eukleides geometrisi değil de bu geometrilerin sağlıyor görünmesi matematikçi için hiçbir önem taşımaz, sadece, pür matematiğin aşırı soyut dünyasında araştırma yapılmasını haklı kılan ve sıkça kullanılmış olan gerekçeyi sağlar. Bu gerekçe şunu öne sürer: Her matematik araştırması, gerçek dünyaya uygulanabilir olmanın potansiyel değerine sahiptir.

"Akla uygun" geometrilerin aşikâr olmayan aksiyomlardan çıkması ve böylece matematiğin, *önsel* bir evrensel gerçeklikler kümesi değil de, düş gücünün bir bulgusu olduğunun daha açıkça belli olması, mutlakçıları rahatsız edebilir. Ancak yaratım yanlıları buna aldırmadan *yaratmayı* sürdürüyorlar. Gerçek gizem, acayip birtakım pür matematik sonuçlarının gerçek dünya olgularına uygulanabilir olmasında değil, pür matematikteki *her* sonucun bu özelliği taşımasındadır.

Pür matematiğin doğası hakkındaki bu yaratma/keşfetme tartışmasının farklı bir yönü David Billington'un *The Tower and the Bridge* (Kule ve Köprü) adlı ilginç kitabında dile getirilmiştir. Princeton'da inşaat mühendisliği profesörü olan Billington mühendisliğin ve teknolojinin uygulamalı bilimle aynı şey olduğu yolundaki "yanlışlığı" tartışır ve şöyle der:[13]

> Mühendislik ve teknoloji daha önce var olmayan şeylerin yapılmasını içerir, buna karşın bilim çoktan beri var olan şeyleri keşfetmektir. Teknolojinin sonuçları insanlar onları yapmak istedikleri için var olan biçimlerdir, halbuki bilimsel sonuçlar insanların isteklerinden bağımsız olarak var olan şeylerin ifadeleridir.

Billington mühendislerin *yarattıkları*nı, fen bilimcilerin ise *keşfettikleri*ni söylemektedir. Bu görüş matematikçilerin tepeden baktıkları mühendisleri kendi saflarına katmakta; hiçbir pür matematikçinin pek önemsemediği, ancak parasal kaynak bulma nedeniyle ilgi gösterdiği fen bilimcileri de mutlakçıların yanına koymaktadır.

Billington yanılmış olabilir, ama inandırıcıdır. "Estetiğin yapısal sanatçı için merkez oluşturduğu"ndan söz ettiğinde, "yapısal sanatçı" ile kastettiği şeyin belirli bir mühendis tipi olduğunu algılamanız, mühendislerle matematikçilerin işbirliğini daha sağlam bir hale getiriyor.

Mühendislerin, en üst düzeylerde, matematikçilerle aynı güdülere sahip olmalarının oldukça garip olduğu düşünülebilir. Çünkü matematikçiler mühendislerin matematik konularında ciddi olarak eğitilmeye değer olmadıkları görüşündedirler. Beşeri bilimcilerin de mühendislere bakışı aynen öyledir. Halbuki rasgele seçilmiş bir mühendis, sanat ve beşeri bilimler konularında, bir oda dolusu beşeri bilimcinin teknoloji hakkında bildiğinden daha çok şey bilir.

Şimdi, konumuza devam etmemiz ve matematikçilerle en çok ilişkili olduğu düşünülen nesneleri ele almamız gerekiyor.

III. Bölüm

Sayılar

Matematiksel kavramlar başlangıçta doğal nesnelerden esinlenmişlerdir, çünkü matematik, doğayı anlama çabası olarak gelişmiştir. Bunu en belirgin olarak Eukleides geometrisinin doğru, üçgen, ve diğer şekillerinde görebiliriz. Bunların özellikleri, gerçek dünyada onlara karşılık geldiklerini sağduyumuz ile anladığımız kavramların özelliklerine tıpatıp uymaktadır. Ancak yine de Eukleides geometrisinin geometrik şekilleri soyut nesnelerdir ve gerçek dünyada değil, matematiksel-dünyada yaşarlar. Üçgen, bir matematikçinin zihninde var olan bir nesnedir. Bu nesne Eukleides geometrisinin aksiyomlarının özelliklerine ve onlardan mantık yasaları ve matematik kurallarıyla çıkarılan özelliklere sahip olmak zorundadır. Matematiksel nesnelerden elde ettiğimiz özelliklerin "üçgenler"e benzeyen gerçek dünya nesneleri hakkında bilgi veriyor gibi görünmesi olağanüstü bir şeydir. Ancak bu matematik değildir. Matematik, nesnelerin gerçek dünyasında değil, matematiğin ideler dünyasında yapılır.

Doğal sayılar matematiğin en temel nesneleri oldukları halde, doğada bulunmazlar. Bu sayılar bildiğimiz sayma sayıları olan 1, 2, 3, ...'tür. Bu sayılar, ta eskilerde, aynı "büyüklük"te olan nesne grupları arasında neyin ortak olduğunu anlama çabalarının soyutlamalarıdırlar. Örneğin "3" sayısı, koyunlar üçlüsü de olsa, üçüncü dereceden denklemlerin çözüm üçlüsü de olsa, bütün üçlü gruplarda ortak olan şeydir. Ancak bu "ortak olma" durumu bir soyutlamadır ve gerçek dünyada "3" yoktur. Fiziksel bir "3" yaratmayı başaramazsınız, tıpkı bir duvara bir ejderha resmi yapmakla onu yaratmayı başaramayacağınız gibi. Ejderhalar ve "3"ler kavramdırlar, fiziksel nesne değildirler. Ejderhaların *resimleri* ve "3"lerin *sembolleri* ise fiziksel nesnelerdir.

Sayma sayıları olan 1, 2, 3, ... 'te, son derece doğal olan bir şey var, zaten onlara salt bu nedenle doğal sayılar denmiş. Yüzyıllarca önce, matematik gelişmeye ilk başladığında, sistematik bir şekilde kullanılan ilk sayılar da bunlardı. Çocuklukta saymayı daha yeni yeni öğrenirken karşılaştığımız ilk sayılar yine bunlardır. On dokuzuncu yüzyılda matematik aşırı karmaşık hale gelip "sayma" işlemi için kullanılabilecek bir sürü acayip nesne ortaya çıktıktan sonra bile, matematikçi Leopold Kronecker bu sayıların temel olma özelliklerinin sürdüğünü şu sözlerle belirtir: "Tanrı doğal sayıları yarattı, onun dışındakileri de insan."[1]

Ancak doğal sayılara dinsel özellik yükleyen ilk kişi Kronecker değildi. Çok daha önceleri, MÖ 540 yılı sıralarında Pythagoras adında bir Grek bir ölçüde dinsel, bir ölçüde de matematiksel olan bir okul kurdu. Pythagorasçılar doğal sayılara gerçekten tapıyorlardı ve tüm evrenin bu sayılardan ve onların oranlarından meydana geldiğine inanıyorlardı. Onlara "eril", "dişil" ve "dost" gibi isimler verdiler. Doğal sayıların oranları ile müzikteki gam arasındaki ilişkiyi de keşfedince bunu, hareket eden gezegenlerin "göklerin müziği"ni seslendirerek bu sayıların ilahi olduklarını gösterdikleri yolunda bir inanca dönüştürdüler. Kronecker'e göre doğal sayıları tanrı yaratmıştı. İlk Pythagorasçılar için ise bu sayılar *Tanrı'nın kendisiydi*ler.

Ünlü Pythagoras Teoremi herhangi bir dik üçgende hipotenüsün –uzun kenarın– uzunluğunun karesinin, diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşit olduğunu söyler. Bu teoremi ilk ispatlayanların Pythagorasçılar olduğu sanılmaktadır. "Pythagoras" adı da en çok bu teoremle anımsanır. Bu teoremin Pythagorasçılar için çok büyük sıkıntıya yol açmış olması ise bir paradokstur.

İki dik kenarı birbirine eşit olan bir dik üçgen düşünün. İşi basitleştirmek için, her iki kenarın tam olarak 1 birim uzunluğunda olduğunu varsayalım. Pythagoras Teoremi bize hipotenüsün uzunluğunun karesinin 2'ye eşit olduğunu söyler. Bu nedenle hipotenüsün uzunluğu, karesi alındığında tam olarak 2 olan bir sayıdır. Ama karesi 2 olan bir doğal sayı yoktur, çünkü 1'in karesi 1'dir ve 2, 3, 4, ... sayılarının her birinin karesi 2'den büyüktür. Öyleyse oranlarının karesi alındığında 2'ye eşit olan iki doğal sayının var olması gerekir. Bu doğal sayılara a ve b dersek, söylediğimiz $(a/b)^2 = 2$'dir (Baskıda, dizgi kolaylığı nedeniyle $\frac{a}{b}$ kesiri genellikle a/b şeklinde yazılır. Bu iki sembolün anlamları aynıdır).

Kenarları 1 birim uzunluğunda bir kare ile başlayarak da aynı argümanı öne sürebiliriz. Bir köşegen çizersek kareyi, kısa kenarlarının uzunluğu 1'er birim olan iki üçgene bölmüş oluruz. O zaman Pythagoras Teoremi bize, karenin köşegeninin, karesi 2 olan bir sayı olduğunu söyler (Bu tümcede "kare" sözcüğü iki kez ve iki değişik anlamda kullanılmıştır. Birinde dört kenarı olan bir geometrik şekil için, diğerinde bir sayıyı kendisiyle çarpma işlemi için kullanılmıştır. Tek bir sözcüğün çok anlamlı olarak kullanılmasına –matematik diliyle– ancak ikisini birbirine karıştırma olanağı yoksa izin verilir. Ne yazık ki bir matematikçi için çok aşikâr olan bir şey başkaları için o ölçüde belirgin olmayabilir).

Böylece Pythagorasçıların *matematiği* onları, karenin köşegeninin, kendisiyle çarpıldığı zaman 2 veren bir sayı olduğu sonucuna götürmüştü. *Dinleri* ise bu sayının iki doğal sayının bölümü olduğunu söylüyordu. Matematikleri doğruydu; dinleri yanlıştı. Çünkü Pythagorasçılar, yine kendi matematiklerini kullanarak, *herhangi* iki doğal sayının bölümünün karesinin 2'ye eşit olmasının da olanaksız olduğunu ispatlayabiliyorlardı. Ancak bunu yapmakla kendilerini hem harcamış, hem de küçük düşürmüş oldular. Çünkü bu sonuç dinsel inançlarına tersti. İlk tepkileri bu sonucu gözden uzak tutmak oldu.

Herhangi iki doğal sayının oranının karesinin 2 olamayacağını kanıtlamak kolaydır. "Estetik" konusunu tartışırken bu konuya tekrar döneceğiz (Bir matematikçi –yazarken veya ders verirken– sık sık bazı teoremlerin ispatlarını boş geçer. İspatın ya "kolay" ya da "aşikâr" olmasını neden gösterir. "Kolay" dediğinde okuyucu veya dinleyicinin ispatı yardım gereği duymadan yapabileceğini; "aşikâr" dediğinde ise kendisi için aşikâr olduğunu kasteder. Bu ispatlamaktan kaçınma yollarından birincisi *sindirme*, ikincisi ise kendisini *büyük otorite* olarak gösterme yöntemidir).

Çağdaş terminolojide 3/4 (ya da bunların negatifleri veya sıfır sayısı) gibi doğal sayıların oranları olan sayılara "rasyonel sayılar" denir. Bu terminolojiyi kullanırsak Pythagorasçıların ikilemi şu şekillerde ifade edilir: "Karesi 2 olan hiçbir rasyonel sayı yoktur," ya da, "2'nin karekökü rasyonel değildir." Pythagorasçılar doğruların uzunluklarından söz etmekten hoşlandıklarından, aynı şeyi şu şekilde ifade etmişlerdi: "Bir karenin köşegeninin uzunluğu kenarlarının uzunluğu ile orantılı değildir." Bununla, bir karenin kenar uzunluğu ne kadar küçük aralıklara bölünürse bölünsün, köşegenin bu aralığın bir tam katı olamayacağını kastediyorlardı. Bu orantılı olmama ifadesi ile karekök 2 hakkındaki ifadenin özdeş olduğunu görmek güç değildir. Bu ifadelerin her ikisi de, Pythagorasçıların dinsel inanlarını yok etmeye; öte yandan da, eğer matematiğin bir değeri olacaksa, onun, doğal sayılar ve onların oranlarından oluşan sayılardan daha karmaşık sayıları da içerecek biçimde zenginleştirilmesi gereğine onları ikna etmek için yeterlidir.

Ve bu zenginleştirme gerçekleşmiştir. Günümüzde matematik pozitif sayılar yanında negatif sayıları da, ayrıca "irrasyonel sayılar" dediğimiz 2'nin karekökü gibi sayıları da içermektedir.

Bunlardan başka transandantal sayılar, cebirsel sayılar, ve bütün bunlardan daha gerçek dışı olan ve sanal dediğimiz sayılar vardır. Matematiği gereğince değerlendirebilmek için, bu "daha yüce" sayılar hakkında hiç olmazsa sezgisel bir bilgi edinmek ve bunların nasıl geliştiği hakkında bir fikir sahibi olmak gerekir. Bu gelişimi, Kronecker'in de bizden beklediği gibi, doğal sayılardan başlayarak ele alacağız.

Aksiyomlar

Matematikçilerin bildiği, başkalarının ise bilmediği şeylerden biri de şudur: Bütün matematik *küçük bir temel kurallar grubunun kaçınılmaz sonucu*dur. Bu kurallara aksiyom denir. Matematiği geliştirmeye çeşitli aksiyom gruplarıyla başlayabilirsiniz. Normal çalışmaları sırasında matematikçi bu aksiyomları ender olarak dikkate alır; aksiyomlardan yola çıkıp sonuca götüren bütün adımları da her keresinde tekrarlamaz. Tipik bir matematikçi araştırmasına konunun temellerinden çok uzak olan bir yerden başlar ve, eğer başarabilirse, daha da uzakta olan bir yerde bitirir. Yine de, her matematikçi aksiyomların var olduğunu, onlardan başlayıp mantık ve dikkat kullanarak, adım adım, matematiğin başlangıcından doğrusal topolojik uzaylar konusundaki en son araştırma yazısına kadar olan bütün gelişmeyi yeniden yaratabileceğini bilir. Ayrıca, her profesyonel matematikçi, kendisine kâğıt, kalem ve yeterli zaman verilirse, bu işi bir odaya kapanıp, hiç yardım almadan tek başına yapabileceğine de inanır.

İnsanların geri kalanını dehşete düşüren böyle bir şeyi profesyonel matematikçiye günlük uğraş olarak yapma güvenini sağlayan da –her şey kadar– bu inançtır. Ayrıca, konunun bu şekilde gelişebileceğini bilmek, matematikçiye, bizlerin göremediği bir şekilde, matematiğin tümünü kapsayan bir görüntü sağlayacaktır. Bu görünüm için Bertrand Russell şunları söylüyor:[2]

> Bütün matematiğin küçük bir grup temel yasanın kaçınılmaz sonucu olarak geliştiğinin keşfedilmesi, matematiğin bütününde var olan entelektüel güzelliği ölçüsüz derecede artırır. Çoğu

> çıkarım zincirlerinin, doğaları gereği, parça parça ve tamamlanmamış olmasından çok bunalmış olanlar için bu keşif, bir aydınlanmanın karşı konulmaz gücüyle birden açığa çıkar; İtalyan Alpleri'ne tırmanan bir dağcının sonbahar sisleri arasından birden ortaya çıkan bir saray görmesi gibi, matematiksel yapının haşmetli katları art arda ve her bölümünde yepyeni bir kusursuzlukla belirirler.

Gerçekten de öyledir. Ancak sarayı yalnızca matematikçiler görür, başka hiç kimse sislerin ötesini göremez. Ne matematiği ondan nefret edene kadar almış olan beşeri bilimciler ne de her çalışma gününü matematiksel yamaçları şerpalar gibi tırmanarak geçiren ve sadece parçalar halinde gören, bütünü kapsamayan bir bakıştan ötesine gidemeyen fen bilimciler bunu görebilirler. Lancelot büyük günahlar işlemişti, ama yine de Kutsal Kâse'yi görmesine izin verilmişti. Ancak dünyadaki en büyük şövalye olsanız bile matematiğin Kutsal Kâse'sini göremezsiniz, tabii eğer matematikçi değilseniz. Matematiğin "tümünün entelektüel güzelliği" matematikçiler dışında herkes için görünmezdir. Bu görünmezlik, ne yazık ki, matematik eğitimindeki başarısızlığın bir başka işaretidir.

Russell'ın yukarıdaki sözleri 1902'de yazılan "The Study of Mathematics" (Matematik Üzerine) adlı bir makalede yer almıştır. 1931'de Kurt Gödel[3] "tutarsızlık" ve "eksiklik" konularındaki ünlü teoremlerini yayımladı. Bu sonuçlar, esas itibariyle, matematiğin tutarlılığının, yani çelişkiler içermediğinin, matematiksel mantık yoluyla kanıtlanamayacağını, ayrıca, matematikte ne doğru oldukları ne de yanlış oldukları kanıtlanamayacak ifadeler bulunduğunu dile getirirler. Gödel'in teoremleri matematiğin temellerine indirilmiş bir darbeydi. Bundan başka, mantık yasalarının, en sonunda, bütün matematiğin tutarlı olduğunu ispatlayacağını göstermek için çok çalışmış olan Russell gibi matematikçiler için de özellikle umut kırıcıydı. Harvard Üniversitesi'nden Michael Guillen'e[4] göre, on dokuzuncu yüzyıl sonlarında başlayan çalışmaları, matematiğin kesinliğinin ispatlanabilir olduğu umuduna, belki de inancına dayanan Russell "düş kırıklığı"na uğramıştı.

Ancak, Russell'ın 1902'de söylemiş olduğu, *var olan* herhangi bir matematiksel sonucun geriye doğru izlenerek küçük bir grup aksiyomdan çıkarılabileceği yolundaki sözleri yine de geçerliğini korumaktadır. Gödel'in eksiklik teoremi, doğru veya yanlış oldukları ispatlanamayacak matematiksel ifadeler bulunabileceğini dile getirir. İspatı var olan teoremler için ise hiçbir şey söylemez.

Gödel'in bu önemli sonuçları, tahmin edileceği gibi, birçok matematikçinin matematiğin temelleri konusundaki düşüncelerini değiştirdi. Matematik dışı kişiler için yazılan makale ve kitaplarda ise durum biraz fazla abartıldı. Örneğin Morris Kline bu sonuçları "paramparça edici" olarak niteler.[5] Ian Stewart da Gödel'in "bütün çalışmaların üstüne su sıktığını" söyler.[6] Michael Guillen ise Gödel'in "mantığı matematikçinin dünyasındaki merkezinden çıkardığını" ileri sürer.[7]

Bütün bunlar doğrudur. Russell gibi pür mantıkçı olan birisi için "harikulade kesinlik"in kaybı demek olan şey, normal bir matematikçi için sadece seçkin bazı kişileri ilgilendiren özel bir merak konusudur. Matematik üreten tipik bir matematikçi belirli teoremlerle ilgilenir; olanaklı olan *bütün* teoremlerin tutarlılığı veya olasılığı ile değil. Matematik üreten bir matematikçi bıkıp usanmadan, yılmadan, bazı temel yasalardan yola çıkarak teoremler ispat etme işini normal olarak sürdürür. Mantıkçılar, mümkün olan bütün teoremlerin ispatlanabilir olmamasının matematikçileri üzdüğünü düşünürler. Matematikle uğraşan kişi de sadece ispatlarını verebileceği belirli teoremler üzerinde çalışır.

Sayı sisteminin elde edilebileceği "temel yasalar" grubuna, matematikçi Guiseppe Peano'nun (1858-1932) anısına, Peano Aksiyomları denir. Profesör Peano işe doğal sayılar adını verdiği bir nesneler kümesinin var olduğunu önceden kabul ederek başlar. Bu nesnelerin kendileri tanımlanmamışlardır. Peano onların beş aksiyomu sağladıklarını kabul eder. Bu aksiyomlar şunlardır:

Aksiyom A: Verilen küme boş değildir. 1 adı verilen bir nesne içerir.

Aksiyom B: Her doğal sayı için onun ardılı denilen başka bir doğal sayı ve yalnızca bir doğal sayı vardır.

Aksiyom C: Ardılı 1 olan hiçbir doğal sayı yoktur.

Aksiyom D: İki doğal sayının ardılları eşitse doğal sayılar da eşittir.

Aksiyom E: Eğer herhangi bir doğal sayı topluluğu 1'i içeriyorsa, ve herhangi bir doğal sayıyı içerdiğinde o doğal sayının ardılını da içerme özelliği varsa, o zaman bu topluluk gerçekte bütün doğal sayıları içerir.

Bu aksiyomlar hakkında birkaç noktaya dikkat çekmek gerekiyor. İlk olarak, sonuncusu dışında bütün aksiyomlar basittir ve teknik nitelikte değildir. Burada sözcüklerle ifade edilmişlerdir; ama Peano onları sembollerle ifade etmişti. Bu şekilde ifade edildiklerinde yalnızca üç şeyi betimledikleri kolayca görülür. Bu üç şey *doğal sayı*, *1*, ve *ardıl* kavramlarıdır. Aksiyomlar bu üç kavramın sağlayacağı kuralları belirlemektedir. Matematiksel analiz için gerekli olan bütün sayılar da bu basit kurallardan elde edilebilir.

Ayrıntılara girmemize gerek yok. Ancak bu aksiyomlardan sayıların nasıl bir yaklaşımla çıkarıldığını anlamamız gerekiyor; çünkü bu pür matematiği tanımlayan yaklaşımın ta kendisidir. Bertrand Russell'a tekrar dönelim. *Mysticism and Logic* (Mistisizm ve Mantık) kitabında şunları söylüyor: "Pür matematik, 'eğer bir şey hakkında şu ve şu önermeler doğru ise, o şey hakkında şöyle ve şöyle (farklı) bir önerme de doğrudur' şeklindeki savlardan oluşur."[8] Bu demektir ki pür matematik bazı önermelerin diğer bazı önermeleri gerektirdiği savlarından ibarettir.

Matematik,

p gerektirir q

şeklindeki savların incelenmesidir. Burada p ve q'nun her ikisi de Şekil 1'deki matematiksel dünyada yaşayan nesnelere ilişkin ifadelerdir ("Felix bir kedidir, öyleyse Felix bir hayvandır." matematiksel olmayan bir çıkarım örneğidir). Pür Matematik, p veya q önermelerinin doğru olup olmadıklarıyla değil, sadece "Eğer p doğru ise o zaman q da doğrudur." savının geçerli olup olmadığı ile ilgilenir. Russell, p veya q'nun doğru olup olmaması konularının *uygulamalı* matematiğe ait olduğunu söyler. Bunda haklıdır da. Bu noktaya ileride tekrar döneceğim.

Konumuz pür matematik olduğu için bu konunun "p gerektirir q" şeklindeki savlardan oluştuğu görüşü ne kadar kuvvetle vurgulansa azdır. Söz konusu olan p'nin doğru olup olmaması değildir (Eğer bu çıkarımın doğruluğu ispat edilmişse, p doğru olduğunda q'nun da doğru olacağı aşikârdır. Bu da *ispat* denilen şeyin ta kendisidir). Bir matematikçi, üniversitenin birinci sınıfındaki kalkülüs dersinde, türevi alınabilen bütün fonksiyonların sürekli olduğunu ispat ettiğinde, herhangi bir fonksiyonun türevinin alınabildiğini, hatta böyle bir fonksiyonun var olduğunu iddia etmez. İddia ettiği şudur: eğer verilen bir fonksiyonun türevi alınabiliyorsa, *o takdirde* o fonksiyon aynı zamanda süreklidir de.

Eğer pür matematiği anlamak istiyorsanız ilk önce çıkarsamalar hakkındaki bu noktayı kavramanız gerekir. Bütün pür matematikçiler için bu kavrayış adeta onların vücut dokularının bir parçasıdır, onlar için soludukları hava kadar doğaldır. *Matematiği anlayanlarla anlamayanları ayırt edici açıkça tanımlanmış olan üç özellikten biri bu kavrayıştır.*

Peano Aksiyomları'ndan sayı sisteminin elde edilmesi "p gerektirir q" şeklindeki ifadelerin oluşturulmasından ve bunları ispat etmekten ibaret olacaktır. Aksiyomlardan uzaklaştıkça gerekli savları ortaya koymak için yeni nesneler tanımlamak zorundasınız. Ancak yaptığınız her tanımlama ilk aksiyomlarla tutarlı olmalıdır ve her yeni savın ispatı yalnızca aksiyomları ve daha önce ispatlanmış olan savları kullanmalıdır. Bu nedenle geliştirmenin her aşamasında yalnız aksiyomatik olarak varsaydığınız şeyleri veya aksiyomlardan ispatladığınız şeyleri kullanabilirsiniz. "Yalnızca" sözcüğü elzemdir. *Onun elzem olduğunun kavranması matematikçilerin sahip olduğu ve onu başkalarından ayıran ikinci temel özelliktir.*

Peano Aksiyomları'ndan sayı sisteminin nasıl elde edileceğini öğrettiğinizi ve tahtaya aksiyomları yazdığınızı varsayalım. Tam E aksiyomunu yazmayı bitirdiğiniz sırada ön sırada oturan bir öğrenci size sorar: "Hocam, bütün bunlar bize 2 artı 2 için ne söylüyor?" Nasıl yanıtlayacaksınız?

Yanıt (Bir matematikçi "Yanıt, *doğaldır ki* şudur." der), öğrencinin sorusunun anlamsızlığı yolunda olacaktır. Çünkü bu aşamada doğal sayılar hakkında bütün bildiklerimiz aksiyomların bize söyledikleridir ve onlar da bize toplama hakkında bir şey söylemiyorlar. Hatta bu aşamada "2"den söz etmek de anlamsız oluyor. Aksiyomlardan bütün öğrendiklerimiz, tek bir doğal sayının adıdır, yani,1 sayısıdır. "2"den söz etmeden önce bu sembolün anlamını tanımlamamız gerekir.

Dekan olduğum sırada bir grup sosyal bilimciye bir konferans vermiştim. Beni takdim eden kişi matematik ve matematikçiler hakkında espri yapmak istedi; herkesin bildiği bayat bir fıkranın değişik bir versiyonunu anlattı. Fıkra şöyle: "2 artı 2 kaç eder?" diye soruyorsunuz. Aldığınız yanıt sorduğunuz kişinin mesleğine göre değişiyor. Muhasebecinize sorarsanız yanıtı "Kaç olmasını istiyorsunuz?" oluyor. ABD başkanı "2 artı 2, 4 milyar eder." diyor. Psikanalizciniz ise, "Şuradaki divana uzanın ve bunu neden bilmek istediğinizi bana anlatın." yanıtını veriyor.

Söylediğim gibi eski bir fıkra. Ancak takdimci onu kokteyl sonrası bir saatte anlattığı için kendisi de, dinleyenler de eğlenceli buldular. Sonra şunları ekledi:

> Ancak konuşmacımız bir matematikçi. Bir matematikçiye "2 artı 2 kaç eder?" diye sorarsanız yanıtı bilmediğini söyler. Ama *eğer* 1 artı 1, 2 ederse, *o takdirde* 2 artı 2'nin de 4 ettiğini çok iyi bilir.

Takdimci gülümsedi, dinleyiciler de kahkayı bastılar. Ben ciddi bir ifadeyle podyuma yürüdüm ve fıkranın aslında hiç de bir fıkra olmadığını, sorunun tam doğru yanıtı olduğunu söyledim.

Dikkat ederseniz Peano Aksiyomları'nı 1'den 5'e kadar olan tamsayılarla değil A'dan E'ye kadar olan harflerle gösterdim. Öyle yaptım, çünkü bu aşamada 1'den sonra gelen hiçbir sayının henüz ismi yok. Gerçekte, "sonra gelen" kavramı da belirlenmiş değil. Bütün bildiğimiz, Aksiyom A'dan, 1 denilen bir sayının var olduğu, Aksiyom B'den de her sayının tek bir ardılı olduğudur. Ayrıca, Aksiyom C'den, 1'in ardılının 1 olmadığını biliyoruz; yani, 1'in ardılı 1'den farklı olan bir sayıdır. İstersek bu sayıya bir isim verebiliriz. İstiyoruz; 1'in ardılına 2 adını veriyoruz.

Bu şekilde devam etmeye çalışmak çok doğal. Yine Aksiyom B'den 2 sayısının bir ardılı olduğunu biliyoruz. Bu sayıya hemen 3 adını vermek akla geliyor. Ancak o kadar aceleci olmamalıyız. Çünkü ön sıradaki o parlak öğrenci bize derhal 2'nin ardılının 2'nin kendisi olmadığını nereden bildiğimizi soracaktır. Aksiyomlar 2 hakkında bir şey söylemiyorlar ki! Öyleyse önce şunu ispatlamamız gerekiyor:

Teorem: Herhangi bir doğal sayının ardılı, sayının kendisinden farklıdır.

Bu teoremin ispatı zor değildir, ancak denediğiniz zaman bir ön sonuca gerek olduğunu görüyorsunuz:

Teorem: Farklı doğal sayıların ardılları da farklıdır.

Bu nedenle önce ikinci sonuç ispat edilir, sonra da birinci teorem.

Bu iki teoremin ispatlarını burada vermeyeceğim çünkü onlar kitabın amacı dışında kalıyor. Sizin yalnızca ilk teoreme neden gerek olduğunu görmenizi istiyorum. 2'nin ardılının 2'den farklı olduğunu kanıtlamadan önce ona yeni bir isim veremezsiniz. Matematiği anlayan kişilerin ikinci özelliği dediğim şey için bu iyi bir örnek oluşturuyor. Yani, matematiği geliştirmenin herhangi bir aşamasında *bildiğiniz*, yalnızca aksiyomların verdikleri veya daha önce *ispatlamış* olduğunuz şeylerdir.

Birinci özelliğe –pür matematiğin, "*p* gerektirir *q*" şeklinde savlardan ibaret olma özelliğine– gelince, birinci teoremin şu şekilde yazılabileceğine dikkatinizi çekerim.

Teorem: Eğer *y* *x*'in ardılı ise *y* *x*'e eşit değildir.

Bu ifade artık açıkça "*p* gerektirir *q*" şeklinde bir savdır; burada *p* ifadesi "*y* *x*'in ardılıdır" ve *q* ifadesi de "*y* *x*'e eşit değildir" şeklindedir.

Matematiği gerçekten anlayanların paylaştıkları üçüncü ortak özellikten henüz söz etmedim. Bu özellik, aksiyomların, tanımların ve savların ispatlarında kullanılan ifadelerde tam kesinlik zorunluluğunun kavranmasıdır.

Matematiğin amaçladığı, yaklaşık doğru değil, tam doğrudur. Sonuca ulaştıran işlemlerin tümünde kesinlik olmazsa matematiksel sonucun doğruluğu da kesin olamaz. Örneğin, eğer iki tek sayının çarpımının tek olduğunu ispatlamak istiyorsanız ("tek" ve "çarpım" kavramlarının tanımlandığını varsayarak) bunu, *herhangi* iki tek sayı için yapmanız gerekir. Sonucun 3 x 5 ve 7 x 9 ve 65 x 45 veya hatta aklınıza gelen bütün tek sayı çiftleri için doğru olduğunu gözlemlemek yeterli değildir. Sonucu *herhangi* iki tek sayı için kanıtlamanız gerekir, ispatın her aşaması belirli ve kesin olmalıdır ve aksiyomlardan veya bilinen başka sonuçlardan çıkarılmalıdır.

Albert Einstein matematik için şöyle demişti:[9]

> Matematiğin bütün bilimlerin üstünde özel bir saygınlığının olmasının nedeni, onun yasalarının kesin doğru ve tartışılamaz olmaları, öbür bilimlerdeki yasaların ise bir ölçüde tartışmaya açık olmalarıdır (....)

Matematik yasaları (ispatlanmış teoremler) kesindirler; çünkü bu yasaların çıkarılmaları tam bir kesinlik içerir. Bu kesinlik olmasaydı pür matematiğin özel saygınlığı pek-az-saygınlık'a indirgenirdi. Çünkü pür matematiğin nesneleri yalnızca matematiksel dünyada yaşarlar; gerçek nesne değil, soyut nesnedirler. Yalnızca zihinde var olan nesneler hakkındaki *bilgi*, bildiğimiz şeyin gerçek olduğundan emin olmazsak, fazla değer taşımaz. Ve gözlemleme sonucu olmayan, çıkarım yoluyla elde edilen gerçek ancak *tam kesinlik*le olanaklıdır. Pür matematik ya kesindir, ya da bir hiçtir.

Bu arada bir noktaya değinmek istiyorum. Toplumun ufak bir bölümü dışında kalan insanlar için pür matematiğin çok büyük ölçüde zorluk oluşturmasına bir açıklama olarak, onun tümüyle soyut olan doğası sık sık öne sürülür. Bu "açıklama" hem matematikçilerce, hem de matematik dışı olanlarca yapılır. Alışılmış ifade "yalnızca bir avuç yetenekli insan soyut düşünme yetisine sahiptir" şeklindedir. Bu çok işe yarar bir açıklama biçimidir; herkese de bir şeyler verir. Matematikçiler çaba göstermelerine gerek kalmaksızın kendilerine verilen entelektüellik plakasından dolayı (çünkü yetenekli bir avuç insana onlar da dahildir), ve de matematik bilgilerini matematik dışındakilere aktarmadaki başarısızlıklarına bir mazeret getirdiği için, bu açıklamadan hoşnutturlar. Matematik dışındakiler ise matematiğin sonuçlarını anlayamama nedenlerinin kendi sinir gücü ve irade eksikliğinden değil de, kendi ellerinde olmayan bir handikaptan kaynaklandığına inanmayı rahatlatıcı bulurlar. Bu "açıklama" matematiksel yelpazenin iki ucunda olanların başarısızlığına hazır bir mazeret sağlar. Ancak, ne yazık ki, bu açıklama doğru değildir.

Soyut düşünce seçici düşünmeden çok farklı bir şey değildir. Gerçek bir nesnenin soyut bir modelini yarattığınızda yaptığınız şey, sizin dikkatinizi çeken bazı özellikleri seçmektir. Gereksinimlerinize ve ilgilendiğiniz şeylere bağlı olarak aynı nesnenin çeşitli soyutlamalarını yapabilirsiniz. Örneğin genç bir erkeğin soyut modeli, karşı komşunun kızı için, genç adamın tebessümü ve kişiliği gibi özelliklerinin çapraşık bir zihinsel imgesidir; ama üniversite futbol seçicisi için genç adamın modeli, lise son sınıfta iken topu ne hızla sürebildiğini gösteren bir dizi istatiksel veridir. İki model birbirinden çok farklıdır, ama ikisi de anlamlıdır. Bunlar seçici düşüncenin farklı biçimlerini yansıtırlar.

Soyut düşünce sıradan bir şeydir; soyut nesneler de öyle. Princeton Üniversitesi matematikçilerinden Salomon Bochner bunu şöyle açıklar:[10]

> Bir yemek kitabı soyuttur; telefon rehberinin sarı sayfaları da öyle. Akademik bir ders kitabı, konusu ve düzeyi ne olursa olsun, gelişigüzelliğin ötesindeki bir anlamda soyut olmak zorundadır; yoksa hiçbir işe yaramaz.

Çok doğru. Matematiği zor yapan soyut olması değil, daha çok, kesinliktir. Matematik zordur, çünkü başka bütün alanlardan farklı olarak tam bir kesinlik gerektirir. Matematikte aldatmaca olmaz; kimse kanmaz. Türevi alınabilir fonksiyonların sürekli olduklarını ya ispat edebilirsiniz, ya da edemezsiniz. Blöf yaparak bu işin içinden çıkmanız için en ufak bir olanak yoktur. Soyutlama sıradan bir iştir. Kesinlik ise sıra dışı ve zor bir iştir.

Sanıyorum biraz hızlı gittim. Buraya kadar Peano Aksiyomları'nı ifade etmiş bulunuyoruz; iki sayının da adlarını biliyoruz: 1 ve 2. Şimdi ne yapmalıyız?

Doğal sayıları 1'den 2'ye giderken yaptığımız gibi birer birer adlandırabiliriz. Bunu yapmış olduğumuzu, 2'nin ardılına 3, 3'ün ardılına 4, vb. dediğimizi varsayalım. Bu bize bildiğimiz isimleri taşıyan doğal sayıları verir, ancak sıra kavramını, ve de sayılar arasında birleştirme yapacak işlemleri tanımlamadığımız için, yapabileceğimiz pek bir şey yoktur. Örneğin, "4, 2'den daha büyüktür" diyemeyiz çünkü "daha büyük" kavramını henüz tanımlamadık (Yalnızca aksiyomları ve aksiyomlardan çıktığını ispatlamış olduğumuz şeyleri kullanabileceğimizi unutmayın). Aynı nedenle "2 artı 3"ten de söz edemeyiz. İlk önce doğal sayılar üzerinde bazı işlemleri ve sıra kavramını tanımlamamız gerekiyor.

Tanımların ifadeleri ve bunu izleyen gelişimlerin ayrıntıları bizim amaçlarımız dışında olduğu için, bunları yalnızca yalın ana hatları ile vereceğim. Anlamamız gereken sadece bu sürecin var olduğu ve pür matematikteki bütün çalışmaların prototipi olduğudur. Bir de, bu süreç sonunda ortaya çıkan daha üst düzey sayılarla da bir ölçüde aşina olmamız gerekiyor.

Tamsayılar

Şimdi sıra *toplamayı* tanımlamaya geldi. x herhangi bir doğal sayı ise $x + 1$'i tanımlamak doğal ve kolaydır. Bunu x'in ardılı olarak tanımlarız. Artık ardılların da isimleri olduğu için $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, vb. şeklinde bir dizi sonucu yazabiliriz. x ve y *herhangi* iki doğal sayı ise $x + y$'yi tanımlamak daha zordur, çünkü bu tanım Peano Aksiyomları'nın en karmaşık olanını, E Aksiyomunu kullanmayı içerir. (*Tümevarım Aksiyomu* denilen E Aksiyomu için şu fiziksel benzetmeyi verebiliriz: Dik olarak sıralanmış bir dizi domino taşı düşünelim. Bunlar öyle sıralansın ki, bir tanesi devrildiğinde ondan sonraki domino da devrilsin. Şimdi birinci dominoyu parmağınızla itin. Aksiyom E bütün dominoların devrileceğini söylüyor.)

Toplamın tam olarak tanımlandığını varsayalım. Şimdi doğal sayılara belirli bir özelliği olan bir eleman *ekleyeceğiz*; bu eleman bir sayı ile toplandığında sonuç, sayının kendisi olacaktır. Sembolü 0 olan bu elemana sıfır diyeceğiz. Sıfır doğal bir sayı değil, farklı bir şeydir; her doğal sayı x için $x + 0 = x$ ve $0 + 0 = 0$ özelliğini taşır. 0 için kullanılan süslüce bir isim de "toplamanın özdeş elemanı"dır.

Dikkat ederseniz basit aritmetik yapma durumuna henüz gelmiş değiliz. Örneğin, $x + 2 = 1$ denklemini çözemiyoruz. 2 ile toplandığında 1 veren hiçbir doğal sayı yoktur. Bunu yapmak için daha fazla sayıya gereksinimimiz var. Bu nedenle, şimdiye kadar edindiğimiz sayıların negatiflerini sahneye çıkarırız (aksiyomlarla tutarlı olan uygun tanımlamalarla). Bunun anlamı şudur: Her doğal sayı x için $x + y = 0$ özelliğini taşıyan yeni bir y sayısı ortaya koyuyoruz. Bu y sayısına x'in *negatifi* denir. Bunu da yaptıktan sonra ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ... sayı kümesini elde etmiş oluyoruz. Bu sonsuz listede yazılı olan sayılara *tamsayılar* denir (Şimdi, $x + 2 = 1$ denkleminin çözümü $x = -1$'dir diyebiliriz).

Şimdi de *çarpma* dediğimiz bir işlemi tanımlamaya geçiyoruz. Bunu öyle yapıyoruz ki, yeni işlem toplama kavramı ile istenilen bir ilişkiye sahip olsun, böylece de herhangi iki tamsayının *çarpımından* söz etmek bir anlam ifade etsin. Özellikle de çarpımı, toplama üzerinde *dağılma* özelliği olacak şekilde tanımlıyoruz (Çarpımın dağılma özelliği vardır demek, herhangi x, y, z tamsayıları için $x(y + z) = xy + xz$ demektir).

Yapmakta olduğumuz "tanımlama-teorem-ispat" sürecinde bir yerde, "sıralama" kavramını işin içine dahil ediyoruz, öyle ki, bir tamsayının bir başka tamsayıdan daha büyük veya daha küçük olmasından söz etmek anlamlı olsun. Bunu da yaptıktan sonra artık elimizde pozitif ve negatif sayılar, onlar üzerinde tanımlanmış toplama ve çıkarma işlemleri ve sıra kavramı var. Bu matematiksel nesneler cümlesi ile çok şeyler yapılabilir, ancak yapabildiklerimiz yeterli değildir. Örneğin, bir tamsayıyı diğeri ile *bölemiyoruz.*

Rasyonel Sayılar

Bu aşamada, elimizde çalışabileceğimiz ve bir hayli aritmetik yapmamıza olanak veren sonsuz sayıda tamsayımız var. Doğal sayılar 1, 2, 3, ..., onların negatifleri –1, –2, –3, ... ve sıfır sayısı emrimizde. Eğer ekonomi sadece bütün dolarlarla çalışsaydı bu sayılar (tamsayılar) bankacılık için yeterli olurdu. Bir banka dekontunun son satırındaki sıfır, paranızın olmadığı, bakiyenin 1000 olması, 1000 dolarınız olduğu ve –1000 de, hesabınızdan 1000 dolar fazla çektiğiniz anlamına gelir. Ancak bankalar dolarların kesirleriyle, ondalıklarla iş yaparlar, tam dolarları parçalara *bölerler.*

Biz ise, bu aşamada, bir tamsayıyı bir başkasına bölmeyi bilmiyoruz. Henüz kesirlerimiz yok. Basit denklemleri bile çözemiyoruz. Örneğin $2x = 3$ gibi basit bir denklemi çözemiyoruz. Yani, bizim sonsuz sayıdaki tamsayılarımızın içinde 2 ile çarpıldığında 3 verecek hiçbir tamsayı yok. Öyleyse biz de şimdi iki tamsayının oranı kavramını sahneye çıkarırız. Yani, x ve y tamsayılar olmak üzere x/y şeklinde olan yeni sayılar tanımlarız (x/y'nin $\frac{x}{y}$ demek olduğunu hatırlayın). Bunu yaparken kullanılan yöntem pek de karmaşık değildir, ancak çok fazla teknik ayrıntı taşıması burada açıklanmasına engeldir. Anlamamız gereken, sonuçta tamsayıların oranı olan yeni sayılar elde edilmesi ve bu nedenle de onlara rasyonel sayılar denmesidir. Demek oluyor ki, rasyonel sayılar pay ve paydaları tamsayı olan adi kesirlerdir. Rasyonel sayılara örnek olarak 3/2, –17/5 ve 6/1 verilebilir ($2x = 3$ denkleminin çözümü $x = 3/2$'dir).

Bundan sonra da rasyonel sayılar için çarpma, toplama, çıkarma işlemlerini ve sıralama kavramını tanımlarız. Bu tanımlar $x/1$ şeklindeki her yeni sayı x tamsayısı ile aynı olacak şekilde yapılır. Bütün bunlar yapıldıktan sonra, aritmetik yapmak için elimizde çok daha zengin bir sayılar kümesi ve *bölme* dediğimiz yeni bir kavramla karşı karşıyayız. Örneğin, 3/2 rasyonel sayısını, 3'ün 2 ile bölünmesiyle elde edilen sayı olarak düşünürüz.

Burada bir noktayı belirtmek gerekiyor. x/y rasyonel sayısını oluştururken y'nin hep sıfırdan *farklı* olması gerekiyor. Yani sıfır sayısı ile bölmeye izin yoktur. Bu kısıtlama için temel neden, rasyonel sayıların titizlikle elde edilmesi sırasında ispatlanan teoremlerden biri (burada sadece ana hatları verilmiştir) şöyle der: Herhangi bir z rasyonel sayısı için $0 \cdot z = 0$'dır, yani rasyonel bir sayı ile sıfırın çarpımı sıfırdır. İkinci bir teorem de şöyle der: $x/y = z$'dir, ancak ve ancak eğer $x = yz$ ise (Burada, çarpım işlemi için genelde geçerli olan, sayıların arasına noktanın koyulduğu ya da sayıların yan yana yazıldığı notasyonların her ikisini de seçtik. Böylece xy ve $x \cdot y$ ifadelerinin her ikisi de x ve y sayılarının çarpımını göstermektedir). Bu ikinci teorem bize eğer x/y rasyonel sayısı tek bir z sembolüyle gösterilen bir sayıya eşitse, o zaman x/y'nin payının, paydasıyla z'nin çarpımına eşit olduğunu söylüyor. Örneğin, $6/3 = 2$, çünkü $6 = 3 \cdot 2$'dir.

Şimdi $x/0$ ifadesinin bir anlamı olduğunu düşünelim. O zaman $x/0$ bir z rasyonel sayısının adı olur, yani, $x/0 = z$ olur. Öyleyse, ikinci teoremin ifadesinde y'nin yerini sıfır alır ve $x = 0 \cdot z$ olur. Ancak ikinci teoreme göre sıfırın her sayı ile çarpımı 0'a eşittir. Öyleyse $x = 0$ dır. Bu nedenle $x/0$ ancak x sıfır olduğu zaman anlamlı olur. Bu da bize bir kesirde paydanın sıfır olmasına izin verilirse payın da sıfır olmak zorunda olduğunu söyler.

Böylece, ilk ifademiz olan $x/0 = z$, $0/0 = z$ olur. Ancak 0/0 ifadesine böyle bir değer atfetmek hatalıdır, çünkü ikinci teorem bize $0/0 = z$'nin yalnızca eğer $0 = 0 \cdot z$ ise doğru olacağını söylüyor. Ancak o zaman birinci teorem bize, eşitliğin *her* z sayısı için sağlandığını söyler. Öyleyse 0/0 *herhangi* bir sayı olabilir, yani, 0/0'ın değeri *belirsiz*dir ve bu nedenle de anlamsızdır.

Bu sıkıntıdan kurtulmanın tek yolu sıfırla bölmeye izin vermemektir. O halde son söz: *Sıfır ile bölme, yapılması caiz olan bir işlem değildir.*

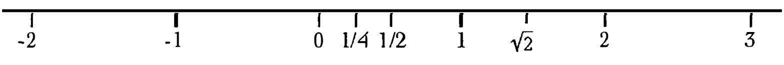
Rasyonel sayılar son derece boldur. Onlarla genelde gerek duyulan, matematiğin büyük bölümünü yapabilirsiniz. Dijital bilgisayarlarda ve üniversite derslerinde modası gittikçe artan "ayrıklı matematik" derslerinde kullanılan şey rasyonel sayılar matematiğidir. Rasyonel sayılar Pythagorasçıların tüm evreni oluşturduğuna inandığı sayılardır. Rasyonel sayılar gerçekten çok boldur, ancak yine de yeterince bol değildir. Örneğin, $x^2 = 2$ denklemini onlarla çözemezsiniz. Karesi 2 olan bir rasyonel sayı olmadığını ispatlamak zor değildir. Pythagorasçıların dünyasını altüst eden de bu basit teoremin ispatı olmuştur (Morris Kline'a göre bu teorem Metapontum'lu Hippasus'a atfedilir. Hippasus bu teoremi diğer Pythagorasçılarla çıktığı bir deniz yolculuğunda ispatlamış. Rasyonel sayıların evrensel olduğu yolundaki Pythagorasçı inancı reddeden bir sonuç bulduğu için de Hippasus'u denize atmışlar. Bu da "yayımla ve yok ol" sürecinin çok eski bir örneği olsa gerek).

Eğer rutin denklemleri çözmek ve kenarları 1 birim uzunluğunda olan karelerle (böyle bir karenin köşegen uzunluğu x'tir; $x^2 = 2$ denklemini sağlar) uğraşmak istiyorsak sayıları geliştirmeyi sürdürmek zorundayız.

Reel Sayılar

Buraya kadar doğal sayılar hakkında bazı temel varsayımlardan –Peano Aksiyomları'ndan– yola çıkarak tamsayıları, sonra da rasyonel sayıların elde edilmesini sağlayan gelişimlerin ana hatlarını açıkladık. Doğal olarak, her doğal sayı hem bir tamsayı, hem de bir rasyonel sayıdır (örneğin, 6 tamsayısı, 6/1 rasyonel sayısıdır). Yapageldiğimiz şey sayı sistemlerini sistematik olarak genişletme sürecinin *ana hatlarını* vermek olmuştur. Bundan sonra yapacağımız ise sayılarımızı, "2'nin karekökü"nden söz edebileceğimiz bir şekilde, daha da zenginleştirmek olacaktır. Ancak bu aşamadaki süreç daha karmaşık ve zor olacağından, daha çok betimleyici olacaktır. Rasyonel sayıları yatay bir doğru üzerindeki noktalara tekabül ettirmek, aşağıda açıklanacağı gibi, bunu yapmanın bir yolu olabilir (bkz. Şekil 2).

Doğru üstünde bir nokta belirleyip bunu 0 olarak işaretleyelim. 1 sayısı için uygun bir aralık seçerek 0'ın iki yanında, 0'a uzaklıkları 1, 2, 3, ... olan noktaları işaretleyelim. Başlangıç noktasının (0'ın) sağında olan noktalar pozitif tamsayıları, solundakiler de negatif sayıları göstermektedir. Bu uzaklıkların kesirlerini alarak istenilen her rasyonel sayıya tekabül eden noktayı işaretleyebiliriz. Bu noktalardan bazıları Şekil 2'de gösterilmiştir. Rasyonel sayılarla ilgili bir teorem, herhangi iki rasyonel sayı arasında bir başka rasyonel sayı olduğunu söyler. Bu sonucun aşikâr olduğunu deneyimlerimizden biliyoruz; Pythagorasçıların dünyayı açıklamak için rasyonel sayıların yeterli olduğunu düşünmelerine neden olan da bu aşikârlıktır. Örneğin 1/2, 0 ile 1 arasında yaşar. 1/2 ile 1 arasında 3/4 yaşar. Ve 5/8, 1/2 ile 3/4 arasındadır. Genel olarak eğer a ve b iki sayı ise, a da b'den küçük ise, a ve b'nin ortalaması olan $(a + b)/2$ rasyonel sayısı a ve b arasında yaşar.



Şekil 2. Reel sayılar doğrusu

Bu mülahazaların sonucu olarak rasyonel sayıların Şekil 2'deki doğru üzerinde "yoğun" olduğunu söyleriz. Yani, bu doğru üzerindeki herhangi bir aralıkta rasyonel bir sayı, gerçekte sonsuz sayıda rasyonel sayı bulunur. Ancak, yine de, bu doğru üzerinde "boşluklar" vardır. Özellikle de bu doğru üzerinde uzaklığı $x^2 = 2$ denklemini sağlayan rasyonel bir x konumu yoktur. Başka bir deyişle başlangıç noktasına olan uzaklığı soldan veya sağdan "2"nin karekökü olan bir rasyonel sayı yoktur. Bu doğru üstünde, bu konuma istediğimiz kadar yakın olan rasyonel noktalar elbette vardır. Örneğin, $(1{,}4)^2 = 1{,}96$, 2'den küçüktür ve $(1{,}5)^2 = 2{,}25$, 2'den büyüktür. Öyleyse 1,4 rasyonel sayısı 2'nin karekökünün solunda, 1,5 de sağında bulunur (1,4 ve 1,5'in, sırasıyla 14/10 ve 15/10, yani rasyonel olduklarını unutmayın). Aynı şekilde 1,41 ve 1,42, 2'nin kareköküne, sırasıyla, soldan ve sağdan daha da yakın sayılardır.

Sayıları geliştirmenizin amacı doğru üzerindeki boşlukları "doldurmak" ve böylece, özellikle, 2'nin kareköküne karşılık gelen bir sayı bulmaktır (Doldurulacak çok sayıda boşluk vardır. Örneğin y'nin, 2, 3, 5, 7, 11, 13 sayılarından herhangi biri olması durumunda $x^2 = y$ denklemini sağlayan hiçbir rasyonel x sayısı yoktur. Hatta bu, y'nin aldığı sonsuz sayıda başka değerler için de geçerlidir. Doğruyu "tamamlamak" için *sonsuz sayıda* boşluk doldurmak zorundasınız). Anlamamız gereken çok önemli bir husus var. Yapmakta olduğumuz geometrik tartışma yalnızca konuyu anlamaya yardımcı olmak içindir. Mantıksal geliştirme yalnızca aksiyomları ve ispatlanmış olan teoremleri kullanmalı, geometrik açıklamalardan yararlanmamalıdır. Yani, ispatlar çizimlere ve görsel tasvirlere değil, aksiyomlara ve mevcut teoremlere dayanmalıdır. Aslında bu aşamada "2"nin karekökünden söz edemezsiniz bile. Çünkü öyle bir rasyonel sayı yoktur. Bizim burada ayrıntılarını veremeyeceğimiz bu yöntemin amacı, tam olarak, mantıksal bir şekilde, bu sayıları ve daha başka yeni sayıları üretmektir.

Ancak tanımlamak istediğimiz sayıya istenildiği kadar yakın olan rasyonel sayıların var olduğunu göstermek yönünden geometrik yorum büyük yardımcıdır. Gerçek yöntem, bu gözlemi kullanarak rasyonel sayılar kümesine, teknik anlamda rasyonel sayı dizilerinin limitleri olan sayılar ekler ("Limitler" ve "diziler" "boşlukları doldurma" süreci sırasında kesin biçimde tanımlanan kavramlardır). Bu yapıldıktan ve yeni nesneler için toplama, çıkarma, bölme, sıralama kavramları tanımlandıktan sora, özellikle $x^2 = 2$ denkleminin çözümünü de içeren genişletilmiş bir sayı sistemi elde ederiz. Artık 2'nin karekökünden söz edebiliriz ve onun için bir sembol buluruz: $\sqrt{2}$. Ancak bu sembole anlam veren süreç derin olduğu kadar da zaman alıcıdır. Tam olarak anlaşılması ancak Dedekind (1831-1916) zamanında olmuştur (Pythagorasçılara teselli vermek veya zavallı Hippasus'u denizden çıkarmak için artık çok geçti).

Bu yeni sistem ile Şekil 2'deki doğru tamamlanmış oldu ve ona *reel sayılar* adı verildi. Buna bağlı olarak da, doğruya reel sayılar doğrusu, ya da sadece *reel doğru* denildi. Reel sayılar rasyonel sayıları tam bir alt küme olarak içerirler. $\sqrt{2}$ gibi, rasyonel olmayan reel sayılara *irrasyonel sayılar* denir. Artık reel doğruda hiçbir boşluk kalmamıştır. Daha önce var olan boşluklar artık irrasyonellerle doldurulmuştur.

Şimdiye kadar yapılanları şu şekilde sıralamak yararlı olabilir: *Doğal sayılar* bildiğimiz sayma sayıları olan 1, 2, 3, ...'tür. *Tamsayılar* doğal sayılarla onların negatifleri ve sıfır sayısından oluşur. *Rasyonel sayılar*, tamsayıların oranları olan 3/2, 22/7, ve –5/16 gibi sayılardan oluşur, ancak hiçbir reel sayı sıfırı payda olarak alamaz. Reel sayılar, bütün bu sayılara ek olarak $\sqrt{2}$ gibi, cebirsel kombinasyonlar yaparak ve bazı denklemleri çözerek elde edilen yeni sayıları içerir. Pratik olarak, kalkülüse kadar olan –kalkülüs de dahil– bütün matematik derslerinde görülen sayılar reel sayılardır diyebiliriz (Bunun önemli bir istisnası, temel cebir derslerinde yer alır; öğrenciler, ikinci dereceden denklemleri çözmeyi ve bazı koşullarda hiçbir reel sayı çözümü olmadığını öğrenirler).

Şimdi de reel sayıların bazı özelliklerinden söz edeceğiz. Konu inceden inceye ele alındığında bu özelliklerin teorem olarak ispatları gerekir. İlk olarak, her reel sayının bir ondalık kesir ifadesi vardır. Böylece, her reel sayı bir tamsayı, sonra bir virgül ve ardından bir dizi tamsayı şeklinde yazılabilir. Örneğin, 3/2 = 1,5. Ondalık hanesinde sonsuz sayıda rakam olabilir, örneğin, 1/3 = 0,333 … . Gerçekte, her irrasyonel sayının, sonu gelmeyen ve tekrar etmeyen sonsuz bir ondalık kesir ile temsil edildiğini söyleyen bir teorem vardır. Örneğin, $\sqrt{2}$ = 1,41421356 … . Burada ondalık hanesindeki rakamlar hiç son bulmaz veya herhangi bir rakamlar kalıbı şeklinde tekrarlanmaz. Buna karşın, her ondalık kesir bir reel sayıyı temsil eder ve rasyonel sayılar tam olarak sonlu olan veya tekrarlanan rakam bloklarından oluşan kesirlere karşılık gelen sayılardır. Bu nedenle 0,123456789101112 … şeklindeki sonsuz ondalık kesir bir reel sayıyı temsil eder; bunun 0 ile 1 arasında bir sayı olduğu da aşikârdır. Kesir hem sonsuz olduğu, hem de tekrarlanmadığı için bu sayı rasyonel değildir. "Doğal" sayılar kadar doğal olan bu sayı 1988'de ölen matematikçi Kurt Mahler tarafından incelenmiştir. Mahler bu sayının *transandantal sayılar* denilen bir sayı türünden olduğunu ispat etmiştir.

$ax^2 + bx + c$ veya $dx^5 + gx^3 + hx^2 + j$ gibi, yani x'in kuvvetlerinin katsayı denilen (örneklerdeki a, b, c, d, g, h, j) reel sayılarla çarpımının toplamı şeklinde olan ifadelere "polinomlar" denir. Polinomlar genellikle $p(x)$ sembolü ile gösterilir ve "x'in p'si" diye okunur; $p(x)$, x'e bağımlı olan bir reel sayıdır. Eğer $p(x) = 0$ ise x'e $p(x)$'in *kökü* denir. Örneğin, $x = 2$, $p(x) = x^2 - 4$'ün bir köküdür; çünkü $p(2) = 4 - 4 = 0$'dır.

Eğer $p(x)$, katsayıları tamsayılar olan bir polinom ise (örneğin $p(x) = 3x^2 + 2x + 6$) ve y, $p(y) = 0$ denklemini sağlıyorsa, y reel sayısına cebirsel sayı denir. Demek oluyor ki, cebirsel olan bir sayı, katsayıları tamsayılar olan bir polinomun kökü olan bir reel sayıdır. 2'nin karekökü cebirsel bir sayıdır, çünkü $x^2 - 2$ polinomunun köküdür ($x^2 - 2 = 0$ yalnız ve yalnız $x = \sqrt{2}$ ile sağlanır). a/b şeklindeki her rasyonel sayı, $bx - a = 0$ denklemini sağladığı için, cebirsel sayıdır. Cebirsel *olmayan* sayılara *transandantal* sayı denir.

Bu sayılar ilk bakışta insana tuhaf ve ender nesnelermiş gibi gelir. Ancak çok, pek çok transandantal sayı olduğunu kanıtlamak şaşılacak ölçüde *kolay*dır. Buna karşılık, belirli bir sayının transandantal olduğunu ispatlamak ise inanılmaz ölçüde zordur. π sayısı (bir dairenin çevresinin çapına oranı) transandantaldir. Ünlü bir başka transandantal sayı da e ile gösterilen sayıdır. Bu sayı "doğal logaritma tabanı" olarak bilinmekle beraber, matematikteki yeri, lisede öğrenilen "logaritma"larla ilgili olarak çoğumuzun anımsadığı şeylerle kıyaslanamayacak kadar derindir. Gerçekte bu sayı, birçok ince ve güzel yolla, π sayısı ile ilişkilidir. π ve e sayılarının transandantal oldukları hiçbir şekilde aşikâr kabul edilemez (e sayısı 2 ile 3 arasındadır ve ondalık açılımı $e = 2{,}71828459045 \ldots$'tir).

Matematikçiler kendilerine özgü deneyim ve duyarlılıkla transandantal sayılara karşı bir önsezi geliştirirler. Örneğin bir matematikçiye $e^{\pi\sqrt{163}}$ sayısının (e sayısının $\pi\sqrt{163}$'üncü "kuvveti"nin) bir tamsayı olup olmadığını sorarsanız, hemen "Hayır" diyecektir. Bir matematikçi için bu sayı, bir tamsayıdan dünyalar kadar uzakta yaşar. Aynı soruyu bir fen bilimciye sorarsanız, cebinden hesap makinesini çıkarıp bu sayıyı "hesaplar". Size vereceği yanıt ise hesap makinesinin kaç haneli olduğuna bağlıdır. Çünkü $e^{\pi\sqrt{163}}$ sayısı, ancak 12'nci ondalık hanesinde tamsayıdan farklıdır, bu da onun cep hesap makinesinde vardır veya yoktur.

Bu sayının gerçekten de transandantal olduğu, 1932 Gelfond-Schneider Teoremi kullanılarak gösterilebilir. Bu teoreme göre eğer a, 0 ve 1'den farklı bir cebirsel sayı ise ve b cebirsel bir irrasyonel sayı ise, ab çarpımı olan sayı transandantaldir. Bu teoremi uygulamak için $e^{\pi\sqrt{163}}$ sayısını reel sayılardan daha soyut ve daha genel olan sayılar kullanarak yeniden yazmaya gerek vardır. Bu yeni sayıları bulmak, ve doğal sayılar ile Peano Aksiyomları'ndan başlayan yolculuğumuzu bitirmek için sayı sistemimize son bir ilave yapmamız, kompleks sayılara ulaşmamız gerekiyor.

Kompleks Sayılar

İlkokul öğrencilerine reel sayılar konusunda şaşırtıcı gelen şeylerden biri de iki negatif sayının çarpımının, iki pozitif sayının çarpımı gibi, pozitif olmasıdır. Bununla ilgili olarak, bir pozitif ve bir negatif sayının çarpımının negatif olması ise, hiç değilse doğal sayılar için, fazla sıkıntı yaratmaz. Örneğin öğrenci (–10)(5) çarpımının (5)(–10) ile aynı olduğunu ve bunun da –10'un kendisiyle 5 defa toplandığı şeklinde yorumlanabildiğini düşünür. 5 tane –10'un toplamının da –50 olduğunu görmekte güçlük çekmez. Aynı şekilde, iki pozitif sayının çarpımının pozitif olması da sorun yaratmaz (Daha önce de yaptığım gibi sembolleri bitişik yazdığıma dikkatinizi çekerim. "*ab*"nin anlamı "*a*" ile "*b*"nin çarpımıdır. Sayılar işaret içerdiğinde veya *a* ve *b* ifadeleri karışık olduğunda, bu çarpımı (*a*)(*b*) ile göstereceğim. Çarpımı bazen de *a* · *b* ile göstereceğim; buradaki nokta çarpma işaretini simgeleyecektir. Çarpma sembolü olan x'i kullanmaktan olabildiğince sakınacağım. Matematikçiler hemen hiçbir zaman "*a*" çarpı "*b*" için *a* x *b* yazmazlar; bunu ancak matematikçi olmayanların hatırına yaparlar).

Ancak bütün ilkokul öğrencilerine (–5)(–10) = 50 olması şaşırtıcı gelir. "Bu nasıl olabilir?" diye sorarlar. –5'i –10 defa kendisiyle toplamanın bir anlamı yoktur. Bunu açıklayıcı bazı "argümanlar" kullanılsa bile bunlar çoğunlukla inandırıcı olmayıp, sadece onları icat eden matematikçiye hoşça vakit geçirmeye yararlar.

Buna benzer bir argüman Michael Guillen'in, diğer yönlerden çok iyi bir eser olan *Bridges to Infinity* (Sonsuza Uzanan Köprüler) kitabında yer alır. Guillen okuyucudan belirli bir önerme lehine verilen bir oyun 10 puan, aleyhinde verilen bir oy için ise –10 puan sayılacağı bir oylama varsaymasını ister. "Negatif bir seçmen"i de oy verme hakkı olduğu halde oy kullanmayan seçmen olarak tanımlar. Daha sonra, önerme lehine 5 kişi oy kullanırsa (beş "pozitif" seçmen) (5)(10) = 50 puan kazanıldığına dikkat çeker ve şöyle devam eder:[11]

Eğer önerme aleyhindeki beş negatif seçmen (–5) oy vermekten kaçınırlarsa (her biri –10 puan), önerme bu dolaylı yolla toplam (–5) x (–10) pozitif puan kazanır. Bu da önermenin alma şansı olmadığı 50 puan kazanması demektir.

Bu alıntıda kullanılan notasyonun bana değil Guillen'e ait olduğunu ve bu açıklamanın, onu aydınlatıcı bulanlara hayırlı olmasını söylemek dışında bir eleştiriye gerek duymuyorum. Anlaşılan Guillen'in kendisi de açıklamasından pek ikna olmamıştı; çünkü iki tümce sonra da şöyle yazıyor: "Bu kurala genellikle İşaretler Yasası denir ve bu yasa çoğu kişiye, negatif sayılar üzerindeki bütün diğer cebirsel işlem kurallarından daha şaşırtıcı gelir."[12]

Eğer matematik, öğrencilere hükmetmeye değil de öğretmeye dayanan ve konuyu anlayan bir öğretmen tarafından doğru olarak öğretilirse, İşaretler Yasası'nı kavramak kolaydır. Çünkü, reel sayılarla ilk kez lisede ya da üniversitede karşılaştığınızda bu sayılarla belirli bir şekilde işlem yapmayı, her reel z için $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$ olduğunu öğrenmişsinizdir. Ayrıca, her w sayısı için $w + (-w) = 0$ olduğunu da öğrendiniz (Bu ifadeler gerçekte teoremdirler ve daha önceki teoremleri ve Peano Aksiyomları'nı kullanarak ispatlanmaları gerekir). İşaretler Yasası'nı elde etmek için bundan fazlası gerekmez.

Aşağıda tanımlanmış olan x sayısını ele alalım:

$$x = ab + (-a)(b) + (-a)(-b).$$

Bunu şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} x &= ab + (-a)[(b) + (-b)] \\ &= ab + (-a)(0) \\ &= ab + 0 \\ &= ab. \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\begin{aligned} x &= [a + (-a)]b + (-a)(-b) \\ &= 0 \cdot b + (-a)(-b) \\ &= 0 + (-a)(-b) \\ &= (-a)(-b). \end{aligned}$$

Böylece

$$x = ab$$

ve

$$x = (-a)(-b).$$

elde etmiş olduk. Bu nedenle,

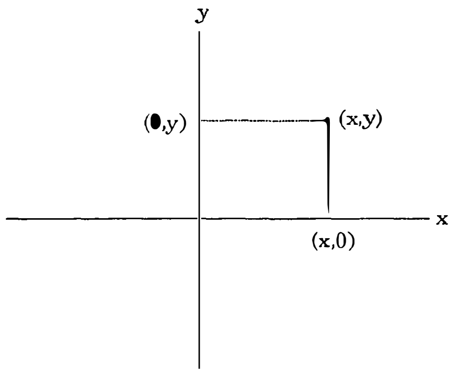
$$ab = (-a)(-b).$$

Bu iş bu kadar. Matematikçilerin deyişiyle: Q. E. D. (*Quod erat demonstrandum*, ya da "Kolayca elde edildi" - seçim sizin).

Öne sürdüğümüz argümanın Guillen'in "açıklama"sına göre büyük avantajları var. Birincisi, argümanın sadece hava değil, matematik de içermesi, ikincisi de, gerçeğin çok yakınında olması (Eğer basit işlemler için [$z + 0 = z$ gibi] sonuçlar ispatlanmışlarsa argüman doğrudur). Ayrıca bu argüman hükmedici de değil. Aklınızı karıştıran şey ya ortadan kalkar, ya da, "negatif seçmenler" hakkındaki yapay bir öykünün $(-e)$ çarpı π gibi bir çarpımla ilgisini kavrayamadığınız için değil, ama "matematik"i anlayamadığınız için, yerinde durur.

İşaretler Yasası'nın bir sonucu da şudur: Eğer x sıfırdan farklı herhangi bir reel sayı ise x^2 her zaman pozitiftir. Bu nedenle, karesi negatif olan, özellikle de karesi -1 olan hiçbir reel sayı yoktur. Bu demektir ki, emrinize sunulan sonsuz sayıya ve yapılarının bütün zenginliğine karşın yalnızca reel doğru üzerinde yaşayan sayılara sahipseniz $x^2 = -1$ gibi basit bir denklemi çözme olanağınız yoktur. Bunu başarmak için başka tür sayılara, $\sqrt{-1}$'e (-1'in kareköküne) gereksiniminiz var.

Bu sayıları mantıksal olarak geliştirmek için reel sayı çiftlerinden oluşan yeni bir nesneler kümesini ele alırız. Yani, x ve y reel sayılar olmak üzere tüm (x,y) çiftlerinin kümesini düşünürüz. Bu küme üzerinde toplama ve çıkarmayı uygun bir biçimde tanımlarız. Bundan sonra da reel sayılar hakkındaki teoremlerin türetilmesine benzer yöntemlerle, bu yeni matematiksel nesneler hakkında teoremler ispatlarız. Bu yeni kümeye, üzerinde tanımlanan işlemlerle birlikte *kompleks sayılar* adı verilir.



Şekil 3. Kompleks düzlem

Demek oluyor ki, herhangi iki reel sayı çifti için toplama ve çarpma işlemlerinin kesin olarak tanımlanmış olduğunu varsayarak, bütün reel sayı çiftlerinin oluşturduğu kümeye kompleks sayılar deniliyor.

Kompleks sayılar hakkında yapılacak birinci gözlem şudur: Her kompleks sayı bir reel sayı ikilisi (x,y) olduğu için bu sayılar bir düzlem üzerindeki noktalara bire bir tekabül ederler [Bire bir tekabül durumu, düzlemdeki her p noktasının (x,y) gibi iki koordinatla tek olarak belirlenmesinin bir sonucudur. Bu koordinatlar noktanın x-ekseni ve y-ekseni denilen iki doğrudan olan uzaklığının ölçümüdür]. Bu düzlem bildiğimiz analitik geometri düzlemidir (bkz. Şekil 3), ancak, sayıların yerlerini işaretlemenin ötesinde, artık kompleks sayılarla toplama ve çarpma da yapabildiğimiz için, buradaki düzlem daha zengin bir yapıya sahiptir. x-ekseni üzerindeki bütün noktaların koordinatları $(x,0)$ şeklindedir ve $(x,0)$ noktasını x reel sayısına tekabül ettirmek –kesin bir matematiksel yöntemle– olanaklıdır. O zaman kompleks düzlemdeki x-ekseni reel doğrunun bir kopyası olur, çünkü, x-ekseni üzerindeki her noktanın y koordinatı sıfırdır ve bu nedenle $(x,0)$ şeklindeki bir sayı çifti ile ifade edilir. Bu bağıntı nedeniyle reel sayılar kompleks sayıların bir altkümesi (x-ekseni) haline gelir.

Buraya kadar henüz kompleks sayıların toplama ve çarpma kavramlarını kesin bir şekilde tanımlamış değiliz. Bu tanımlamalar sırasıyla şöyledir:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ve

$$(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_2y_1 + x_1y_2).$$

(Tanımlanan işlemlerin eşitliğin sol tarafında olduğuna dikkat edin. Eşitliğin sağındaki işlemler, bildiğimiz reel sayıların toplama ve çarpma işlemleridir.)

y-ekseni üzerindeki noktaların koordinatları $(0,y)$ şeklindedir. $(0,y)$ kompleks sayısının kendisiyle çarpımı $(-y^2,0)$ olur (bu bir teoremdir). Yani,

$$(0,y)(0,y) = (-y^2,0).$$

Bu, kompleks sayıların çarpımını tanımlayan yukarıdaki ifadede $(x_1,y_1) = (x_2,y_2) = (0,y)$ değerlerini koyunca elde edilir. Eğer bu eşitlikte $y = 1$ ise,

$$(0,1)(0,1) = (-1,0).$$

sonucunu elde ederiz. Eğer $(0,1)$ kompleks sayısını i harfi ile gösterir ve $(x,0)$ çiftleri ile x reel sayılarının özdeş olduklarını göz önüne alırsak, bu eşitlik

$$i \cdot i = -1.$$

şeklini alır. Böylece

$$i^2 = -1.$$

sonucunu ve karesi –1 olan bir i sayısını elde etmiş oluruz. Bu nedenle, $i = \sqrt{-1}$'dir. [(0,1) kompleks sayısı için i sembolünün kullanılması gelenekseldir ve kökeni, $i^2 = 1$ eşitliğini çok gizemli buldukları için i sayısını *sanal* olarak betimleyen matematik analizcilerine dayanır. Bu terminoloji, *reel* sayıların karelerinin negatif olamayacağından kaynaklanmıştır. Yani her x reel sayısı için $x^2 \geq 0$'dır; örneğin, $3^2 = 9$ ve $(-3)^2 = 9$.]

Bu tartışmalarda birçok noktaya değinilmedi. Ancak, bizim amacımız açısından ayrıntılar önemli değildir. Bu aşamada, kompleks sayıların mantıksal yöntemlerle elde edilebildiklerini, bu sürecin göreceli olarak dolaysız olduğunu, yerimiz ve zamanımız elverseydi bütün ayrıntıların verilebileceğini anlamanız yeterlidir (Reel sayılardan kompleks sayılara geçmek, rasyonel sayılardan reel sayılara geçmekten çok daha kolaydır. Eğer öyle görünmüyorsa bunun nedeni "daha önce" yaptığımız geliştirmenin, zor bir adım olan dizi kavramını içermesidir, ancak, bunu açıkça belirtmedik). Gelişim tamamlandığında reel sayıları içeren, üzerinde toplama, çıkarma, ve bölmenin tanımlanmış olduğu yeni bir sayı kümesi elde etmiş oluyoruz. Bundan başka, reel sayıları kullanarak çözemediğimiz denklemleri bu sistemde çözme olanağımız da doğuyor.

Ancak, kompleks sayıların sahip olmadığı bir özellik vardır: sıralama özelliği. Kompleks sayıların *büyüklüğü*nden söz eden ifadelere bir anlam atfedilemez. w ve z gibi iki kompleks sayı için "z, w'den büyüktür" demenin hiçbir anlamı yoktur - eğer w ve z "daha büyük" kavramının bir anlam taşıdığı iki reel sayı değil ise.

Reel sayılardan kompleks sayıların geliştirilmesi, rasyonel sayılardan reel sayıların geliştirilmesinde olduğu gibi, yalnızca daha çok matematik kullanılması sayesinde gerçekleşmiştir. Mantıksal yaratım süreci gizem ya da büyü değil, yalnızca matematik içerir. Ancak tarihsel gelişimde durum farklıydı. Önceleri, kompleks sayılar bir gizem ve paradoks perdesiyle örtülüydüler.

Günümüzde matematiğin bir bölümü olan cebir, matematik gerçek kesinlik kazanmadan çok daha önce gelişmişti. On altıncı yüzyılda bile matematikçiler, sayı *kavramı*nın ne anlam taşıdığını tam olarak anlamadan önce, sayılarla korkusuzca işlemler yapıyorlardı. Bu biçimsel işlemlerle çok çarpıcı sonuçlar da elde ettiler. Üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümü, yani, reel bilinmeyen değişkenlerin üçüncü ve dördüncü kuvvetlerini içeren polinomların köklerinin bulunması da bu sonuçlar arasındaydı. Matematikçiler irrasyonel sayıları, hatta negatif sayıları bile tam olarak kavramadan onları biçimsel işlemlerde kullanmaktan çekinmeyerek yeni matematik ürettiler. Hiç çekinmediler - negatif sayıların karekökleri *dışında*.

1630 yılı dolayında René Descartes negatif bir sayının karekökünü "sanal" olarak niteledi. Onun bu nesneler konusundaki derin endişeleri, karekök -1 sayısı için i sembolünü kullanmak şeklinde, günümüze kadar uzanmıştır. Descartes herhangi bir biçimsel hesaplamada "sanal" sayıların bulunmasının, gerçekte, problemin çözümünün olmadığı anlamına geldiği kanısındaydı. Ian Stewart'a göre Isaac Newton da aynı kanıdaydı. Ancak on dokuzuncu yüzyılda, esas itibariyle, bu sayıların cebirsel yönünden çok matematiksel analizdeki kullanımlarına ilgi duyan Gauss'un çalışmaları sonucunda kompleks sayılar "yasal" duruma gelmişlerdir. Gauss kompleks sayıları bir düzlem üzerindeki noktalar olarak düşünerek matematiğin "kompleks analiz" denilen dalının gelişimine yol açan temel fikirleri geliştirdi. Ancak 1837'de, William Rowan Hamilton bir kompleks sayıyı onun (x,y) koordinatları ile belirleyerek toplama ve çarpma işlemlerini bu koordinatlar cinsinden verdi ve Gauss'un geometrik kavramlarını formel duruma getirdi. Ancak daha önceki analizcilerin bu sayılar için kullandıkları gösterim biçimi süregeldi. Biz de, onlar gibi, kompleks bir sayıyı $x + iy$ şeklinde yazmayı sürdürüyoruz. (x,y) notasyonu kompleks sayıların biçimsel olarak geliştirilmeleri için elverişlidir, $x + iy$ notasyonu ise daha işlevseldir. Kompleks sayılarla yapılan işlemler şöyle bir kural izler: İşlemleri biçimsel olarak reel sayılarla yaptığınız gibi yapın, i^2 çıkan her yerde i^2 yerine -1 koyun. [Örneğin, $(2 + 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 22i + 15(-1) = 8 - 15 + 22i = -7 + 22i$.]

Kompleks analiz on dokuzuncu yüzyıl matematiğinin en yüksek onur ve övünç kaynağı oldu. En ünlü matematikçilerin bazıları matematiğin bu dalının gelişmesine katkıda bulundular. Büyüklükleri de, bir bakıma, bu alana olan katkılarından kaynaklanır. Gauss kompleks integralin önemini 1811'de fark etti. Cauchy, kendi adını taşıyan o güzel integral teoremini 1825'te ispatladı ve analitik fonksiyonlarla bir grup kısmi diferansiyel denklemler sistemi arasındaki bağıntıyı ortaya çıkardı. Riemann kompleks analizin geometrik teorisini geliştirdi ve 1860 dolaylarında Zeta Fonksiyonu'nun sıfır değerini aldığı kompleks sayıların konumu hakkındaki ünlü varsayımını açıkladı (Zeta Fonksiyonu, sonsuz seri denilen, bir tür "sonsuz toplam"la ifade edilen ve kompleks değerler alan doğal bir fonksiyondur. Zeta Fonksiyonu'nun tam bir tanımı bu kitabın kapsamı dışında kalıyor). Hâlâ ispatlanmamış olan bu varsayım –ünlü Riemann Hipotezi– günümüz pür matematiğinin derin ve matematikçilere adeta meydan okuyan yanıtlanmamış problemlerinin başında gelir.

On dokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında Karl Weierstrass kuvvet serileri konusundaki teorisini ortaya koyarak kompleks analize tam bir kesinlik kazandırdı ve sanal sayılar konusundaki bütün gizemliliğe son verdi. Yüzyılın sonlarında Hadamard ve De La Vallee Poussin, birbirlerinden bağımsız olarak, "Asal Sayılar Teoremi" olarak bilinen ilginç sonucu, kompleks analiz kullanarak ispat ettiler.

Asal bir sayı 1'den büyük olan, kendisinden ve 1'den başka böleni olmayan bir sayı olarak tanımlanır. Çift olan tek bir asal sayı vardır; o da 2 sayısıdır. Onun dışındaki her çift sayı, örneğin 36, 2 ile bölünebilir ve bu nedenle de asal olamaz. Asal olan ilk birkaç sayı 2, 3, 5, 7, 11, 13 ve 17'dir. Asal sayılar düşünüldüğünde insanın aklına gelen ilk soru şu olur: Acaba kaç tanedirler? En büyük olan bir asal sayı var mıdır, yoksa sürüp giderler mi? Akla yakın ilk tahmin sonlu sayıda oldukları, yani en büyük bir asal sayının var olduğu yolundadır. Çünkü bir sayı yeterince büyükse, başka bir sayının onu bölme olasılığı da büyüktür; en azından, bunun için çok fazla olanak var olduğu için. Örneğin ulusal borç miktarını ele alalım. Onu *peni*lerle ifade ettiğimizde karşımıza çok büyük bir sayı çıkar. Şimdi bu sayının karesini alalım. Akıl almaz nicelikte bir sayı buluruz. Ancak bu sayı asal değildir çünkü tam bir karedir ve karesi alınan sayı ile bölünebilir. Şimdi de bu sayıya 1 ekleyelim. Bu yeni sayı asal mıdır? Bunun cevabı belli değil. Ancak o kadar büyük bir sayıdır ki onu bölen olmaya aday olan pek çok sayı vardır. Asal olma şansı yok gibi görünüyor. Yoksa asal mı? Her neyse... Eukleides sonsuz sayıda asal sayı bulunduğunu MÖ 300 yılında ispatlamıştı. Onun bu ispatı günümüzde bile *zarif* matematiğin bir örneği olarak yerini korumaktadır. İspat şöyledir:

> Sonlu sayıda asal sayı olduğunu varsayalım ve sayılarına da n diyelim. Bu sonlu sayıdaki asal sayıları p_1, p_2, p_3, ..., p_n ile gösterelim ve
>
> $$x = p_1p_2p_3 \cdots p_n + 1.$$
>
> ile verilen x sayısına bakalım. Açıkça görülüyor ki x pozitif bir tamsayıdır ve asal değildir (Bütün asal sayıların çarpımından 1 fazla olduğu için asal sayıların her birinden büyüktür). Öyleyse x bir asal sayı tarafından bölünebilir (x asal olmadığı için tam bölenleri vardır. Öyleyse, a ve b 1'den büyük tamsayı olmak üzere, $x = a \cdot b$ yazabiliriz. Eğer a veya b asal ise, x'i bölen bir asal sayı var demektir. a ve b asal değillerse a ve b'nin çarpanları vardır ve bu çarpanlar ya asaldır ya da onların da çarpanları vardır. Böylece, $a = a_1a_2$ ve $b = b_1b_2$ dersek, $x = a_1a_2b_1b_2$ olur. Bu şekilde devam ederek, x'in gerçekte asal sayıların bir çarpanı olduğunu ve bu nedenle de asal bir sayı ile bölünebildiği sonucuna varırız). Ancak x sayısı, p_1, p_2, p_3, ..., p_n asal sayılarının hiçbiriyle bölünebilir değildir, çünkü bu bölmeler 1 kalanını bırakır (Örneğin 2, 3, 5, *bütün* asal sayıları oluştursaydı $x = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ olur ve 31'i 2, 3 ve 5 asal sayılarıyla böldüğümüzde 1 kalırdı). Öyleyse, listemizde bulunan asal sayılar dışında bir asal sayının daha bulunması gerekir. Ancak bu bir *çelişki*dir, çünkü listemiz bütün asal sayıları içermektedir. Bu nedenle asal sayılar sonlu değil, sonsuzdur.

Eukleides'in bu ispatı birkaç nedenden dolayı ilginçtir: Matematik temel bilgi düzeyleri ne olursa olsun ispat, konu üzerinde dikkatle düşünmeye hazırlıklı olan herkesin anlayabileceği türdendir. Zariftir ve sezgisel değildir. Bu teorem şu sonucu da içermektedir: Eğer n'den küçük olan ve n'e eşit olan asal sayıların adedine $P(n)$ dersek, n sonsuza gittiğinde $P(n)$ de sonsuza gider. [$P(2) = 1$'dir, çünkü 2'den küçük veya 2'ye eşit olan bir tek asal sayı vardır, o da 2'nin kendisidir. $P(12) = 5$'tir, çünkü 12'den küçük veya 12'ye eşit olan tamı tamına beş asal sayı vardır: 2, 3, 5, 7, 11.] Ünlü Hadamard ve De La Vallee Poussin teoremi bize $P(n)$'in hangi *hızla* sonsuza yaklaştığını söyler. Eukleides MÖ 300 yılında bize $P(n)$'in *sonsuza gittiğ*ini söylemişti. Hadamard ve De La Vallee Poussin bize onun ne çabuklukla gittiğini söylediler. Ancak Eukleides ile Asal Sayılar Teoremi arasında iki bin yıllık ara vardır. Eukleides bize asal sayıların tıpkı 1, 2, 3, ... doğal sayıları gibi, birer birer sonsuza yürüdüklerini temel argümanlarla kanıtladı. Bu yürüyüşün *hızını* saptamak için Hadamard ve De La Vallee Poussin'in kompleks analizin derinlerine inmeleri gerekti. Bize söyledikleri şuydu: $P(n)$'in "büyüme" hızı $n/\log(n)$'dir. [$\log(n)$ sembolü, n'in doğal logaritmasını simgeler. $\log(n)$ sayısını n büyüdükçe büyüyen, ancak n kadar hızlı büyümeyen bir değer olarak düşünün.] Bu ilginç sonuç yalnızca asal sayıların büyüme hızına bir yanıt getirmekle kalmamakta, aynı zamanda tamsayıların incelikli matematiği ile logaritmaların içerdiği sürekli matematik arasında bir bağlantı da kurmaktadır. Bu ispatın yöntemi, matematiğin sayılar teorisi ve kompleks analiz gibi görünürde birbiri ile tamamen ilintisiz iki dalı arasındaki bağıntıyı sonsuza dek pekiştirmiştir.

Kompleks analiz, görünürde birbiri ile ilgisi olmayan matematik konuları veya nicelikleri arasında bağıntı bulmayı rutin olarak yapar. Asal Sayılar Teoremi ile ilgili teoremin derinliğine pek yaklaşmayan bağıntılardan biri de Euler'in 1748 eşitliğidir. Euler, bütün reel θ (theta)'lar için

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

olduğunu ispatladı (Yunan abecesinin sekizinci harfi olan θ trigonometrik fonksiyonların ifadesinde kullanılır). Bu eşitlik *fonksiyonlar* arasındaki bir bağlantıyı, yani soldaki kompleks değerli üs fonksiyonu ile trigonometrinin normal reel değerli sinüs ve kosinüs fonksiyonları arasındaki bir bağlantıyı ifade etmektedir [Bir fonksiyon, bir x sayısını, $y = f(x)$ ile gösterilen bir y sayısına bağlayan bir f kuralıdır. Daha önce $p(x) = x^2 - 2$ şeklindeki polinom fonksiyonlarıyla karşılaşmıştık. Trigonometri daha çok "sinüs" ve "kosinüs" olarak bilinen iki kuralın incelenmesiyle ilgilidir. Bu kurallar reel bir θ sayısı ile $y = \sin\theta$ veya $y = \cos\theta$ ile gösterilen başka bir reel y sayısı arasında bağlantı kurar. Bu kurallar, anımsayacağınız gibi, genellikle bir dik üçgenin kenarlarının uzunluklarının oranları olarak verilir]. θ'ya $\theta = \pi$ değerini verip $\sin\pi = 0$ ve $\cos\pi = -1$ olduğunu anımsarsak,

$$e^{i\pi} = -1. \qquad \text{(I)}$$

elde ederiz. Bu sonuç kendi başına ilginçtir ve matematik literatüründe birkaç yerde karşınıza çıkar [Örneğin Ian Stewart, *The Problems of Mathematics* (Matematiğin Problemleri) kitabında $\log(-1) = i\pi$ sonucuna dikkat çekmiştir]. Ancak (I) eşitliğini gören hemen her matematikçi iki tarafa da 1 eklemek için dayanılmaz bir dürtü hissedecektir. Bu dürtüye kendini bırakınca da

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \qquad \text{(B)}$$

elde eder.

(I) ve (B) eşitlikleri tamamen denktirler, yani aynı bilgiyi içerirler. Başka bir deyişle (I) eşitliği ancak ve ancak (B) denklemi geçerliyse geçerlidir [(I) eşitliğinin doğru olduğunu biliyoruz; bunu Euler ispatlamıştı]. Ancak bu iki eşitlik estetik dünyanın çok farklı bölgelerinde yaşarlar. (I) denklemi sadece ilginçtir, (B) denklemi çok büyük güzelliği olan bir matematiksel ifadedir. Buna dikkat edin.

Matematiğin pek önemli olan beş sabit sayısı vardır: e, i, π, 1 ve 0 (Bu kuşku götürmez, isterseniz 100 matematikçiye sorun).

Bundan başka, matematiğin dirimsel bağlantısı eşitliktir; en önemli işlemler de toplama, çarpma ve üs almadır. Gördüğünüz gibi (B) eşitliği bütün bunları içerir; bunlar dışında da başka *bir şey içermez.* Bu eşitlik bütün bu önemli matematiksel kavramları içerdiği için *tamlık*'ı betimler ve bunların dışında başka hiçbir şey içermez (Böylece, (B) eşitliği, *minimal tamlık estetik ilkesi* dediğim şeyi sağlar). Şimdi (I) ve (B) eşitliklerinin estetik değerleri arasındaki farka dikkat edelim ve matematikçilerin birinci eşitliğin verdiği *bilgi*den çok, ikinci eşitliğin estetik *güzelliği* ile güdülendiklerini anlayalım.

İki Problem

Sayılar teorisi, pür matematiğin tamsayılara ilişkin problemlerle uğraşan koludur. Bu tür problemlerin ifade edilmeleri, göreceli olarak, kolay sayılır; bu nedenle de sayılar teorisi konusundaki çalışmalar zaman zaman basında da yer alır. Yakın zamanlarda, pek de doğru olmadığı halde, Fermat'nın Son Teoremi olarak bilinen 350 yıllık teoremin ispatlandığı yolunda bir haberin basında yer alması buna örnektir.

Pierre Fermat (1601-1665) Toulouse'da hukuk eğitimi görmüş ve yaşamının büyük bölümünde kamu görevlisi olarak çalışmıştır. Bu nedenle, onun matematik araştırmalarından söz edilirken, kendisinden "amatör matematikçi" olarak bahsedilir. Ancak onun matematiğinde amatör olan hiçbir şey yoktur; analitik geometri ve olasılık da dahil, matematiğin birçok alanlarında katkısı vardır. Reel değerli fonksiyonların en büyük (maksimum) ve en küçük (minimum) değerleri konusundaki çalışmaları bir tür Newton öncesi kalkülüs oluşturur (Bir fonksiyonun maksimumu, fonksiyonun aldığı en büyük değerdir). Fermat daha çok tek başına kurduğu "sayılar teorisi" konusundaki araştırmalarıyla tanınır. Fermat'nın ünü, büyük ölçüde,

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad \text{(P)}$$

şeklindeki eşitliği sağlayan sonsuz sayıda x, y, z tamsayılarının var olduğunu dile getirmiş olmasından kaynaklanır. Bu tamsayılara, dik üçgenlerle ilgili olmaları nedeniyle "Pythagoras Üçlüleri" denir. Bir Pythagoras üçlüsüne örnek olarak (3, 4, 5)'i verebiliriz, çünkü $3^2 + 4^2 = 5^2$ dir. Böyle tek bir üçlünün var olması sonsuz sayıda üçlünün var olması demektir, çünkü eğer *x*, *y* ve *z*, (P) eşitliğini sağlıyorsa, *a herhangi* bir tamsayı olmak üzere *ax*, *ay* ve *az*'de (P) eşitliğini sağlar [(P) eşitliğinin iki tarafını a^2 ile çarpın]. Fermat daha genel olan

$$x^n + y^n = z^n. \qquad \text{(F)}$$

ifadesini ele aldı ve *n*'nin 2'den büyük bir tamsayı olması durumunda (F) eşitliğini sağlayan hiçbir *x*, *y*, ve *z* tamsayısının var olmadığını ileri sürdü. Bir kitap sayfasının kenarına, not şeklinde, bu savını ve ona çok ilginç bir ispat bulduğunu yazmıştı. Ancak, ne yazık ki, sayfa kenarında bu ispatı yazacak yeterli boş yer yoktu. Aradan üç yüzyıldan çok bir zaman geçmesine karşın ne bir ispat yapılabilmiştir, ne de Fermat'nın söylediklerinin yanlışlığını ortaya koyacak bir karşıt örnek bulunabilmiştir. Birçok büyük matematikçi bir ispat bulmak için çok uğraşmıştır. O kadar çok matematikçi bu uğraşa girişmiştir ki, "Fermat'nın kitabının sayfa kenarı daha geniş olsaydı matematik tarihinin çok farklı olacağı" söylenmiştir.

Ancak ben ileri sürdüğü sav için Fermat'nın gerçekten bir ispatı olduğuna inanan bir matematikçi tanımıyorum. Belki de bir hata yapmıştı ve gerçekte savı ispatlamadığı halde ispatladığını sanmıştı. Ayrıca, Fermat Problemi'nin uğraşmaya değer olduğunu düşünen birkaç matematikçi çıkmıştır - en azından yakın zamana kadar. Ünlü Gauss bile on sekizinci yüzyılda bu problem üzerinde çalışmış ve Fermat'nın $n = 4$ için doğru olduğunu göstermişti. Ancak Paris Akademisi tam ispat için bir ödül koyduğunda Gauss, bu problemin matematiğin diğer alanları için bir değeri olmadığını söyleyerek, ilgilenmedi. On dokuzuncu yüzyılda Alman matematikçi Ernst Kummer problemin bir "zirve"den çok bir "merak konusu" olduğunu söyledi.

Ancak, bu problem üzerinde çalışmalar hâlâ sürmektedir. 1983'te Gerd Faltings, (F) eşitliğinin eğer bir çözümü varsa, bu çözümün her n kuvveti için sonlu sayıda olacağını ispatladı. Yani, eğer Fermat yanılmışsa, bu yanılgı sadece sonlu bir yanılgıdır. Samuel Wagstaff ve Jonathan Tanner bilgisayar kullanarak 150.000'e kadar olan bütün *n* değerleri için Fermat'nın doğru olduğunu gösterdiler.

Bütün bunlar kısmi sonuçlardır ve genel problem hâlâ çözülmemiştir. Birçok matematikçi için bugün de çekiciliğini korumaktadır. Yakın zamanlarda popüler basında problemin çözüldüğü yolunda haberler yer aldı. *New York Times, The Chronicle of Higher Education* ve *Time* dergisi gibi yayınlarda "çözüm" hakkında art arda makaleler çıktı. Ancak yine de bu kutlamalar biraz erken sayılabilir. Bu satırları yazdığım sıralarda, öne sürülen ispatta bazı "temel hatalar" bulunmuştur ve Fermat Problemi çözülmezliğini sürdürmektedir. Bu problem ifadesi ve anlaması kolay olan, ancak çözümü şimdiye dek olanaksız görünen matematik problemlerinin prototipidir. Artık matematikçilerin elinde Fermat'nın Son Teoremi'nin doğru olduğu konusunda güçlü nedenler de var. Ancak, eğer Fermat bu teoremi gerçekten ispatlamadıysa, şimdiye dek hiçbir kişi de ispatlayamamıştır.

Basit görünmesi nedeniyle matematik hakkında yazanların sürekli dikkatini çeken ve şimdi çözülmüş bulunan ikinci bir problem de Dört Renk Problemi'dir. Artık doğruluğu ispatlandığı için Dört Renk Teoremi olarak bilinen bu problem şöyledir:

> Bir düzlem üzerine çizilen bir harita, sınırları ortak olan iki ülke aynı renkte olmayacak şekilde, dört veya daha az renkle boyanabilir mi?

Bir lisansüstü öğrencisi olan Francis Guthrie 1852'de erkek kardeşine yazdığı bir mektupta ona bu problemi sormuştu. Anlaşılan kardeşi pek yardımcı olamadı. Bu sefer problemi

Londra'da University College'daki saygın profesör Augustus de Morgan'a sordu; Morgan da çözmeyi başaramadı ve problemi William Hamilton'a verdi; o da çözemedi. Dört rengin yeterli olduğuna ilişkin bir ispat bulunamadan ve dörtten çok renge gerek duyan bir harita çizilemeden bu iş, bir yüzyıldan fazla, bir matematikçiden diğerine dolaşıp durdu. Yol boyunca birçok hatalar yapıldı, birinci sınıf –veya hemen hemen birinci sınıf– matematikçiler sonradan hatalı oldukları ortaya çıkan çözümler buldular. Ian Stewart bu problemi "belalı" olarak niteler ve çözülemeden beklediği 124 yıl boyunca, onun matematiğin ifadesi en kolay, ama çözümü en zor problemi olduğunu ileri sürer.

Illinois Üniversitesi'nden Kenneth Appel ve Wolfgang Haken 1976'da Guthrie'nin sorusunun yanıtının "evet" olduğunu gösterince (bilgisayar yardımıyla) bu problem bir teorem halini aldı (Bunu kutlamak için Urbana'daki Illinois Üniversitesi postanesi "Dört Renk Yeterlidir." tümcesi yazılı bir posta damgası kullanmıştır). Ancak Appel-Haken ispatı bir hayli tartışmaya da yol açtı.

Appel-Haken ispatının, çok yalın olan ama hem yöntemi, hem de tartışma nedeni konusunda aydınlatıcı olabilecek bir özeti şöyledir: Dört Renk Problemi'ne yanıtın olumlu olduğunu ispatlamak için *herhangi* bir normal haritanın dört veya daha az renkle boyanabileceğini kanıtlamak gerekir. Haritaların büyük çoğunluğunun bu dört renkle boyanabilir olduğunu göstermek, psikolojik yönden doyurucu olsa da, *ispat* denebilecek bir şey sağlamaz. İspat genellik gerektirir. Bütün haritaları göz önüne almamız gerekir.

Kaldı ki, belirli bir türden olan bütün haritaların dört renkle boyanabileceğini göstermek de yeterli olmaz. Ama eğer önce şu sonucu ispatlamışsanız durum değişir: *Belli bir türden olan bütün haritalar dört renkle boyanabilirlerse, herhangi bir harita dört renkle boyanabilir.* O zaman belli türden haritalar için yanıtın olumlu olduğunu gösterdiğinizde problemi bütün haritalar için yanıtlamış olursunuz. Appel ve Haken'in kullandığı yöntemin özü budur. Onlar Kempke, Birkhoff ve Heesch gibi matematikçilerin çalışmalarından yararlanarak, *herhangi* bir haritayı dört renkle boyama şeklindeki genel problemi, belirli türden sonlu sayıdaki haritaları boyama problemine indirgediler. O zaman problem, bu belli türdeki bütün haritaları tek tek kontrol etmeye dönüştü. Kontrol edilecek haritalar ise sonlu sayıdaydı, ancak sayı çok büyüktü; hepsini denemek insanın hesap kapasitesinin dışındaydı. Bu nedenle Appel ve Haken Illinois Üniversitesi'nin IBM 360 bilgisayarına başvurarak haritaların sınanmasını ona bıraktılar. Aylar süren çalışmalar ve bin saatlik bilgisayar zamanı sonrasında bilgisayar yanıt verdi: Evet.

Bu iş başarılmıştı. Acaba? Appel ve Haken yeni tür bir "ispat" geliştirmişti. Tarihi ve derinliği olan bir matematik teoremi, matematikçilerin incelemelerine olanak vermeyen bir şekilde ispatlanmıştı. Bilgisayarın yaptığı şey bütünüyle, insan değerlendirmesinin dışında olan bir şeydi. Bilgisayarın yaptığı işlem ölümlü varlıklarca incelenemeyecek ölçüdeydi; çok fazlaydı, çok hesaplama içeriyordu ve çok hızlıydı. Bilgisayar hata yaptıysa onu bilmemiz olası değildi (Tabii eğer birisi çıkıp beş renk gerektiren bir harita çizerse durum değişir).

Appel-Haken ispatı felsefecilerin de ilgisini çekti. *Journal of Philosophy*'deki yazısında Thomas Tymoczko bu yöntemin kabul edilmesinin "ispat" kavramımızda temel değişiklikler gerektirdiğini ileri sürerek şunları yazdı:[13]

> İspat kontrol edilebilen, incelenebilen, rasyonel olarak doğrulanabilen bir yapıdır. Çoğunlukla ispatın açıkça görülebilir olması veya doğrudan kontrol edilebilir olması gerektiğini söyleriz. O, bir göz önüne serme, bir sonucun ortaya çıkarılmasıdır ve inandırıcı olmak için kendi dışında bir şeye gereksinimi yoktur. Matematikçi, ispatı bir bütün olarak inceler ve sonucu bu yolla değerlendirir.

Appel-Haken ispatı ise "kontrol edilemez" ve bu nedenle de doğru olup olmadığı bilinemez. Tymoczko'ya göre o bir ispat *değildir*.

Buna karşılık, filozof Israel Krakowski derhal Tymoczko'nun tersi bir görüşü savundu ve Appel-Haken yönteminin "çok farklı" olmakla beraber "felsefe açısından yeni sorunlar çıkarmadığını" ileri sürdü. Tymoczko ispatın kontrol edilebilir olmadığını söylüyor, Krakowski ise bilgisayarın onu "adım adım" kontrol ettiğinde ısrar ediyor ve şunu ekliyor: Bilgisayarın bunu yapmadığını söylemek "şovenlik"tir (Bu, kuşkusuz, ülkedeki o kadar dijital bilgisayarı bir çeşit kurban durumunda görmeye yönelik ilk belgelenmiş adımdır).

Tymoczko, Appel ve Haken'in çözümünün "matematiğe deneysel yöntemler getirdiğini" söylüyor. Krakowski de bunu matematiğin zaten deneysel, veya hiç olmazsa ampirik olduğu şeklinde yanıtlıyor. Ian Stewart, matematikçilerin ya konuya kayıtsız kaldıklarını, ya da çözüm yönteminin, bunun "zaten iyi bir problem olmadığını" gösterdiğini düşündüklerini ima ediyor.

Belki de hata yoktur ve ispat doğrudur. Stewart doğruluğuna inanıyor ve "şu anda ispatın doğruluğundan kuşkusu olan bir matematikçi" duymadığını ekliyor. Stewart, ayrıca, "bir bilgisayarın hata yapma olasılığının insanınkinden daha az"[14] olduğunu savunuyor. Belki öyledir, ancak biz bunu hiçbir zaman bilemeyeceğiz. Çünkü yapılanların "kontrol edilebilirliği" yalnız filozoflar için ilginçtir. Geriye kalan bizler karmaşık bilgisayar verilerinin, *kontrol edilme* bir yana, okunmadığını bile biliyoruz. Beş sayfadan uzun olan bilgisayar kayıtlarının yazıcıdan masaya, oradan da dosya dolabına kalktığını hepimiz biliyoruz.

Appel ve Haken bize geleceğe ilişkin çok kısa bir bakış sunuyorlar: Derin teoremleri kanıtlamak için, izlenmesi olanaksız bilgisayarların milyonlarca özel hali rutin olarak sınamasına bel bağlayan bir gelecek. *Mathematics Today* (Günümüzde Matematik)[15] adlı kitapta Appel ve Haken bunun gerçekleşebileceğine işaret ediyorlar. Anladığım kadarıyla çok hoş karşıladıkları bir gelecek bu.

Ancak ben öyle hissetmiyorum. Çünkü bu, zarafetten yoksun, çarpık bir matematik olur. Doğruluk böyle bir dünyada yaşamayı seçebilir; ancak güzellik bunu istemez. Orada matematiğin sanatsal yönü, Prospero'nun ruhları gibi uçup gider. Öyle bir "cesur yeni dünya"da sihirbazlar parmaklarını şıkırdatırlar, matematikçiler de şair olmaktan çıkıp marangozluk yaparlar.

IV. Bölüm

Uygulamalı Matematik

Pür matematik bir oyundur, zihinde oynanan bir oyun. Oyunun hareketlerinin gelişimini, kâğıt üzerine yazdığınız sembollerle izlersiniz. Oyun ilerleyip soyutlamalar birbiri üzerine yığılınca semboller artık başka sembol kümelerini ifade etmeye başlar. Mecazlar üst üste katlanır ve nesneler arasındaki benzeşimlerin incelenmesi şeklinde başlayan şey daha sonra benzeşimlerin benzeşimleri ile ustaca oynamaya dönüşür. Bu aşamada matematiğin kendisi bir canlılık kazanır ve yeni düşünsel nesneler yaratmaya başlar. Başlangıçta aksiyomlar ve tanımlar gerçekliğin bir yansıması olarak belirlendiği halde artık onlardan çok uzaklarda, düşüncelerin açık denizlerindeyizdir. Gerçekliğin ufku günler önce gözlerden uzaklaşmıştır. Ortaya çıkan çeşitli kavramlar, yeni matematik üretmekten başka bir işe yarayacak değillerdir elbet. Gerçek dünyada hiçbir kullanımları yoktur.

Ama aslında vardır! Hem de çok. Alfred North Whitehead şöyle yazmış: "En aşırı soyutlamaların, somut olgular hakkındaki düşüncelerimize egemen gerçek silahlar olmaları açıkça saptanmış bir paradokstur."[1] Pür matematik uğraşını haklı kılmak için iki buçuk yüzyıldır kullanılan bir özdeyişte Galileo şunları söylemiştir: "Doğanın büyük kitabı yalnızca onun yazıldığı dili bilenler tarafından okunabilir. Bu dil matematiktir."

Doğayı anlamak ve somut olgular üzerinde çalışmak için matematik kullanımıyla belirlenen entelektüel alana *uygulamalı matematik* denir.

Uygulamalı matematik kapsamının çok geniş olduğu, fizik ya da ekonomi gibi alanlarla arasındaki sınırların kesin olmayacağı ortadadır. Örneğin, matematiksel fizik konusunda bir makale yazan kişinin kendini bir fizikçi olarak mı, yoksa bir uygulamalı matematikçi olarak mı tanımlayacağı onun temel çalışma alanının ne olduğuna bağlıdır. Eğer hep fizikle uğraşıyorsa fizikçidir. Eğer asıl ilgi alanı matematik ve onun fiziğe ya da başka alanlara uygulanması ise kendisine uygulamalı matematikçi diyecektir.

Burada ince bir ayrım yapmamıza gerek yoktur. Uygulamalı matematiği, Whitehead'in "somut olgular"ı hakkında yeni bilgi üretmek için, matematiği gerçek dünyaya bağlayan süreç olarak düşünmek bizim amacımız bakımından yeterlidir. Bu sürecin doğal olarak üç bölüme ayrıldığını göreceğiz: Bazı matematik türlerinin *uygulanabilirliği, matematiğin kendisi,* ve matematiğin *uygulaması* ("Uygulanabilirlik" belirli bir türden olan matematiğin "kullanılabilir" olması, "uygulama" ise matematiği kullanma sürecine denir). Bundan başka, uygulamalı matematik yapma işi sürecin sadece orta bölümündeki matematiği içerir. Her iki uçtaki uygulamalı matematik pür mantık sınırları dışında kalır. Nobel Ödülü sahibi ünlü fizikçi Eugene P. Wigner iki uçtaki işlemleri "inanılmaz ölçüde etkili" olarak niteliyor ve şöyle diyor: "(....) Matematiğin doğal bilimlerdeki yararlılığı nerdeyse gizemli denebilecek bir şey, bunun rasyonel bir açıklaması da yok."[2]

Uygulamalı matematik süreci, en iyi olarak, örneklerle ve sürecin üç bölümünün nasıl ayrıldığını gösteren şemalarla açıklanabilir. Bu yolla, uygulamalı matematiğin ne zaman matematik ne zaman da sihirbazlık olduğunu ayırt edebiliriz.

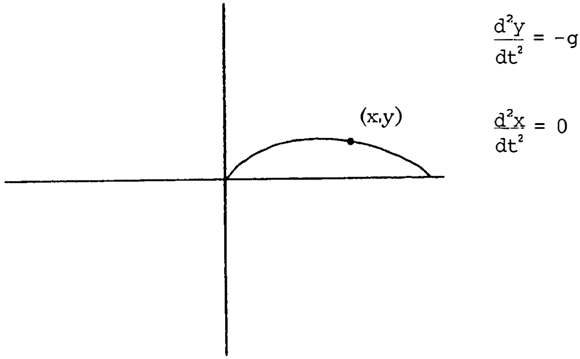
İlk olarak, çok iyi bilinen basit bir örneği ele alalım: Sopayla vurulan bir golf topu yere göre verilen bir açıda ve bilinen bir ilk hızla yükseliyor. Ne kadar uzağa gider?

Çözümün ilk adımı konu ile ilgili etkenlerin belirlenmesidir. Açıkça görülüyor ki golf sopası da onu savuran kişi de önemli değildir; çünkü bize sadece topun ilk hızı ve yerden yükselme açısı verilmiştir. Şimdi topun büyüklüğünün, biçiminin ve ağırlığının bir etkide bulunup bulunmadığını araştırırız. Eğer topun havadaki hareketinde havanın direnci göz önüne alınacaksa topun büyüklüğü ve biçimi elbette dikkate alınmalıdır. Ancak topun boyutları aerodinamik etkenlere göre saptanmışsa –gerçek bir golf topundan da öyle olmasını bekleriz– büyüklüğünü ve biçimini göz ardı edebiliriz.

Hava direncini de göz ardı etmeyi seçtiğimiz için hareket halindeki top üzerinde etken olan tek kuvvetin yerçekimi kuvveti olduğunu *varsaymış oluyoruz.* Bu nedenle topun ağırlığının konuyla ilgili bir etken olmasını bekleyebiliriz çünkü yerçekiminin bir nesneyi çekme kuvveti o nesnenin ağırlığıdır. Ve daha temel olarak, bir nesnenin ağırlığı nesnenin kütlesi m ile yerçekimi kuvvetinin yol açtığı g ivmesinin çarpımıdır. Bu durumda, yolumuza devam etmek için, golf topunun ağırlığı w'yi –ya da onun kütlesi m'yi– bilmemiz gerekir. Topun m kütlesini bildiğimizi varsayalım.

Bundan sonra, topun hareketini hangi "doğa yasaları"nın kontrol ettiğine karar vermek durumundayız. Bu örnekte bize gereken şey yalnızca hareket yasaları, hatta gerçekte sadece topu etkileyen kuvvetin onun kütlesiyle ivmesinin çarpımı olduğunu söyleyen *Newton'un İkinci Yasası*'dır. Topun hareketi sırasında herhangi bir andaki bilinmeyen hızını v ile gösterirsek ve ivmenin de hızın t zamanına göre kalkülüs "türevi"ne eşit olduğunu anımsarsak, ikinci yasa bize bir diferansiyel denklem yazma olanağı verir, o da

$$\frac{dv}{dt} = g. \qquad \text{(D)}$$



Şekil 4. Bir golf topunun hareketi.

dir (Hızı araba kullanırkenki hız olarak, ivmeyi de hızları değiştirme çabukluğu olarak düşünün).

(D) denkleminin teknik anlamı ve çözüm biçimi bizi ilgilendirmiyor (Bu denklem kesin matematiksel bir şekilde şunu ifade etmektedir: "Hızın zamana göre değişme oranı yerçekimi ivmesi olan *g*'ye eşittir." Bu ifadeye diferansiyel denklem deniyor, çünkü *dv/dt* "*v*'nin *t*'ye göre türevi" denilen bir kalkülüs kavramıdır). Ancak burada üç gözlem yapmamız gerekiyor.

Birincisi, (D) denkleminde *m* yer almıyor, kütle hesaplama dışında kalmış durumda. Topun ağırlığının bir etken olacağı yolundaki beklentimiz yanlıştı. Topun *yalnız* yerçekimi kuvvetinin etkisinde olduğu yolundaki varsayım, topun biçimi ve büyüklüğü gibi, ağırlığını da konu dışında bıraktı.

İkinci nokta (D) denkleminin göründüğü kadar basit olmamasıdır. Golf topu "hareket düzlemi" üzerinde bir eğri boyunca hareket etmektedir, düz bir doğru boyunca değil. Bu nedenle herhangi bir anda topun konumu, Şekil 4'te gösterilen *x* ve *y* koordinatlarıyla belirlenir. (D) denklemi bir *vektör* denklemidir ve onun yerine topun (*x,y*) koordinatlarıyla ilgili iki diferansiyel denklem yazılabilir (Vektörü bir ok olarak düşünebilirsiniz; küt ucu başlangıç noktasında, sivri ucu da hareket eden top üzerinde olan bir ok). Bu durumda, top hareket ederken vektör hem esner, hem de döner. (D) denklemi bu hareketi tanımlamaktadır.

Son olarak, topun hareketini inceleme probleminin (D) denkleminin analizine indirgenmiş olduğunu görüyoruz. Bu denklemi çözerek, başlangıçta sorulan, topun ne kadar uzağa gideceği sorusuna yanıt verebiliriz. (D) denklemine bir *matematiksel model* denir.

Konu ile ilgili etkenleri ve doğa yasalarını kullanarak golf topunun hareketi için diferansiyel denklem şeklinde bir matematiksel model üretmiş bulunuyoruz. Başlangıçtaki soru bir gerçek-dünya olgusuyla –gerçek bir golf topunun hareketiyle– ilgiliydi. Matematiksel model gerçek-dünyanın dışında yaşar. Model –(D) denklemi– matematiksel bir nesnedir; bir soyutlamadır ve matematik-dünyasında yaşar. D denklemini çözmek için, sembolleri mantık yasalarında ve soyut matematiğin sıradan diferansiyel denklemler diye bilinen dalında geçerli olan kurallara göre kullanırız. Denklemi çözme süreci herhangi bir yerde gerçekle ilgili *herhangi* bir şey içermez. Denklemi çözmek pür matematik yapmaktır.

Çözümü elde ettiğimiz zaman, soyut golf topumuzun gittiği uzaklığı bulmak için bunu kullanırız. Güzel! Matematiksel bir denkleme göre hareket eden matematiksel bir topumuz var ve çözüm bize topun ne kadar uzağa gittiğini söylüyor. Hiçbir sorun yok. Şimdi, modelin çözüm sonucunu gerçek-dünya topuna uygular ve gerçek topun gittiği uzaklığın, (D) denkleminin çözümünde öngörülmüş olan uzaklık olduğunu söyleriz. Gerçek topun soyut top gibi hareket edeceğine yürekten inanırız. Şaşılacak şey! Öyle de olur gerçekten!

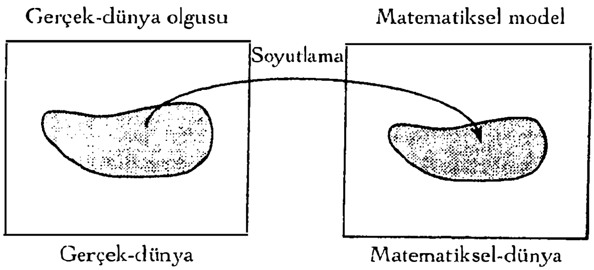
Matematik, (D) denklemine yol açan denklemleri yazmakla başlar, (D) denkleminin çözülmesiyle de biter. Etken olan faktörleri belirleyerek ve uygun fizik yasalarını saptayarak matematiksel modeli oluşturma şeklindeki bu ilk aşama bilgi ve deneyim gerektirir ve "model yapma sanatı" olarak adlandırılabilir. Modelle elde edilen matematiksel gerçek ile gerçek-dünya golf topu arasında bağlantı kurma şeklindeki son aşama matematiğin dışındadır; belki mantığın da dışındadır. Ancak ilginç olan, başarılı olmasıdır. Evet, mantıksızdır, irrasyoneldir, şaşılacak şeydir... Ama başarılıdır.

Üstelik her yerde geçerlidir de. Ay'ın arka yüzüne gönderilen bir uzay mekiğine binin. Uzay giysileri içinde yalpalayarak Ay yüzeyine inin. Ay semasına bir golf topu gönderin. Topun ilk hızını ve Ay'ın çekim sabitini söyleyin, ben de Pennsylvania'daki çalışma odamda oturup, kâğıt üzerine matematiksel semboller yazarak, onlarla kendi malımmış gibi oynayıp uğraşayım. İşim bittiğinde topun ne kadar uzağa düştüğünü *hesaplayacağım*.

Ay'ın arka yüzünün karanlığında herhalde topu kaybetmişsinizdir. Ancak, fenerlerle bulmaya hiç uğraşmayın. Aşağıya haber verin, ben size topu nerede bulacağınızı tam olarak söyleyebilirim.

Şimdi uygulamalı matematik sürecini şemalarla açıklayarak çeşitli bölümlerini iyice anlamaya çalışalım. Şekil 5'te, Şekil 1'de verilmiş olan matematik dünyası, ülkeler ayrı ayrı belirtilmeksizin görülüyor. Yanında da gerçek-dünyayı temsil eden bir başka dikdörtgen var. Bilimin amacı soldaki dikdörtgeni –gerçek-dünyayı– anlamaktır. Whitehead'in "somut olgular"ı ve Galileo'nun "doğanın kitabı" burada gerçekleşen olguları konu almaktadır.

Anlamayı arzu ettiğimiz bir gerçek-dünya parçasını ele alım. Bu "parça" Şekil 5'te, gerçek-dünya dikdörtgeninde taranmış bölge olarak gösterilmiştir. Bu "parça"yı biraz önce tartıştığımız türden bir problem olarak düşünebilirsiniz. Bu belki bir golf topunun, ya da daha genel olarak, havaya fırlatılmış bir cismin hareketine ilişkin bir problem olabilir. Belki de bir salgın

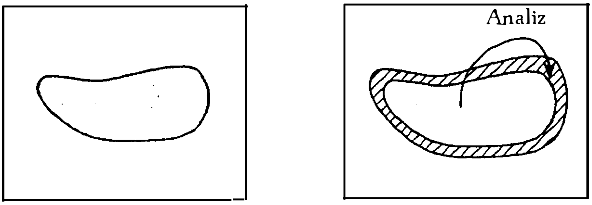


Şekil 5. Model oluşturma

hastalığın nasıl yayıldığını anlamak istiyoruz veya bir karbon atomundaki parçacıkları bir arada tutan kuvveti. Hiç fark etmez. Taranmış alan, bilimsel olarak anlamak istediğimiz gerçek-dünya problemini göstermektedir. Bu olgu hakkında geçmiş gözlemlerimizle uyumlu sonuç veren, ve hata yapmamışsak, gelecekteki durumu da gösterecek olan bir teori geliştirmek istiyoruz.

Bu olgu hakkındaki "düşüncelerimizi kontrol etmek" için, önce onun için sembolik bir benzetme geliştirmemiz gerekir. Bu yolda ilk adım, araştırılan gerçek-dünya parçası için matematiksel bir model inşa etmektir. Bu adım, gerçek-dünya olgusunun, matematiksel-dünyadaki soyut bir "kopyasını" yapmamızı gerektirir. Golf topu örneğinde matematiksel model tek bir diferansiyel denklemdir. Genellikle matematiksel model çok daha karmaşık olur, denklemler ve eşitsizlikler sistemleri ile bir dizi "sınır koşulları"nı içerir (Sınır koşulları çoğu kez gerçek-dünya olgusunun "başlangıç koşulları"nı anlatır. Golf topu için sınır koşulları topun yerden yükseldiği andaki açısı ve hızıdır). Golf topunda olduğu gibi, sadece konuyu etkileyen faktörler ayrıldıktan ve uygun fizik yasaları belirlendikten sonra matematiksel model oluşturulabilir. Verilen problem için oluşturulan matematiksel model Şekil 5'te matematiksel-dünya dikdörtgenindeki taranmış bölgeyle gösterilmiştir. Matematiksel modeli meydana getirme süreci –gerçek-dünyadan ayrılma– Şekil 5'te görülen ve "soyutlama" olarak adlandırılmış olan eğri okla gösterilmiştir. Model oluşturmada kullanılabilen matematik türlerine "uygulanabilir" matematik diyeceğiz.

Şimdi de gerçek-dünyayı arkamıza alıp dikkatimizi matematiksel model üzerinde toplayacağız. Artık elimizde matematik sembolleri var. Bu aşamada bizi ilgilendiren olgunun kendisi değil, soyut kopyasıdır. Bu modeli ele alıp, mantık yasaları ve matematik kuralları kullanarak, onun sahip olabileceği başka özellikler *çıkarırız.* Yani matematiksel semboller üzerinde çalışarak, model hakkında daha önce bilmediğimiz "olgular" bulmaya çalışırız. Özel bir durumda bu süreç, denklemleri çöz-



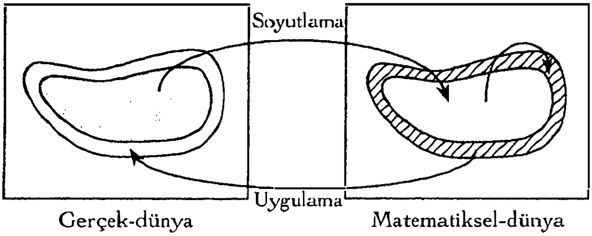
Gerçek-dünya Matematiksel-dünya

Şekil 6. Modelde değişim

mek, ya da bazı sonsuz serileri toplamak veya, belki de, kompleks integrallerin değerlerini bulmak gibi şeyler içerecektir. Ancak bu çıkarımların her aşamasında kullandığımız gerekçeler "*p* gerektirir *q*" şeklindeki mantıksal tümcelerle ifade edilir. Bu, sürecin *analitik* aşaması, aynı zamanda da pür matematik aşamasıdır.

Analiz bittiğinde ve matematiği götürebileceğimiz yere kadar götürdüğümüzde, model hakkında başlangıçta bilmediğimiz bazı gerçekler keşfetmiş olacağız. Golf topu örneğinde modelin analizi bir diferansiyel denklemin çözümünü gerektirdi ve çözümden yola çıkarak, modeli oluşturduğumuzda bilmediğimiz bir gerçek olguyu, topun ne kadar uzağa düşeceğini hesapladık. Şemada, model hakkındaki bu yeni bilgiyi, Şekil 6'da görülen matematiksel-dünyadaki alanı "şişmanlatarak" gösteriyoruz. Bu genişleme Şekil 6'da eğik çizgilerle taranmış halka şeklinde görülmektedir. "Analiz" adı verilen eğrisel ok, model hakkında yeni bilgilere yol açan pür matematik işlemlerini göstermektedir.

Bu yeni gerçeklerin matematiksel gerçekler olduğu açıkça belirtilmelidir. Pür matematik süreci bize matematiksel model hakkında yeni bilgiler verir. Analiz de model hakkında daha önce bilmediğimiz "gerçekler"i aktarır. Golf topu örneğinde analiz bize topun ne kadar uzağa gideceğini söyler. Ancak, matematiksel analizin gerçek top için değil "matematiksel top" için geçerli olduğunu unutmamamız gerekiyor. Yeni bilgi de, modelin kendisi gibi, Şekil 6'daki gerçek-dünyada değil matematiksel-dünyada yaşar.



Şekil 7. Uygulamalı matematik süreci

Matematik burada son bulur. Bundan sonraki adım –yeni matematiksel gerçekleri gerçek-dünya olgularına "uygulama" adımı– matematik değildir. Matematik, çıkarım kuralları gerektirir. Ancak matematiksel gerçeklerin gerçek-dünya olgularını kapsayacağı şeklinde bir kural yoktur. Bu adımın gerektirdiği şey sihir ve başarılı olacağı konusunda gerçek bir inançtır. E. P. Wigner buna "bir inanç öğesi" demektedir.

Şekil 7'de, tamamlanmış bir halka görülmektedir. Bu şema incelenen gerçek-dünya olgusu hakkında yeni "olgular" verdiğine inandığımız, son adım olan uygulamayı da içermektedir. Bu yeni bilgi, Şekil 7'de, genişlemiş bir gerçek-dünya bölgesi şeklinde görülmektedir. Golf topu örneğinde bu genişletilmiş gerçek-dünya bölgesi topun ne kadar uzağa gideceği, ne kadar yükseğe çıkacağı ve herhangi bir andaki tam konumu gibi yeni "gerçek olgular" içermektedir.

Hatalar

Uygulamalı matematik sürecindeki son adım olan "inanç atılımı"nı şimdilik bir yana bırakırsak, hataya düşülebilecek iki olasılığın var olduğunu görürüz. Birinci hata olasılığı modelin oluşturulması, ikincisi de matematiksel analiz sırasında ortaya çıkabilir.

Modelin yapımı konu ile ilgili faktörlerin doğru olarak saptanmasını ve dikkate alınmasını gerektirir. Burada yanılma kolaydır. Örneğin golf topunun hareketini incelerken hava direncini dikkate almamaya karar verdik, çünkü topun aerodinamik tasarımının hava direncini yok kabul edebileceğimiz şekilde olduğunu varsaydık. Bu yanlış olabilirdi. Belki topun şekli bozuktur, veya belki de şiddetli bir rüzgâra karşı gitmektedir. Eğer öyleyse, uygulamalı matematik sürecinin sonucunun topun hareketi hakkında yararlı bilgi vereceğini düşünmek için daha az neden var demektir.

Matematiksel modeller çoğunlukla bazı düzeltme ve ayarlamalar gerektirirler. Bizim top örneğinde yaptığımız gibi, işe basit bir modelle başlarsınız, ortaya çıkması beklenen "gerçek"lerin gerçek-dünya olgularının gözlemlenen davranışlarına uymadığını görürsünüz. Örneğin, gerçek golf topları modelin öngördüğü şekilde hareket etmezler. O zaman model tekrar gözden geçirilir –daha çok, ilgili etkenlerin tekrar gözden geçirilmesi şeklinde– ve süreç tekrarlanır.

Modelin daha ayrıntılı ve kusursuz hale getirilmesi matematiksel analizi zorlaştırabilir. Golf topu modeline havanın direncini eklemek, (D) denklemi yerine daha karışık ve bu nedenle de çözümü daha zor olan bir denklem yazmak demek olur. Gerçekte topa etki yapan bütün kuvvetler gözönüne alındığında bulunan denklem kapalı çözümü olmayan türden bir denklemdir. Bu durumda yüksek hızlı bilgisayar kullanımını gerektiren yaklaşık sayısal çözümlere başvurulur ve bu da her zaman yeni hatalara yol açar. Model oluşturma *sanatı* deneyimle öğrenilen bir tekniktir; bir yandan konuyla ilgili faktörlerin gerçekçi bir bütünlükle göz önüne alınmasına izin verir, bir yandan da bizi matematiksel analize elverişli olan bir modele götürür.

Ancak sanatımız ne denli ayrıntılı ve kusursuz, birikimimiz ne kadar derin olursa olsun, model gerçek-dünya olgusunun tam bir kopyası değil, olsa olsa onu bir ölçüde temsil eden bir şey olacaktır (Herhangi bir gerçek-dünya olgusu tam bir modeli yapılamayacak kadar karmaşıktır. Biz konu ile ilgili olan ve sadece bizim kullanabileceğimiz faktörlerin modelini yapıyoruz. Golf topu örneğinde modelimiz topun havadaki hareketini etkileyen hava akımları gibi faktörleri hiç dikkate almamıştır). Bu nedenle uygulamalı matematik sürecinin gerçek-dünya hakkında kesin sonuçlar vermesini beklememeliyiz - Wigner'in inanç öğesi dediği şeye ne kadar yürekten inansak da. Yapabileceğimizin en iyisi, gerçeğe bir yaklaştırımdır. Hata kaçınılmazdır.

Bu nedenle de, matematiksel analizin kendisinin yeni yeni hatalar getirmemesi için çok dikkatli olmamız gerekir. Analiz sürecinde basit matematiksel hatalar yapmaktan kaçınmalıyız. Ancak bu yeterli değildir. Analiz elden geldiğince büyük dikkat ve kesinlikle yapılmalıdır. Sürecin doğasında var olan hatayı, matematiği dikkatsizce kullanma sonucu oluşan çatlaklardan gizlice sızan hatalarla daha da büyütmemeliyiz.

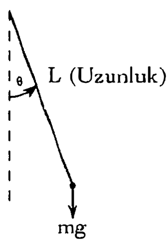
Pür matematikçi ile uygulamalı matematikçinin kesin bir biçimde anlaşamadıkları nokta da budur: Matematiksel analiz için gereken titizliğin ölçüsü. Pür matematikçi titizlik ve kesinlikten yanadır çünkü matematik budur. Uygulamalı matematik sürecinin analiz aşamasında yapılan da pür matematiktir. Uygulamalı matematikçiler ise sürecin sonucu ile, *uygulama* ile ilgilidirler ve matematiği onları sonuca çabucak götürecek her yolla –titizlikle ya da rasgele– kullanma eğilimindedirler.

Ağırlıksız bir ipin ucundaki ufak bir ağırlıktan oluşan basit sarkaç örneğini ele alalım. Ağırlık biraz yana çekilip bırakılmıştır. Bundan sonra nasıl hareket eder?

Bu olgu için standart matematiksel model ikinci dereceden bir diferansiyel denklemdir:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g}{L}\sin\theta. \qquad \text{(R)}$$

Burada L ipin boyunu, g yerçekimi ivmesini, θ da herhangi bir t anında sarkacın sapma açısını göstermektedir (bkz. Şekil 8). Biz (R) denkleminin nasıl elde edildiği ya da anlamının ne olduğu ile ilgili değiliz. Ancak, golf topunda olduğu gibi, ipin ucundaki ağırlığın kütlesi olan m denklemde görünmüyor. Bu nedenle kütle bu matematiksel modeldeki ilgili faktörlerden biri değildir.



Şekil 8. Basit sarkaç

Denklemdeki $\sin\theta$ trigonometrik terimi, çözümü zorlaştırmaktadır. Ancak θ 'nın küçük değerleri için θ ve $\sin\theta$ hemen hemen eşittirler. Ve $\sin\theta$ yerine θ koyunca (R) denklemi çok basit bir şekil alır:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g}{L}\theta. \qquad \text{(S)}$$

(S) denklemi standart yöntemlerle kolayca çözülür ve çözüm θ ile t arasındaki bağıntıyı kesin bir şekilde ifade eder. Böylece çözüm θ açısının zamanla nasıl değiştiğini gösterir ve sarkacın hareketini de ifade ettiği –hiç olmazsa θ'nın küçük değerleri için– söylenir.

Bir uygulamalı matematikçi bu basitleştirici değişimi duraksamadan gerçekleştirir. Ayrıca işin sonunda (S) denkleminin çözümünden, sanki başka hiçbir çözüm yokmuş gibi, "sarkacın hareket denklemi" olarak, gerçeği yakalamış gibi söz eder.

Bir pür matematikçi ise, bazı nedenlerden dolayı, bu türden bir yaklaşımdan tedirgin olacaktır:

- θ sıfıra yaklaşırken $\sin\theta/\theta$'nın değeri gerçekten de (kesin matematiksel anlamda) sıfıra yaklaşır, ancak, θ'nın "küçük" değerleri için $\sin\theta$ ve θ'nın "hemen hemen eşit" olduğu düşüncesi belirsizliğini korur. Daha titiz bir analiz yapılmadan, basitleştirilmiş (S) denkleminin gerçek denklem (R)'nin ne ölçüde yakın bir yaklaştırımı olduğu belli değildir.

- Ayrıca, (R) denkleminin (S) denklemine ne ölçüde yakın olduğu kesin biçimde belirlense bile, bundan (S) denkleminin *çözümü*nün (R) denkleminin *çözümü*ne yakın olduğu sonucunu *önsel* olarak çıkaramazsınız. Bu sorunun çözümü doğrudan (R) denklemini çözmek kadar zor olabilir. Bu sorunun çözülememesi ise (S)'nin çözümünün (R)'nin çözümüne yakın olduğuna *inanmak* anlamına gelir, böylece de sürece ikinci bir "inanç öğesi" katılmış olur.

Ancak bu belirli eleştirilerin ötesinde, pür matematikçi analizin gelişigüzel yapılmasından da tedirgindir. Model kurulduktan sonra matematik sürecinin analiz aşamasına gelirsiniz (bkz. Şekil 7). Burada olan veya olması gereken şey pür matematiktir. Modelin kurulması sezgi ve deneyim gerektirir, ayrıca, bir gerçek-dünya olgusunun ideler dünyasında bir kopyasını yapmanın kaçınılmaz sonucu olarak, yaklaştırım içerir. Halkanın sonunda, uygulamalı matematik sürecinin istenen sonucu vereceğine inanmak için Wigner'in "inanç öğesi" kavramını kabul zorunda kalırsınız. Yaptığınız şey pür matematik olduğu için, ara bölümde bazı *kurallar* vardır. Ve eğer pür matematiğin bir anlamı varsa o da kesinliktir. Kesin olmamak onun doğasına aykırıdır.

Uygulamalı matematikçi basitleştirme işleminin işe yarar ve yeterli olduğuna, yani (S) denkleminin çözümünün –hiç değilse ilk sapmanın küçük olduğu durumlarda– gerçek-dünya sarkacının *gözlemlenebilen* hareketleriyle uyum içinde olduğuna dikkati çekerek kendini temize çıkarır. Ayrıca, modele bilimsel kimlik veren şeyin, teoriyi üreten matematiğin düzeyi değil de teori ile gözlem arasındaki uyum olduğunu iddia eder.

Bunlar belki doğrudur. Ancak pür matematikçi (R) denkleminin daha derinlemesine bir analizinin, gözlemlerle uyum içinde olan bir teori, belki de basitleştirilmiş teoriden daha geniş kapsamlı θ değerleri için geçerli olan bir teori vereceğini bilir. Bunun yanı sıra, "amaç aracı haklı kılar" ilkesinin matematiğe sokulması pür matematikçiyi rahatsız eder. O, örneğin, 64'ü 16 ile bölmek için uygun kesiri yazıp pay ve paydadaki 6'ların götürülebileceğini bilir:

$$\frac{\cancel{6}4}{1\cancel{6}} = \frac{4}{1} = 4.$$

O bu yöntemi, örneğin 64 bölü 26'ya uyguladığımızda büyük sıkıntıyla karşılaşacağımızı da bilir.

Uygulamalı matematikçi için uygulama önde gelir; pür matematikçi içinse analiz. Uygulamalı matematikçi yanıt arar, matematiksel incelikler üstünde duracak sabrı yoktur. Pür matematikçi ise kesinlik ister. Kesinliğin olmaması onu, bir tavşanın bağlı bir av köpeğini tahrik ettiği kadar tahrik eder. Bu iki matematikçi, Escher'in resmindeki iki adama benzer: Aynı merdivende, aynı yönde giden, ama biri aşağı inerken öteki yukarıya çıkan iki adam. Aralarında uzlaşma olanaksızdır; ayrı dünyalarda yaşarlar.

Ayrılma

Şekil 7'de gösterilen uygulamalı matematik süreci orta aşamada pür matematik içerir; ama bir pür matematikçi içermeyebilir. Gerçekte, pür matematikçi çoğunlukla bu süreçte yer almaz. Bu süreç genellikle bir uygulamalı matematikçi, bir fizikçi veya başka bir fen bilimci ya da bunlardan oluşan bir ekip tarafından yürütülür. Eğer eldeki problem önemliyse –örneğin, Mars gezegenine indirilecek insan taşıyan ilk uzay mekiğinin komuta sisteminin tasarımı– bu süreç uzun zaman içinde defalarca uygulanır. Ve Şekil 7'deki halka her tamamlandığında, uygulama aşamasından elde edilen sonuç –teori– ya doğrudan gözlem yoluyla, veya dolaylı olarak, bilgisayar kullanımı gibi yöntemlerle sınanır. Eğer sınamada sonuç başarısız çıkarsa model daha ayrıntılı ve incelikli hale getirilir ve bu süreç kabul edilebilir bir teori elde edilinceye kadar tekrarlanır. Modelin kesinliği analizdeki titizliğe bağlıdır. Ancak analiz aşamasındaki titizlik düzeyini matematikten kaynaklanan bir *gereklilik* değil, çalışmayı yapan kişilerin tercihi belirler. Onlar da büyük olasılıkla pür matematikçi olmadıkları için, analizin, sürecin gereksiz sayıdaki tekrarına gidilmeden kabul edilebilir bir teorinin geliştirilmesini sağlayamayacak kadar rasgele olması tehlikesi vardır.

Uygulamalı matematik sürecinde pür matematikçilerin katkısını artırmak arzu edilir bir şey gibi görünüyor. Sürecin önemli bir bölümü pür matematikten oluştuğu için onu en iyi bilenlerin katılımını beklemek doğal olsa gerek. Ayrıca, pür matematikçinin işe karışması analizin titizlik düzeyini kuşkusuz artırır ve büyük olasılıkla uygulamalı matematik sürecini daha etkili yaparak pahalı ve zaman gerektiren deneyleri veya bilgisayarla yapılacak tekrarlamaları azaltır.

Günümüzde yayımlanan ve sayıları giderek artan bir yığın makale ve rapor, pür matematikçilerin uygulamalı matematik süreciyle daha derinden ilgilendiklerine ve matematiğin bu iki dalı arasındaki sınırın giderek daha belirsizleştiğine işaret etmektedir. *National Research Council*'ın (Ulusal Araştırma Konseyi) öncülük ettiği, Matematiksel Bilimler Paneli'nin 1986 raporunu örnek olarak alalım. Panelde şu sonuca varılmıştı: "Matematik kendi içinde bütünleşmektedir. Yirminci yüzyılın ilk yarısında pür matematik ile uygulamalı matematik arasında oluşan bölünme ve bunun yol açtığı yeni alanların hızla gelişmesi durumu artık yok olmaya başlamıştır."[3] *National Academy of Sciences*'ın (Ulusal Bilimler Akademisi) yakın zamanda düzenlediği "Matematik, Bilimin Birleştirici Halkası" adlı konferansın ana teması fiziksel bilimler içine girmiş olan uygulamalı matematik ile, pür matematik arasındaki boşluğun doldurulmasıydı. Ayrıca, *Mathematical Association of America*'nın (Amerika Matematik Derneği) eski başkanlarından biri tarafından yazılan yeni bir makalede, matematiksel bilimler yelpazesinin "tek sistem" yapısı vurgulanmakta; istatistik, matematiksel biyoloji, ve doğrusal olmayan dinamik gibi alanları da içeren birçok bilim dalında "matematiksel araştırmaların birleştirici ve uygulanabilir" olduğuna özellikle dikkat çekilmektedir.

Gerek matematik, gerekse matematikçiler arasında giderek artan bütünleşme konusundaki bu iyimser görüşlere karşı çıkmak istemiyorum. Eğer bu gerçekleşirse hem pür hem de uygulamalı matematikçiler daha güçlenirler, matematik eğitimi daha iyiye gider ve toplum da bundan yararlanır. Bu birleşme için ben de en iyi dileklerimi sunarım. Yukarıda sözü edilen konferansta dağıtılan rapor şöyle diyor:[4]

> Matematik içinde gerçekleşmekte olan bütünleşme bu alanda çalışanlarca aşikârdır. (....) Bilimin ve mühendisliğin giderek daha çok dalının matematiğin alt dallarından ayırt edilemez ha-

le gelmesi matematik ve onun uygulama alanları arasındaki birlikte yaşama ilişkisini daha da kuvvetlendirmektedir.

Bütün bunlar belki doğrudur. Ancak benim kişisel deneyimim matematiğin çeşitli dallarında çalışan insanlar arasında pek az bir "bütünleşme" olduğu, özellikle de, kendilerini pür matematik-uygulamalı matematik sınırının karşıt bölgelerine kesin bir biçimde koymuş olan matematikçiler arasında hiçbir bütünleşme olmadığı yolundadır. Pür matematikçiler ile uygulamalı matematikçilerin, neredeyse istisnasız bir şekilde, çok farklı tutumları ve beklentileri olduğunu görüyorum. Ortak olan tek yanları birbirlerinin çalışmalarına değer vermemeleridir.

Pür matematikçi matematik *yaratmak* için yaşar; uygulamalı matematikçi matematiği *kullanmak* için vardır. Uygulamada kullanılan matematiğin büyük bölümü iyi bilinen ve rutin matematiktir. Bu tür matematiğe *uygulanabilir matematik* denilebilir. Bu, bütün dünyanın "yararlı" matematik olarak nitelediği türdür. Bir pür matematikçi için bugünkü durumuyla uygulanabilir matematikte çalışma fırsatı, duvardaki boyanın kurumasını seyretmek için aldığı bir davetten daha heyecan verici değildir.

Uygulanabilir Matematik

Uygulamalı matematik sürecinin analiz aşaması, model hakkında önceden bilinmeyen "gerçekler" elde etmek için, matematiksel modelin incelenip işlemlere tabi tutulmasını içerir. Eğer bu aşamada rutin olarak –veya sıkça– yeni matematiğin yaratılmasına gerek duyulursa pür matematikçinin iştahını kabartmakta sıkıntı çekilmediğini düşünebilirsiniz. Ancak, ne yazık ki durum hiç de öyle değildir.

Yine de uygulanabilir matematiğin –modeli yaparken kullanılan matematiğin– eski olması gerekmez. Yeni matematik gerekebilir. Ayrıca, pür matematiğin her bir parçası –ne kadar soyut olursa olsun– teorik olarak *uygulanabilir*dir. Yukarıda alıntı yaptığımız "Matematik, Bilimin Birleştirici Halkası" gibi raporlarda vurgulanan da tam olarak bu iki noktadır. Birinci nokta pür matematikçiyi uygulamalı matematik sürecine katılmaya davet etmektedir, ikincisi ise, çalışmalarında bunu yapmayanlara hak vermektedir. Bu noktaları sırasıyla ele alalım.

Gerçek-dünya olgularının modelini yapma çalışmaları sonucunda ortaya çıkan yeni matematiğe en özlü örnek Isaac Newton'un yarattığı kalkülüstür. 1660 yılında Newton sabit ivme ile bir düz doğru boyunca hareket eden nesnelerin hareketiyle ilgili olan Galileo dinamiğini ele aldı. Newton, ivmenin değişmesine izin verildiği durumlarda ortaya çıkan daha genel hareketi incelemek istiyordu. Bu olgunun modeli için, konumun zamana göre değişim hızı kavramını basit ve kesin bir şekilde ifade edebilecek yeni bir matematiğe gerek olduğunu fark etti. Daha doğrusu, en çok gerek duyduğu şey değişme hızının değişme hızını ifade edecek yeni bir matematikti, çünkü değişen ivme kavramının özünde bu vardı (Hız, cismin konumunun değişme oranıdır). Newton hızın değişme hızı olan *ivmeyi* anlamaya çalışıyordu. Sonuç Newton'un yerçekimi konusundaki düşüncelerini içeren ünlü *Principia* eseri oldu. Bu eserin yine ünlü bir yan ürünü de şimdi kalkülüs dediğimiz matematik dalıdır.

Gerçek-dünyadan esinlenerek pür matematiğin dirimsel bir dalının yaratılmasına yol açan bu öykü haklı bir üne kavuşmuştur. Ancak çağdaş matematikçilerin örnek almalarını olanaksız kılacak ölçüde olağanüstü ve benzersizdir. Newton bilimin en büyük dehası, *Principia* da en önemli bilimsel yayın olma konumunu hâlâ korumaktadır. Çağımız pür matematikçilerinin –herhangi bir bilimsel problemle uğraşarak– bu ölçüde önemli bir matematiksel keşif yapma olasılığı tam olarak sıfırdır (Bu yargı böyle bir şeyin olanaksızlığından çok, gerçekleşme olasılığının son derece az olduğu anlamındadır).

Bu arada belirtelim ki, kalkülüs hemen hemen aynı dönemde ve Newton'dan bağımsız olarak Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından da bulunmuştu. Leibniz'in sembolik ifade şekli Newton'unkinden çok daha üstündür ve günümüzde de kullanılmaktadır. Leibniz'i bu yola iten gerçek-dünya problemleri değil, daha çok felsefi ve geometrik sorunlardı.

Gerçek-dünya olgularının araştırılması sırasında, Şekil 7'deki analiz aşamasında ortaya yeni matematik çıkmasının örnekleri günümüzde de bulunabilir. Ancak bu örnekler, uygulamalı matematik denilen dopdolu balık ağında tatlı su incileri bulmak kadar enderdir. Onları önemsemek biraz da zorlama olur. "Birleştirici Halka" raporunda ileri sürülen, "matematikçilerin yüzyıllar boyunca geliştirdikleri matematiksel sistemlerin başlangıçta bilimsel problemlerden esinlendiği"[5] görüşüne dayanarak bu türden bir verimli esinlenmenin günümüz pür matematikçileri için de önemli ölçüde geçerli olduğunu düşünmek inandırıcılıktan uzaktır.

İkinci nokta için –yani, herhangi bir pür matematik çalışmasının sonuçta uygulanabilir matematik olabileceği– daha güçlü bir savunma yapılabilir. Şekil 7'ye tekrar bakalım. *Uygulanabilir matematik,* uygulamalı matematik sürecinin matematiksel modeli yaratması sonucu elde edilen matematik olarak tanımlanmıştır. Bu sürecin, zaman bakımından genellikle saat yönünde hareket ettiğini düşünürüz. Yani, elimizde önce bir gerçek-dünya problemi vardır, sonra matematiksel modeli, arkasından modelin analizini yaparız, sonra da geriye döner analizin sonucunu gerçek-dünya olgusuna uygularız. Bu sıra değiştirilebilir de.

Örneğin, herhangi bir nedenle, pür matematikçi bir matematiksel araştırma yapar. Bu araştırma yeni matematik yaratılmasına yol açar ve Şekil 7'deki analiz aşamasında olduğu gibi, şemada gösterilebilir. Şimdi matematiksel dünyadaki eğik çizgilerle taranmış bölgeyi bizim araştırmacının başladığı pür matematik olarak düşünelim. Genişletilmiş bölge araştırmacının keşfetmiş olduğu yeni matematiksel gerçekleri, eğri "analiz oku" da araştırma sürecini göstermektedir.

Bu araştırmanın, tümüyle soyut olsa ve herhangi bir fiziksel olguyla görünür bir ilişkisi olmasa da, daha sonra, belirli bir gerçek-dünya probleminin modeli için tam da gereken matematik olduğu ortaya çıkabilir. Yani, Şekil 7'deki "soyutlama oku" bazen ters çevrilebilir. Bizim pür matematikçinin soyut araştırmasının gerçek-dünyada bir ön görünümünün bulunduğu da sonradan ortaya çıkabilir.

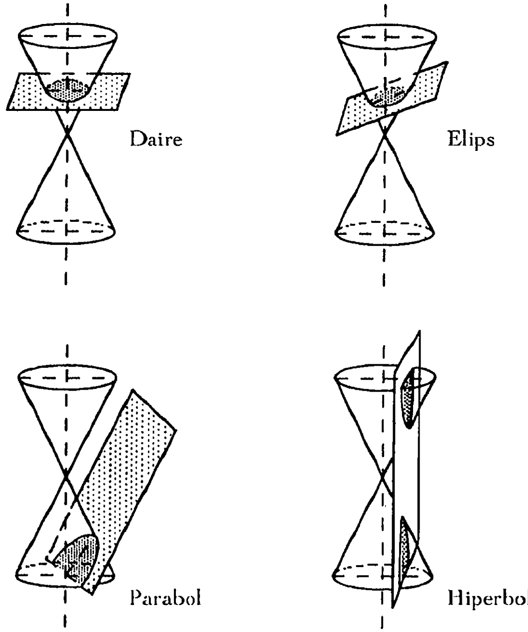
Bu bize uygulanabilir matematik için çok daha genel bir kavram kazandırmaktadır: Uygulanabilir matematik, Şekil 7'de gösterilen soyutlama oku altında, gerçek-dünyada bir ön görünümü bulunan herhangi bir pür matematik parçasıdır.

Soyutlama okunu, matematikçilerin "küme fonksiyonu" dedikleri şey olarak, yani gerçek-dünyanın altkümelerini matematiksel-dünyanın altkümelerine tekabül ettiren bir kural olarak düşünürsek, ön görünüm terimi yerine daha kesin bir terim olan "ters imge" terimi kullanılabilir. Bu anlamda matematiksel-dünyanın bir bölümü, eğer onun uygulamalı matematiğin soyutlama oku ile gösterilen fonksiyon altında gerçek dünyada bir ters imgesi varsa, uygulanabilirdir.

Daha genel olan bu uygulanabilir matematik için çeşitli örnekler verilebilir. Ünlü ve klasik bir örnek de koni kesitleri denilen düzlemsel eğriler topluluğudur. Bu topluluk daire, elips, parabol, ve hiperbolleri içerir. Bu eğriler ilk olarak MÖ 200 yılında Apollonios adında bir pür matematikçi tarafından incelenmiştir.

Pergeli Apollonios Grek matematiğinin altın çağının belki de son büyük pür matematikçisiydi. Adı, o dönemin en iyilerini temsil eden Arkhimedes ve Eukleides ile beraber anılır. Apollonios'un çok sayıdaki eserlerinin en ünlülerinden biri de "Konikler" adını taşıyan uzun bir incelemedir. Bu eser sekiz kitaptan oluşur ve ilk ilkelerden yola çıkarak bu eğrilerin geometrik özelliklerini sistematik bir şekilde inceler. Apollonios koni kesitlerini, bir çift dairesel koni ile bir düzlemin kesişim eğrileri olarak tanımlamıştır. Düzlem koninin ana eksenine dik olursa kesişim eğrisi bir dairedir. Düzlemin eğiklik derecesi değiştikçe eğri daireden, önce elipse, sonra parabole, en sonunda da iki parçalı hiperbole dönüşür (bkz. Şekil 9).

Apollonios koni kesitlerinin analitik yoldan da tanımlanabileceğini göstermiştir. Özellikle de –dairenin bir düzlem üzerinde sabit bir noktadan sabit uzaklıkta hareket eden bir noktanın yörüngesi olarak düşünülebildiği gibi– elipsin, iki sabit noktadan uzaklığının toplamı sabit kalacak şekilde hareket



Şekil 9. Koni kesitleri

eden bir noktanın yörüngesi olarak tanımlanabileceğini göstermiştir. Bu iki sabit noktaya elipsin *odakları* denir.

Apollonios'un çalışmaları pür matematik alanındaydı ve koni kesitleri hakkındaki teoremleri hemen hemen 2000 yıl boyunca matematik literatüründeki yerinde, açık seçik, ama pek kullanılmadan, oturup durmuştu. 1600 yılı dolayında Johannes Kepler gezegen hareketleri konusundaki ünlü üç yasasını açıklayarak astronomide bir devrim yarattı. Kepler'in birinci yasası, MÖ 370 yılındaki Eudoksos'tan beri astronomiye egemen olan, uzaydaki yörüngeler geleneğine son verdi. O geleneğe göre, gökyüzündeki temel yörünge daireseldi; gezegen hareketleri de ya dairesel ya da dairelerin birleşiminden oluşuyordu. Kepler'in birinci yasası bu varsayımı kesin olarak geçersiz kıldı. Bu yasa her gezegenin yörüngesinin bir elips olduğunu, Güneş'in de odakların biri üzerinde olduğunu söyler. Kepler, çalışmaları sırasında, Apollonios'un matematiğinden çokça yararlanmıştır. Salomon Bochner'e göre Kepler "Apollonios'un, 1800 yıl boyunca bir işe yaramadan öylece duran eserlerinden çok büyük ölçüde faydalandı".[6]

Burada, daha genel anlamdaki uygulanabilir matematiğin açık bir örneği var. Şekil 7'ye tekrar bakınız ve onun matematiksel-dünya dikdörtgeninden başlayarak çizildiğini düşünün. Apollonios matematiksel-dünyada koni kesitlerini yaratarak işe başlar ve bunu soyut bir düzlem ile soyut bir koninin arakesitinde oluşan eğriler hayal ederek yapar. Kafasında düzlemin eğimini değiştirir ve bu yolla daireler, elipsler, paraboller ve hiperboller veren çeşitli durumlar üretir. Apollonios böylece matematiksel-dünyanın araştırmak istediği bölümünü belirlemiş olur. Bu bölüm Şekil 7'de sağdaki dikdörtgendeki eğik çizgilerle taranmış olan alandır. Daha sonra matematiğin kurallarını kullanarak bu eğrilerin başka özelliklerini çıkarır. Örneğin herhangi bir noktadan, verilen bir konik eğrisine olan en kısa uzaklığı bulur ve konik eğrisine dik olan doğruların var olup olmadıklarını araştırır. Bu eğriler hakkında günümüzde bilinenlerin çoğu, çağımızın sembolik notasyonundan yararlanmadan çalışan Apollonios tarafından keşfedilmiştir. Apollonios'un saptadığı gerçekler onun sekiz kitabını doldurmuştu; bunlar Şekil 7'deki genişlemiş matematiksel-dünya bölgesi ve "analiz oku" ile gösterilmiştir.

Aradan yüzyıllar geçer. Apollonios'un pür matematiği Latince'ye çevrilmeden yalnız Arapça olarak ve hiç kullanılmadan bir köşede durur. Derken, gerçek-dünya olgusu olan gezegen hareketlerini incelemek isteyen Kepler gelir. Bu problem Şekil 7'deki gerçek-dünya dikdörtgenindeki eğik çizgilerle taranmış olan bölgedir. Kepler matematiksel bir model yapmak zorunda olduğunu görür. Apollonios'un o çok eski pür matematiğinin de tam istediği şey olduğunu fark eder. Kepler, gerek duyduğu matematiğin "prefabrike yapısı"nı Apollonios'un çok önceleri hazırladığını görür.

Bunun sonucunda, Apollonios'un matematiğinin "uygulanabilir matematik" olduğu, neredeyse yirmi yüzyıllık bir bekleme döneminden sonra anlaşılır. Kepler'in Güneş sisteminin modeliyle bulduğu şey, Apollonios'un pür matematiğinin bir gerçek-dünya ön görünümüydü.

Çalışmasını tamamlamak için, koni kesitlerinin ötesinde başka matematiğe de gereksinim duyan Kepler, sonsuz küçükler yöntemlerini kullandı ve bu sayede kalkülüsün gelişimine katkıları oldu. Gerçekte Kepler uygulanabilir matematik hakkındaki iki noktayı gözler önüne serer: Önce gerçek-dünya problemlerinin yeni matematik yaratmayı teşvik ettiğini, ikinci olarak da her pür matematik araştırmasının gerçek-dünya problemlerine uygulanabilme potansiyeli olduğunu.

Apollonios'un katkısının önemi ne kadar vurgulansa azdır. Salomon Bochner "Kepler, Apollonios'un doğrudan varisiydi ve Kepler olmasaydı Newton da olamazdı." der.[7]

Apollonios'tan Kepler'e, Kepler'den Newton'a, koniklerden gezegenlere, gezegenlerden de yerçekimine... Eski Yunan'ın altın çağının pür matematiğinden, doğrudan ünlü *Principia*'ya uzanan bir çiftler oyunu kombinasyonu...

Uygulanabilir matematik konusundaki ikinci nokta için çağdaş örnekler de verilebilir. Örneğin Einstein görecelik teorisini açıklamak için, onlarca yıl önce Riemann, Gauss, Bolyai ve Lobaçevski gibi pür matematikçiler tarafından geliştirilen eğrisel uzay geometrisine gereksinim olduğunu fark etti. İkinci bir örnek, son derece soyut matematik olan grup teorisinin modern fizikte geniş ölçüde kullanılmasıdır. Grup teorisi, kümeler ve bu kümelerdeki elemanlara ilişkin çok genel bir çarpma kavramı ile ilgilidir. Bu teori "soyutlama sanatının doruğu" olarak nitelendirilmiş ve pür matematikçiler tarafından –1830'da Galois ile başlayarak– herhangi bir kullanım olanağı düşünülmeden geliştirilmiş, uygulanabilir olduğu ise çok sonraları saptanmıştır. Bu teorinin matematiksel bilimlerde kullanılması ise artık olağan bir hal almıştır. Üçüncü örnek de matris teorisinde ortaya çıkar. James J. Sylvester ve Arthur Cayley tarafından icat edilen bu teori, pek çok sayıdan oluşan sayı düzenekleri ile, sanki tek bir elemanmışlar gibi işlem yapılmasına olanak sağlayan bir teoridir. Matrislerin icat edilip teorilerinin geliştirilmesinden altmış yıl kadar sonra fizikçi Werner Heisenberg, şimdi kuantum mekaniği olarak bilinen şeyin matematiksel modelini yapmak için matris teorisini kullanmıştır.

Bu matematik teorilerinin hiçbiri faydacıl bir nedenle geliştirilmemişti. Hepsi de yaratıldıkları dönemde birer pür matematik örneği idi. Şimdi ise her biri gerçek-dünyayı anlamak için pratik birer alet haline gelmiş bulunmaktadırlar.

Burada, pek de tekin olmayan bir konuya gelmiş bulunuyoruz. Uygulamalı matematik süreci gerçekten iyi işliyor. Şekil 7'deki uygulama aşamasındaki en son gizemli adımı atmak için hepimizin gerek duyduğu Wigner'in "inanç öğesi" kendini hep haklı çıkarıyor. Uygulamalı matematik süreci, her seferinde, matematiğin doğal bilimlerdeki akıl almaz etkinliğini gözler önüne seriyor ve Wigner'in "mucize"si kendini tekrarlayıp duruyor.

Bu nasıl olabilir? Bu mucizenin kendisi şaşılacak bir şey. Wigner şöyle yazıyor: "Matematik dilinin fizik yasalarının ifade edilmesine elverişli olması mucizesi anlayamadığımız ve hak etmediğimiz harikulade bir lütuftur."[8]

Evet. Ancak, eğer matematiğin geliştirilmesi için gereken dürtü temelde faydacıl değil de benim iddia ettiğim gibi estetikse, o zaman bu harikuladelik daha da artmaktadır. Söz ettiğimiz şey *güzelliğin yararlılığı paradoksu*dur; bizler de ikinci dereceden bir mucizeyle karşı karşıyayız.

V. Bölüm

Estetik

Hepimiz vaktiyle felsefe okumuştuk. Çünkü liberal eğitim* ve temel eğitim programı kavramları benimsenmişti ve eğer eğitim görmüş birisi olarak düşünülmek istiyorsanız bilmeniz gerekenler içinde felsefe de vardı. Felsefe 101 dersinin başında konuya ilişkin olarak dört klasik sorunun yanıtlarını öğrendik:

Hakikat nedir?
Gerçeklik nedir?
Adalet nedir?
Güzellik nedir?

Hocamız bize bu dört sorunun sırasıyla kavramsal, metafiziksel, etik ve estetik olarak nitelendirilebileceğini söyledi. Felsefenin de, bu dört büyük ve temel konuya anlam getirmekle ve çözüm yollarını araştırmakla uğraştığını anlattı.

* Liberal eğitim: Edebiyat, felsefe, tarih gibi alanlarda, belirli bir mesleğe hazırlama amacı gütmeyen, kültür ağırlıklı ve geniş bir genel bilgiye yönelik olan eğitim. (ç.n.)

Burada, bu soruların sonuncusunu, matematikle ortak olan yönleri açısından incelemek istiyorum. Ancak konuya girmeden önce, bize felsefenin özü olarak tanıtılmış olan klasik sorular hakkında iki noktaya değineceğim:

- Görünüşe göre, bu dört soru içinde en az ilgi çekeni ve en karışık olanı estetiktir.
- Matematikçiler estetik nedenlerle matematik yaparlar.

İkinci noktayı daha önce incelemiş, onun geçerli olduğu konusunda yeterli kanıt da vermiştik. Burada tek bir tanık çağıracağız. *Mathematical Association of America*'nın (Amerika Matematik Derneği) eski başkanlarından Lynn Steen şunları yazıyor:[1]

> Sanat dünyasında hiçbir benzeri olmayan bir nesnelliğe sahip olmasına karşın, yaratıcı matematiğin güdüsü ve standardı bilimden çok sanatınkilere benzer. Matematiksel teoremlerin sınıflandırılmasında estetik yargı hem mantıktan hem de uygulanabilirlikten üstün tutulur: Matematiksel idelerin değerlendirilmesinde, kesin doğru olmasından ya da yararlı olma olasılığından çok güzellik ve zarafet etken olur.

Benim üzerinde duracağım ilk nokta ise Thomas Munro'dan destek görüyor. *Toward Science in Aesthetics* (Estetikte Bilime Doğru) kitabının ilk paragrafı şöyledir:[2]

> Estetiği bilime dönüştürme girişimlerine karşın o hâlâ spekülatif felsefenin bir koludur. Felsefenin bütün kolları içinde belki de en az etkili ve en az hareketli olanı odur. Halbuki konusu –yani çeşitli sanatlar ve onlarla ilgili türden deneyimler– bunların tam tersidir.

Arthur Berger, D. W. Prall'ın *Aesthetic Analysis* (Estetik Analiz) kitabına yazdığı önsözde J. A. Passmore'un estetik için yaptığı "bir konunun var olmadığı yerde bir konu yaratmak çabası" betimlemesine değinir. Berger, Passmore'un sözlerinin "The Dreariness of Aesthetics" (Estetiğin Sevimsizliği) gibi tahrik edici başlıklı bir makalede yer aldığına dikkat çeker ve Passmore'un tutumunun "birçoğumuzun gizliden paylaştığı" bir tavır olduğunu ileri sürer.[3]

Prall kitabını 1936'da yazmıştı, ancak aynı anlayış varlığını hâlâ sürdürmektedir. Günümüzde de Yale Üniversitesi felsefecilerinden Nicholas Wolterstorff, estetiği "felsefenin ana akıntılarının kenarlarında kalan durgun sular" olarak tanımlar.[4]

Klasik felsefenin başka alanları yanında estetiğin ikinci sınıf bir konumda olmasının çeşitli nedenleri vardır. Sanatın analiz için değil zevk almak için var olduğu, analiz sonucu ortaya çıkan estetik teori ne olursa olsun, açıklamayı amaçladığı sanatla ilgisi olamayacak ölçüde soyut ve kavramsal olduğu düşüncesi bu nedenlerden biridir. Ayrıca estetiğin –her ne ise– pek önemli olamayacağı şeklinde yaygın bir görüş vardır. Hakikat, gerçeklik ve adaletle ilgili sorular önem taşırlar, çünkü bu konuların kendileri önemlidirler. Ancak güzellik ve sanat, titizlikle tanımlansalar da, göreceli olarak ayrıntı sayılacak yüzeysel kavramlardır, ciddi şekilde ele alınmaya değmezler. Onlara göre hakikat, gerçeklik ve adalet gerçek felsefi objelerdir, ama güzellik ve sanat sadece meraklılarını ilgilendiren konulardır. Estetiğe büyük katkıları olan Edward Bullough bu konudan "entelektüel hobim" diye söz ederdi. Görüldüğü gibi, sanat daha çok zevk vermek için vardır. Ve de ciddi kişiler –çoğunluğu– eğlence ve zevk alma konularını profesyonel olarak ele almazlar.

Ancak almaları gerekir. Çünkü burada kimin hangi tür sanattan hoşlandığını, neden hoşlandığını anlamaktan çok daha fazlası söz konusudur ve hoşlanma/hoşlanmama gibi basit konulardan çok daha fazlasının açıklanması gerekir. Güçlük sergileyen ve ekonomik açıdan önemli sayılabilecek bu konularda, sanat eleştirilerinin ötesinde, anlaşılması gereken şeyler vardır. İnsanları güzellik için, yalnızca güzellik için, önemli ve zor işler yapmaya iten nedenleri öğrenmemiz gerekir. Bay Keats aşağıdaki dizeleri yazarken acaba ne düşünüyordu?[5]

> Güzellik hakikattir, hakikat de güzellik - hepsi bu,
> Dünyada bildiğimiz tek şey budur, bilmemiz gereken de.

Ayrıca bazı tuhaf insanların sadece seçkin bir azınlığı ilgilendiren konularda yılda 25 bin araştırma makalesi yazmasının nedenini de öğrenmemiz gerekiyor.

İnce Elek

Kültürümüzün derinliklerinde, matematiğin yalnızca yetenekli bir azınlık tarafından tam olarak kavrandığı düşüncesi yatar. Başka alanlarda eğitim görmüş kişiler arasında matematiğin en öncel bilgilerine sahip olanların bile sayıca azlığı matematiği özel bir konuma getirmiştir. Geçmişte hem liberal eğitimin hem de ana ders programlarının temellerini oluşturan diğer disiplinler –felsefe, tarih, edebiyat gibi– içinde yalnızca matematiğin *bir kenara atılmış* olması, herhangi bir sosyal ya da entelektüel sonuca yol açmaz. İnsanlar klasik müzik veya çağdaş roman konularındaki bilgisizliklerini itiraf etmekten şiddetli kaçındıkları halde matematikteki eksikliklerini dile getirmekte hiç duraksamazlar. "Matematiği hiçbir zaman beceremedim." tümcesi Malibu kıyısına vuran dalgalar gibi tekrarlanır durur. Bunu, konserleri kaçırmayanlardan, müze meraklılarından olduğu kadar, paranızın üstünü saymaya çalışan benzin istasyonu görevlisinden de işitirsiniz.

Bütün bunların ardında yatan kavram –yaygın kabul gören ve derinden inanılan kavram– insan ırkının yalnız çok az üyesinin matematiğin karmaşık mantığını anlamalarını olanaklı kılan bir tür "matematik kafası"na sahip olduğudur. Nasıl ki yüz metreyi on saniyenin altında koşabilen çok az kişi varsa, matematiği *anlayabilenler* de kalabalık içinde ancak birkaç kişidir.

Dünya çapında bir koşucu olmamak sosyal açıdan bir utanca yol açmaz, matematiği anlayamamak da öyledir.

Matematiksel yetenek koşma yeteneği gibidir: Tanrı size onu ya vermiştir ya da vermemiştir. En azından öyle olduğuna inanılır.

Bu tür inançlar insanı rahatlatır. İnsanlar bunlar sayesinde korkunç matematik bilgisizliklerini haklı gösterebilirler. Ve yine bu inançlar sayesinde, matematikçiler de, bütün bilinçli dakikalarını, bütün enerjilerini verdikleri bu harikulade konunun temel kavramlarını öğretmedeki –bilgiyi kalıcı kılacak şekilde öğretmedeki– başarısızlıklarına mantıksal nedenler bulurlar. Eğer doğa size konuyu kavramak için gerekli olan türden bir kafa vermemişse matematiği anlamanız beklenemez. Efsane böyledir. Minnesota Fats takımının olimpiyat elemelerinde koşmak için gerekli fiziksel malzemelerinin olmayışı gibi, gerekli temel zihinsel malzemeden yoksun kişilere matematik öğretmeniz beklenemez.

Bu inançlar rahatlatıcı olabilirler, ama astrolojiden daha geçerli değildirler. 1960'ların toplum karşıtı hareketlerini "öğrenci hareketleri" diye damgalamak ne kadar açıklayıcı olmuşsa, bu görüşler de matematik bilgisindeki yaygın eksikliği ancak o ölçüde açıklar. Bir şeye bir ad koymak onu anlamaya her zaman yardım etmez. Eğer çevrenizdekiler gerçekten sizin peşinizdelerse paranoyak olduğunuzu öğrenmenin size bir yararı olmaz. Öğrenmede ve öğretmedeki başarısızlığı "matematik korkusu"na atfetmek her iki taraftaki yetersizliğe hazır bir mazeret bulma dışında bir işe yaramaz.

Bir kere, bizim öğrencilerden öğrenmelerini beklediğimiz matematik öyle pek büyütülecek bir şey değildir. Üniversitede, özellikle de kalkülüs eğitimi bakımından, bir gerileme görülmektedir. Hem temel, hem çok güzel olabilecek olan bir dersin nasıl bir uygulama ve teknik yığıntısına indirgendiğini gördük. Bu uygulama ve teknikler, derinlik ve içerikten yoksun oldukları için, matematiği gerçekten anlayan ve sevenlerle, onu sevmeyenler arasındaki boşluğu genişletmekten başka bir işe yaramıyorlar. Konunun derinliğinin ve inceliklerinin anlatılabileceğinden umudunu kesmiş bir matematikçi kuşağı tarafından *günümüzde öğretilen* kalkülüsün entelektüel içeriğinin yetersizliğine birçok eleştirmen dikkat çekmiştir.

Matematikçilerin daha çok matematiğin sağladığı estetik deneyim için matematikle uğraştıkları sonucuna daha önce varmıştık. Üniversite yıllarında bir matematik dersine girmiş olan herkes, profesörlerin matematiğin estetik yönünü, Mrs. Robinson'ın gizli şeyleri çocuklardan saklaması gibi, bizden sakladıklarını acı deneyimleriyle bilir. Matematiği, temel düzeylerde, matematikçilerin en üst düzeyde gördükleri şekilde –bütün sanatların doruk noktası olarak, Kleopatra kadar güzel ve baştan çıkarıcı bir şey olarak– sunma yolunda ciddi ve sistematik bir çaba gösterilinceye kadar, matematiğin sıradan insanlar tarafından anlaşılabilir hale getirilip getirilemeyeceğini asla öğrenemeyeceğiz.

Matematik kafasını belirleyici şeyin mantıkla, titizlikle veya cebirsel formüllerle işlem yapabilmekle, ve hatta kat kat soyutlamaların ustalıkla üstesinden gelme yetisiyle belki de fazla ilişkisi yoktur. Bunu en açık bir berraklıkla gören Fransız matematikçi ve filozof Jules-Henri Poincaré olmuştur. Anıtsal yazıları yalnız matematikçiler ve filozoflar için değil, değişik alanlarda eğitim görmüş insanları da hedefleyen Poincaré, matematiğe karşı bir "estetik duyarlık"ın matematikçinin ruhunu belirlediğine inanırdı. Bu duyarlık, matematik alanında "gerçek yaratıcı" olmak için gerekli olan, bir "ince elek" işlevini yerine getiriyordu.

Bir Adım Ötesi

Poincaré'nin yargısının doğruluğundan hiç kuşkum yok. *Science and Method* (Bilim ve Yöntem) kitabının "Matematiksel Yaratıcılık" bölümünde Poincaré mantıkta ustalığın ve matematiksel sembollerle iş görme yetisinin kişinin matematik *yaratması* için yeterli olmadığını ileri sürüyordu. Gerekli olan –ve bütün araştırmacı matematikçilerin gönüllerinin derinliklerinde var olan– şey "sezgi"dir. Bu sezgi hem bilinçli olarak hem de bilinçaltıyla algılayan aklın, önündeki çok büyük sayıdaki matematiksel seçenekler içinden, "bir tür estetik heyecan yaratacak güzellik ve zarafet özelliğini taşıyanları ayırma olanağı" sağlar. Poincaré şöyle yazar:[6]

> Yaratmak, tam anlamıyla, yararsız düzenlemeler yapmamak, yararlı olan ve sadece küçük bir azınlık oluşturan düzenlemeler yapmaktır. Keşif bir ayırt etme işi, bir seçmedir. (....) Yararlı düzenlemeler en güzel olanların ta kendileridir. Şunu demek istiyorum ki, bütün matematikçilerin bildiği, sıradan insanların ise çoğu kez alaya alacak ölçüde habersiz oldukları bu özel duyarlılığı en iyi uyandıranlar bu düzenlemelerdir.

[Poincaré'nin "sezgi" sözcüğünü kullanım biçimi, zaman ölçeği dışında, günlük anlamıyladır. Normal olarak "sezgi" ile yalnız mantık dışı bir zihinsel süreci değil, aynı zamanda, çabucak oluşan bir zihinsel süreci de kastederiz. Sezgisel bir yanıtı neredeyse ani olarak, mantıksal olmayan bir düşünce süreci ile geliveren bir yanıt olarak düşünürüz. Matematiksel sezgi –Poincaré'nin amaçladığı gibi– alışılmış anlamdaki normal akılcılığın dışındadır, ancak yavaş olarak da ortaya çıkabilir. Bilinçaltı ile algılayan akıl hızlı çalışmayabilir. Matematik konusunda ani sezgisel tahminler –matematikçiler tarafından yapılsalar bile– genellikle yanlıştırlar. Aşağıdaki soruların her biri hakkında benim sezgilerim, şu veya bu zamanda, tümüyle yanlıştı. Siz de deneyerek biraz eğlenebilirsiniz. Her soruyu okuyun. Bir dakikadan çok düşünmeyin ve doğruları (D), yanlışları da (Y) ile işaretleyin. Yanıtlar bu bölümün sonunda verilmiştir.

1. Küçük bir kasabada tek bir erkek berberi vardır. Kasabadaki erkeklerin hiçbiri sakal bırakmaz. Berber kendi kendine tıraş olmayan her erkeği tıraş eder. Öyleyse, berber kendini tıraş eder.
2. 1. sorunun yanıtı "Öyleyse berber kendisini tıraş etmez." şeklindedir.
3. Rasgele durdurulan elli kişiye doğum günleri sorulur. Herhangi ikisinin yılın aynı gününde doğmuş olmaları olası değildir.
4. Bir kayakçı dağda bir noktada durur. Bu noktadan herhangi bir doğru boyunca kaydığında aşağı doğru iner. Öyleyse bir doruk noktasında durmaktadır.

5. Bir karı kocanın iki çocuğu vardır. Çocuklardan birisi kızdır. Her ikisinin de kız olma olasılığı yarımdır.
6. Adams, Brown ve Carter üçlü bir düello yapmaktadırlar. İki kişi ölünceye kadar sıra ile ateş edilecektir. Atma sırası gelen kişi istediği yönde ateş edebilir. Adams hedefini hiç kaçırmaz; Brown yüzde seksen, Carter ise yüzde elli isabet ettirir. Atışa Carter başlayacaktır. Carter için en iyi strateji Adams'a ateş etmektir.
7. 6. soruda Carter'ın en iyi stratejisi Brown'a ateş etmektir.
8. Bir boncuk iki nokta arasındaki bir tel üzerinden aşağı doğru kaymaktadır. Bu iki noktayı birleştiren bütün teller arasında boncuğun en kısa sürede kayacağı tel, bir düz doğrudur.]

Poincaré güzellik konusunda haklıdır ve her matematikçi onun haklı olduğunu bilir. İçinizde matematiğe karşı bir estetik duyarlık var, bu duyarlık, sezgisel aklınız üzerinde ince bir elek gibi etki yaparak, zarif ve uyumlu ideleri, diğer idelerin bir işe yaramadan yan yana gelmelerinden başka bir şey olmayan idelerden ayırır. Sizde bu ya vardır, ya da siz bir matematikçi değilsinizdir.

Ancak ne yazık ki Poincaré bu duyarlığın doğuştan olduğuna ve görece çok az kişinin ona sahip olduğuna inanır. Şöyle demiştir:[7]

> Biliyoruz ki bu duyguya, bize gizli duyumları ve ilişkileri hissettiren bu matematiksel düzen sezgisine, herkes sahip olamaz. Kimileri, ne tanımlaması zor olan bu ince duyguya, ne de normalin üstünde bir bellek ve dikkat gücüne sahiptir. Bu kişilerin yüksek matematiği anlamaları kesinlikle olanaksızdır. Ve çoğunluk da bu durumdadır.

Poincaré bu satırları hemen hemen bir yüzyıl önce yazmıştı. Onun dünyasında ve onun görüşüne göre sıradan insanlar büyük çoğunluktaydı ve matematiğin estetiğine duyarlık, halkın, kaderlerinde yaratıcı matematikçi olmak bulunan çok küçük bir bölümüne verilmişti. Poincaré'nin bu görüşü, estetik duyarlığın doğuştan geldiğine inanan günümüz matematikçilerinin açıkça dile getirmeksizin benimsedikleri görüşün aynısıdır. Onlara göre, bu eğer sizde varsa siz de onlardan biri olurdunuz, eğer yoksa, sizin için yapılacak bir şey yoktur.

Poincaré, matematiğin estetik öğesinin varlığını ve önemini kabul etmekle çağdaş matematikçilerden ayrılmaktadır. Bu kavram hakkında, çeşitli alanlarda çalışan akıllı insanlar için kitaplar, makaleler yazdı. Yalnız matematikçiler için de yazmadı. Çağımız matematikçileri konularının bu yönü hakkında sadece fısıltı ile ve sadece birbirleriyle konuşurlar. Poincaré ise estetik öyküsünü hepimize anlatır.

Ancak, Poincaré konuyu belki de yeterince ileri götürmedi, matematik kafasının ayırt edici özelliğinin mantıksal değil, estetik olduğunu savundu. Ancak onun söz ettiği en yüksek düzeydeki matematiktir ve "bütün gerçek matematikçilerin bildiği gerçek estetik duygu"ya değinirken, matematik *yaratmak*tan söz etmektedir. "Gerçek matematikçi" ile kastettiği "araştırmacı matematikçi"dir. Öğrencilerde matematiğin anlaşılmasının veya eğitiminin geliştirilebileceği kanısında değildir. Matematikle ilgili olarak "estetik duyarlık" hakkında yazarken Poincaré öğretimi düşünmemektedir.

Ancak, belki de bunu düşünmeliydi. Belki Poincaré yanılıyordu ve belki bu kavram ileride yaygınlaşabilir. Belki işin başında, matematiğin kullanımı ve uygulanabilirliğinden çok, estetik değerini vurgulayarak öğrencileri matematiğe yakınlaştırabilirsiniz. Belki matematikte şiir olduğu gösterilirse şairler de matematik öğrenmeye yöneltilebilirler. Belki de beşeri bilimciler Poincaré'nin "matematiksel zarafet için doğal duygularımız" dediği şeyi kendi içlerinde geliştirebilirlerse, zorunlu matematik derslerinden asgari gerekliliklerden fazlasını alırlar.

Bilmiyorum. Ancak kesin olan bir şey var: Denemek ile bir şey kaybetmeyiz. Çünkü şimdi yapmakta olduğumuz şey başarısızdır. Matematikçinin anladığı şekildeki matematik başkaları için bir bilinmeyen olarak kalmaktadır. Bir fen bilimci için matematik, çalışma odasındaki raflarda duran ve her gün işi sırasında kullandığı soğuk metal aygıtlardan farksızdır. Beşeri bilimciler için ise bu konu kaçınılması gereken bir şeydir.

Bu durumun eşyanın doğası gereği olduğuna, matematiğin ufak bir azınlık dışında kalan insanların sonsuza dek erişimleri dışında kalacağına inanmayı kabul etmiyorum. Halkın büyük bir bölümünün müziği, resmi, edebiyatı anlama ve haz duyma yetisine sahip olduğu, ancak doğuştan matematiksel özürlü olduğu düşüncesi bana kendini beğenmişlik, özür dileyicilik içeriyormuş ve düpedüz yanlışmış gibi geliyor. Açıkça görülüyor ki, matematiği, bilimsel bir araç olduğunu vurgulayarak takdim etmenin en iyi yol olduğu düşüncesine dayalı olan günümüz matematik eğitim sistemi ile bu insanlara ulaşmayı başaramadık. Başka bir yaklaşım denemekle zarara girmeyiz. Daha başlangıçta, öğrencilerimizi matematiğin, Poincaré'nin "bizde bir tür estetik duygu geliştirmeye muktedir olan bu güzellik ve zarafet niteliği"[8] sözlerinde belirtilen özellikleriyle tanıştırmayı deneyebiliriz.

Bir Örnek

1978'de MIT'ten (Massachussetts Institute of Technology / Massachussetts Teknoloji Enstitüsü) Seymore A. Papert, Poincaré'nin düşüncesinin bir adım ileriye, matematik eğitimine götürülebileceğini ileri sürdü. "The Mathematical Unconscious" (Matematiksel Bilinçdışı) adlı makalesinde Papert, Poincaré'nin fikirlerini matematik öğretimine ve öğrenimine uygulanabilecek biçimde genişletme –teoriyi yeryüzüne indirme– olanağını ele almaktadır. Papert'in düşüncesi, temelde, Poincaré'nin matematik ve estetik arasındaki ilginç bağlantı konusunda haklı olabileceğini, ancak bu bağlantının –Poincaré'nin "estetik duyarlığı"nın– doğuştan olduğu ve öğrenilemeyeceği konusunda yanıldığı gözleminden oluşmaktadır. Papert şöyle yazıyor:[9]

> Çağdaş matematik eğitiminin yıkıcı sonuçları Poincaré'nin, önemsiz de olsa, bir paradoksa düştüğünü gösteriyor. Okulla-

> rımızın, ve de genel olarak kültürümüzün, çocuklarda yeni yeni gelişen matematiksel estetik duygusunu beslemekten çok uzak olması insanı şu sonuca götürüyor: Poincaré'nin estetiğin önemi konusundaki temel tezi, bu duyarlığın doğuştan olduğu yolundaki ikincil tezine inanmamızı gerektiren nedenleri temelinden sarsmaktadır. Eğer Poincaré estetik konusunda haklı ise, matematik yeteneğinin bu kadar ender olmasının, doğuştan olma gerekçesine sığınmadan açıklanabileceğini görmek çok kolaylaşır.

Elbette öyledir. Matematik alanındaki seçkin kişiler matematiksel estetik duyarlığı Poincaré ile paylaşırlar. Bunda hiç kuşku yoktur. *Eğer matematiğin takdim edilişi ve yazılışı estetik boyutu ortaya çıkaracak* ve Shakespeare'in şiirine, Brahms'ın müziğine, Cézanne'ın resimlerine karşı duyarlık göstermeye çalıştığımız gibi, öğrencilerde matematiğe karşı da *duyarlığı geliştirecek şekilde değiştirilirse,* bu seçkinler dışında kalan bizler de bu duyguyu paylaşabiliriz. Papert'in işaret ettiği gibi, Poincaré'nin estetik hakkındaki düşüncelerinin (o bunları yalnız en üst düzey matematik için öne sürmüştü) ilkokulda öğretilen matematiğe de uygulanabileceğini *varsayamayız.* Ancak, matematiğe farklı yaklaşımlar hakkında bilgi ve deneyim sahibi olmadan, *bunun tersini de varsayamayız.* Matematiği öğrenirken ve bu konuda çalışırken, ilkokul düzeyinde bile, daha önce araştırılmamış bir *estetik yol gösterme* kavramı var olabilir.

Papert bu kavramın var olduğunu ileri sürüyor. Tezini bir ölçüde destekleyen bir psikolojik/matematiksel "olay" anlatıyor. Bu olayda (gerçek bir psikolojik deney) bazı deneklerden (denemelerde yararlanılan kişilerden), Pythagorasçılara çok sıkıntı veren, ünlü ve eski bir teoremin ispatını vermeleri, 2'nin karekökünün irrasyonel olduğunu ispatlamaları isteniyor.

İki tamsayının oranı şeklindeki bir reel sayıya rasyonel sayı dendiğini anımsayınız. Örneğin 1/2, 2/3 ve 76/89 rasyonel sayılardır. Bir tamsayı, örneğin 6, rasyoneldir, çünkü kendisinin 1 ile bölümü şeklinde yazılabilir: 6 = 6/1. Pythagorasçılar, anımsayacağınız gibi, doğanın kendisinin tamsayılara ve tamsayıların oranlarına indirgenebileceğine inanıyorlardı. $x^2 = 2$ denklemini sağlayan x sayısının rasyonel olmadığını keşfetmeleri onları çok sarsmıştı.

Rasyonel olmayan sayılara, yani iki tamsayının oranı ile ifade edilemeyen sayılara irrasyonel denir. Karesi 2 olan x sayısına "2'nin karekökü" denir ve $\sqrt{2}$ sembolüyle gösterilir. Seymore Papert tarafından anlatılan olayda, farklı matematiksel yetkinlik düzeyinde olan deneklerden aşağıdaki teoremin ispatını vermeleri istenmişti:

Teorem: $\sqrt{2}$ irrasyoneldir.

Bu teorem ve onun standart ispatı, her ikisi de, haklı olarak ünlüdürler. *A Mathematician's Apology* (Bir Matematikçinin Savunması) kitabında G. H. Hardy bu sonucu "gerçek bir matematik teoremi, bütün matematikçilerin birinci sınıf olarak kabul edecekleri iki teoremden biri" olarak takdim eder (Öteki teorem, Eukleides'in MÖ 300 yılında ortaya koyduğu, sonsuz sayıda asal sayı olduğu yolundaki ispattır). Grek matematiğinin bu ünlü iki teoremi için Hardy şöyle demektedir:[10]

> İkisi de hem fikir hem de işlem yönünden "basit" teoremler olmakla beraber, birinci sınıf teoremler oldukları hiç kuşku götürmez. Her biri, ilk bulundukları zamandaki kadar taze ve önemlidir, aradan geçen 2000 yıl ikisine de en ufak bir kırışıklık getirmemiştir.

Gerçekten de birinci sınıf olan bu teoremleri Hardy "ciddi matematik"e örnek olarak gösterir:[11]

> Nasıl ki şiirde bile güzellik, bir ölçüde, içerdiği fikrin önemli olmasına bağlıysa, bir matematik probleminin "güzelliği" de, büyük ölçüde, onun ciddi oluşuna bağlıdır. (....) Güzellik ilk sınavdır. Çirkin matematik için dünyada yer yoktur.

Şimdi teoremimize ve onun ispatına dönelim.

Teorem: $\sqrt{2}$ irrasyoneldir.

İspat: Teoremin yanlış olduğunu, yani $\sqrt{2}$'nin rasyonel olduğunu varsayalım. O zaman

$$\sqrt{2} = p/q$$

yazabiliriz. Burada p ve q'nun ortak çarpanı yoktur (Başlangıçta var olan ortak çarpanlar birbirlerini götürürler, pay ve paydada ortak çarpan kalmaz). Buradan,

$$\sqrt{2}\, q = p$$

veya

$$2q^2 = p^2.$$

sonucu çıkar. O halde p^2 bir çift sayıdır. Öyleyse $p$de bir çift sayıdır (Bir tek sayının karesinin de tek olduğunu görmek kolaydır). Demek ki bir c tamsayısı için $p = 2c$'dir.

$$2q^2 = (2c)^2$$

veya

$$q^2 = 2c^2.$$

Öyleyse, q^2 çifttir; daha önce olduğu gibi, $q$da çifttir. Bunun sonucu olarak $p$ve q'nun her ikisi de çift sayılardır ve bu nedenle 2 ile bölünebilirler. Bu, bizim p ve q'nun ortak çarpanı olmadığı yolundaki varsayımımız ile çelişir. Öyleyse, $\sqrt{2}$'nin rasyonel olduğu varsayımımız yanlıştır. O halde, $\sqrt{2}$ irrasyoneldir ve teorem ispatlanmıştır.

Bu teoremi ve ispatını güzellik ve zarafet açısından ele alalım. *Savunma*'sında Hardy, sonuca zarafeti veren özellikleri saptamaya çalışır. Hardy'nin dile getirdiği özellikler arasında *ciddiyet, derinlik, genellik, beklenmedik olma, kaçınılmazlık* ve *ekonomi* vardır. Uygun şekilde bakıldığında, teoremin ve ispatının Hardy tarafından belirlenen koşulların her birini sağladığında kuşku olamaz. Ancak, Hardy'nin koşullarının günlük kullanımdaki anlamlarının doğrudan matematiğe aktarılmaları olanaklı olmayabilir, siz de teoremin ve ispatının estetik açıdan güzel olduğunu hemen ve bağımsız olarak göremeyebilirsiniz. Birleşik Devletler'de günümüzde uygulanan matematik eğitimi sistemi ile olan kavgalarımdan biri, matematik soylularının dışında hiç kimsenin matematiğe bir sanat olarak bakacak şekilde eğitilmemesinden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle, ne zaman bir matematiksel sonucu ilk kez takdim edip onun estetik değeri olan bir örnek olduğuna işaret ederseniz, matematiğin dışında olan kişiler –"normal" sanatlar konusunda oldukça bilgili ve deneyimli kişiler bile– bütün bu yaygaranın neden koparıldığını anlayamayabilirler. Bu durumda, sanat bilgisi olan kişiler bile, rock müziği ile yetişmiş olan ve bir konser salonuna ilk kez getirilip Beethoven'ın Keman Konçertosu dinletilen çocuklara benzerler. Onlardan konçertonun büyük bir sanat eseri olduğunu hemen anlamaları beklenemez. Ama yine de, eğer eğitimli ve zeki çocuklarsa, parçanın estetik değerine inanmaları beklenir, çünkü o konçertoyu enine boyuna inceleyip büyüklüğünü saptayan 150 yıllık icra ve eleştiri geçmişini bilirler. Konçertonun değerli olduğuna *inanma* öğrenciye ilk gelen duygudur ve onu konser salonuna getiren de budur. Daha sonraki *deneyim* ve *bilgi* öğrenciye, sonunda konçerto üzerinde kendi değerlendirmesini yapma olanağı sağlar. Bunu sağladığında da, eğer onu önemsiz, yalın, özel, beklenir, kaçınılabilir veya hafif –ya da, Hardy'nin matematiğin zarafeti için verdiği ölçütlerin tersi olan başka herhangi birtakım sıfatlarla tanımlanabilen bir şey gibi– bulursa, hepimiz çok şaşırırız.

Bunun gibi, siz de şimdilik $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunun ispatının estetik değerini kabule hazırlıklı olmalısınız, ben söylediğim için değil, daha çok, G. H. Hardy adında büyük bir matematikçi söylediği, ayrıca Pythagoras'tan günümüze kadar bir dizi matematikçi de aynı fikirde olduğu için (Buradaki eksiklik, kuşkusuz, matematiğin estetik içerdiği konusunda kendi başınıza karar vermenizi sağlayacak, müziktekine benzer, yerleşik bir kültür ve eleştirinin var olmamasıdır. Örneğin Çaykovski ve Stravinski'nin müziklerinin görece değerlerini saptamak için başvurabileceğiniz, kolayca erişebileceğiniz literatür mevcuttur. Matematik için ise bu tür eleştirel literatür yoktur). Bu kitabın konusu ve benim matematik eğitimi ve öğrenimi konusunda yaptığım çağrının temel noktası da buradadır. Aydın kişiler matematiği matematikçilerin gördüğü gibi görmelidirler. Matematikçilerin yaptığı gibi matematik yapmayı öğrenmelerine gerek yoktur. Ancak, görmek için de deneyim ve eğitime gereksinmeleri vardır, tıpkı Beethoven'ın nasıl dinleneceği konusunda olduğu gibi. Bu eğitimin doğal yeri de matematik sınıflarıdır.

Kısaca ifade edilirse, Poincaré'nin düşüncesi, matematiğin, aklımızın hem bilinçli hem de bilinçdışı faaliyetleriyle ilgili olduğu ve yaratıcı sürecin üç belirli aşamadan oluştuğu şeklindedir. Birinci aşama bilinçli analiz içerir, ikinci aşama bilinçdışı çalışmadır, son aşama ise bilinçdışı ürünlerinin bilince aktarılmasıdır. Eğer problem yeterince zor ise, Poincaré onun tek bir aşamada çözümlenemeyeceğine inanıyor. Ona göre ikinci aşama, matematikçi problemden vazgeçtiğini sandıktan sonra bile, gerçekleşmek zorundadır. En sonunda, bilinçdışının vardığı sonuç, matematikçinin yaptığı ya da düşündüğü şeyle ilgili olmayan rasgele zamanlarda, bilinci aydınlatır.

Poincaré, bilinçdışı aklın matematiksel çözümleri kesin olarak saptayamayacağını veya mutlaka doğru sonuçlar ortaya koymayacağını savunur. Ancak, bilinçdışında oluşup bilince aktarılan ideler her zaman matematiksel güzelliğin damgasını taşırlar. bunun ötesinde, matematiksel idenin zarafeti ile onun doğruluğu ve önemi arasında olumlu ve yakın bir bağıntı oluşturan yüce ve gizemli bir estetik ilke varmış gibi görünüyor - ya da, Hardy'nin sözleriyle, bir idenin güzelliği ile onun *ciddiyeti* arasında olumlu bir bağıntı.

Seymore Papert "The Mathematical Unconscious" (Matematiksel Bilinçdışı) adlı makalede, Poincaré'nin estetik yol göstericisinin bilinçli akılda ve daha az yüce düzeylerde işleyip işlemediği konusunu tartışır. Papert, matematikçi olmayanlara, aktif olarak matematik yaparken veya öğrenirken yardımcı olacak estetik bir yol gösterme ilkesi olup olmadığını sorgulamaktadır. Eğer varsa, günümüzdeki başarısız matematik eğitim sistemini, hiç olmazsa bir bölümünü, estetik yol gösterme ilkesinin kullanımını içeren bir yaklaşımla değiştirmenin olası etkileri de meydandadır ve bu etkiler çok geniş kapsamlıdır. Papert bunu şu şekilde ifade etmektedir:[12]

> Teorisini bu yolla gerçekçi düzeye indirmek, belki de, Poincaré'nin en önemli saydığı şeyden vazgeçmek riskini içermektedir. Ancak bu, teoriyi psikologlar, eğitimciler ve diğerleri için daha doğrudan işe yarar hale, hatta belki de daha ivedi hale getirmektedir. Örneğin, eğer Poincaré'nin modelinin normal matematiksel düşünmenin gerçek öğelerini içerdiği anlaşılırsa, bugün uygulanan matematik eğitiminin tümüyle yanlış yolda olduğu, hatta kendi başarısızlığının nedeni olduğu ortaya çıkar. Matematiksel estetik okullarda herhangi bir ilgi görürse bu, matematiksel düşünmeyi harekete geçiren bir itici güçten çok, bir yan etkidir; tıpkı matematik pastasının üstünü kaplayan krema tabakası gibi. Matematiksel gelişmenin psikolojisi konusunda yaygın olarak kullanılan teoriler (Piaget'ninki gibi) matematiksel düşüncenin estetik, hatta sezgisel yönünü bir kenara bırakarak sadece mantıksal yönünün yapısal analizi üzerinde yoğunlaşırlar.

Evet. Okullardaki matematik estetik bir *yan etki*dir. Olabileceğinin en fazlası da budur, eğer herhangi bir şey olarak kabul edilebilirse tabii. Okullar estetik yerine bol bol alıştırma ve bezginlik verirler - bir de istenmeyen ve hoşlanılmayan uygulamalara yönelik, çabucak unutulabilen teknikler.

Papert'in anlattığı "olay"da, bir grup deneğe, p ve q tamsayılar olmak üzere, $\sqrt{2} = p/q$ denklemi verilmiş, bu denklemin insanı acayip ve çelişkili bir sonuca götürdüğü belirtilerek, onlardan denklemin doğru olamayacağını göstermeleri istenmişti. Başka bir deyişle, $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu söyleyen teorem için bir ispat vermeleri istenmişti. Papert şöyle *yazıyor:*[13]

> Sanki Freud'u okumuşlar gibi, deneklerden birçoğu, matematiksel "serbest çağrışım" sürecine girerek, bu çeşit denklemlerle ilgili dönüştürmeler deniyorlar. Matematiksel yönden daha deneyimli olanlar ise, daha az sayıda denemeye gerek duyuyor, ancak deneklerden hiçbiri yaptıklarının nereye varacağı ile ilgilenmiyor. Aşağıda bir deneğin ürettiği dönüştürmelerden bazı örnekler, yapıldıkları sıra ile verilmiştir:
>
> $$\sqrt{2} = p/q$$
> $$\sqrt{2}\, q = p$$
> $$p = \sqrt{2}\, q$$
> $$(\sqrt{2})^2 = (p/q)^2$$
> $$2 = p^2/q^2$$
> $$p^2 = 2q^2.$$

Teoremin ispatında görmüş olduğumuz gibi, deneğin listesindeki anahtar denklem en sondakidir. Bu denklemden p^2'nin ve bu nedenle de p'nin çift sayı olduğu sonucu çıkarılıyor. Bu durumda, q'nun da çift olduğunu çıkarmak doğal bir adımdır. Böylece, verilen denklemin ortak çarpanı olmayan tamsayılar için geçerli olmadığı görülüyor. Ancak, eğer herhangi bir şekilde geçerli ise, o zaman da ortak çarpanlar götürülebilir. Sonuçta, verilen denklem geçerli olmaz.

Yukarıdaki listedeki denklemlerin hepsi matematiksel olarak denktirler. Şu anlamda ki, hepsi aynı bilgiyi içerir ve herhangi biri bir diğerinden kolayca elde edilebilir. Ancak, teoremi ispat etmek istiyorsanız size gereken, son denklemdir. Onu diğerlerinden ayıran herhangi bir şey var mı? Hepsi aynı matematiksel bilgiyi içeren bir dizi denklem arasında, bu denklemin özelliğini nasıl fark edersiniz? Yine Papert'a dönelim:[14]

> Problemle ilgilenmeleri yüzeysel olmayan bütün denekler, son denklemi bulduklarında, kuşku götürmez bir şekilde heyecan ve haz belirtileri gösteriyorlar. Bu zevk, sürecin nereye varacağını bilmekle (en azından bilinçli olarak) bağıntılı değil. Bu hal, denekler daha sonra ne yapacaklarını söylemeden önce kendini gösteren bir şey, gerçekte sonradan hiçbir ilerleme yapılmadığı durumlarda da devam ediyor. Sonra, $p^2 = 2q^2$ denklemine tepki yalnız duygusal değil: Bu ifade bulunduktan sonra denekler daha önceki ifadelerden herhangi birisine, hatta orijinal denkleme hemen hiç dönmüyorlar. $p^2 = 2q^2$'de çok özel bir şey var. Nedir bu?

Papert bu sorusuna açık bir yanıt vermeyecek kadar akıllı ve deneyimli. Ancak kendisi yanıtı bildiğini düşünüyor. Ben de o kanıdayım. Denklem, diğerlerinde olmayan bir estetik değer taşıdığı için, haz ve heyecan veriyor. Papert, $p^2 = 2q^2$'nin bilinçli aklımızca erişilebilecek olan diğer şeyler ve süreçlerle "titreşim" yaptığını söyleyerek durumun estetiğini analiz etmeye çalışıyor. Problemi ifade ederken, yazılan ilk denklemin 2 üzerinde odaklaştığını, *p* ve *q*'yu "suskun" rollere indirgediğini, son denklemin de *p*'yi özne durumuna getirdiğini ve başlangıçtaki özne olan $\sqrt{2}$'nin tümüyle yok olduğunu ileri sürüyor. Bu, onun ifadesine göre, "şekil ile arka zeminin yer değiştirmesi, ya da bir bebeğin ce-e oyununu algılamasında bir perde yerine bir yüzün görünmesi kadar tümüyle farklı" bir durum yaratıyor.[15]

Belki öyledir. İster ce-e oyunu olsun, ister olmasın, Papert'in bir şeyler yakaladığı ortada. Çünkü, onun deyişiyle "Bir matematikçinin matematiği özünde kişiseldir." Öyle olduğu halde, okullarda matematik eğitimi verilirken, öğrencilerden "yeni birtakım kurallar öğrenmek uğruna, matematiğin doğal gidişini unutmaları" istenir.[16] Ayrıca, hepimizin bildiği gibi, yürürlükte olan "kural öğrenme süreci" başarılı değildir, başarılı olmamıştır ve –kanımca– olmayacaktır da.

Gerekli olan, matematikçinin konusuna ilişkin "kişisel deneyimi"nin gerçekten anlaşılmasıdır. En üst düzeylerde bu deneyimin büyük ölçüde estetik olduğunda kuşku yoktur. İlk olarak öğrenmemiz gereken şey matematiksel estetiğin özellikleridir. Ondan sonra, matematiksel zarafet hakkında daha başka şeylerden söz edebiliriz. En sonra da, Poincaré'nin estetik yol gösterici ilkesinin ilkokul düzeyindeki matematiğin eğitim verme ve öğrenme süreçlerinde uygulanabilir olup olmadığına karar vermemiz gerekir.

Yapılması gereken ilk iş klasik estetiği yeniden ele almak, müzik, edebiyat, heykel ve resim gibi geleneksel sanatlara günümüzde uygulanmakta olan teoriler gibi, matematiğe uygulanacak teoriler geliştirmektir. Felsefe 101 dersinde profesör öğrencilere "Güzellik nedir?" sorusunu yönelttiğinde, sorunun içerikleri arasında matematiğin de bulunduğu açıkça belli olmalıdır. İkinci sıkıntılı iş, günümüzdeki matematik eğitim sisteminin yenileştirilmesidir. Okullarda yeni bir matematik öğretmeni kuşağına gerek vardır: Kendileri kişisel olarak matematikten yeterince derinden etkilenmiş oldukları için, öğrencilerine de aynı heyecanı aktarma olanağına sahip öğretmenler. Bu, üniversitelerdeki araştırmacı matematikçilerin bugün temel eğitim sistemini oluşturan bölük pörçük, rasgele, kirli çıkı teknikleri bir yana bırakıp, yerine, kavramlar ve idelerle dolu dersler vermeye öncelik tanıyan bir eğitime yönelmeleri demek olur. Matematiğin dünyada en güzel konu oluşu, güzelliği ve zarafeti matematikçileri nasıl harekete geçiriyorsa, öğrenciler de aynı şekilde harekete geçirilmelidir.

Teoriler

Yukarıda değinilen ve yapılması gerekli olan –teorik bakış açısından– iki işten ikincisi gerçekleştirilmesi daha kolay olanıdır. Matematikçilerin eğitime dönmesi ya da eğitim programının, estetik açıdan güdülenmiş matematiksel kavramlar doğrultusunda, yeniden düzenlenmesi konusunda üniversite düzeyinde problem yoktur. Matematikçilerin kendileri de idelerle uğraşırlar ve estetikle güdülenirler. Eğer isterlerse, bu kavramları ve güdüyü hemen yarın kalkülüs sınıfına getirebilirler.

Buradaki sorun, doğallıkla, bunu *istememeleri*dir. Matematiksel zincirin tepesindeki yaşam şimdilerde –ve son yirmi yıldan bu yana– görece rahat olmuştur. Büyük üniversitelerdeki matematikçiler öğretim ve ders programlarıyla ilgili konularla yakından ilgilenme sıkıntısına girmeden matematik yapmaktadırlar. Son yirmi yılın karman çorman programları yerine, temel matematik programlarına kavramları da yerleştirme konusunda onları teker teker kolayca ikna edebilirsiniz. Ancak böyle bir yenileştirme için matematikçilerin örgütlü bir şekilde harekete geçmeleri konusunda zorlanırsınız. Çünkü böyle bir örgütlü çaba, matematikçilerin, zaman ve enerjilerini, başarıyla sürdürmekte oldukları matematik yaratma işine yönlendirmekten onları alıkoyar ve şimdi hiç ilgilenmedikleri, akademik politikalar ve bunlara ilişkin tartışmalar gibi, gerçek dünya işlerine adanmalarını gerektirir. Ancak, yine de, karşısında hiçbir *teorik* engel olmadığı için, reform olanaksız değildir.

Estetik teoriye gelince: Bu tümüyle farklı bir konudur. Nedeni de estetik teorilerin az olması değildir; felsefe kitaplıkları bu teorilerle doludur. Platon, Aristoteles, Kant, Croce, Collingwood, Langer, Whitehead, Goodman, Danto, Dickie gibi birçok klasik ve çağdaş filozof güzelliğin tanımı ve sanatın özelliklerinin araştırılması konularını işlemişlerdir. Ancak, onların akıl karıştıran teori ve karşı teori yığınının hemen hiçbir yerinde, matematikçilerin, bir matematiksel sonucu ağız birliğiyle "zarif" olarak nitelediklerinde akıllarından –bilinçli veya bilinçdışı– tam olarak ne geçtiğini saptamaya yardımcı olacak düzenli bir bilgi kolayca bulunamaz.

Daha genel olan matematik ve sanat konusunda, ciddiyet ve anlaşılabilirlik bakımından çeşitli düzeylerde bazı çalışmalar bulabilirsiniz. Bunlar, genel olarak tanımlandığı anlamda sanatlara *uygulanan* matematiğin bu çerçevedeki rolünü şu veya bu şekilde inceleyen kitaplar ve makalelerdir. Örneğin, geçmişte bu çalışmalar, büyük ustaların klasik tabloları, ya da Grek ve Roma köprüleri gibi eski mimari yapılarda görünen Altın Dikdörtgen (kenarlarının oranı yaklaşık 1/1,618 olan dikdörtgen) gibi konularda bitip tükenmeyen tartışmaları içeriyordu. Daha yenilerde bu çalışmalar arasına Herman Weyl'in[17] sanatta simetri, Sir James Jeans'in[18] matematik ve müzik konularındaki incelemeleri girmiştir. Psikoloji alanında "bilimsel deneyler" üretmeye çalışan, özellikle de Altın Dikdörtgen konusunda bir makaleyi içeren, Gustav Fechner'in[19] 1876 yılındaki çalışmasından daha sonra söz etme fırsatımız olacak. Fechner'in etkisi günümüzde de sürmektedir. "Resimlerde denge" –simetri ve ağırlık merkezi gibi matematiksel terimlerle anlatılması gereken bir kavram– olgusuyla ilgili olarak gözlemcinin kendine özgü algıları konusunda yazan McManus, Edmondson ve Rodger[20] gibi çağdaş araştırmacılarda bu etkiyi görmekteyiz.

Bu genel doğrultuda yapılmış ve matematiğin sanata kesin olmayan bir şekilde uygulanmasından oluşan sayısız çalışma vardır. Bu araştırmalar gerçekten önemli olabilirler. Altın Dikdörtgen gerçek bir matematiksel nesnedir ve ilginç özellikleri Fibonacci Dizisi'nin terimleri arasındaki oranda ve bazı kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapında beklenmedik şekilde karşımıza çıkar. Atina'daki Parthenon'un (yıkılmış durumdaki alınlık kısmı eklendiğinde) Altın Dikdörtgen'e tamamen uygun olması Eski Yunan mimarlık ustalarının düşünce yapısı konusunda bize anlamlı şeyler söyler. Da Vinci ve Seurat'nın resimlerinde Altın Dikdörtgen'in hep görülmesi de, kuşkusuz, dikkate değer.

Bunların dışında, az da olsa, matematik ile estetiği birleştiren bazı çalışmalar vardır. Araştırmacılar bu alanda matematiksel kavramları estetiğin kendisine uygulamaya çalışmışlar, bu yolla da klasik felsefenin, güzelliğin değerinin anlaşılması sorununa matematiksel kavram ve yöntemler getirmişlerdir. Matematikçi George David Birkhoff'un[21] "Mathematics of Aesthetics" (Estetiğin Matematiği), George Stiny ve James Gips'in[22] *Algorithmic Aesthetics* (Algoritmik Estetik) eserleri de bunlar arasındadır. Birkhoff estetik teorinin önemli bir bölümünü matematiksel formüller yoluyla ifade etmeye çalışmıştır. Üç tane "estetik deneyim" değişkeni saptamıştır: sanat eserinin *karmaşıklığı* (C), nesnenin uyum veya *düzeni* (O), nesnenin *estetik ölçütü* (M). Birkhoff bu değişkenlerin

$$M = \frac{O}{C}$$

temel formülüyle bağlantılı olduklarını ileri sürmekte, bu savını destekleyici bazı örnekler vermektedir. Öte yandan, Stiny ve Gips, matematiksel terimlerle ifade edilebilen ve uygun biçimde ifade edildiklerinde bilgisayarlara uygulanabilen estetik eleştiri yöntemleri üretecek olan –ve algoritma denilen– adım adım işlem tekniğini geliştirme ve inceleme konusuyla ilgilenmişlerdir.

Matematik ve estetik içeren bu araştırma alanlarının her ikisinin de –matematiğin sanata uygulanması ve estetik teoriler üretmek için matematik kullanılması– kendilerine özgü çekicilikleri ve değerleri vardır. Ancak her ikisi de bize burada yardımcı değiller. Bizim problemimiz *matematiğin kendisini bir sanat eseri olarak incelemek*tir. Bize gerekli olan ise "*Matematiksel* güzellik nedir?" sorusunu yanıtlamaya yönelik estetik teorilerdir.

Ne yazık ki, bu konuda belirli teoriler yoktur, ya da, eğer varsa bile, pratik olarak yok sayılacak ölçüde belirsizdirler. Görebildiğim kadarıyla, estetik konusuyla ciddi olarak uğraşan filozofların ya matematikle başları hoş değil, ya da matematiksel güzellik konusunu önemli bulmuyorlar. Ya da –ki bu daha olası–, matematik aristokrasisi dışında kalan diğer eğitimli kişiler gibi, birçok estetikçi de matematiksel güzellik ve zarafet kavramlarının varlığının farkında bile değiller. Onlar da hepimizin aldığı matematik eğitimini almış olsalar gerek. Sonuç olarak, onlar matematiğin güzel olduğuna, deniz suyunun kaynar olmasına, ya da domuzların kanatları olduğuna inandıklarından daha çok inanmazlar.

Sezgisel olarak –Poincaré'ye göre doğuştan– matematiğin estetik duygusunu *anlayan* matematikçilerin ise bunu *çözümleme* yolunda gözle görünür bir istekleri yok. Sanat konusunda hiçbir şey bilmese de neden hoşlandığını bilen bir köylü gibi, matematikçiler de zarafeti gördüklerinde onu fark edebiliyorlar. Ama onu açıklamaya gerek duymuyorlar.

Belirli bir estetik teorinin yokluğunun, nesnelerin doğasından kaynaklanabileceğini de göz önünde tutmalıyız. Daha açık bir deyişle, aşağıdaki ifade geçerli olabilir:

(*) Matematik içeren, hakikate uygun bir estetik teori var olamaz.

Şimdi (*) ifadesini daha yakından ele alalım. Ancak, daha önce, herhangi bir görkemli estetik teorinin olanaklı olduğundan kuşku duyan çağdaş filozofların var olduğuna da işaret edelim. Yakın zamanda, bu kuşkularını dile getirenlerden ikisi Mortimer Adler ve George Dickie'dir.

Adler *Six Great Ideas* (Altı Büyük İde)[23] kitabında bize, filozofun hakikate uygunluk ve iyilik konularında "entelektüel sorumluluk" taşıyabileceğini, buna karşılık, "güzellik kavramı" konusunda bu sorumluluğunu yerine getirmesinin olanaksız olduğunu –nesnelerin doğası nedeniyle olsa gerek– söyler. Adler bunun bir nedenini şu şekilde açıklar: Hakikate uygunluk kavramı nesnellikle ilintilidir, iyilik kavramı ise hemen hemen nesneldir. Bu durum, bu kavramlara bakanın "beğeni"sine bağımlı olmak zorunda olan "güzellik" kavramına uygulanamayacak "değerler" vermektedir.

Dickie 1984'te yazdığı *The Art Circle* (Sanat Çemberi)[24] kitabında, estetik kavramı için geçerli özellikleri açıklayıcı herhangi bir teori "oluşturma" konusundaki kişisel kuşkularını dile getirmektedir. Dickie yapılabilecek en iyi şeyin belirli sanat eserlerini tek tek ele almak olduğunu düşünüyor.

Adler ve Dickie bazı türden estetik teorilerin varlığı konusunda, bildiklerine dayanarak kuşkularını dile getirmektedirler. Bizim de onları ciddiye almamız yerinde olur. Ancak, matematiği içeren estetik teoriler hakkında bunların ötesinde de bir şeyler söylemek olanaklıdır. (*) ifadesinin gerçekliliği konusunda veya, en azından, var olan bütün teorilerin uzun sürede yararlı olamayacağı şeklindeki daha ılımlı ifadenin geçerliliği konusunda teorik bir neden var olabilir.

Bu noktayı açıklamak için konudan biraz sapmak gerekiyor. Eğer (*) ifadesindeki "teori" sözcüğü dar anlamıyla yorumlanırsa, o sözcükle, göz önüne aldığımız nesneler hakkında yapılmasına *izin verilebilecek* tümceler kümesini düzenleyen bir çerçeve veya kurallar grubunu kastediyoruz demektir. Örneğin, fizikteki kuantum teorisi Heisenberg'in Belirsizlik İlkesi adı verilen bir sonuca yol açmıştır. Teorinin *sonucu* olan bu ilke, temel bir parçacığın hem ne yaptığının hem de nerede olduğunun bilinmesinin olanaksız olduğunu söylemektedir. Yani, örneğin bir elektron aynı anda hem momentuma hem de konuma sahip olamaz. Kuantum mekaniği varsayımlarına göre bu tür bir aynı anda gerçekleşme hakkında konuşamazsınız. Bunu yapan bir tümce izin verilebilir değildir.

Bu nedenle, bir teori bu teorinin nesneleri hakkında konuşmak konusunda size bir çerçeve verir; daha kesin bir deyişle, nesneler hakkında teoremler ispatlayabileceğiniz *çıkarım* kuralları verir. Bu nesneler konusunda *hakikat*, onlar hakkında ya teoride varsayılan ya da teori çerçevesinde ispatlanabilen tümcelerden oluşur.

Örneğin, Newton mekaniği ile ilgili teoride, hareket eden bir parçacık hakkındaki hakikat, bir dış kuvvetin etkisi olmazsa o parçacığın bir düz doğru boyunca hareket edeceğidir. Bu "hakikat" kabaca Newton'un Birinci Hareket Yasası'dır ve teorisinin temel varsayımını oluşturur. Öte yandan, Aristoteles tümüyle değişik bir şey söylemiştir: Hareket eden bir cisim ancak onu hareket ettirecek bir kuvvet uygulanırsa hareketine devam eder.

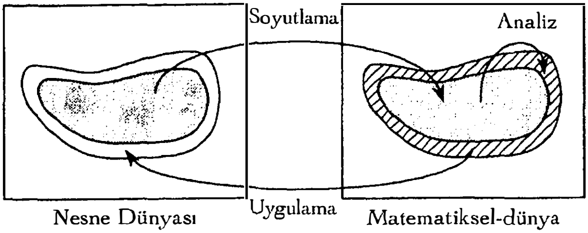
Hangisinin ifadesi doğrudur, Newton'un mu, yoksa Aristoteles'in mi? Yanıt hangi teoriyi kullandığınıza bağlıdır (Üniversite fizik öğrencilerinin çoğu Newton'dan yanadır, çünkü onun birinci yasası çalışmalarının temel bölümünü oluşturur. Öte yandan, Aristoteles'in fikri bizim günlük yaşamımızla daha uyumludur. Düz bir yolda stop etmiş bir otomobili itmeye çalışmış olan herkes itmeyi bırakınca ne olacağını bilir).

Bir anlamda, hakikate uygun bütün teoriler *matematiksel teoriler*dir (Hakikate uygun bir teori ile aksiyomları, tanımları, çıkarım kurallarını içeren, kesin bir teoriyi kastediyorum). Yapacağınız şey, gerçek nesneler yerine matematiksel karşılıklarını, teorinin varsayımları yerine de matematiksel ifadeleri (genellikle bir dizi denklem) koymaktır. İzin verilebilen çıkarım kuralları da matematiğin mantığının kuralları haline gelirler.

Bu "matematiksel teori" kavramının daha önce tartıştığımız uygulamalı matematik süreciyle tam bir uyum içinde olduğu ortadadır. Gerçekten de bu iki kavram temelde aynıdır. Yapmanız gereken şey Şekil 7'ye dönüp gerçek-dünya dikdörtgenini, şimdi incelemek istediğimiz nesnelerin dikdörtgeniyle değiştirmektir. Nesnelerin modelini artık nesnelerin "teorisi" olarak düşünmeniz dışında, Şekil 7'de sizin için değişen bir şey yoktur. Analiz yoluyla matematiksel-dünyada "hakikat"i bulup bu hakikati, şekildeki uygulama süreci ile, nesne dünyasına "uygularsınız" (bkz. Şekil 10).

Şimdi, normal olarak, gerçek-dünya nesneleri hakkında, Şekil 10'daki nesne dünyasının Şekil 7'de görüldüğü gibi gerçek-dünya olarak kaldığını, veya gerçek-dünyanın bir öz altkümesi olduğunu gösteren bir teori istersiniz. Ancak, örneğin oyunculuk konusunda bir matematiksel teori istiyorsanız, o zaman nesne dünyası Laurence Olivier'nin Londra, Old Vic'teki bütün geçmiş oyunlarını içerebilir (Böyle şeylerin bu dünyada yaşayıp yaşamadıkları konusunu burada ele almamıza gerek olmadığı için şanslı sayılırız).

Demek oluyor ki, matematiksel teori için nesneler hakkındaki "hakikat", Şekil 10'daki analiz aşamasında onlar hakkında elde edilen matematiksel ifadeler anlamına gelmektedir. *Her-*



Şekil 10. Matematiksel teori

hangi bir teori için ise –matematiksel olsun, olmasın– hakikat, nesnelerin bir özelliği değil, teorinin nesneler hakkında konuşmanıza izin verdikleridir (Örneğin Newton'un teorisinde, iki şimşek çakması gibi, aynı anda gerçekleşen olaylardan söz edilebilir. Einstein'ın teorisinde aynı anda gerçekleşme gözlemciye bağlı bir şeydir, olaylara değil. Bu nedenle, şimşeklerin aynı anda çakıp çakmaması şimşeklerin değil, teorinin bir özelliğidir).

İlk bakışta, böyle bir hakikat kavramı insana hem teknik hem de kısırmış gibi geliyor. Ancak bu kavramı yeterince ileri götürürseniz –matematikçilerin (özellikle) her gün yaptıkları gibi– hakikatin her ikisi de olmadığını fark edersiniz. Hakikat –ne anlamda olursa olsun– ilgilendiğimiz nesneler hakkında doğru bir ifade veya doğru birtakım ifadeler sonucu olarak herhangi bir şekilde ifade edilemiyorsa, onun hiçbir değeri olmayacaktır. Ve bir ifadeden ötekine geçmenize, bir ifadeyi diğerinden çıkarsamanıza izin veren kesin *çıkarım* kuralları varsa, "doğru olma durumu" da ancak o zaman kesin olur. "Teori", çıkarımları doğru olarak yapmak için gereken kuralları sağlar.

Hakikati saptamanın en iyi yolunun bu olduğunu birçok filozof uzun süreden beri bilmektedir - dile getirmiş olmasalar bile. Anımsayacağınız gibi, Platon bilinebilen şeylerin, Formlar adını verdiği soyutlamalar olduğunu ileri sürdü. Platon'un kendi bilgi teorisinde yaptığı, kabaca, gerçek-dünya nesneleri yerine onların Formlar'ını koymaktı. Her gerçek-dünya nesnesi –örneğin bir elma– sürekli değişim geçiren geçici bir şeydir. Ancak elmanın Form'u ideal bir dünyada yaşar, ölümsüzdür ve değişmezdir. Platon, elmanın kendisi hakkında değil Form'u hakkında bilgi edinebileceğimizi söylemiştir. Ayrıca, Platon'un hakikati, gerçek-dünya nesneleri hakkında değil de Formlar hakkında bilinebileceği için, ona göre Formlar asıl nesnelerden daha gerçektirler.

Demek ki, Platon'un bilgi teorisi, tartışmakta olduğumuz türden bir "teori" bulmaya yönelik bir ilk adımı oluşturuyor. Eğer Formlar'ını matematiksel-dünyaya yerleştirseydi (Platon iyi matematik bilirdi) bilgi teorisi bizim Şekil 10'daki şemamıza tam olarak uyardı. Ancak o matematiksel bir bilgi teorisi, ya da Formlar hakkındaki ifadelerle ilgili çıkarım kuralları belirlemedi. Bu nedenle, sonuçta elde edilen felsefe daha az kesin, ancak kuşkusuz, daha az sınırlayıcı ve daha geniş içerikli oldu. Platon ve öteki klasik filozoflar –Will Durant'ın dediği gibi– "analitik" yoldan çok "sentezci" yoldan gittiler. Analiz bilime özgüdür. "Bilim bize bilgi verir, bilgelik veren ise yalnızca felsefedir."[25]

Günümüzde felsefe çok derinden analitik bir duruma gelmiştir. Onu eleştirenlerin çoğu, yirmi-otuz yıl önce Durant ve bugün Allan Bloom'un yaptığı gibi, onu tam da bu nedenle eleştirmektedirler. Durant felsefeden bilgelik istedi, onu da "yaşayan dehanın kılığına bürünmüş" olarak istedi. Yalnız felsefenin kendisini değil, onu üretenleri de inceleyen bir bilgelik istedi. Durant beşeri konuların tam anlamıyla bir parçası olan bir felsefe istedi, analizin konuyu "parçalara böldüğünü", dar bir soyutluk ve biçimsellik içinde bıraktığını ileri sürdü.

Allan Bloom'un eleştirisi de aşağı yukarı bununla aynıdır. Felsefeyi "bir doktrin olarak değil, bir yaşam biçimi olarak" özetlemekte ve özellikle Akademi'nin temelde bu yaşam biçimine bağımlı olduğunu ileri sürmektedir. Bloom'a göre, "Bu yaşam biçimine katılan bir avuç insan üniversitenin ruhudur."[26]

Belki öyledir. Analiz yapmak gerçekten de kendinizi sınırlandırmak demektir, çünkü araştırılan nesneler teori ile sınırlıdır ve onlar hakkında söyleyebileceğiniz şeyler de aksiyomlar, tanımlar ve çıkarım kurallarından ibarettir. Ancak, aynı zamanda hakikati arıyorsanız, onu bulacağınız yol da budur.

Bulduğunuz hakikatin, teorinin nesnelerine ilişkin hakikat olduğu ortadadır. Matematiksel teoriler için bu nesneler matematiksel nesnelerdir ve bu dünyada yaşamazlar. Platon'un felsefesinde nesneler Formlar'dır, elma ya da iskemlenin olduğu anlamda nesneler değildirler. Öyle olmakla beraber, bir teorinin nesnelerinin, sözcük anlamında, *gerçek* olmadıkları sonucuna kapılmayın. Platon, yalnızca Formlar hakkında bilgimiz olabileceği için, onların hakiki gerçekliği temsil ettiğini savundu. Bir matematikçi için doğada hiç varlığı olmadığı halde 6 rakamı gerçek bir şeydir. "Altı" kesin olarak tanımlanmış bir matematiksel nesnedir ve hakkında bazı şeyler bilinir (Örneğin, 6 = 1 + 2 + 3; yani 6 tamsayısı kendi tam bölenlerinin bir toplamıdır. Böyle tamsayılara *kusursuz* denir. 6 en küçük kusursuz tamsayıdır. Ondan sonra gelen kusursuz sayı 28'dir. Üçüncüsünü ben bilmiyorum. Kaç tane olduklarını ise hiç kimse bilmez).

Platon'u sanat konusunu küçümsemeye yönelten de Formlarının kesinlikle gerçek olduklarına inanmasıydı. Platon için sanat bir taklit, hem de, gerçek-dünya nesnelerinin bir taklidiydi. Platon, Formlar'ı gerçek-dünya nesnelerinden daha değerli bulduğu için (çünkü onlar ölümsüz, değişmez ve haklarında gerçeğin bilinebileceği nesnelerdi), taklidi bir kusur olarak görüyordu. Çünkü bir elmanın resmi kendisinden daha az gerçek, elmanın kendisi de Form'undan daha az gerçekti. Bu nedenle, taklit olarak sanat Platon'un gerçeğinden iki aşama gerideydi (Platon'un empresyonistler ve post-empresyonistler konusunda ne diyeceği merak edilir. Belki de Monet'nin bir köprüsü, bir köprünün taklidi değil de, daha çok, köprünün Form'unun bir temsili olarak yorumlanabilir, tıpkı düşen bir taşın matematiksel modelinin, Newton'un mekanik teorisinin taş için ürettiği bir biçimin temsili olması gibi).

Platon'un taklidi bir kusur olarak görmesine karşın, "Sanatın Taklit Teorisi"nin 2000 yıl süre ile yerinde kalmasına onun otoritesi neden olmuştur. Çünkü bütün bu süre boyunca sanat, çoğunlukla taklit teorisine göre –yani orijinal nesneyi ne ölçüde temsil ettiğine göre– yapılmış ve değerlendirilmiştir [Teori bugünün estetikçilerine huzursuzluk verecek ölçüde gücünü korumaktadır. Cambridge'deki King's College'dan Norman Bryson[27] 1983 tarihli *Vision and Painting* (Görünüm ve Resim) kitabında "gerçekçi" görüşün yaygın olmasının sanat tarihi içinde anlamlı bir değişimi engellediğini; bunun ötesinde, Batı resminin görsel deneyimi kopya etme sanatı olduğu düşüncesinin "temel bir yanlış kavram" olduğunu ileri sürmektedir].

Felsefenin son yüzyılda giderek analitik felsefeye doğru yöneldiği bir gerçektir. Bununla şunu kastediyorum: Konuyla uğraşanlar kullandıkları sözcüklerin anlamları ve tümcedeki yerleri üzerinde giderek daha derinlemesine durdukları için "teori" olarak tanımlamış olduğumuz şeye yönelmektedirler. Platon'un ardından Batılı filozoflar da 2000 yıldan uzun bir süreyi "mutlak" hakikati bulma çabasıyla boş yere harcadılar - yöntemlerinin betimsel ve bilinmeyeni bulmaya yönelik doğası, sonucun boş olmasını kaçınılmaz kılıyordu. Yirminci yüzyılda Bertrand Russell ve Rudolf Carnap'ın öncülüğündeki analitik hareket felsefeye katı mantığı getirdi. Görmüş olduğumuz gibi, bu süreç, kullanılabilecek tümceler topluluğunda ve çıkarım türlerinde zorunlu bir azalmaya yol açmaktadır. Analize yaklaştıkça hakikatin ve güzelliğin doğası hakkında kapsamlı genellemelerin yerini, sorulabilecek soruları bile kapsayan teknik ifadeler almaya başlar. "Hakikat nedir?" sorusuna gelmeden önce, sorunun sizin analitik çerçevenizin ışığında, ne anlama geldiğini açıkça belirtmeniz gerekir. Örneğin, aynı anda çakan şimşekler konusundaki hakikatin Newton mekaniğindeki anlamı Einstein fiziğindeki anlamından farklıdır.

Felsefenin alanını bu şekilde daraltmak Durant ve Bloom'da gördüğümüz türden eleştirilere yol açmıştır. Londra Üniversitesi profesörlerinden Roger Scruton 1983'teki eleştirisinde şunları söyleyecek kadar ileri gitmiştir: "Çağdaş analitik felsefenin, felsefeyi bir beşeri bilim olma konumundan uzaklaştırdığı, oldukça büyük bir doğruluk payıyla, dile getirilmiş bulunmaktadır."[28] Scruton'un yanılmış olduğunu dileyelim. Beşeri bilimler dışındaki felsefe, sanatın dışındaki matematiğe benzer.

Analitik felsefecilerin yaptığı şey bir çeşit dilbilimsel analizdir. Kendi teorilerini olabildiğince ve ellerinden geldiğince iyileştirmeye çalışmaktadırlar. Ancak, kullanmak istedikleri dil matematiksel değil, doğal dildir. Savlarını, örneğin, gündelik İngilizce ile ifade etmek isterler. Ancak, felsefeciler matematiksel model yapmayı, gerçekten tam bir matematiksel model yapmayı istiyor olsalar bile, İngilizcenin sözdizimi kuralları bu iş için çok karışıktır. Öyle bir model yapabilselerdi, yapacakları analiz sembolik mantık gerektirirdi, ki o da matematiğin bir dalıdır. Bu durumda herhangi bir analitik felsefe teorisi matematiksel bir teori olur ve çıkarım kuralları matematiğin kuralları haline gelir. O zaman, ve ancak o zaman, teori –sınırlı ya da sınırsız– tam olarak belirli bir kesinlik kazanır.

Analitik felsefenin büyük bölümü bugün sembolik mantıktan yoksundur. Bunun sonucu olarak, teorilerdeki matematik de yetersizdir ve çoğunlukla –özellikle de matematikçiler açısından– orada burada kesinlik izleri taşıyan açıklama ve betimlemelerin garip bir karışımı olarak görünür. Ancak konu matematiksel kesinliğe doğru gitmektedir ve teoremleri de hakikate yaklaşmaktadır, tıpkı teorinin bir matematiksel teoriye yaklaştığı gibi [Analitik felsefenin gittiği yönü belirtmek için dün masama bırakılan bir konferans bildirisini sizlere aktarıyorum. Konferans Kanada, İngiliz Kolumbiyası'nda bulunan Victoria Üniversitesi'ndeki *The Society of Exact Philosophy* (Doğru Felsefe Derneği) tarafından düzenlenmiştir. Konferansın konusu şöyle: Klasik Olmayan Mantıklar İçin Otomatikleştirilmiş Teorem İspatı]. Eğer estetik konusunda "hakikat" istiyorsanız, onu, estetiğin matematiksel teorisinde bulursunuz (Benim kişisel düşüncem, böyle bir teorinin yararlı olamayacak kadar dar kapsamlı olacağı yolundadır. Böyle bir teoriye doğru ilk adım George Stiny ve James Gips'in *Algorithmic Aesthtetics* (Algoritmik Estetik) kitabında bulunabilir).

Şimdi matematik içeren gerçek bir estetik teori olamayacağını söyleyen (*) ifadesine dönelim.

"Hakiki estetik teori" ifadesi ile burada kastettiğim, onu kullanarak savlar öne sürebileceğimiz bir teoridir. Yani, analitik felsefenin günümüzde yönelmiş olduğu ve dil için uygun bir model bulunduğunda ulaşacağı türden bir teoridir. Böylece de kastettiğim bir *matematiksel teori* olmaktadır.

Demek ki (*) ifadesi *matematiği* içeren bir *estetik teorinin* var olup olamayacağı ile ilgilidir. Yanıtın olumsuz olacağı ortadadır. En azından, tümüyle yararlı bir teorinin var olamayacağı ortadadır. Şöyle düşünelim: Böyle bir matematiksel teorinin olduğunu varsayalım ve ona T diyelim. Matematiğin belirli bir parçasını, örneğin p ile gösterilen asal sayılar topluluğunun sonsuzluğuna dair Eukleides ispatını ele alalım. Bir matematikçi bize p'nin "güzel" olduğunu söylüyor. Bunu estetik teorimiz T ile doğrulamak istiyoruz. Ancak, c_1 ile gösterdiğimiz bu sınamanın kendisi de matematiktir. Çünkü T bir matematiksel teoridir. Bir başka matematikçi p ile ilgili olarak yaptığımız c_1 için "c_1 güzeldir" diyor. Biz şimdi de T teorisini kullanarak bu iddiayı sınıyoruz ve ortaya yine, bu sefer c_2 adını verdiğimiz, matematiğin başka bir parçası çıkıyor. Bu süreç artık kendini sınırsızca tekrarlayacaktır: "c_2 güzel mi?" sorusu ancak bir başka sınama ile, c_3 ile yanıtlanabilir. Böylece devam ederek istenildiği kadar uzun bir matematiksel parçalar dizisi, c_1, c_2, ..., c_n elde ederiz. Bu dizinin özelliği, teorimizin, en sondakinin güzelliğini ancak yeni bir terim üreterek sınayabileceğidir (Açıklama amaçlı bu analiz yapılırken, bütün c_i'lerin birbirinin aynı olabileceği gibi bazı incelikler ihmal edilmiştir. Ancak temel amacımız böyle bir teori ile ilgili güçlükleri göstermektir).

Tamam, bu bize yalnızca, matematik *içeren* bir estetik teorinin matematiğin kendisinde aranmaması gerektiğini söylüyor, aramayı bırakmamızı değil, başka yere bakmamızı öneriyor. Aramak zorundayız, çünkü önümüzde, matematikçilerin matematiği estetik nedenlerle yaptıkları gibi kaçamayacağımız bir gerçek var.

Sanat-dünyası

Arthur C. Danto, Columbia Üniversitesi'nde Johnsonian Enstitüsü felsefe profesörü ve *The Nation* dergisinin sanat eleştirmenidir. Eserleri çok sayıda baskı yapan Danto felsefe, analitik felsefe ve sanat konularında 10'dan fazla sayıda kitap yazmıştır. Danto'nun 1990'da çıkan *Connections to the World* (Dünya ile Bağlantılar) kitabının arka kapağında Richard Rorty şunları yazmıştır: "Danto, bir filozofun olabileceği kadar yetenekli ve ustadır."[29] Yalnız Batılı filozoflara, onlar arasında da Platon, Aristoteles, Spinoza, Kant veya Russell gibilere yakıştırılan bu tür bir yorum çok büyük bir övgü niteliğini taşımaktadır. Ve, Virginia'dan Richard Rorty konuştuğu zaman insanlar onu dinlerler. Yale'den Harold Bloom da Rorty için "Günümüz dünyasındaki en ilginç filozoftur."[30] demiştir. Demek ki, Profesör Danto felsefe konusunda ciddiye almamız gereken –hatta belki de geriye çekilip yol vermemiz gereken– bir kişidir.

Arthur Danto 1964'te *The Journal of Philosophy*'de yayımlanan "The Artworld" (Sanat-dünyası) adlı bir makale yazmış ve bu yazıda, sanat eserlerinin ancak bir tür sanat teorisinin var olmasıyla var olabileceklerini etkileyici bir biçimde tartışmıştır. Şöyle yazıyor:[31]

> (....) insan bir sanat zemini üzerinde olduğunu, bunu ona söyleyecek bir sanat teorisi yoksa, fark etmeyebilir. Bunun nedeni, bir ölçüde, sanat teorilerinden dolayı zeminin bileşiminin de sanatsal olmasıdır. Teorilerin bir faydası da, sanatı başka şeylerden ayırt etme dışında, sanatı olanaklı kılmasıdır.

Bu sıradan bir görüş değildir. Bundan, her zaman sorulan, "Bir sanat eseri nelerden oluşur?" sorusuna insanın yanıt bulmaya çalışacağı, mantıksal olmasa da, faydacıl bir çerçeve ortaya çıkar.

Danto, örnek olarak post-empresyonist resmin ortaya çıkışını ele alır ve, Platon'dan beri yalnızca "Sanatın Taklit Teorisi"nin yürürlükte olması nedeniyle, bu tür eserlerin sanat olarak düşünülmediklerini öne sürer. Şöyle yazıyor: "Bunları sanat olarak kabul etmek olanaksızdı, olsa olsa acemi işi denilebilirdi. Aksi takdirde şaka, kişisel gösteri, ya da bir delinin çılgınlıklarının görsel şekli olarak bakılıp yok sayılabilirlerdi." Danto'ya göre ancak yeni bir sanat teorisi geçerlik kazandığı zaman bu resimler de gerçek sanat yapıtı olmuşlardır. Gereken ve bulunan şey, "gerçek nesnelerle gerçek nesnelerin gerçeğe uygun kopyaları arasında yeni açılmış bir alan" sağlayan bir sanat teorisiydi. O zaman yeni resimler de kopya olmaktan çıkıp "dünyaya yeni bir katkı"[32] olma durumuna geldiler.

İkinci bir örnek de, bir müzede açılan ve Brillo karton kutularının Andy Warhol tarafından yapılmış kopyalarının bir süpermarket deposunda olduğu gibi üst üste yığılmasından oluşan sergidir. Andy Warhol'un sergisini sanat yapan, ama sokağın başındaki marketteki gerçek kutuları sanat yapmayan şey nedir? Profesör Danto'nun yanıtı şöyle:[33]

> Bir Brillo kutusu ile bir Brillo kutusundan oluşan sanat yapıtı arasındaki farkı meydana getiren şey, sonuçta, bir sanat teorisidir. Kutuyu sanat-dünyasına taşıyan ve gerçekten olduğu gerçek nesneye dönüşmesini önleyen de teoridir. (....) Teori olmadan onun sanat olarak görünme olanağı olmadığı ortadadır. Onu sanat-dünyasının bir parçası olarak görmesi için insanın, yakın zaman New York resimlerinin yanı sıra, sanat teorilerini de iyice öğrenmiş olması gerekiyor. Bunlar elli yıl önce sanat sayılmazdı. (....) Gerçek dünyanın olduğu kadar sanat-dünyasının da bazı şeyler için hazırlanması gerekir. Her zaman olduğu gibi, bugün de sanat teorisinin rolü sanat-dünyasını ve sanatı olanaklı kılmaktır.

Demek oluyor ki sanat-dünyası, sanat teorilerinden, bu teoriler yanında bir ölçüde de sanat tarihi öğrenmiş insanlardan oluşan, bir çeşit kurumsal bir külliyedir. Bir nesneye sanat statüsü veren, onun bu sanat-dünyasına girişidir. Florida State Üniversitesi'nde felsefe profesörü olan Eugene F. Kaelin bu sanat-dünyasına girişi "Tanrı'nın inayetine mazhar olmak" durumu ile kıyaslamaktadır. *Aesthetics and Art Education* (Estetik ve Sanat Eğitimi) kitabında şöyle yazar: "Bir yapıtı sanat yapan şey, onun sanat-dünyasına girmesidir. Bu kurumsal külliye içinde gerçek sanat eserleri bir çocuğun vaftiz töreninde Hıristiyan olmasına benzer şekilde, sanat olma niteliği kazanırlar."[34]

Danto'nun "The Artworld" makalesinin kolay okunur olmadığına değinmek isterim. Son bölümü "sanatsal açıdan görece yüklemler"e ayrılmıştır. Bunlar, temelde, bir nesneye uygulandığında onun sanat-dünyasına girmesine olanak veren ifadelerdir. Temsil edici, ifade edici, temsil edici-ifade etmeyici gibi etkin sözcüklerle, belirli sanatsal üslupları betimlemek için metodik bir semboller sistemi geliştirmiştir. Bu analizde, Danto kendi sözcükleriyle, "bildiği bazı en zor felsefi soruları yanıtlamış" olduğunu varsaymış olsa gerek.

Bu makale, aynı zamanda, analitik felsefecinin kesinlik ile açıklamayı, ister istemez birbirine karıştırma eğilimine bir örnek oluşturur. Danto, "...dir" ekinin, sanatsal kimlik saptamada yerinde kullanımı konusunda, haklı olarak, huzursuzdur. Makalenin belki de yüzde yirmisi bu türden "...dir"in tanımıyla ilgilidir. Ancak, ilk paragrafta, Sokrates'in 'sanat taklittir' savına aşağıdaki argümanla karşı gelmektedir: "Eğer 'o'nun ayna görüntüsü gerçekten de 'o'nun bir taklidiyse, ve sanat da taklit ise, ayna görüntüleri de sanattırlar."[35]

Profesör Danto şöyle dese de olurdu: Kedi gerçekten bir hayvansa, eğer köpek de bir hayvansa, o zaman kediler köpektirler. Eğer, önceki argümanda "...dir" kullanmakla ne kastettiğini tam olarak açıklamak istiyorsa tabii.

Bu saçmalığın, makalenin ciddiyetini ve yararlı olan sanat-dünyası kavramını etkilemesine izin vermeyeceğiz.

Filozof George Dickie, Danto'nun çalışmalarını çok ciddiye almıştır. Danto'nun sanat-dünyası kavramı üzerine Dickie'nin yazdıklarının çoğunun onu çürütmeye yönelik olduğu doğrudur. Ancak, yine de, Dickie'nin kendisinin öne sürdüğü teori –Sanatın Kurumsal Teorisi– genellikle Dickie-Danto teorisi olarak anılacak ölçüde, Danto'ya çok şey borçludur.

Dickie'nin yaptığı, Danto'nun sanat-dünyasının kurumsal/sosyal yönlerini alıp kendi teorisinde temel olarak kullanmaktır. Dickie'ye göre, Danto 1964'teki makalesinde ve daha sonraki yazılarında, sanat teorilerinin sanat eserlerini belirlemede bize yardımcı olduğu savını *kesin olarak ortaya koymamıştır*; sanat teorilerinin sanata olanak verdiğini de *göstermemiştir*. Ayrıca Dickie, Danto'nun "sanatsal açıdan görece yüklemler"i dikkatle analiz etmesinin tezi ile ilgisi olmadığına inanıyor, çünkü Danto, ileri sürdüğü, uygulanabilir bir çift yüklemin bir nesnenin sanat eseri olması için gerekli koşul olduğu tezini kesin olarak ortaya koymuyor. Ancak, yine de, "Arthur Danto'nun 'The Artworld'ünün, Sanatın Kurumsal Teorisi'ni esinlediğini"[36] açıkça belirtiyor.

Tahmin edebileceğiniz gibi, Dickie'nin argümanları tekniktir; ayrıntılarını ele almamız da gerekmez. Dickie'nin 1984'teki kitabı, *The Art Circle* (Sanat Çemberi) bunlar için iyi bir kaynaktır. Bu kitap on yıl öncesinde *Art and the Aesthetic* (Sanat ve Estetik) kitabında ilk kez yayımlanmış olan "kurumsal teori"yi elden geçirmektedir [Danto ve Dickie'nin çalışmaları üzerine yapılan yorumlar, daha önce sözü edilen *Aesthetics and Art Education* (Estetik ve Sanat Eğitimi) kitabındaki bazı makalelerde bulunabilir].

Dickie, Danto'dan, esas itibariyle, sanat-dünyasının kurumsal külliye kavramını almış, ancak bu dünyanın "teorileri"nin sanatı belirlediği, gerçekte sanatı olanaklı kıldığı tezini ise reddetmiştir. Dickie'nin teorisinde sanat-dünyası daha çok sosyal ve kültürel bir örgüttür, halbuki Danto, daha çok, sanatı belirlemek için, bu dünyanın kullandığı dil üzerinde odaklaşmaktadır. Danto'nun "The Artworld" makalesinin son kısmındaki güçlüğün kaynağı olan, ve bu çalışmayı analitik felsefe alanındaki yerine oturtan şey de dil konusu üzerinde bu ölçüde durulmasıdır. Danto sanat için "gerekli koşulları" belirlemenin peşindedir. Dickie ise "gerekli ve yeterli" koşulların her ikisini de istemektedir.

p ve *q*'yu iki ifade olarak düşünün. "*q*, *p* için gerekli koşuldur" demek "*p* gerektirir *q*" demektir (tanım gereği). Bu son ifadeye çıkarım denir ve $p \rightarrow q$, tam olarak, *p* doğru olduğu zaman *q* da doğrudur anlamına gelir. $p \rightarrow q$ çıkarımı geçerli olduğu zaman "*p*, *q* için yeter koşuldur" deriz.

Örneğin, *p*, "Felix bir kedidir" ifadesini, *q* da "Felix bir hayvandır" ifadesini göstersin. "Felix bir kedidir" ifadesinin "Felix bir hayvandır" sonucunu verdiği ortadadır. Demek oluyor ki "Felix bir hayvandır" ifadesi, "Felix bir kedidir" için gerekli koşuldur. Basitçe, bir şeyin bir kedi olması için o şeyin bir hayvan olması *gerekli*dir, bir şeyin bir hayvan olması için bir kedi olması *yeterli*dir.

Öte yandan, $q \rightarrow p$ çıkarımı geçerli *değildir.* Öyleyse q, p için yeter koşul değildir (Burada p ve q'nun rolleri arasındaki değişime dikkat edin). Yani bir kedi olmak için bir hayvan olmak yeterli değildir.

Genel olarak eğer $p \rightarrow q$ ve $q \rightarrow p$'nin her ikisi de geçerli ise ($p \leftrightarrow q$ şeklinde yazılır) p'nin q için gerekli ve yeterli koşul olduğunu söyleriz. Böylece, $p \leftrightarrow q$ "p gerektirir q" ve "q gerektirir p"nin her ikisini de ifade etmektedir (Bazen yalnızca "p ancak ve ancak q" deriz).

Eğer p ve q günlük dil ifadeleri değil de matematiksel ifadelerse, ve eğer $p \rightarrow q$ geçerli ise, o zaman $p \rightarrow q$'ya *teorem* deriz. Teoremler de matematiği oluşturur.

Danto'nun, Sokrates'in taklit argümanını ele alış biçimine benim yaptığım ufak eleştiri, yukarıda söylenenlerle ilgilidir. Sokrates "Sanat taklittir" dediğinde, ben onun "Eğer x sanat ise, x taklittir"i kastettiğini varsayıyorum. Böylece Sokrates'in "Taklit sanat için gereklidir" dediğini varsayıyorum. Açıkça görülen odur ki, Profesör Danto, Sokrates'in "Taklit sanat için gerekli ve yeterlidir" ifadesini kastettiğini düşünüyor (Bu, alışılmış yorumdan farklıdır. Eğer "Helen güzeldir" dersem, benim "Bir şey güzeldir, ancak ve ancak eğer o Helen ise"yi kastettiğimi düşünmeniz pek olası değildir).

Felsefeciler uzun süreden beri sanat için gerekli ve yeterli koşulları aramaktadırlar. Anlamlı ve anlaşılabilir bir q ifadesinin, belki de *geçerli* bir ikili çıkarıma ("x bir sanat eseridir" ancak ve ancak "x için q doğrudur" koşuluyla) izin veren küçük bir koşullar kümesini öne süren bir ifadenin, arzu edilir olduğu ortadadır.

Estetik teorilerin çoğu, Danto'nun "The Artworld" gibi, sanat için yalnızca gerekli koşulları veriyor gibi görünüyor. Dickie'nin deyimiyle, bu teoriler başka bir şey vermek için fazla "zayıf"tırlar. Ayrıca, Dickie'ye göre, sanat eserlerinin kendilerine dar açıdan baktıkları için, teorilerin yapıları da hatalıdır (Taklit teorisi bunun klasik bir örneğidir). Danto'nun "The Artworld"ünün çekici özelliklerinden biri, neyin sanat olup neyin olmadığını saptamada, sanat eserinin arka planının önemli bir rolü olduğunu fark etmesidir. Bu "arka plan" düşüncesini Dickie kendi kurumsal teorisinin temeli olarak almıştır. İleri sürdüğüne göre, sanat için hem gerekli hem de yeterli koşuları elde etmiştir..

The Art Circle'dan tek cümlelik güzel bir özet verelim: "Sanatın Kurumsal Teorisi sanat eserlerini karmaşık bir çerçeveye oturtur; bu çerçeve içinde sanatçı, sanat yaratmakla önceden az çok hazırlanmış izleyiciler için, tarih içinde gelişmiş olan bir rolün gereğini yerine getirmektedir."[37]

Çerçeve ile sanat eserleri arasındaki ilişkiyi açıkça anlatarak devam eder:[38]

> (....) türü içinde tek olmak sanat-dünyasına takdim edilen bir sanat eseri olmak için gerekli koşuldur. (....) Bu sav sanat yaratmak için başka bir kuralı da içerir: Eğer insan bir sanat eseri yaratmak istiyorsa, bunu, sanat-dünyasına takdim edilen eşi bulunmayan bir şey yaratarak yapmalıdır. Bu iki kural, beraberce, sanat eseri yaratmak için yeterlidir. Bu kurallar sanat eseri olmayan şeylerce de sağlanıyormuş gibi görülebilir, ancak kuralların belirli, tarihsel olarak gelişmiş bir kültür alanı içinde işledikleri unutulmamalıdır.

Daha sonra, bu fikirleri daha anlaşılır yapmak için, Dickie teorinin kritik terimleri için beş tane tanımlama getirmiştir. Tanımların "dairesel" olduğunu –özür dilemeden– kabul etse de bunun "ciddi bir mantık yanılgısı" olduğunu kabul etmemektedir. Bu daireselliğin *sanatın çarpıtılmış doğasını* ortaya koyduğunu iddia etmekte, bununla da "öğelerinin birbiri üzerine eğilip birbirlerini destekledikleri bir doğa"[39] kastettiğini söylemektedir.

Aksiyomları, kesin tanımları ve çıkarım kuralları olan bir analitik felsefe böyle olmaz. Dickie'nin tanımlarında Webster Sözlüğü'ndeki dairesellik var, ancak bunlar bize sanatı, sanat nesnelerinden oluşan merkezin dışında görme olanağı vermektedir. Kurumsal teori bir çerçeve sağlamaktadır; bu çerçeve içinde, bugün var olan sanat teorileri –taklit, izlenimci, soyutlama, vb.– yer alabilir de almayabilir de. Çerçeve herhangi bir sanat teorisini belirlememekte, ya da dışlamamaktadır. Sağladığı, kullanabileceğimiz pratik bir şeydir. Ve de, ileride göreceğimiz gibi, matematik için kullanabileceğimiz bir şey.

Burada, kısaca kurumsal teoriyi veriyoruz. Dickie'nin *The Art Circle*'da verdiği beş tanım şöyledir:[40]

I) Sanatçı, bir sanat eserinin yaratılmasına anlayarak katılan kişidir.

II) Bir sanat eseri, sanat-dünyası halkına sunmak için yaratılmış türden bir yapıttır.

III) Halk, bireyleri kendilerine sunulan nesneyi bir ölçüde anlamak için hazırlanmış olan topluluktur.

IV) Sanat-dünyası bütün sanat-dünyası sistemlerinin bütünüdür.

V) Bir sanat-dünyası sistemi, bir sanatçının, sanat eserini sanat-dünyası halkına sunması için bir çerçevedir.

Tanımlardaki daireselliği açıkça görebilirsiniz. Örneğin I'den IV'e kadar olan tanımlarda "sanatçı" kavramı ararsanız, bunun sizi "sanat-dünyası sistemleri" kavramına götürdüğünü görürsünüz. Ancak bunun ne olabileceğini saptamak için V'e gittiğinizde, kendinizi yeniden "sanatçı" kavramı ve tanım I'in içinde bulursunuz.

Ancak Dickie'nin amacı açısından bu daireselik yıkıcı değildir. Dickie'nin söylediği gibi, bu "kısır" bir daireselik, hatta, bu bağlamda, belki bir kusur bile değildir (Daha önemli olan konu tanımların birbiriyle çelişip çelişmediğidir. Çeliştiklerini sanmıyorum).

Bu daireselliğin, analitik felsefecileri dehşete düşürdüğünden kuşkum yok. Öyle de olmalı, çünkü onların işi bu türden bir dili kesinleştirmeyi de içerir. Daireselik kesinlik değildir.

Bunun matematikçileri –kesinliğin çok önemli olduğu tek insan topluluğunu– rahatsız etmeyebileceği ise bir paradokstur.

Gördüğümüz gibi, matematik ya kesindir, ya da hiçtir. Ancak Dickie'nin söz ettiği şey matematik değildir, hatta sanat bile değildir, daha çok sanat hakkında konuşmaktadır (Tıpkı benim burada felsefe hakkında konuştuğum gibi). Kanımca, matematikçiler böyle konularda kesinliğe pek gerek görmezler. Çoğunun burada kesinliğin olanaklı olduğundan kuşku duyacağını sanırım. Onlar da matematik *hakkında* konuşurken böyle konuşurlar.

Bir matematikçiden kendisini ve konusunu tanımlamasını isteyin. Size söyleyeceği şudur: Matematik matematikçilerin yaptığı şeydir. Bir matematikçi matematik yapan kimsedir.

Evet, dairesellik; burası kesin. Ancak Dickie'nin deyişiyle, "bir ölçüde hazırlanmış" kişilerce anlaşılabilir bir şekilde.

Matematik-dünyası

Matematikte temel kavramlardan biri *izomorfizm*dir. İzomorfizm, kabaca, iki küme arasında, bu kümelerdeki belirli işlemleri koruyan, bire bir tekabüldür. Böylece bir tekabül varsa kümelere *izomorfik* denir. İşaretleme sistemi (notasyon) dışında izomorfik kümeler zorunlu olarak özdeştirler ve matematikçiler onların birbirinin aynı olduğunu kabul ederler. $(x,0)$ şeklindeki bir kompleks sayıyı x reel sayısı ile eşleştirmekten söz ettiğimizde bunun aynı kavramın değişik dille ifade edilmesi olduğunu görmüştük. Terim olarak tanımlandıktan sonra bu eşleştirme bir izomorfizm olur. Böylece matematikçiler –ve bütün kompleks analiz öğrencileri– $(x,0)$ kompleks sayısı ile x reel sayısını özdeş sayarlar. Bu durumda, reel sayıların izomorfizm yoluyla kompleks sayılar içine *gömülmüş* olduklarını düşünmek kolaylık sağlar. (Futbol sevmeyen bir kişi, alaylı bir şekilde, "Herhangi iki lig takımı izomorfiktir" diyebilir. Bununla, her iki takımın da aynı sayıda oyuncusu olduğunu ve formalarının rengi dışında özdeş olduklarını kastetmektedir).

Dickie'nin, Danto'nun sanat-dünyası kavramını genişletmesinin çekici yanı, bir ölçüde, onunla sezgisel aşinalığımızdır. Hepimiz böyle bir kurumsal külliyenin var olduğunu biliriz, onun içinde gezinenler konusunda da az çok bir fikrimiz vardır: sanatçılar, galeri sahipleri, yazarlar, heykel yontucuları, eleştirmenler, fotoğrafçılar, yönetmenler, yapımcılar, vb. Ayrıca, bu oyuncuların bazılarının kurum için diğerlerinden daha önemli olmasını da anlarız. Sanat-dünyasına pek değişik düzeylerde katılımın olanaklı olduğunun farkındayızdır: Bir yanda ilkokul sanatı, öte yanda Wagner'in *Ring* operaları!

Eğer sanatı, sanat-dünyasının çekirdeğinde olan insanların gördüğü, işittiği gibi görüp, işitmek, sanattan onlar gibi hoşlanmak için zaman ve çaba sarfedecek olursak, bu dünyanın başlıca önemli faaliyetlerine daha yakınlaşabileceğimiz ortadadır. Danto için bu, özellikle, *sanatsal kimliği vardır*dan tam olarak ne kastedildiğini, böylece de sanat eserinin nelerden oluştuğunu anlamayı gerektirir. Dickie bu "...dir" inceliği ile ilgilenmiyor, ancak daha çok, sanat-dünyasına katılımın "hazırlanma" ve "anlama" gerektirdiğinde ısrarlı. Bu da, herhalde, bu dünyanın formel veya formel olmayan bir eğitim süreci sonunda elde edilir, bu çalışma, ileri aşamalarında, Danto'nun "...dir"i ile ve onun "sanatsal açıdan görece yüklemleri" ile uğraşmayı içerebilir.

Danto ve arkasından Dickie sanat-dünyasının özelliklerini saptamaya, onun hakkında betimselliğin ötesine geçen bir şekilde konuşmamızı sağlamak için, kavramın teorik anlamda bir değeri olması için çalıştılar.

Fikirlerinin çağdaş filozoflardan –yandaş veya karşıt olanların her ikisinden– gördüğü ilgi onların yeni ufuklar açan bir şeyler yakaladığını gösteriyor. Danto-Dickie kavramları toplumsal bir sinire dokundular; sanat-dünyasını aydınlattılar.

Sanat-dünyasınınkine benzer özellikleri olan bir başka dünya daha vardır. Gerçekte bu ikinci dünya, işaretleme sistemi dışında, Dickie'nin sanat-dünyası tanımları olan I-V ile özdeş olan beş "tanım" kümesi ile belirlenebilir. Öyleyse, bu yeni dünya sanat-dünyasıyla, yukarıda gösterildiği anlamda, izomorfiktir. Bu nedenle de bu ikinci dünya sanat-dünyasıyla özdeş, daha doğrusu, sanat-dünyasının bir altkümesine özdeş olarak düşünülmelidir.

Ancak, bu ikisi arasında önemli bir fark vardır. Sanat-dünyasının varlığı eğitim görmüş herkes için sezgisel olarak aşikâr olduğu halde, bu yeni dünya onların hemen hepsi için bir bilinmezdir. Üyelerinden biri, Paul Halmos, şöyle yazıyor: "Eğitim görmüş insanların benim çalışma alanımın varlığından bile habersiz olmaları beni üzüyor."[41]

Sözü edilen alan matematik, Paul Halmos da bir matematikçidir. Bilinmeyen bu dünyaya ben matematik-dünyası diyorum. Yapıtları matematiksel nesneler, sanatçıları da matematikçilerdir. Bu kitap, öncelikle, matematik-dünyasını aydınlığa çıkarmak, başka konularda bilgili olan insanlara bu dünyada olup bitenleri aşılamak ve matematik-dünyası halkını hazırlamak yönünde ilk adımı atmak için yazılmıştır.

Beş tanım şunlardır:

1. Matematikçi, bir matematik çalışmasının yapılmasına anlayarak katılan kişidir.
2. Bir matematik çalışması, matematik-dünyası halkına sunmak için yaratılmış türden bir yapıttır.
3. Halk, bireyleri kendilerine sunulan nesneyi bir ölçüde anlamak için hazırlanmış olan topluluktur.
4. Matematik-dünyası, bütün matematik-dünyası sistemlerinin bütünüdür.
5. Bir matematik-dünyası sistemi, bir matematikçinin, çalışmasını matematik-dünyası halkına sunması için bir çerçevedir.

Gördüğünüz gibi bu tanımlar Dickie'ninkilerle özdeştir; yalnızca bazı terimlerde değişim olmuştur. Bu değişimler –oklarla gösterilmiştir– şöyledir:

sanatçı	→	matematikçi
sanat	→	matematik
sanat-dünyası	→	matematik-dünyası
sanat-dünyası sistemleri	→	matematik-dünyası sistemleri.

Eğer Dickie'nin tanımlarındaki bazı sözcükleri sanat-dünyası "işlemleri" olarak düşünürsek –yani, *katılma, yapma, çalışma, sunulan, yaratılan ve sunuluş*– bunların matematik-dünyasında da değişime uğramadan geçerli olduklarını görürüz. Demek oluyor ki, oklarla gösterilen işaretleme sistemi değişiklikleri dışında tanımlar aynıdır.

Her iki grup tanımda da yer alan "yapıt" sözcüğü üstünde burada pek durmayacağım. Hangi "yapıt"ların sanat eseri olup hangilerinin olmadığı konusunda yazılmış oldukça geniş bir felsefi literatür bulunmaktadır. Sanat-dünyasında, Dickie'nin tanımladığı gibi, bu kavramın sezgisel olarak aşikâr olduğu görülüyor. Bir yapıtı bir sanat eseri olarak düşünürüz; örnek olarak da resimler, heykeller şiirler ve benzerleri aklımıza gelir. Çoğunlukla bunları *gerçek* nesneler olarak, tuval ve boyadan, mermerden, bir kâğıt üstüne basılmış dizelerden yapılmış olarak düşünürüz. Ancak çağdaş filozof Richard Wollheim'ın *Art and Its Objects* (Sanat ve Nesneleri)[42] adlı kitabında yaptığı gibi daha derinlere inmek de kolaydır. Burada insan, hemen, gerçek olmayan bir nesnenin sanat eseri olup olamayacağı sorusuyla karşılaşır. Wollheim ise, birçok filozofun sorguladığı gibi, bunun karşıtı olan bir soruyu, eğer bir sanat yapıtının bir duygunun ifadesini içermesi gerektiği doğru ise, gerçek nesnelerin sanat eseri olup olmayacakları sorusunu tartışmaktadır.

Bu konuların üzerinde fazla durmamıza gerek yok. Ancak, bir matematik-dünyası yapıtı ile sanat-dünyası yapıtı arasındaki önemli farkı kabul etmek zorundayız. Gördüğümüz gibi, matematiksel nesneler düş gücünün nesneleridirler; yaratıldıklarında onlara mal edilmiş olan, ya da daha temel matematik ilkelerinden çıkarılmış olan bazı koşulları sağlayan, veya bazı özellikleri olan soyut kavramlardır. Onlar gerçek-dünyada değil matematik-dünyasında yaşarlar. Bu idelerden birçoğunun gerçek nesnelerin soyutlaması olduğu ve bazı gerçek nesneleri yansıtmak için özellikle tasarlandıkları doğrudur. Ancak kendileri gerçek değildirler. Sokrates bile köle çocuk Meno'ya, alanı bir karenin alanının iki katı olan bir kare çizme problemini sorduğunda söz ettiği şey kuma çizilmiş bir şekil değildi. Soru bir soyutlama, *kare* denilen bir matematiksel nesne hakkındaydı.

Matematikçilerin matematik-dünyası halkına (sanatçı olarak) sundukları da bu türden nesnelerdir. Normal olarak bu sunuş, bir ölçüde, matematik-dünyası sisteminin "araştırma makalesi" denen bölümüyle yapılır. Bu nedenle de yapıtlar, Shakespeare'in *Sonnet*'lerinin kâğıt üzerinde temsil edilerek sanat-dünyası halkına sunuldukları gibi, kâğıt üzerine yazılmış semboller ve tümcelerle temsil edilirler. Denklem gibi matematik-dünyası nesneleri ile şiir gibi sanat-dünyası yapıtları arasındaki farklılıkların (veya benzerliklerin) ayrıntılı bir analizi bizi konunun dışına sürükler. Gerçekten, bu düzeyde matematik-dünyası yapıtlarını, onları temsil eden makaleler, kitaplar, konferanslar, vb. şeklinde düşünmekle bir şey kaybetmeyiz. Ancak, gerçek matematik-dünyası yapıtlarının matematiksel-dünyada, ideler dünyasında yaşadığını bilmeliyiz.

Bazı kalburüstü filozofların, haklı olarak, ancak düş ürünü nesnelerin sanat eseri olabileceği sonucuna varmalarından teselli bulabiliriz. Onlardan biri de Oxford felsefecisi R. G. Collingwood'dur.

Collingwood'un *The Principles of Art* (Sanatın İlkeleri) kitabı ilk olarak 1938'de yayınlanmıştır. Collingwood'un estetiğe yaklaşımı algılamadan çok dil yoluyla olmasına karşın, *Principles* bir analitik felsefe eseri değildir. Olabilir ki, bu kitap, ayrıntılar üzerinde yoğunlaşarak ve kesin bir dil kullanarak bu tür teorilerde öne sürülen kavramların artık geçersiz olduğunu ortaya koyan analitik felsefenin doğuşundan önce, "görkemli bir sanat teorisi" oluşturmak isteyen son bir çabayı temsil etmektedir.

Collingwood'un bir filozof olarak saygınlığının ne ölçüde olduğu, Richard Wollheim gibi çağdaş felsefecilerin hâlâ onun fikirlerini çürütmek için uğraşmalarından ve kitaplarından beşinin bugün de –ölümünden neredeyse yarım yüzyıl sonra– yayında olmasından anlaşılabilir.

The Principles of Art kolay okunan bir kitaptır, çünkü Collingwood onu çok güzel bir şekilde yazmıştır. Bununla beraber içerdiği fikirler hiç de yüzeysel olmayıp, kokteyl partilerinde, bir elde içki ile dolaşırken duyduğunuz film veya kitap özetlerine konu olacak türden değildirler. Profesör kendisine, en azından, sanatın ne olduğunu betimlemek gibi bir amaç seçmiştir. Bunu yapmak için, önce sanat kavramı hakkında yaygın yanlış anlamaları ele almış, ona göre "yanlış olarak sanat olarak nitelendirilen" birkaç kategoriyi birer birer ve titizlikle çürütmüştür.

Collingwood "gerçek sanat" dediği şey ile küçük el sanatları, eğlence veya sihirbazlık alanlarına ait olmaları daha yerinde olacak etkinliklerin, genelde haklı olarak, birbirlerine karıştırılmaları olgusunu çok dikkatle inceler. Sanatın ne olmadığını tartışmayı bitirdikten sonra, temel amacı olan gerçek sanatın özelliklerini saptamaya geçer. Bu gelişim uzun sürmektedir, ve ancak bu tamamlandıktan sonra Collingwood kendi "sanat teorisi"ni ortaya sürer. Bu aşamada şöyle yazıyor:[43]

> (....) bir sanat eseri, deyimin tam anlamıyla, el yapması bir şey, sanatçı tarafından fiziksel olarak meydana getirilen veya algılanan bir şey değildir. O yalnızca sanatçının zihninde var olan, düş gücünün yarattığı bir şeydir ve de, yalnızca görsel ve işitsel düş gücünün eseri değil, genel bir düşsel deneyim bütünüdür. (....) Bir sanat eserinin gerçek nesne diyeceğimiz bir şey olması gerekmez; düşsel dediğimiz bir şey de olabilir. Sosyal bir karışıklık, bir bunalım, ya da bir savaş gemisi veya benzeri şeyler, gerçek dünyada yeri olan bir şey olarak ortaya çıkıncaya kadar yaratılmış değildirler. Ancak bir sanat eseri, yalnız sanatçının kafasında yaratıldığında da tamamen yaratılmış olabilir. (....) Gerçek sanat eseri görülen ya da duyulan bir şey değil, zihinde canlandırılan bir şeydir.

Collingwood *The Principles of Art* kitabında matematiğe değinmemiştir, sanatı "düşlenen bir şey" olarak betimlediğinde de aklında karmaşık sayılar, ya da diferansiyel denklemler yoktur. Ancak, yine de, matematik-dünyası yapıtları bu türden nesnelerdir ve Collingwood'un estetiği içine yerli yerinde oturtulabileceklerini görmek rahatlatıcıdır.

Matematik-dünyası ile sanat-dünyası arasındaki farkın yalnızca yapıtlarının doğalarının birbirinin çok farklı olmasından ibaret olmadığı açıktır (Bu iki dünyanın birbirine tekabül ettiği yolundaki düşüncemiz, onları tanımlayan tümceler arasındaki teknik olmayan izomorfizmden gelmektedir. Bu tekabül, birer sanat-dünyası terimi olan "sanatçı", "sanat", "sanat-dünyası" ve "sanat-dünyası sistemleri"nin, onlara tekabül eden matematik-dünyası terimleriyle özdeşliğinin bir sonucuydu). Örneğin, bu sistemlerden birinde *eleştirmen* ve *eleştiri* vardır, ötekinde ise yoktur.

Sanatın Kurumsal Teorisi'nin herhangi belirli bir sanat teorisini ne kabul ne de reddettiğini daha önce görmüştük. Sanat-dünyası çerçevesi içine klasik taklit teorisi, ya da, örneğin, minimal sanatla ilişkili olan daha yeni bir teori yerleştirilebilir. Kurumsal teorinin bu esnekliği onun olumlu niteliklerinden biridir.

Bunun ötesinde, tanımlayıcı tümcelerle belirlenmiş olan sanat-dünyası sistemi, sanat eleştirmenlerinin varlığı ile, bunun sonucu olarak da eleştiri ile ilgili çok sayıda teoriye yol açabilir (açmaktadır da). Çerçeve içinde, isterseniz, Jacques Derrida ve Paul de Man'ın edebiyattaki "yıkıcılık" teorisini, ya da daha eski teorisyenlerden Cleanth Brooks ve Robert Penn Warren'in "yeni eleştiri"sini ele alabilirsiniz. Veya yıkıcılık'ın görünen ardılı olan "yeni tarihçilik"i seçebilirsiniz. Hiç fark etmez. Sanat-dünyası çerçevesi herhangi birini güvenle içine alabilir.

Aynı şey, teorik olarak, matematik-dünyası için de geçerlidir. Matematik-dünyası çerçevesi, matematiği yalnız yazılı metin bakımından, veya onu üreten matematikçileri saran politik veya tarihsel atmosfer bakımından, eleştirmenize izin verir. Ya da, Derrida ve de Man'ın peşinden giderek, matematiğin görünen kesinliğinin bir kuruntu olduğunu, konunun ancak bir çeşit kuşkucu görecelik ışığında gereği gibi yorumlanabileceğini göstermek isteyebilirsiniz. Matematik-dünyası kavramı eleştiremeyeceğinizi söylemediği için, istediğiniz şekilde eleştirebilirsiniz (Eğlenceli bile olabilir, ancak sözü geçen olanaklardan ikisinin bir sonuç vereceğinden kuşku duyarım). Matematik-dünyası her çeşit matematik eleştirisinin olanaklılığına *izin verir*.

Ancak gerçekte hiçbir eleştiri olanağı yoktur. Matematik-dünyası sisteminde hiçbir eleştirmen yaşayamaz. Matematik-dünyası için tanımlayıcı tümceler, bazı ad değişiklikleri dışında sanat-dünyası için olanlarla bütünüyle uyum içinde olduğu halde, bunlara ilişkin sistemler birbirinden önemli ölçüde farklıdır. Bu farklardan biri de şudur: Sanat-dünyası sisteminde, meslekleri eleştirmenlik olan çok sayıda insan vardır, matematik-dünyasında ise hiç yoktur.

Matematikçiler, arada bir, başkalarının matematik çalışmaları konusundaki düşüncelerini söylerler, ya da onları değerlendirirler. Bu işleri üniversite atama komisyonlarında görevli oldukları zaman yaparlar ve onlardan, belirli bir kadroya aday olan bir kişinin araştırmalarının niteliği üzerinde değerlendirme yapmaları özellikle istenir. Matematikçiler, araştırma makaleleri hakkında değerlendirmeler de yazarlar ve onların matematik dergilerinde yayımlanmaları öncesinde hakem işlevi üstlenirler. Ancak bu değerlendirmeler normal olarak yalnızca araştırmanın "doğruluğu" ve matematik literatüründeki yeriyle ilgilidir. Bu eleştirmen benzeri rolleri oynadıklarında matematikçiler, çoğunlukla, araştırmanın derinlik, genellik veya önemine bakarlar. Bununla beraber, yorumlarını, arada bir, sanat-dünyası meslektaşlarının eleştiri sayacakları bir çerçevede yaptıkları da olur. G. H. Hardy 1940'ta yazdığı, *A Mathematician's Apology* (Bir Matematikçinin Savunması) kitabının ilk sayfasında, "(....) çalışan kişilerin, bu çalışmayı açıklayan kişilere karşı duyduğundan daha derin, genellikle de daha haklı, başka bir küçümseme duygusu yoktur. Açıklama, eleştirme, övgü ikinci sınıf beyinlerin işidir."[44] diye yazdığında, kendisinden sonra gelen bütün matematikçiler için konuşmuştur.

Matematikçiler matematik yaparlar, eleştirmen değildirler.

Ancak, önemli olan nokta bu değildir. Yukarıda değinilen (görece önemsiz) durumlar dışında, *matematikçilerin kendilerinin yaptıklarından başka* hiçbir matematiksel eleştiri yoktur. Bunun sanat-dünyasındaki karşılığı ise, ressamlar dışında resim eleştirisi, yazarlar dışında edebiyat eleştirisi, müzisyenler dışında da müzik eleştirisi yapan olmaması demektir.

Böyle bir sanat-dünyasının hiç de fena olmayacağını söyleyebilirsiniz. Yirmi adım öteden bir kemanla bir viyolayı birbirinden ayırt edemeyen amatör müzik meraklılarının, gece saat 11 ile 12 arasında çırpıştırılmış sözümona konser eleştirilerinin gazetelerde yer almamasını onaylarım; bunu müzisyen arkadaşlarım da onaylarlar. Müzik eleştirisi, şişelerle mürekkep satın alan insanların varlığından fazlasını gerektirmelidir.

Öte yandan, sanat-dünyası sisteminde varlıkları bu dünyayı zenginleştiren, uygun ve göze batmayacak şekilde onu düzenleyen birçok bilgili eleştirmen vardır. Her sanatçı –ressam, yazar, müzisyen, ya da her ne ise– dış eleştirmenlerin varlığının kendisine, yalnız kendi sanat çevresi içindeki meslektaşlarına değil, sanat-dünyası halkına karşı da bir çeşit sorumluluk yüklediğini bilir. Bu sorumluluktan hoşnut olmayabilir, ancak, onu yok saymak kendisini de yok eder. Çünkü sanat-dünyası halkı genelde eleştirmenlere önem verir ve bireylerinin katılım düzeyi, okuduğu eleştirilerin ciddiyeti ile ölçülebilir. Bunun ötesinde, sanat-dünyası halkının bizzat kendi varlığı, –en azından daha alt düzeylerde– medya yoluyla sanatı gözler önünde tutan eleştirmenlerin varlığına bağlıdır.

Matematik için durum böyle değildir. Matematik-dünyasında eleştirmen yoktur. Onun uzmanlaşmış sanatçıları olan matematikçiler, yalnız birbirlerine karşı sorumludurlar; matematiği halkın gözü önünde tutacak matematik-dünyası eleştirmenleri yoktur. Ve, bir ölçüde bu nedenle, matematik-dünyası halkı diye de bir şey hemen hemen yoktur.

Dickie'nin listesindeki üçüncü tanımın, matematik-dünyası listesindeki 3 numaralı tanımla kelimesi kelimesine özdeş olması ilginçtir. Halk ancak "anladığı" sürece halktır. Ancak sanat-dünyası halkı çok büyük bir topluluk olduğu halde matematik-dünyası halkı çok küçük bir topluluktur. Yaratıcı sanatçılar olan matematikçilerin kendilerinin dışında, matematiği gerçekten anlayanlar, görece ancak ufak bir grup oluştururlar: Matematiği *kullananlar* ile *öğretenler*in bazılarından oluşan bir grup; onların bile hepsi değil. Değerini anlamadan matematiği kullanabilirsiniz, daha da kötüsü, matematiği hiç anlamadan onu öğretmenize izin verilebilir. Anlamadan matematik öğrettiğiniz zaman ise matematik-dünyası halkının çoğalmasına katkı yapmanız olası değildir.

Yapılması gerekli olan şey açıkça belli gibi görünüyor. Matematik-dünyası ve sanat-dünyası arasında bir benzerlik sorunu yoktur. Matematikçiler de matematik yaratırken sanatçılar gibi davranır ve düşünürler. Ancak, günümüzde matematik-dünyası ile sanat-dünyası birbirinden ayrılmıştır. Onlar artık *ayrık* dünyalardır. Aralarında izomorfizm olduğu halde bu iki dünya kesişmez. Yapmamız gereken şey, matematik-dünyasını, bir yolunu bulup, sanat-dünyası içine *yerleştirmek*tir. Bu da, ne yazık ki, kâğıt üstünde gerçekleştirilemez.

Gerçek bir yerleştirme –matematik-dünyasına, sanat-dünyasının bir altkümesi olma şeklinde bir gerçek-dünya kimliği verilmesi– üç grup insanı ilgilendiren değişiklikler gerektirecektir:

i. Matematikçilerin matematik *hakkında* konuşmaya daha gönüllü olmaları;
ii. Gençlere matematik öğretme yönteminde iyiye doğru bir değişim;
iii. Matematik yanlısı olmayan, eğitim görmüş erişkinlerin matematiğe karşı olan tutumlarında olumlu bir değişim.

Madde *i* konusunda pek şanslı olamadım. Gördüğümüz gibi, araştırmacı matematikçiler, genelde matematik hakkında konuşmak istemiyorlar. Araştırmacı matematikçilerin çoğunluğu üniversitelerde çalışıyorlar ve onlara matematik hakkında konuşmak için değil, araştırma yapmaları için para ödeniyor. Açıklayıcı yazılar ne kadar değerli, ne kadar iyi yazılmış olsalar da üniversitenin ödül sisteminin dışında kalırlar. Madde *ii*, en azından, matematik eğitiminde bir devrim gerektirir. Eğer bu konudaki değerlendirmem yerinde ise, yeni öğretim Poincaré ve Papert doğrultusunda, önemli bir "estetik matematik" bölümü içermelidir (Gidiş o yönde değildir. Matematik eğitiminin geleceği bilgisayarlar, el hesap makineleri ve video gösterimleri şeklinde, teknolojiye gittikçe artan bir bağımlılığa yönelmektedir. Amerikalı öğrencilerin azalan matematik yetenekleri ile bu teknolojilerin okullara sokulması arasındaki açık bağıntıyı gören tek kişi herhalde ben değilim. Bu düşüş teknolojinin gelişimi ile başlamıştır).

Madde *iii*'te sözü edilen değişim bir gün gerçekleşecektir. Bir zaman sonra, matematik bilgisizliği, toplu yerlerde sigara içilmesi gibi, sosyal olarak kabul edilebilir olmaktan çıkacaktır. Tavırlar değişecektir. Bu arada belirteyim ki, Madde *iii* bu kitabın ana amacıdır.

Hakikat ve Güzellik

John Keats "Güzellik hakikattir, hakikat de güzellik..." derken aklında matematik yoktu. Onun yerine, hemen hemen tam tersi olan bir şeyi düşünüyordu. Bildiğiniz gibi Keats ve onun romantik çağdaşları Byron ve Shelley, aydınlanma hareketinin gerçeğe bir dizi akıl yürütme yoluyla varmaya çalışmasından güvensizlik duyuyorlardı. Keats, insanın "yaşamın durağan kalbine" herhangi bir entelektüel modelle değil, daha çok doğanın anlaşılmaz gizemlerini şairane bir biçimde kavramakla varılabileceği duygusunu taşıyordu. Bir keresinde erkek kardeşi George'a "İnsan yaşamı –çok şükür– matematiksel analiz konusu değil," diye yazmıştı.

Ancak, Keats matematik bilmezdi ve bu nedenle onunla güzellik arasında, hakikatle güzellik arasında yaptığı gibi, bir bağlantı kuramazdı. Buna karşılık, Keats şiir biliyordu ve yüce şiirler çoğu kez şairin amaçladığından, hatta inandığından da fazlasını dile getirirler.

Tıpkı şiirin sanat-dünyasında sanat konumunda olması gibi, matematik de matematik-dünyasında sanat konumundadır. Sembollerin, denklemlerin ve çıkarımların matematiksel-dünyasında hakikat, en belirgin biçimiyle yaşar. "Güzellik hakikattir, hakikat de güzellik" ya da "matematik hakikattir, hakikat de matematik". Seçim sizin. Sanırım ikisi de aynı şey ve Bay Keats de aklından geçenden daha fazlasını dile getirmiş.

Keats'in kafasında olan şeyin Mortimer Adler'in iki tür güzellik kavramına *–haz veren güzellik* ve *beğenilecek güzellik–* benzer bir şey olduğunu sanıyorum. Bu kavramlar Adler'in *Six Great Ideas* (Altı Büyük İde) kitabında yer alır ve "güzel nesneler topluluğu"nu iki sınıfa ayırmak için kullanılır. Birinci sınıftaki nesneler, düşünüldüklerinde haz verenlerdir. Bunlar, yani *haz veren güzelliği* olan nesneler, verdikleri haz yanında gözlemcinin beğenisine de bağımlıdır. Örneğin çoğu kimse için matematiğin haz veren güzelliği yoktur.

Beğenilecek güzelliğe sahip nesneler, uzmanlarca güzel olarak değerlendirilmiş olanlardır –Adler, "uzmanlar" ile üstün beğeni duygusu geliştirecek ölçüde bilgili ve deneyimli kişileri kastetmektedir. Matematikçilerin matematik beğeni duyguları çok güçlüdür. Eğer konu, gereği gibi öğretilirse matematikçi olmayan kişiler de aynı duyguya sahip olurlar.

Bu kavramlar –Adler tarafından ayrıntılı biçimde anlatıldıkları kadarıyla– akla ve sağduyuya yakın görünüyorlar. Örneğin, 1990 başlarında New York'ta gördüğüm Julian Schnabel'in resimleri bana, haz veren güzellik taşıdıkları duygusunu vermedi. Ancak, haklarında daha çok şey öğrendikten sonra onların beğenilecek güzellik duygusu verebileceğini kabul edebilirim.

Beğenilecek güzellik kavramı sanat-dünyası kavramıyla ve dolayısıyla, matematik-dünyası kavramıyla bağdaşmaktadır. Sanat-dünyasının belirleyici özelliklerinden birisi sanat-dünyası halkından, bir ölçüde "anlama" talep etmesidir. Adler'in terimleriyle bu, beğenilecek güzellik kavramını ayırt edebilen bir halk istemek demek oluyor.

Adler, bunun yanı sıra, beğenilecek güzelliğin –sabırlı çalışma ile ve beğeni duygusunda düzenli bir kusursuzluğa gitme ile ilgili olduğu için– özel bir hakikati temsil ettiği yolundaki düşünceye katılmaktadır. Uzmanlar için beğenilen güzellik hakikati öğrenmeye yönelmiş kişiler için olan güzelliktir.

John Keats, sanırım, kendisini güzellik ile ilgili konularda bir uzman olarak görüyordu. Bu doğruysa, onun güzellik kavramı Adler'in beğenilecek güzellik kavramına yakın olabilir. Eğer bu iki kavram aynı ise, Keats –şairlerin çoğu kez yaptıkları gibi– amaçladığından daha çoğunu söylüyordu. Bir adım daha ileri gitmeye cesaret eder ve matematiği de beğenilecek güzellikte olan nesneler topluluğuna katarsanız, o zaman matematik-dünyası kavramı için Keats'in onayını alabilirsiniz.

Bu bana tuhaf gelmiyor. Matematikte çok şey, bir şey ile bir başkasının aynı olduğunun saptanması ile ilgilidir; reel sayılar ile $(x,0)$ şeklindeki kompleks sayılar altkümesinin izomorfik olması gibi. Matematikçiler için bu kavramı gerçek-dünyaya kaydırmak kolaydır. Şairler için ise daha da kolaydır.

Son günlerde *New York Times* gazetesinde çıkan bir yazısında Doug Anderson, Howard Nemerov'un bir denemesi hakkında şunları dile getiriyor: [46]

> En sevdiğim deneme olan "On Metaphor" (Mecaz Hakkında), yazarın, bahçesine konan mor renkli ispinozları tam olarak tanımaya çalışmasına ilişkin bir fıkrayla başlar. Peterson'un "Field Guide"ını (Doğa Rehberi) alır; kuşun bilimsel ama sıkıcı tanımını dikkatle okuduktan sonra şu satıra gelir: "Ahududu suyuna batırılmış serçe." "Artık mor renkli ispinoz kuşları gördüğümü biliyorum." sonucuna varır.

Keats bunu anlardı. Ben de anlıyorum.

İlkeler

George Dickie'nin kurumsal teorisi, sanat-dünyasının neyin sanat olup neyin olmadığını saptayacağı bir çerçeve sağlar. Ancak bu çerçeve iyi sanatı kötü sanattan ayırt etmez. Bunun için başka bir şey gerekiyor: Belki sanatsal bir teori, ya da sadece basit bir nitelikli beğeni duygusu. Matematik-dünyasındaki durum da bunun aynıdır. Orada da neyin matematik olduğunu kurumsal çerçeve saptar. *İyi matematik* bir başka konudur. Sanat-dünyasında olduğu gibi, bunun için başka bir şey gereklidir.

Bu aşamada dikkatli olmak zorundayız. Matematik-dünyası ile sanat-dünyası arasında tanımlayıcı denklemler tarafından belirlenmiş olan izomorfizm nedeniyle, matematikten bir sanat olarak söz etmekteyiz. Öyleyse, iyi matematik, burada, iyi sanat olan matematik anlamına gelmektedir. Yani *iyi bir matematik yapıtı* derken kastettiğimiz, *güzel bir matematik yapıtı* olacak, ya da matematikçilerin deyişiyle, *zarif matematik*. Zarif olanı çirkin olandan nasıl ayırt edebiliriz? Matematikçiler, sezgisel olarak, birini diğerinden ayırt ediyor gibi görünüyor. Farkı nasıl anlıyorlar?

Bazı matematiksel sonuçların güzelliği konusunda matematikçiler arasında var olan görüş birliği düzeyini abartmak zor. Bu görüş birliği düzeyi sanatın öteki dallarında karşılaştıklarımın çok üstünde.

Örneğin, Brahms'ın Keman Konçertosu'nun güzelliği konusunda değişik görüşlere sahip kemancılar bulmakta hiç zorlanmazsınız. Görünen odur ki, bazı kemancılar için, çoğumuza dünyanın harikalarından biri gibi gelen bu parçayı aşırı duygusal ve romantik olduğu gerekçesiyle kulak ardı etmek sanki bir onur sorunudur. Bir keresinde de, iki çağdaş ressam, benim önümde, Andrew Wyeth'in resimlerinin gerçek sanatı mı temsil ettiği, yoksa yalnızca el sanatı ile eğlence karışımı bir şey mi olduğu konusunda ciddi bir tartışmaya girişmişlerdi.

Genelde matematikçiler hangi matematiğin zarif olduğu, hangisinin olmadığı konusunda çatışmazlar. Örneğin karekök

2'nin irrasyonel olduğu yolundaki Pythagorasçı ispatın estetik değeri olmadığını ileri süren bir araştırmacı matematikçi bulamazsınız. Ben, kendi hesabıma, öyle bir matematikçinin var olabileceğine inanmıyorum. Gerçekten de, eğer Poincaré yaratıcı matematiğin özünün estetik deneyim kavramıyla bağlantılı olduğu konusunda haklıysa, öyle bir kişi var olamaz. Her şeyden önce, bu teoremdeki ve ispatındaki güzelliği göremeyen bir kimse bir matematikçi değildir.

Öyleyse, matematikçiler genel kabul görmüş birtakım estetik ilkelerle çalışıyor olsalar gerek. Öyle olmasaydı, belirli bir teoremin güzelliği –ya da güzellikten yoksunluğu– hakkında nasıl bu kadar tam uyum içinde olabilirlerdi? Ancak, matematiğin estetik teorisi diye altına imza attıkları bir şey de yoktur. O halde, bir yerlerde, bir matematiksel sonuç konusunda topluca uyum içinde olmalarına yol açan ve aynı anda başlarını bilgece sallayarak koro halinde "Ne kadar zarif, değil mi?" dedirten, hepsinin paylaştıkları en azından birkaç pratik ilke var demektir.

Böyle ilkeleri yazıya dökmeye yönelik bazı çabalar bulabilirsiniz. Anımsayacaksınız, G. H. Hardy bazı matematiksel sonuçları –örneğin karekök 2'nin irrasyonel olmasını– zarif yapan şeyin ne olduğunu saptamaya çalışırken, *ciddiyet*, *derinlik*, *ekonomi* ve *genellik* gibi bir dizi nitelik sıralamıştı. Bu nitelikleri bazı teoremlerin anlatımına uyguladığında da benim düşündüğüm türden ilkelerin yanından geçmektedir. Hardy'nin belirsiz olduğunu ima etmek istemediğimi lütfen bilin. Daha büyük ölçüde kesinlik kullanan birisi zor bulunur. Benim söylemek istediğim, onun, matematikçilerin birbirlerine matematiğin güzelliğinden söz ederken ne düşündüklerini matematiğin dışında olanların anlamasına yardımcı olacak pratik ilkeleri yazmaya yakınlaşmış olmasıdır. Daha açık olmaya çalışacağım.

Matematikçilerce, matematiksel düşüncenin estetik niteliğinin ölçülebileceği standartlar olarak, kabul gördüğünü sandığım iki ilke belirledim. Birincisine *minimal tamlık* ilkesi, ikincisine de *maksimal uygulanabilirlik ilkesi* diyorum:

1. *Bir matematiksel* N *nosyonu, matematiksel işlevini yerine getirmek için gerekli olan bütün özellikleri içerir, ancak konu dışı hiçbir özellik içermezse, minimal tamlık ilkesini sağlar.*
2. *Bir matematiksel* N *nosyonu, eğer* N *dışındaki matematiksel nosyonlara geniş ölçüde uygulanabilir özellikler içeriyorsa maksimal uygulanabilirlik ilkesini sağlar.*

(Bunlardan, arada, "minimallik ilkesi", "maksimallik ilkesi" olarak söz edeceğim.)

Burada nosyon sözcüğü özellikle seçilmiştir. Matematikçiler "güzellik" ve "zarafet" sözcüklerini daha çok bir teorem ve/veya teoremin ispatı için kullanırlar. Ancak bu terimler denklem, eşitsizlik, hatta bir tanım gibi, başka matematiksel nesneler için de kullanılabilirler. Bu nedenle, ilkelerde "nosyon" sözcüğünü, bunların herhangi birisini içerecek şekilde kullanıyorum. Gerçekten de, ilkeler açısından *N*, Şekil 1'deki matematik-dünyasında yaşayan herhangi bir nesne olabilir.

Minimal tamlık ilkesi "Occam Usturası" denilen felsefe ilkesini andırır. Bu ilke "Varlıklar gereksiz yere çoğaltılmamalıdır." der. Ancak Occam Usturası genellikle "*p* gerektirir *q*" şeklindeki önermeler içindir ve *q* sonucunun çıkarılmasına izin vermek koşuluyla, *p* varsayımının olabildiğince "yalın" tutulması gereğine dikkat çeker. Yukarıda verilen birinci ilke ile ben daha genel bir şey kastediyorum. Ben bu ilkenin yalnızca "*p* gerektirir *q*" şeklindeki ifadeler değil, bütün matematiksel nesneler için geçerli olduğunu söylüyorum.

Matematiksel bir nosyon eğer, bir anlamda, tamam veya kendisine yeterli ise, ve de fazladan hiçbir şey içermiyorsa, birinci ilke açısından onun estetik değeri vardır. İkinci ilkedeki "uygulanabilir" sözcüğü, nosyonun gerçek-dünya olgularını açıklamadaki, ya da betimlemedeki yararıyla ilgili değildir; daha çok, *N*nin matematiğin kendisiyle ilgili olmasına bir atıftır. Bu ilke, –ilk bakışta ne kadar güzel görünürse görünsün– nosyonun yalnızca bölgesel ilginçliği olan soyut bir önerme olmaması koşulunu getirir. Örneğin, daha önce gördüğümüz, 64'ü

16 ile bölme "yöntemi" olarak, gereken kesiri yazıp 6'ları götürmeyi bir dördüncü sınıf öğrencisine gösterirseniz, o bu sonuca

$$\frac{\cancel{6}4}{1\cancel{6}} = 4$$

büyük olasılıkla "harika" diyecektir. Ancak bunun hiçbir matematiksel değeri –estetik olsun olmasın– yoktur, çünkü yöntemin bu örnek dışında uygulanabilirliği yoktur. Bu yöntemi iki rakamlı herhangi iki sayının bölümü ile deneyin, yanlış yanıt alacağınızı görürsünüz.

Buna karşılık, matematikçi Paul Halmos'tan öğrendiğim aşağıdaki basit sayma probleminin çözümünü ele alalım. 8 takımla başlayan ve tek maçla eleme kuralı uygulanan bir basketbol turnuvası düşünün. Kazanan takımın ortaya çıkması için gereken maç sayısını saptamada bir güçlük yoktur. İlk devrede dört maç, ikinci devrede iki maç ve turnuvanın "final"inde bir maç. Böylece toplam 4 + 2 + 1 = 7 maç yapılacaktır. Ancak, bu yöntem herhangi bir takım sayısı için genelleştirilemez. Öyleyse, bu kabaca sayma yöntemi maksimum uygulanabilirlik ilkesini sağlayamamaktadır. Turnuvanın 1729 takımla başladığını varsayalım. Bu durumda kura çekilir ve tek olan takım birinci devrede tur atlar. Kazanan takımlar devam ederler ve bu süreç bir takım dışında bütün takımlar bir maç kaybedinceye kadar sürer. Sona kalan takım turnuvayı kazanır. Şimdi, kaç maç yapılmıştır?

Halmos'un çözüm yöntemi şudur: Her maçın tam olarak bir kaybedeni olacağını ve turnuva şampiyonu dışındaki her takımın tek bir maç kaybedeceğini göz önünde tutalım. Böylece, kaybeden takım sayısına eşit sayıda maç yapılacaktır. Eğer 1729 takımla başlamışsak 1728 tane kaybeden takım olacaktır. Öyleyse de 1728 maç oynanacaktır.

Halmos bu "salt düşünme" çözüm yöntemine "şirin" diyor. Alçakgönüllülük yapıyorsunuz Bay Halmos. Bu zarif bir çözüm.

Halmos'un bu basit sayma probleminin çözümüne biraz daha yakından bakalım. Çözüm neden zarif? Bir kere, çözüm kendi içinde tam olarak yeterlidir. "Tek maçla elemeli" deyiminin basit anlamından ve, herkesçe bilinen, bir basket maçının berabere bitemeyeceği kuralından başka bir ön bilgi ya da konu dışı bir şey gerektirmiyor. Probleme farklı ve daha yalın bir çözüm düşünmek olanaksızdır. Aslında Halmos'un çözümü beş sözcükle yazılabilir: Maçların sayısı kaybedenlerin sayısına eşittir. Bu nedenle de çözüm minimal tamamlık ilkesini sağlar; çünkü yalnız söylenmesi gerekeni söylüyor.

Ayrıca, çözüm bütün matematikte uygulanabilirliği olan bir kavram kullanıyor: Nesne kümeleri arasında bire bir tekabül kavramı. Problem bize 1729 takımın katıldığı, tek maçla elemeli bir basketbol turnuvasında oynanan maçların sayısını sormuştu. Problemi doğrudan düşündüğümüzde maçları sayma işi zor görünüyor. Çok sayıda takımla başladığımızdan ve her devre sonunda hangi takımın bir sonraki devrede oynamayacağını saptamak için kura çekileceğinden, maçların ne şekilde oynanacağını kestirmek biraz zor; maçları doğrudan saymak kolay değil. Buna karşılık, kaybeden takımları saymak çok basit. Bir şampiyon ve 1728 kaybeden takım olacak. Bizi Halmos'un "esinle gelen çözüm" dediği çözüme yönelten düşünce, kaybeden takım sayısı kadar maç yapılacağı, yani kaybeden takımlarla oynanan maçların birbirleriyle bire bir tekabül ettirilebileceğidir.

Bire bir tekabül kavramı şöyledir: Herhangi iki nesne kümesini ele alalım. Bunlara *A* ve *B* diyelim. *A* ve *B*'de olan nesneler herhangi bir türden –belirli bir odadaki insanlar, belirli bir bahçedeki ağaçlar, ya da Cartier'nin vitrinindeki altın saatler– olabilir. Bizim sayma probleminde *A*, maçlar kümesinden, *B* de kaybeden takımlar kümesinden oluşuyordu. Matematikte *A* ve *B*, genellikle, şu ya da bu türden sayı kümeleridir. Eğer *A*'daki her *a* elemanı için *B* kümesinde tek bir b elemanı varsa ve, buna karşılık, *B*'deki her *b* için *A*'da tek bir *a* elemanı varsa, *A* ve *B* arasında bire bir tekabül olduğunu söyleriz. Başka bir deyişle, eğer *A* ve *B* kümelerinin elemanları, *A*'nın ve *B*'nin her elemanını kullanmak ve bunları yalnız bir kez kullanmak koşuluyla eşlendirilebiliyorlarsa, *A* ve *B* arasında bire bir tekabül vardır.

Bir kümedeki elemanları *saydığınız* zaman yaptığınız şey, onları doğal sayılar olan 1, 2, 3, ..., *n*'in bir altkümesiyle bire bir tekabül ettirmektir. Bahçenizde üç çam ağacı olduğunu söylemek, bu ağaçları içeren kümenin 1, 2, 3 sayılarıyla bire bir tekabül ettirilebildiğini söylemek demektir. Bu tekabülü birçok yolla yapabilirsiniz. Bir yolu, elinize bir fırça ve boya alıp dışarı çıkmak, 1 sayısını bir çam ağacının gövdesine, 2 sayısını bir başkasına, 3 sayısını da son ağaca boya ile yazmak olabilir. Bir başka yol –genellikle yapılan– da pencerede durup ağaçlara parmağınızla işaret etmek ve parmağınız bakış doğrultusuyla yön değiştirirken 1, 2, 3, ... diye saymaktır.

Bire bir tekabül yöntemini, Paul Halmos'tan esinlenerek, ilginç olmayan, sıradan bir basketbol turnuvasında oynanan maçların sayısını bulma problemini çözmek için kullandık. Ancak problem sıradan da olsa, yöntem sıradan değildir. Bire bir tekabül gerçekte bütün matematiğin içine girip yayılmıştır; cebir, analiz, topoloji ve konunun bütün dallarında uygulanabilirliği vardır. Bire bir tekabül kavramının sonsuz kümelere uygulanması George Cantor'un (1845-1918) parlak fikriydi ve bu, matematikçilere ilk kez sonsuzluğun *büyüklüğü* kavramı ile yüzleşme olanağı sağladı.

Cantor'un çalışması gerçekten devrimsel nitelikteydi. Bu çalışma, sonunda ona –bu yüzyılın en büyük matematikçisi ödülü için tek aday olan– David Hilbert'in "Hiç kimse bizi Cantor'un bizim için yarattığı cennetten kovamayacaktır."[46] demesine neden olan, matematiksel ölümsüzlüğü getirdi.

Çoğu entelektüel devrimciler gibi, Cantor bir aziz mertebesine çıkarılmadan önce haksız yere hayli hırpalandı. Örneğin Leopold Kronecker (1823-1891) Cantor'un çalışmasını "şarlatanlık" olarak niteledi ve yayımlanmasını engellemeye çalıştı. Bizim Jules Henri Poincaré'miz de "Gelecek kuşaklar Cantor'un kümeler teorisini insanın atlatmış olduğu bir hastalık olarak görecektir."[47] demiştir.

Cantor'un bu ve benzeri saldırılara karşı tepkisi ise, arka arkaya bunalımlara düşmek oldu.

Ancak çalışması bütün bu engelleri aştı; ondan sonra da matematik bir daha eski haline dönmedi. Zeno'dan beri kümeler hakkında felsefecileri rahatsız eden bütün –ya da hemen hemen bütün– umacılar bir daha geri dönmemecesine yok oldular, dağıldılar. Çünkü Cantor bize sonsuz kümeleri, cahil bir adamın iki deri torba içindeki renkli boncuklar için yaptığı gibi ele almamız gerektiğini gösterdi: Adam hangi torbada daha çok boncuk olduğunu bilmek istiyor, içinde beyaz boncuklar olan soldaki torbada mı, yoksa içinde kırmızı boncuklar olan sağdaki torbada mı? Bu adam tam cahildir. Okuma yazma bilmediği gibi saymayı da bilmiyor. Ama yine de daha çok boncuk problemi onun için hiç de zor değil.

Adam aynı anda her iki torbadan da birer boncuk alıp yan yana yere koyuyor. Bu işlemi torbalardan biri boşalıncaya kadar sürdürüyor. Önce beyaz boncuklar biterse kırmızı boncukların daha çok olduğu sonucuna varıyor, eğer kırmızı boncuk torbası daha önce boşalırsa beyaz boncukların daha çok olduğunu anlıyor. Torbalar aynı anda boşalırsa her iki torbada da aynı sayıda boncuk olduğu sonucuna varıyor. Çünkü bu problemde boncukları ikişer ikişer çekerek –her torbadan bir tane– yaptığı şey, beyaz boncuklar kümesi ile kırmızı boncuklar kümesi arasında bire bir bir tekabül kurmaktır. İşte, bu kadar kolay...

Cantor aynı şeyi sonsuz kümelerle yaptı. Sonsuz sayıda pozitif tamsayı vardır: 1, 2, 3, ...; sonsuz sayıda da çift tamsayı vardır: 2, 4, 6, ... Pozitif tamsayılar kadar çift tamsayı olduğunu düşünmek abes, çünkü tamsayılar çift tamsayıları *içerir*. Cantor "Hayır," dedi, "pozitif tamsayılara *tam olarak* eşit sayıda çift tamsayı vardır." Bunu görmek için yapılacak şey bu iki kümedeki sayıları, bizim cahil adamın kırmızı ve beyaz boncuklar için yaptığı gibi, eşlemektir. Örneğin, 1 ile 2'yi, 2 ile 4'ü, 3 ile 6'yı, ..., (genel olarak n ile $2n$'i) eşleyebilirsiniz. Bu eşleme pozitif tamsayılar kümesi ile çift sayılar kümesi arasında bire bir bir tekabül oluşturur. Bu nedenle, bu iki sonsuz küme aynı büyüklüktedir.

Bu süreç, tamsayılarla reel sayılar kümesi için denendiğinde başarısız olur. Cantor'un yaptığı gibi, böyle bir denemenin tamsayıların tükenmesine yol açacağı ve geride eşlenmemiş reel sayılar bırakacağı ispatlanabilir. Demek ki reel sayıların sonsuzluk sayısı, tamsayıların sonsuzluk sayısından daha büyüktür. Gerçekte Cantor'un basit ispatı, 0 ile 1 arasındaki reel sayıların, bütün doğal sayılar kümesinin elemanlarından daha çok reel sayının olduğunu gösterir. İlginç, şaşırtıcı, önemli ve geniş çapta uygulanabilir bir ispat...

Görülüyor ki, Halmos'un turnuva maçlarını sayma problemi, matematikte geniş ölçüde uygulanabilirliği olan bir yöntem kullanmaktadır. Gerçekten de öylesine geniş ki, çözümün maksimal uygulanabilirlik ilkesini sağladığını hemen söyleyebilirim. Daha önce açıkladığım gibi, çözüm minimal tamlık ilkesini sağlamaktadır. Öyleyse çözümün "zarif" olduğunu beyan edebilirim.

Sayma probleminin bir yönünden daha söz etmeden geçemeyeceğim. Büyük Hint matematikçisi Ramanucan İngiltere'ye 1914'te geldi. *Royal Society*'ye *Bilim Kurulu Üyesi* seçildiğinde sadece otuz yaşındaydı. Bir yıl sonra Trinity College'a da Bilim Kurulu Üyesi seçilerek bu unvanlardan herhangi birini kazanan ilk Hintli oldu. Ancak kısa süre sonra hastalandı. Meslektaşı ve arkadaşı olan G. H. Hardy onu sık sık görmeye gelirdi. Hardy'nin *Apology* (Savunma) kitabının önsözünde C. P. Snow aşağıdaki olayı anlatır:[48]

> Putney'deki bir hastanede ölüm döşeğinde yatarken Hardy onun ziyaretine giderdi. Taksi plakası ile ilgili olay bu ziyaretlerin birinde yer alır. Hardy o gün de her zamanki ulaşım aracı olan taksi ile gitmişti. Ramanucan'ın yattığı odaya girdi. Hardy konuşma başlatmakta her zamanki beceriksizliği ile, muhtemelen daha selamlaşmadan ve mutlaka ilk söz olarak "Geldiğim taksinin numarası 1729'du. Bana çok alelade bir sayı gibi geldi." dedi. Ramanucan'ın buna yanıtı şu oldu: "Hayır Hardy! Hayır Hardy! Çok ilginç bir sayı. İki küpün toplamı olarak iki ayrı şekilde ifade edilebilen en küçük sayı."

Evet. 1729'u iki küpün toplamı olarak ifade etmenin bir yolu:

$$1729 = (12)^3 + (1)^3.$$

Öteki yolu da

$$1729 = (10)^3 + (9)^3.$$

Ramanucan 1729'un bu tür iki ifade şekli olan en küçük sayı olduğunu söylüyor.

Eukleides'in asal sayıların sonsuzluğu ispatının (s. 62-63) hem minimal ilkeyi hem de maksimal ilkeyi sağladığı ortadadır (Asal sayılar gerçekte matematiği istila etmiştir ve matematik-dünyasının bu sayıların ya da genellemelerinin uygulanabilir olmadığı hiçbir bölümü yoktur. Minimalliğe gelince, ispat temelde tek bir tümceye indirgenebilir: "Eğer p_1, p_2, ..., p_n *bütün* asal sayılar ise, o zaman onlardan birinin p_1, p_2, p_3, ..., p_n+1 sayısını bölmek gibi olanaksız bir işlevi olmalıdır.").

Aynı şekilde, $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunun Pythagorasçı ispatı da (s. 106-107) her iki ilkeyi sağlar (İspat tümüyle kendi içinde yeterlidir ve en çok 10 satıra indirgenebilir. Öyleyse minimallik ilkesi geçerlidir. Maksimallik kriterinin sağlandığı ise, ispat yönteminin, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$,...'nin de irrasyonel olduğunu ortaya koymak için uygulanabileceğini görmekle anlaşılır).

Hardy bu iki teoremi "cevher" olarak nitelemekte haklıydı. Her iki ilke de geçerli olduğundan, ben de onlara "zarif" diyeceğim.

Buna karşılık, ünlü "Asal Sayılar Teoremi" (s. 61-63) ilkelerden birini sağlayıp diğerini sağlamaz. Bu teoremin verilen bir pozitif tamsayıdan küçük olan asal sayıların adedinin, n sonsuza yaklaşırken, hangi hızla sonsuza yaklaştığını söylediğini anımsayın. Teorem ve ispatı matematiğin birçok alanında önemlidirler. 1896'daki ispatında anahtar öğe Riemann'ın Zeta Fonksiyonu (s. 61) olarak bilinen bir kompleks fonksiyonunun özelliklerini içerir. Bu fonksiyon günümüzde, Asal Sayılar Teoremi'nin ispatında görevini yerine getirdikten neredeyse bir yüzyıl sonra bile tamamen anlaşılmış değildir. Zeta Fonksiyonu'nun "sıfırları"nın konumu, yani bu fonksiyonun sıfır değerini aldığı belirli kompleks sayılar, hâlâ bilinmemektedir. "Önemsiz olmayan" bütün sıfırlarının kompleks düzlemdeki belirli bir dik doğru üzerinde yaşadıklarına inanılmaktadır. Bu varsayımın kesin ifadesine Riemann Hipotezi denir ve matematiğin tümü içinde çözülmemiş en önemli problem konumundadır. Herhangi bir matematikçi benim Asal Sayılar Teoremi'nin maksimal ilkeyi sağladığı tezimi destekleyecektir.

Öte yandan, teorem minimal tamlık ilkesini *sağlamamaktadır*. Standart ispat, kompleks analiz teorisinden derin bazı sonuçları gerektirir ve sayfalarca basılı metin doldurur. Onu kendi içinde yeterli yapmak için de, bu metni tam bir kitap olacak kadar genişletmeniz gerekir. Bu teoremin ispatında minimal olan bir şey göremiyorum.

Bu nedenle –"önemli", "derin", "temel" ve "ilginç" sıfatlarına uygunluğunu kabul etmekle beraber– Asal Sayılar Teoremi'ne "zarif" diyemeyeceğim. Çünkü bu teorem minimallik ilkesini sağlamıyor.

Bunun tersi olan durum için, yani minimallik ilkesini sağlayıp maksimallik ilkesini sağlamayan durum için örnek bulmak zor değildir. Şu ifadeyi ele alalım: "Herhangi bir pozitif tamsayı ile o sayının tersinin toplamı en az 2'dir." Bu, aşağıdaki kesin temel ifadeye dönüşür:

Teorem:

Eğer $x > 0$ ise $x + (1/x) \geq 2$.

İspat da şöyledir:

$$(x - 1)^2 \geq 0.$$

Öyleyse

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

ve

$$x^2 + 1 \geq 2x,$$

ve buradan

$$x + (1/x) \geq 2.$$

İspat bundan daha kısa olamazdı. Ayrıca, kendi içinde yeterlidir, çünkü herhangi bir reel sayının karesinin negatif olamayacağı ve bir eşitsizliğin "yönü"nün iki tarafa eşit sayılar ilave etmekle ve pozitif sayılarla bölmekle değişmeyeceği dışında bir şey gerekmemektedir. Öyleyse minimal tamlık ilkesi geçerlidir.

Ancak maksimal uygulanabilirlik ilkesinin geçerli olmadığı kesindir. Sonucun kendisi çok özeldir, ispat da bir "el çabukluğu" ile başlamaktadır. İlk eşitsizliği, bir sihirbazın şapkadan tavşan çıkarması gibi, havadan çıkardım. Düzgün bir ispat, ama zarif denemez sanırım.

Buraya kadar ele aldığımız örnekler hep teoremlerdi. Ancak, gördüğümüz gibi, minimallik ve maksimallik ilkelerindeki N herhangi türden bir matematiksel nesne olabilir. Daha önce (s. 64-65) $e^{i\pi} + 1 = 0$ eşitliğini minimal tamlık ilkesi bakımından inceledik ve ilkenin geçerli olduğunu gördük. Kompleks analiz kitaplarına şöyle bir göz atmak (denklemle verilen bağlantının yaygın uygulamasını görmek için) maksimallik ilkesinin de sağlandığını ortaya koyar.

Herhangi bir eşitliğin –eğer gerçekten doğruysa– bir teorem olarak ifade edilebileceğinin farkındayım. Ancak $e^{i\pi} + 1 = 0$ eşitliğinde zarif olan *eşitlik*tir, teorem değil (Buna tekabül eden teorem, –ifade edildiğinde– oldukça güzel olan, ancak 0'ı içermediği için tamam olmayan $e^{i\pi} = -1$ ifadesine özdeş olur).

Matematiksel fizikte de zarafet bulunabilir. Bunun açık bir örneği Newton'un ünlü Yerçekimi Yasası'dır. Bu yasa (genellikle "ters kare yasası" olarak anılır), kütleleri sırasıyla M_1 ve M_2 olan, evrendeki herhangi iki cisim arasındaki çekim kuvvetinin

$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2}.$$

ile verildiğini söyler. Burada *r* iki cisim arasındaki uzaklığı gösterir, G de bir sabittir (yerçekimi sabiti).

Bu örnekte iki ilkemizin de geçerli olduğu açıkça görülmektedir ve çok iyi bilinir. *Herhangi* iki cisim arasındaki çekim kuvveti için daha minimal bir ifade pek düşünülemez. Fizik ders kitapları bu yasanın uygulamaları ile doludur (onlardan biri de bu yasanın çıkarımı olan ve Kepler tarafından sadece ileri sürülen, gezegen hareketlerinin eliptik yasasıdır).

Son bir örnek de, salt düşünce ile bulabileceğimiz bir gerçek-dünya sonucudur. Dünyada yapraklarının sayısı aynı olan en az iki ağaç olduğunu –odamızdan hiç dışarı çıkmadan– ispat edelim. Ve bu işi de sonuç zarif olacak şekilde yapalım.

Anımsayacağınız gibi bir teorem, doğruluğu ispat edilmiş olan "p gerektirir q" şeklinde bir önermedir. Teoremimizi böyle bir önerme olarak ifade edip sonra da önermenin geçerli olduğunun bir ispatını vermeliyiz. Böylece bir p hipotezi ve bir q sonucu saptayıp onları uygun bir matematiksel biçimde *yazmalıyız*. Hipotez bizim *varsaydığımız*, sonuç da bizim *çıkardığımız* şeydir. Hipotezin olabildiğince minimal olmasını istiyorum. "Ağaçlar" ve "yapraklar"dan kastettiğimiz her ne ise, dünyada, herhangi tek bir ağacın üstündeki yaprak sayısından fazla –belki çok daha fazla– ağaç olduğu da aşikârmış gibi görünüyor. Gerçekte ağaç yoğunluğu çok olan Batı Pennsylvania'daki ağaç sayısının, bütün dünyada herhangi bir ağaçtaki yaprakların sayısından daha çok olduğunu tahmin ederim. Demek ki hipotez olarak ağaç sayısının herhangi bir ağaçtaki yaprak sayısından bir pozitif sayı kadar fazla olduğunu varsayacağız. Bu fazlalığın 1 (bir) olduğunu varsaymak yeterlidir. O zaman teoremimiz şöyle olur:

Teorem: Dünyadaki ağaç sayısına t, herhangi bir ağaçtaki en çok yaprak sayısına da m diyelim. Eğer t, $m + 1$'den büyükse, yaprak sayısı aynı olan en az iki ağaç vardır.

İspat: Herhangi bir ağaçtaki en çok yaprak sayısı m olduğuna göre, her ağacın 0, 1, 2, 3, ... veya m yaprağı olacaktır. Yerde sıralanmış $m + 1$ kutu olduğunu ve bunların sırayla 0, 1, 2, 3, ..., m sayılarıyla etiketlenmiş olduğunu düşünün. Şimdi de dünyadaki ağaçları (uygun biçimde küçültülmüş boyutlarla) sırayla odaya aldığınızı düşünün. Her ağacı, onun yaprak sayısıyla etiketlenmiş kutuya koyun (yapraksız bir ağaç 0 etiketli kutuya, 1 yapraklı ağaç 1 etiketli kutuya, 2 yapraklı bir ağaç 2 etiketli kutuya, vb.).

Yalnızca $m + 1$ kutumuz var ve hipotezden dolayı bundan çok sayıda ağaç var. Öyleyse, dünyadaki bütün ağaçlar odaya getirildiğinde, kutulardan birinde en az iki ağaç olacaktır. Öyleyse, en az iki ağacın aynı sayıda yaprağı vardır (eğer 1729 numaralı kutuda, örneğin, iki ağaç varsa bu iki ağacın yaprak sayısı tam olarak 1729'dur).

Q.E.D.

İspatın iki estetik ilkeyi de sağladığını görmek için, ispattaki temel fikrin matematikte Güvercin Evi İlkesi olarak bilinen ilke olduğuna dikkat edelim. Sezgisel olarak aşikâr olan bu ilke, eğer yuva deliklerinden daha çok güvercininiz varsa, o zaman deliklerin birinde en az iki güvercininiz olduğunu söyler. Bu ilkenin matematiğin "kombinasyonlar" dalında geniş kullanımı ve büyük önemi vardır; gerçekle matematiğin zor ve sonlu sayıda sayma problemlerinin var olduğu bütün diğer dallarında da. Bu nedenle ispatın maksimal uygulanabilirlik ilkesini sağladığını iddia etmeye hakkımız vardır.

Ayrıca, parantez içindeki fazladan açıklamalar kaldırıldığında, ispat minimallik ilkesine de (bir matematikçi bu ispatı bir satırla yazabilir: "Teorem, Güvercin Evi İlkesi'nin bir sonucudur.") uygun olur. Böylece hem maksimallik hem de minimallik ilkeleri geçerlidir. Bu nedenle de sonuç "zarif"tir (Ayrıca şaşırtıcıdır da). Ağaçlar ve yapraklar hakkında, odadan hiç çıkmadan bir sonuç ispatlamış görünüyorsunuz. Gerçekte, teoremi ispatlamak için ağaçlar ve yapraklar hakkında $t > m + 1$'den başka bir şey bilmemize gerek yok. Hiçbir gözlem gerekmiyor, gereken yalnızca salt düşünce.

Estetik Uzaklık

Her yaratıcı matematikçi matematiğin *estetik deneyimi*ni sezgisel olarak bilir. Bu deneyim normaldir, açıklaması ise pek az yapılır. Ancak, yardımına başvurabileceğimiz yayımlanmış estetik araştırmaları vardır. Özellikle bir makale, matematikçi olmayanların matematiği değerlendirmeleri açısından ayrılabilecekleri kategorileri tartışmamıza olanak veren iyi bir metaforik araç sağlamaktadır.

Bu bakımdan açıkça belirlenmiş iki grup vardır: Bir yanda beşeri bilimciler, öteki yanda da fen bilimciler ve mühendisler (Bu grupları daha sonraki bir bölümde, matematiğe karşı olan farklı tavırlarıyla birlikte, daha ayrıntılı olarak inceleyeceğiz). Örneğin, eğer rasgele seçtiğimiz bir İngiliz edebiyatı profesörü ile bir endüstri mühendisliği profesörüne bakarsanız, ortak yanlarının matematiği, hiçbir zaman onu iş edinmiş bir kimse gibi değerlendirmemeleri olduğunu görürsünüz. Yine, her birinin matematiği diğerinden çok farklı algıladığını da görürsünüz. Endüstri mühendisi hiçbir bakımdan bir matematikçi olarak düşünülemez. Ancak, işini yürütürken matematiği –aşağı yukarı ilkokulda öğretilen düzeyde– her gün kullanır. Bir mühendis için matematik, çalışmasını onsuz yürütemeyeceği bir aleti temsil eder. Ancak temsil ettiği şey bir alettir ve konunun kendisi, bir tornavidanın bir marangoza sağladığından daha çok kolaylık sağlamaz. Bir anlamda, mühendis matematiğin çok yakınındadır ve onu üzerinde çalışılacak veriler, çizilecek grafikler ve okunacak bilgisayar çıktıları gibi bir şey olarak görür. Mühendis için matematik bitirilmemiş işleri temsil eder. Bunu sıcaklık kavramıyla ifade edecek olursak, matematik, ona estetik bir haz vermeyecek kadar *yakıcı* bir şeydir.

Beşeri bilimci ise matematiği hiç düşünmez. Hepimiz gibi o da bir zamanlar biraz zorunlu matematik eğitim almıştı. Ancak bizim İngilizce profesörü fırsat bulur bulmaz matematik ile arasına bir mesafe koymuştu. Kendisi bir İngilizce profesörüdür. Çünkü içinde dil ve edebiyata karşı, matematikte her gün karşılaştığı alıştırmaların ve sıkıcı çalışmaların tam tersi olan güzellik duygusuna karşı bir yakınlık duymaktadır. Alması zorunlu dersler bitip de okuyacağı kitapları ve çalışacağı konuları seçme olanağına kavuşunca, onları matematikten olabildiğince uzak alanlardan seçmiştir. Beşeri bilimci, kendi seçimiyle, matematikten olabildiğince uzak durur ve de akıntıya akıntıya karşı kürek çeker.

1912'de Cambridge'den Edward Bullough[49] *British Journal of Psychology*'de (İngiliz Psikoloji Dergisi) "Psychical Distance as a Factor in Art and an Aesthetic Principle" (Sanatta Bir Etken Olarak Psişik Uzaklık ve Bir Estetik İlkesi) başlıklı uzun bir makale yayımladı. Bu makalede, benim İngilizce profesörü ile endüstri mühendisinin matematiğin estetiğine karşı tavırları konusunda dile getirdiğim uzaklık kavramını oldukça doyurucu bir şekilde açıklıyor: Mühendis çok yakınında olduğu için konuyu gereğince değerlendiremiyor; İngilizce profesörü de değerlendiremiyor, çünkü o da çok uzağında durmaktadır. Bullough –örnekler vererek ve deliller göstererek– bu kavramı bir yandan, insanın bir sanat eseri karşısında duyduğu hazzın varlığını veya yokluğunu açıklayan bir metafor olarak, bir yandan da bu sonucun ortaya çıkacağını gören ve onu açıklayan ciddi bir ilke olarak ele alıyor ve üzerinde uğraşıyor.

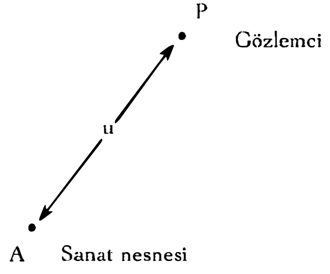
Açıkça görünen odur ki başarılı da olmuştur. Örneğin Donald Sherburne şunları söylüyor: "Edward Bullough'un psişik uzaklık teorisi bütün estetik düşüncede dikkate alınması gereken bir klasik estetik tezi durumuna gelmiştir."[50] James L. Jarret da Bullough'un fikirleriyle ilgili olarak "Çağdaş estetiğe psişik uzaklıktan daha etkili bir tez getirilmemiştir."[51] diye yazıyor.

Bullough'un teorisinin dikkate alınması gerektiğine ben de katılıyorum. Ancak ben onu daha çok bir metafor olarak, estetik deneyim kavramını açıklayan bir "teori"den çok insanın sanata karşı tepkisini sınıflandırmaya yarayan bir araç olarak görüyorum. Ancak yine de belirgin bir değeri var - özellikle matematik konusunda ve ona ilişkin haz ve güzellik duygularının var veya yok olması açısından. Özellikle de bu kavram, daha sonra bize, C. P. Snow'un sözünü ettiği "iki kültür" mensuplarının matematiğe karşı olan farklı tutumlarını sistematik bir şekilde açıklamamıza olanak sağlayacaktır.

Şimdi Bullough'un düşüncelerini, kendi yorumlarıma göre, kısaca açıklamaya çalışacağım. Ancak onun terminolojisini değiştirmeyi, diskler ve halkalar gibi bazı geometrik kavramları da kullanmayı yeğleyeceğim. Ve burada söylediklerimin Bullough'un düşüncelerinin benim versiyonum olduğunu vurgulamak için de "psişik uzaklık" yerine *estetik uzaklık* deyimini kullanacağım. Bu başkalarınca da kullanılmış bir terimdir, ancak tam olarak benim kullandığım anlamda değil.

Bir sanat nesnesini ve bir gözlemciyi ele alarak başlayalım. Bu nesne bir resim, bir heykel olabilir, ya da o kadar yoğun olmayan bir şey, örneğin bir epik şiir, bir sahne oyunu, bir bale olabilir. Nesnenin yalnızca gözlemcinin duyu alanına getirilmiş, kavranabilir bir şey olması ve gözlemci tarafından, bilinçli olarak ya da bilinçdışı bir yolla, estetik bağlamda ele alınan bir şey olması yeterlidir. Bu nesne, gözlemcinin bir radyo yayınında dinlediği bir keman konçertosu, ya da helikopterden gözlediği bir mimari yapıt da olabilir. Gözlemci bu nesneyle birçok değişik yollarla karşı karşıya getirilebilir. Görmüş olduğumuz gibi, nesne matematiksel bir ide de olabilir. Bu durumda gözlemci de sınıftaki bir öğrenci olabilir.

Sanat nesnesini ve onu gözlemleyen kişiyi Şekil 11'de yapıldığı gibi, bir düzlem üzerindeki iki nokta ile göstermek bize kolaylık sağlayacaktır. Burada nesne *A* harfiyle, gözlemci de *P* harfiyle temsil edilmiştir. Şekil 11'e baktığınızda *A* ve *P*'nin görece konumlarının yalnız metaforik bir anlamda be-

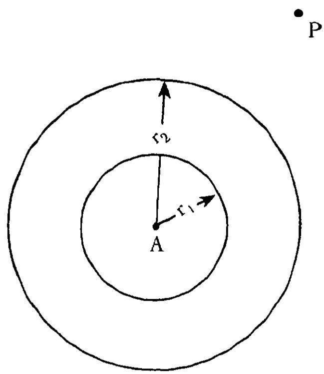


Şekil 11. Estetik uzaklık.

lirlendiğini düşünmelisiniz. Yani, şekildeki iki nokta arasında cetvelle bulunan uzaklığın, gözlemci ve nesne arasındaki gerçek dünya uzaklığı ile hiçbir bağlantısı yoktur. Demek ki Şekil 11, Floransa'daki Accademia'nın salonunda Michelangelo'nun Davut Heykeli'nin önünde duran bir kişinin gerçek dünya konumunu temsil etmemektedir. Çünkü böyle bir durumun şemasında Şekil 11'de ölçülen uzaklık, kişi ile büyük mermer heykelin tabanı arasında metre cinsinden ölçülen gerçek uzaklığı –bir ölçeğe göre– gösterirdi. Onun yerine, burada anlatılmak istenen, Bullough'un "uzaklığın genel bir çağrışımı" olarak betimlediği şeye benzer bir şeydir. Bu genel çağrışıma Bullough "psişik uzaklık" diyor. Kendi versiyonumda, Bullough'un terimine ben "estetik uzaklık" diyorum. ("Psişik" sözcüğü artık Bullough'un döneminde sahip olduğu felsefi çağrışıma sahip değildir. "Estetik uzaklık" terimini, psikolojik değil felsefi şeylerle ilgili olduğunu vurguladığımı anımsatmak için kullanıyorum).

"Estetik deneyim" kavramının varlığını ve –kesin olarak tanımlayamasak da– bu deneyimi duyumsadığımız zaman, onu hemen tanıyabildiğimizi kabul edelim. Böylece, –belirli bir sanat nesnesi karşısında– bu estetik deneyimi fark ediyoruz ve şu ya da bu şekilde bu deneyim bize haz veriyor. Ayrıca, analizi, onu kontrol edebileceğimiz şekilde basitleştirmek için "estetik hazzın derecesi" kavramını yok sayacak, "estetik deneyim"i de belirli bir sanat eserinin belirli bir gözlemciye verip vermediği bir şey olarak ele alacağız. Bu varsayımların aşırı basitleştirici olduğu açıktır, ancak Bullough'un çok kapsamlı olan temel savını anlamak için bunu yapmamız gereklidir.

Bununla, belirli bir gözlemcinin belirli bir sanat eseri karşısında *bir estetik deneyim* edindiğini, ya da edinmediğini söylemiş oluyoruz. Şekil 11'deki *P* ile *A* arasındaki doğrusal uzaklık, artık eser ile gözlemci arasındaki "estetik uzaklık" olarak düşünülmelidir. Bullough'un savına göre, gözlemci nesneden, ancak ve ancak bu uzaklık belirli sınırlar içinde olduğu zaman, bir estetik deneyim elde edebilir.



Şekil 12. Estetik halka.

Bullough'un savı Şekil 12'de gösterilmiştir. Şekilde, her ikisinin de merkezi *A* olan iki çember çizilmiştir. Bu çemberlerin yarıçapları estetik uzaklık kavramı cinsinden yorumlanacaktır: r_2 yarıçaplı büyük çemberin içinde olan r_1 yarıçaplı küçük çemberin dışında kalan taranmış alana A nesnesinin saptadığı *estetik halka* diyeceğiz. Bullough'un sınıflandırmasına göre bir gözlemci ancak ve ancak –estetik uzaklık bakımından– estetik halka içinde ise, bir estetik deneyime katılır. Şekil 12'nin çizilmiş olduğu haliyle, gözlemcimiz, *P*, halka dışında durmaktadır, bu nedenle de *A* nesnesinden hiçbir estetik haz alamaz. Bullough, gözlemcinin nesneden "psişik olarak fazla uzakta" olduğunu söylerdi. Eğer gözlemci *P*, r_1 yarıçaplı çemberin içinde kalacak şekilde nesneye doğru yaklaşırsa –yine estetik uzaklık bakımından– Bullough onun "psişik açıdan çok yakın" olduğunu söylerdi (Benim bunlara karşılık olan deyimlerim sırasıyla "estetik bakımdan fazla uzak" ve "estetik bakımdan fazla yakın"dır). Nesnenin gözlemciye estetik haz vermesi için gözlemcinin ondan uzaklığının en az r_1 kadar, en çok da r_2 kadar olması gerekir; yani, yalnızca estetik halkanın içinde olması gerekir.

Nesneden fazla uzak olmak kadar, ona fazla yakın olmak da estetik başarısızlığa yol açar. Ancak, bu *başarısızlıklar farklı türdendirler.* Bullough'a göre bir sanat eserine çok yakın olan bir kişi, onun değerini tam olarak algılamak için, fazla öznel (sübjektif) olacaktır. Eğer gözlemci fazla uzaktaysa nesneyi sönük ve kapalı bulacak, onu sanat olarak değerlendiremeyecektir. Anlamaya yardımcı olacak basit bir örnek olarak Bullough "Herkesin bildiği bir sahne oyunu sırasında zavallı kadın kahramanı yiğitçe korumak için sahneye koşan saf köylünün, ancak oyuncuların sadece rol yaptıklarına inandırıldıktan sonra yerine oturtulabildiğini," anlatır.[52]

Saf köylü, deneyimsizlik ve eğitim eksikliği nedeniyle sahnedeki olayları gerçeğinden ayırt edemez ve genç kadını –gerekirse güç de kullanarak– acısından kurtarmak için sahneye fırlamıştır. Saf köylünün amacı soylu olabildiği halde kendisi –Bullough'un sözleriyle– "İdeal tiyatro seyircisi tipi değildir." Estetik bakımdan da, oyundan haz duyamayacak kadar oyuna yakındır.

Bullough'un verdiği ve kendisinden sık sık alıntı yapılan ikinci bir örnek yine tiyatro ile ilgilidir. Bullough bu örneği iki amaçla verir: Aşırı yakınlık kavramını açıklamak, ve bir sanat eseri için hazırlanmış ve eğitimli olmanın her zaman daha fazla estetik hazza yol açmayacağını göstermek için. Bullough hazırlık yapmanın estetik haz *şansını* artıracağını, ancak bunun temelinde yatan ilkenin –*uyum ilkesi*– belirlenmesi gerektiğini söyler:[53]

> Karısını kıskanmak için nedenleri olan bir adamın bir "Othello" oyununu izlediğini varsayalım. Othello'nun duyguları ve deneyimleri kendisininkilere ne ölçüde yakınsa, Othello'nun durumunu, davranışını ve karakterini o ölçüde isabetle değerlendirecektir - en azından, yukarıdaki uyum ilkelerine göre, öyle olması gerekir. Bu durumda, sonunda oyunu beğenecektir. Gerçekte, aradaki uyum kendi kıskançlık duygularının açıkça ortaya çıkmasına neden olacak, görüş açısındaki ani bir değişim ile, Othello'yu Desdemona'nın ihanetine uğramış olarak değil, kendisini, karısıyla aynı durumda görecektir. Bakış açısındaki bu tersine dönüş uzaklığın yok olmasının bir sonucudur.

Othello parmaklarını Desdemona'nın boynuna geçirirken "Sonun geldi fahişe!" diye bağırır. Bunun üzerine saf köylü yerinden fırlar, sahneye atılır ve Venedikli Mağrip rolünü yapan şaşkın oyuncuyu yerlere sererek Desdemona'yı kurtarır.

Bizim öteki seyircimiz, kuşku içindeki koca, daha az dramatik bir biçimde de olsa acı çekmektedir. "Yine de ölmeli, yoksa ihanetini sürdürür" sözlerini duyunca kıpırdamadan yerinde oturur. Ancak yumruklarını sıkar, acı gözyaşlarını tutmaya çalışır ve kendisini aldatılmış onca kocadan biri olarak görür.

Ne bu koca ne de saf köylü oyunun müziğini duymuştur. Duydukları yalnızca eyleme çağrıdır. Her ikisi de ateşe çok yakındırlar.

Ancak Bullough sanatın sıcağını seviyordu. Şöyle yazmış: "Hem değerlendirmede hem yaratmada en arzu edilir şey *uzaklığın, yok edilmeden, en aza indirilmesidir.*"[54]

Başka bir deyişle, estetik uzaklık bakımından, estetik halkanın iç sınırını aşmadan, sanat eserine olabildiğince yaklaşmak gerekir. Ancak Bullough aynı zamanda bu "yakın olma, ancak fazla yakın olmama" durumunun çok hassas bir konu olduğunu ve duyarlı bir değerlendirme ve eğitim, belki de bir tür sanatsal yetenek gerektirdiğini anlamıştı - en azından bunu dile getirdi:[55]

> Bu nedenle, teorik olarak, yalnızca olağandışı sanat eserleri değil, düşünceler, algılar, duygular gibi en kişisel etkilenimler, estetik olarak algılanabilecek kadar uzaklaştırılabilirler. Özellikle sanatçılar bu bakımdan dikkate değer ölçüde yeteneklidirler. Buna karşılık, sıradan bir kişi, bu azalan uzaklığın sınırına, kendi "uzaklık sınırı"na, yani uzaklığın yok olup algılamanın ya yittiği ya da karakterini değiştirdiği sınıra çabuk varır.
> Bu nedenle, uygulamada sıradan bir kişinin, estetik alanda, estetik algılamasını sürdüreceği bir alt sınır vardır ve bu sınır ortalama sanatçının uzaklık sınırından hayli geniştir.

Picasso –Bullough'un dediğine göre– çıplak modeline onun parfümünü duyacak kadar yaklaşabilirmiş. Ellerini onun çıplak omuzlarına koyar, gölge tam göğüsleri arasına düşecek şekilde onu döndürür, ama ne estetik uzaklık, ne de sanatsal bakış açısından bir şey kaybedermiş. Ancak dostumuz saf köylünün, kapının önünden geçerken stüdyoda olup bitenlerin bir an için gözüne ilişmesi durumunda, bütün camları kıracağı kesin.

Aynı şeyi, Ernest Hemingway'in 1932'de yazdığı sürükleyici kitabı *Death in the Afternoon*'da[56] (Öğleden Sonra Ölüm) yaptığı gibi, boğa güreşleri için de söyleyebilirsiniz. Eğer siz kendinizi gerçekten hayvanlarla özdeşleştiriyorsanız (Hemingway buna hayvancıllık diyor) boğa güreşi sizin için masum hayvanlara büyük acı çektiren zalimce bir işten başka bir şey değildir. Hemingway'e göre hayvancıllar yalnız bağırsakları dökülmüş, boynuzlanmış atları ve mızraklanıp kovalanan ve sonunda boynunu delip geçen bir kılıçla hoyratça öldürülen boğaları görürler. Arada sırada boğanın da şansı yaver gider, matadoru tepetaklak eder. O zaman hayvancıllar insancıl olurlar ve yerlerde sürüklenip ayağa kalkmaya çalışan, ufak bir otomobil büyüklüğündeki boğa tarafından boynuzlanıp parçalanmak üzere olan boğa güreşçisi için yumruklarını sıkarlar. Ama hayvancıllar çoğunlukla hayvanlar için, özellikle de atlar için üzülürler.

Bu üzüntüyü duyanlar, boğa güreşi estetik halkasının iç sınırının çok çok içindedirler. Gerçekte boğa güreşi için hiçbir estetik halkanın var olmadığını şiddetle savunacaklardır. Kaba boğa güreşi burunlarının dibindedir; onun, tiksinti ve ona ilişkin duygular dışında bir duyguya yol açabileceğini düşünemezler.

Ancak herkesin boğa güreşçisini hayvancılların gördüğü gibi görmediği de açık bir olgudur. Anglo-Saksonların algıladığı anlamda bir spor olmamakla beraber boğa güreşi İspanyol halkı için yıllar boyu eğlenceli bir gösteri oyunu olmuştur, tıpkı bizim sonbahar pazar öğleden sonralarındaki Ulusal Futbol Ligi maçları gibi. Boğa güreşlerini hiç kaçırmayan sürüyle İspanyolun –soyluların, dükkân sahiplerinin, portakal satıcılarının, saçlarında siyah taraklar olan şık hanımefendilerin– boğa güreşini hayvancıllar gibi görmedikleri açıktır. Bu seyircilerin çoğunluğu kumdaki kan ile aralarında yeterince uzaklık bırakmışlar, boğa güreşini attan, boğadan ve kanı akıtan adamdan –Bullough'un deyimiyle– "Ayrı tutmuşlardır." Onlar bu işe barbarlık dışı bir şey olarak; kuşkusuz bir eğlence, ancak aynı zamanda bir hüner olarak bakarlar.

Hemingway daha da ileri gidilebileceğini düşünüyor, insanın boğa güreşini bir *sanat* olarak görecek kadar kendini uzakta tutabileceğini öne sürüyor. Ona göre bu ve bu doğrultudaki başka tanım ve argümanlar *Death in the Afternoon* kitabının özünü oluşturmuştur.

Ben Hemingway'in "bir sanat olarak boğa güreşi" tezinin doğruluğu ya da yanlışlığı konusunda fikir beyan etmeyeceğim. Boğa güreşi görmedim, ancak, onlar hakkında ne hissetmem gerektiğini ve ne hissetmemin öğretildiğini biliyorum. Açık konuşmak gerekirse, öğretilmiş ve kabul edilmiş ahlaki duygular ile atların karınlarının deşilmesi ya da bir boğanın ölümü konusunda gerçekten ne hissedeceğimi, ya da hissetmeyi öğreneceğimi ayırt edebilmem için çok boğa güreşi görmem gerekir. Bu konuda öyle bir deneyim kazansam da bir boğa güreşinin vereceği hazzın tek bir boğanın yaşamını yitirmesine ya da tek bir atın sakatlanmasına değer olduğunu sanmıyorum. Boğa güreşinin estetiği konusunda kendi konumum benim için bir bilinmez olarak kalacaktır; π'nin açılımındaki milyarıncı rakam veya beyinciğimin yapısı gibi.

Ancak Hemingway'in kitabı kesin olarak şunu gösteriyor ki, boğa güreşinin sanattan uzaklığı Şanghay'ın St. Louis'den uzaklığı kadar olsa da, onun hakkında, kendisi bir sanat eseri olan bir kitap yazılabiliyor. En azından Hemingway bunu yapabiliyor; 1932'de yaptı da.

Death in the Afternoon, aynı zamanda, Bullough'un, bir nesneyi ancak ondan belirli bir uzaklıktaysanız bir sanat olarak algılayabileceğiniz ve eğer çok yakınına gelirseniz onu estetik olarak görme şansınızın olmadığı yolundaki tezine de bir örnek oluşturuyor.

Matematik, çok şükür, boğa güreşi değildir. Ancak şu yönden de ona benzer: Toplumun çok büyük bir bölümünün, çok yakın durduklarından, matematiği hiçbir zaman estetik olarak algılama olanakları yoktur. Ben daha çok, birçok sınıfta ve birçok derste, gerçek işleri olan bilim ve mühendisliğe başlamadan önce, öğrenmeleri gerektiği söylenerek matematiği zorunlu olarak almış fen bilimcilerden ve mühendislerden söz etmek istiyorum. Bu insanların –fen bilimcilerin ve mühendislerin– bu konuyla başka türlü karşılaşmaları pek de olası değildir. Bullough'un dediği gibi, "Onlar için matematik pratik ve somut olma özelliklerinden hiçbir zaman arınamamıştır." Ve bu arınma hiçbir zaman –bir an için bile– gerçekleşmediğinden, matematik ile estetik arasındaki bağlantıyı kavrayamazlar, tıpkı Hemingway'in hayvancıllarının boğa güreşi ile sanat arasındaki bağlantıyı anlayamadıkları gibi.

Fen bilimciler ve mühendisler ile matematik denilen nesne arasına yeterli uzaklık konmaması matematik eğitimindeki en büyük başarısızlıklardan birini oluşturur. Ne yazık ki, matematiksel kavramlar ve teoriler yerine anlamsız teknikler ve önemsiz örnekler vererek yaygın biçimde yürütülen günümüz mezuniyet öncesi üniversite matematik eğitimi –özellikle kalkülüs eğitimi– eğitim sürecinin başarısız olmayı sürdüreceğini açıkça göstermektedir. Ve bu başarısızlık bir *yakınlık* başarısızlığıdır.

Ancak estetik başarısızlık fazla uzak olmaktan da kaynaklanabilir. Estetik halkanın ötesinde –Şekil 12'de bizim gözlemcimizin olduğu yerde– farklı bir başarısızlık vardır. Estetik halkanın ötesinde ateş değil buz yer alır. Bullough bu soğuk dünyadaki estetikten yoksunluğu anlatırken, "yapay", "olası olmayan", "boş", "abes" gibi sıfatlar kullanır.

"Çağdaş" ya da "soyut" sanatla ilgili olarak, genelde, çok büyük bir estetik uzaklık görürsünüz. Tuval üzerindeki eğri büğrü şekiller, dalgaların sahile bıraktığı odun yığınları, atonal keman notaları toplumun büyük kesimince sanat olarak kabul edilmeye başlamıştır. Onların göründükleri şeyler olmadıkları, gerçekte ciddi resim, heykel, müzik yapıtları olduklarını tekrar tekrar anlatsanız da sonuç değişmez. Bu nesneler, estetik açısından, onları soğuk, uzak olarak gören ve tepkilerini genellikle aldırmazlık şeklinde gösteren tipik gözlemciden çok uzaktırlar. Bu çok uzaktaki sanat eserleri, çoğu kez ve kasten özellikle olabildiğince gerçek karşıtı olarak meydana getirilir. Amaç da onları yaratanların, sanat eserlerinin gerçekte çok yüce olduklarını, ancak onun üstünde düşünmeye ve çalışmaya istekli olanlarca takdir edilebileceğini ileri sürebilmelerine olanak sağlamaktır.

Sanatın sanatçı tarafından kasıtlıca uzaklaştırılmasında yersiz ya da yanlış olan bir şey yoktur. Örneğin Ortega y Gasset –benim okuyabildiğim kadarıyla– "insanlıktan arındırma" adını verdiği bu eğilimi, bir ölçüde de olsa, övmektedir. Burada temel fikir, sanatı sıradan insan için beğenilir yapan insani öğeleri –resimdeki gerçekçilik, edebiyattaki öykü anlatımı gibi– ortadan kaldırmaktır. Bunun sonucu, Ortega y Gasset'e göre, aslında öyle pek de kötü sayılamayacak "sanat sanatçı içindir" sloganı olacaktır. Şöyle yazıyor:[57]

> Arı sanat olanaksız olsa bile, sanatı arındırmaya doğru bir eğilim kuşkusuz egemen olabilir. Böyle bir eğilim romantik ve natüralistik yapıtlardaki aşırı ölçüdeki insani öğelerin yavaş yavaş yok olmasına yol açabilir ve bu süreç içinde, insan içeriğinin yok sayılabilecek ölçüde azaldığı bir noktaya gelinebilir. O zaman, özel bir yetenek olan sanatsal duyarlılığa sahip olan kişilerce kavranabilecek bir sanatımız olur: Kitleler için değil, sanatçı için sanat; ıvır zıvır için değil, nitelik için sanat. Çağdaş sanatın insanları ikiye ayırmasının nedeni budur. Onu anlayanlar ve anlamayanlar, yani, sanatçı olanlar ve sanatçı olmayanlar. Yeni sanat, sanatsal sanattır.

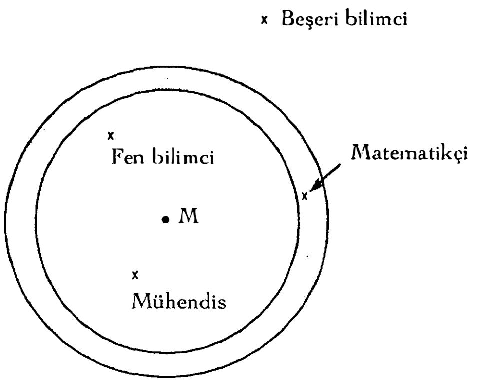
Bildiğim kadarıyla Ortega y Gasset matematikte uzman değildi. Matematiksel konularla da ilgilenmedi. Ancak, yukarıdaki paragraf hemen hemen bütünüyle günümüz matematikçisinin, konusuna ve matematik soyluları dışındaki insanlarla olan ilişkilerine karşı tavrını –çoğu kez bilinçdışında ve dile getirilmemiş olsa da– hemen hemen tam olarak anlatmaktadır. Yapmamız gereken tek şey "sanat" yerine "matematik" sözcüğünü koymaktır. Bunu yaptığımızda Ortega y Gasset'in sözleri şuna dönüşüverir:

O zaman özel bir yetenek olan sanatsal duyarlığa sahip olan kişilerce kavranabilecek bir matematiğimiz olur: Kitleler için değil, matematikçiler için matematik; ıvır zıvır için değil, nitelik için matematik.

Böylelikle Poincaré ve onun matematiksel estetik duyarlılığın "doğuştan" olduğu kavramı ile, ayrıca sırf kendileri için matematiksel bir dünya yaratan günümüz araştırmacı matematikçileri ile aynı görüşü paylaşmış olursunuz. Bu tür bir tavır ve uygulama sanat için kötü bir şey olmasa da –Ortega y Gasset'in bize güvence verdiği gibi– matematiği mahveder.

Bullough'un fikirlerinde matematiğe ve matematik eğitimine uygulanabilir çok şey olduğu kanısındayım. Onun en temel kavramları –estetik uzaklık ve onunla ilintili "fazla uzaklık" ve "fazla yakınlık" kavramları– bile, bir uçtaki fen bilimcilerle öteki uçtaki beşeri bilimcilerin matematiğe farklı bakış açılarını anlamaya yardımcı olmaktadır. Bullough'un fikirlerinde benim yaptığım genişletme, bu iki grupla mühendis ve beşeri bilimcilerin birbirinden ayrıldığı bir model ortaya çıkarmaktadır. Bu şekilde matematik, C. P. Snow'un ünlü iki kültürü arasında bir *engel* ya da birleştirici bir *köprü* olarak görülebilir.

Bu noktaya daha sonra döneceğiz. Şimdilik Bullough'un kavramları ve onların matematiğin bir sanat olduğu görüşüne uygulanabilirliği ile yetineceğiz. İleride Şekil 13'ü göz önünde



Şekil 13. Matematiğin estetik halkası.

tutmak yararlı olacaktır. Şekilde bir sanat nesnesi olarak M ile temsil edilen matematik, ve içinde matematikçilerin yer aldığı estetik halka (çoğumuzun ancak arada bir manastırın duvarlarındaki loş aralıklardan kaçamak göz attığımızda gördüğümüz gibi, gölgeli ve koyu) görülmektedir.

Sezgi Sınaması Yanıtları

Bütün yanıtlar *yanlıştır*. 1. ve 2. sorular, bütün matematiği birkaç mantık ilkesine indirgeme girişiminde anahtar rolü oynayan, Bertrand Russell'ın ünlü paradoksunun basitleştirilmiş uyarlamalarıdır. Ernest Nagel ve James R. Newman[58] tarafından yazılmış olan *Gödel's Proof* (Gödel'in İspatı) adlı küçük kitapta bu paradoksu ve onunla ilgili konuların tartışmasını bulabilirsiniz. 1. problemde, eğer berber kendisini tıraş ederse o zaman kendilerini tıraş etmeyen adamlar kümesine girer ve bu bir çelişkidir. Öte yandan, eğer 2. problem doğru ise, o zaman berber kendi kendilerini tıraş eden adamlar kümesine, bu nedenle de berberin tıraş etmediği adamlar kümesine ait olur. Bu paradokstan çıkmanın yolu öyle bir kasabanın ve öyle bir berberin varlığını reddetmektir. Daha genel durumları ele alan Russell Paradoksu'ndan kurtulma yöntemi de buna benzer, ancak sonuçları matematik için, ve bu nedenle de dünya için, çok daha önemlidir.

3. problem ünlü "Doğum Günü Problemi"ne açıklayıcı bir örnektir. Bu problem çoğu temel olasılık derslerinde ele alınır. Martin Gardner'in[59] bulmaca kitaplarının birinde kolay anlaşılır bir tartışması vardır. Gerçekte rasgele seçilmiş 23 kişiden 2'sinin yılın aynı gününde doğmuş olmaları olasılığı 1/2'den büyüktür. 50 kişi içinden en az ikisinin doğumgününün aynı olması olasılığı yaklaşık yüzde 97, olmaması olasılığı ise 1/33'tür.

4. problemin yanlış olduğunun açıklaması, iki değişkenli fonksiyonların maksimum ve minimum değerlerini inceleyen teoriye dayanır. "Açıklama", bir yüzey ve onun üzerinde bir nokta bulmayı gerektirir; öyle ki o noktadan bir düz doğru boyunca uzaklaştığınızda nokta bir tepe noktası olarak görünür, an-

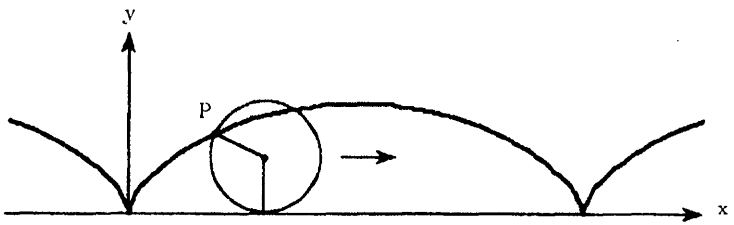
cak bir eğri boyunca uzaklaştığınızda tepe noktası gibi görünmez. Böyle bir yüzey örneği Angus E. Taylor'un[60] *Advanced Calculus* (İleri Kalkülüs) kitabında yer almaktadır.

Eğer 5. problemdeki çiftin iki çocuğu varsa olasılıklar *kk, ko, ok, oo* şeklindedir. Burada *ok* büyük çocuğun oğlan, küçük çocuğun kız olduğunu göstermektedir, öteki semboller de benzer şekilde tanımlanmışlardır. Dört kombinasyon olanaklı olduğuna göre, her birinin olasılığı 1/4'tür. Ancak çocuklardan birinin kız olduğunu biliyorsak *oo* olasılığı söz konusu değildir. Böylece olasılıklar, her biri eşit olmak üzere, *kk, ko, ok* olur. O zaman da *kk* olasılığı 1/3 olur.

6. ve 7. problemler de Martin Gardner[61] tarafından tartışılmıştır. Carter için en iyi stratejinin havaya ateş edip Adams ve Brown'ın işi aralarında çözmelerine bırakmak olduğu anlaşılmaktadır. Bu sezgisel olmayan bir yöntemdir ve uluslararası ilişkilerde görülen davranış biçimi hakkında önemli bir şeyler söyler gibidir.

Son problem ünlü ve klasik bir problemdir. "En kısa zaman"ın Yunanca karşılığından yola çıkılarak "Brachistochrone Problemi" olarak anılır. Problem 1696'da John Bernoulli tarafından ortaya atılmış ve çözülmüştür. John'un kardeşi James Bernoulli, Newton ve Leibniz de problemi çözmüşlerdir.

En kısa uzaklık için iniş eğrisi, doğal olarak, iki noktayı birleştiren düz doğru parçasıdır. Ancak *en kısa iniş zamanı* için eğri ters *sikloit*tir. Bu tuhaf eğri, geometrik olarak, bir çember üzerindeki sabit bir noktanın çember düz bir doğru üzerinde yuvarlanırken izlediği yörünge olarak tanımlanabilir (bkz. Şekil 14). George B. Thomas'ın[62] yeni ufuklar açan kalkülüs kitabında bu konuların teknik (ancak anlaşılır) bir tartışması vardır.



Şekil 14. Sikloit.

VI. Bölüm

Aristokrasi

Üniversite yaşamının, dışarıdakilerin çoğu kez dikkatinden kaçan bir gerçeği de yaygın akademik uyumluluktur. Herkes öğrencilerin birbirlerine benzediklerinin farkındadır. Herhangi bir üniversite seçip onun 1955 yıllığı ile 1969 yıllığını karşılaştırın. 1955 yıllığındaki resimlerde erkek öğrencilerin kısa saçlı, ceket ve kravatlı, kızların da kazak giyinmiş, inci kolye takmış olduğunu görürsünüz. 1969'da ise hem kız hem erkek öğrenciler uzun saçlıdır; tüyler ve boncuklarla süslenmiş yırtık kot pantalonlar ve solmuş gömlekler giymişlerdir. 1955 öğrencileri, 1969 öğrencilerinden bir başka dünyadan gelmişcesine farklıdırlar. Ancak 1955 öğrencileri, tıpkı 1969 öğrencileri gibi, tümüyle aynı görünümdedirler. Herhangi bir kampüste, herhangi bir zamanda öğrenciler, üç metre uzaktan, kar tanecikleri kadar birbirlerine benzerler.

Öğrencilerin benzer şekilde düşündükleri ise daha az bilinir. Bu ancak kampüs dışında zaman zaman kendini açığa vurur. Bu konu Allan Bloom'un *The Closing of the American Mind* (Amerikan

Düşünüşünün Tıkanması) kitabında defalarca ele alınmıştır. Gerçekten de Bloom önsözü izleyen ilk tümcede şöyle demektedir: "Bir profesörün kesinlikle emin olabileceği bir şey vardır: Üniversiteye giren her öğrencinin, gerçeğin görece olduğuna inanması ya da inandığını söylemesi."[1] Bloom bunu korkutucu bulur. Bence de öyledir. Ancak daha korkutucu olan, üniversiteyi bitiren öğrencilerin de benzer düşüncelere sahip olmalarıdır: Bu uyumluluk, her şeyden önce, hocalarının bölgesel homojenliğinden kaynaklanmaktadır.

Üniversiteyi ziyaret edenlerin en hoşlandıkları oyunlardan biri, fakülte yemek salonunda masalarda oturanların giyim tarzına bakarak onların hangi akademik disiplinden olduklarını bulmaya çalışmaktır. Bu oyun, istatistiksel olarak büyük ölçüde doğru olduğu saptanmış olan iki olguya dayanmaktadır: (1) Her bölümün üyeleri benzer şekilde giyinirler; (2) Aynı masada oturanların çoğunluğu aynı akademik bölümün üyeleridirler. Bu oyun kampüsten kampüse değişir çünkü giyim standartları da, pek fazla olmasa bile, bölgeden bölgeye değişir. Benim bulunduğum üniversitede en iyi giyinen –geleneksel takım elbise, kravat– öğretim üyeleri işletme fakültesi bölümlerindeki öğretim üyeleridir. Onların arkasından, endüstri mühendislerinin başı çektiği mühendislik fakültesi gelir. Beşeri bilimler fakültesinde giyim bölümlere göre değişir. Tarihçiler en yukarılarda yer alırlar. Öteki uçta –kot pantolon ve açık yakalı gömlek giyenler– sosyoloji, psikoloji ve matematik bölümleri bir üçlü beraberlik oluştururlar. Fakülte yemek salonu oyununu benim üniversitemde oynarsanız, matematikçileri muhasebecilerden ayırt etmede hiç zorluk çekmezsiniz. Ancak onları psikologlardan ayırt etmede işler o kadar kolay değildir.

Bir değer yargılaması yapmadığımı lütfen bilin. Ben yalnızca üniversitede belirli akademik bölümlerin benzer şekilde giyinme eğiliminde oldukları gerçeğini dile getiriyorum. Bu da son derece açık.

Giyim biçimi, doğal olarak, zamanla değişebilir. Kısa bir süre önce, matematik bölümünden bir meslektaşım dekanlık odama geldi ve yönetimden şikayetlerini sıraladı. Söz arasında, sanırım işleri düzeltebileceği düşüncesiyle, kendisinin dekan olması gerektiği gibi yarı şaka bir şeyler söyledi. Birden yakası açık gömleğine baktı ve "Ama dekan olmak için kravat takmaya başlamam gerekir, sen de öyle yapmıştın." dedi.

Ben yanıt vermedim. Kalktım ve kitaplıktan iki tane yıllık aldım, en yenisini ve çeyrek yüzyıl önce olanı. Her iki kitapta da matematik bölümünün toplu fotoğrafının olduğu sayfayı açtım. Eski fotoğrafta bütün erkek hocalar, ikimiz de dahil, takım elbiseli ve kravatlıydı. En son yıllıktaki fotoğrafta ben yoktum, o vardı. Bu fotoğrafta kimse kravat takmamıştı ve giyim biçimi bir pikniğe yaraşır rahatlıktaydı.

Bu iki resmi yanına koydum. Onlara baktı, "Ne anlatmak istiyorsun?" diye sordu. Buna da yanıt vermedim.

Üniversite hocaları hakkındaki giyim ve davranış biçimlerinde görülen uyumluluk, daha çok, bölüm içi uyumluluktan kaynaklanır. Hazzard Adams, *Academic Tribes* (Akademik Kabileler) kitabında şöyle yazıyor: "Bir öğretim üyesinin temel bağlılığı, ait olduğu en küçük akademik birime karşıdır."[2]

Bu "en küçük birim" normalde akademik bölümdür ve "bağlılık" da normalde, bölümün giyim ve davranış biçimine kadar uzanır. Bu bağlılık özellikle matematik bölümlerinde kendini gösterir.

Ancak araştırma üniversitelerindeki matematikçiler birbirine benzeme konusunda bu basit dış görünümden çok daha ötelere giderler. Akademik araştırmacı matematikçiler, İngiliz soylularının Soho Meydanı'nda dolaşan insanlardan ayrılması gibi, kendilerini başka bölümlerdeki meslektaşlarından kesin biçimde ayıran bir dizi davranış biçimleri, tutumlar ve değer yargıları geliştirmişlerdir.

Bu sınıfsal ayrımın matematik eğitiminin iyileştirilmesine, eğitimli kişilerin matematik araştırmalarının kapsamını ve önemini daha iyi görmelerine bir engel oluşturup oluşturmadığını anlamak için onu yakından incelememiz gerekiyor. Çünkü çok açık olan iki şey var:

- Matematik eğitimi başarısızdır.
- Matematiksel araştırmaların ne olduğu bilinmemektedir.

Günlük gazetelerde Amerikalı öğrencilerin, başka uluslarınkilerle karşılaştırıldığında, matematikteki acıklı hallerine ilişkin haberleri okuduktan sonra, matematik eğitiminin başarısız olduğuna hâlâ ikna olmadınızsa, *Mathematical Association of America*'nın (Amerika Matematik Derneği) eski başkanları Lynn Steen ve Leonard Gillman'ın kalkülüs eğitimini "başarısız" ve "acınacak durumda" olarak nitelediklerini duymanız yeterlidir. Araştırmaya gelince, matematikçiler yılda 25 bin makale yayımlıyor olabilirler. Ancak, araştırmacı matematikçiler dışında kimse onları görmemiştir, okumamıştır, hatta varlıklarından bile haberi yoktur.

Açık olan bir şey daha vardır. Kule Yeomanlarının kraliyet mücevherlerini korumaları gibi, matematikçiler de korumaları altında olan akademik *konu*nun kendisinden, eğitim ve araştırmadaki kusurlarından, sorumlu tutulamaz. Matematik denilen şey kusurlu olamayacak ölçüde güzel ve değerli bir şeydir. Suç matematikte değil, başka bir şeyde; belki de konunun kapalı tutulup sadece mücevher odasının anahtarını elinde bulunduranlarca açığa vurulmasındadır. Matematiği gün ışığına çıkarmanın yolu belki de önce matematikçiyi gün ışığına çıkarmaktır. Ancak bu olasılığı ele almadan önce, günümüzde matematikçinin tam olarak nerede durduğunu bilmemiz gerekir. Matematikçiler topluluğunun özelliklerini öğrenmeliyiz: Bu kişiler neye benzerler?

Morris Kline onların özellikleri konusundaki düşüncelerini açıklamaktan çekinmemiştir. *Why the Professor Can't Teach* (Öğretmenler Neden Öğretemiyor?) kitabında şöyle yazıyor:[3]

> Matematikçiler, her zaman, statülerinin her şeyden önce matematiğe yaptıkları katkıların varsayılan önemi ve orijinalliği ile saptandığı; en büyük ödüllerin, en azından içlerinde önde gelenlerin kanısınca, onun gelişiminde kalıcı bir iz bırakacak ki-

şilere verildiği, kabileci ruhlu, seçkinlik yanlısı, kendini beğenmiş, son derece bireyci bir toplumdur.

Araştırmacı matematikçilerin her zaman öyle olup olmadıklarını bilmiyorum. Ancak benim deneyimime göre, Kline'ın betimlemesi, son otuz beş yıl için büyük ölçüde isabetlidir. Yukarıdaki tümceyi yazarken matematikçilere nazik davranmayı hiç amaçlamıyordu. "Kendini beğenmiş" sözcüğü dışında bu betimleme küçük düşürücü çağrışımlar içermiyor. Birtakım kişileri "kabileci ruhlu" "seçkinlik yanlısı" olarak betimlemesi iyi niyetle yapılmış olmayabilir, ancak görünürde bir alaya alma da yok. Eğer Kline'ın betimlemesi doğruysa, eğer bu özellikler aynı zamanda matematikçilerin işlerini gereğince yapmalarına engelse, ve eğer bu özelliklere sahip olmakla matematikçiler *işlerinin ne olması gerektiği*ni anlamakta yetersiz kalıyorlarsa, ancak o zaman bir sorun var demektir.

Şunu da eklemek yerinde olur ki, Kline'ın kitabı araştırmacı matematikçilerin topluluğunun değerlerine ve davranışlarına yapılan yıkıcı bir saldırıydı. Kitap hayli ilgi ile karşılandı, *New York Times* ve *Wall Street Journal*'da olumlu eleştiriler aldı. Bu ilgi ve Kline'ın kendisinin seçkin bir matematikçi olduğu göz önüne alınırsa, araştırmacı matematikçiler topluluğundan, red ya da reform şeklinde, gürültülü bir tepki beklersiniz. Ancak hemen hemen hiç yanıt çıkmadı. Matematikçiler Kline'ın kitabına önemi olmayan bir eleştiri olarak baktılar ve her zamanki işlerini her zamanki gibi sürdürdüler. Bu tepkinin olmaması Kline'ın "kendini beğenmişlik" sözcüğünü kullanmasına en azından bir miktarda inandırıcılık vermektedir. Daha önemlisi, akademik dünyanın geriye kalan kesiminde –yöneticiler ve diğer öğretim üyeleri– matematikçilerin Kline'a tepki göstermelerinin beklenmemiş bile olması daha sonra ele alacağım bir noktayı gözler önüne sermektedir: Matematikçiler akademik dünyada ayrıcalıklı bir konuma sahiptirler.

Matematikçi P. J. Hilton,[4] Kline'a bir yanıt kaleme aldı. Hilton'un bu yazısı, daha önce Kline'ın kitabından bazı alıntılar yayımlamış olan *The Mathematical Intelligencer*'ın (Matematik Haberleri) yayıncılarının çağrısı üzerine yazılmıştı. Sanırım yalnız kendi hesabına konuşuyordu (Bana göre her iki tutum da aşırıdır. Kline, esas olarak, iyi araştırmanın iyi eğitim vermeyi engellediğini söylüyor, Hilton ise iyi araştırmanın iyi eğitim vermeye yol açtığına yakın bir sav ileri sürüyor). Bir iki kişisel yanıt daha çıktı –birkaç makale ve orada burada bazı mektuplar. Ancak genelde araştırmacı matematikçiler yollarına eskisi gibi devam ettiler. Yeni matematik yaratma ile herhangi bir ilişkisi olmayan her şeyde olduğu gibi, Kline'ın kitabından da etkilenmediler.

Timothy O'Meara, Notre Dame Üniversitesi'nde dekan ve Kenna Kürsüsü matematik profesörüdür. 1985 Ekiminde Washington D.C.'de, Matematiksel Bilimler Ulusal Başkanlık Araştırmaları Kolokyumu'nun açılış konuşmasını yapmıştı. "Matematikte Kaynakları Arttırma Stratejileri" konusundaki konuşması *Notices of the American Mathematical Society*'de (Amerikan Matematik Derneği Haberleri) yayımlandı. Konuşmada O'Meara matematikçi olmayan bazı kişilere aşağıdaki soruyu sorduğunu anlattı: Matematikçiler hakkında ne *düşünüyorsunuz*? Bir etikçi olan dekan yardımcısının yanıtı şöyle oldu:[5]

> Onlar kendilerine yeterlidirler; başkaları öyle düşünse de düşünmese de her yaptıklarının yerinde olduğunu önceden varsayarlar, bireylere büyük hoşgörüleri vardır, sosyal görünümü ve uyumu pek önemli saymazlar, genç yaşta üstün bilgi düzeyine ulaşırlar, ondan sonra bir tür can sıkıntısı başlar, bu da onların öğretim biçimlerini etkiler.

Bu açıklama, Morris Kline'ınki ile tümüyle uyum içindedir; ancak yine de yeni bir şey getirmektedir: Matematikçilerin eğitimle ilgili *can sıkıntılarını*.

Araştırmacı matematikçilerin büyük çoğunluğunun öğretimi –özellikle de kalkülüs öğretimini– sıkıcı buldukları kuşku götürmez. Sıkılmamak elde değildir. Aslında bu bir sakınca da değildir. Çimenleri biçmek de beni sıkar, ama yine de biçerim. Hem de iyi biçerim. Sakınca, bu sıkıcılığın yapılan işi etkilemesindedir. O'Meara'nın dekan yardımcısı bunun matematik öğretme işinde sıkça görüldüğünü söylüyor. Matematikçiler sıkıldıklarını göstermekten kaçınmıyorlar, çünkü onlar için önemli olan eğitim değildir. Bu işi iyi ya da kötü yapmaları ilgilenmeye değer görülmeyen bir konudur. Birçok araştırmacı matematikçi için eğitim, üniversitelerin ödül sistemlerinin bir parçası sayılmaz. Matematik eğitimi konusunda Morris Kline açıkça şunu söylüyor: "Üniversitelerde öğretim hiç önemli değildir. Yöneticiler ise bunu, doğal olarak yadsımaktadırlar."[6]

Bu abartılı bir ifadedir ancak "hiç" sözcüğü "genellikle" ile değiştirilirse araştırma üniversiteleri için geçerli duruma gelir.

Ben matematikçilerin bir gün eğitime döneceklerinden umutluyum. Bunu yaptıklarında, bir saat kalkülüs dersi vermenin kaçınılmaz sıkıntısının, verdikleri dersi etkilememesi için çok çaba harcayacaklardır. Konu trigonometrik fonksiyonların türevleri olabilir ve hocaya herkesin bildiği, sıkıcı bir şey gibi gelebilir. Ancak öğrenci için yepyeni bir konudur. Öğretmenin görevi de onu canlı bir biçimde sunmaktır.

John Barton'un *Playing Shakespeare* (Shakespeare Oynamak) kitabında söyledikleri aşağıda verilmiştir:[7]

> Sözcükler, sizin ağzınızdan çıkarken *yeni bulunmuş*, ya da *yeni şekillendirilmiş*, *yeni dökülmüş* olmalıdır; daha önce yayımlanmış bir metinde önceden var oldukları akla gelmemelidir. Tiyatrodaki aktör onları söylediği anda yaşama geçmiş gibi görünmelidirler.

Çok doğru. "Tiyatro" yerine "sınıf", "aktör" yerine de "öğretmen" koyarsanız etkili matematik öğretmek için iki tümceli bir elkitabınız olur.

Konuşmasının sonuna doğru Timothy O'Meara matematikçilerin nasıl kişiler oldukları konusuna döndü. Matematikçilere en yakın olan akademisyenleri belirlemek isteyen O'Meara, şunları söylüyordu:[8]

> İçgüdülerim sürekli olarak bana onların ilahiyatçılar olduğunu söylüyordu. Ancak bulmacanın bir parçası yitikti. Dün gece

eşimle bu konuyu konuştuk ve yanıtı bulduk. Matematikçilerle ilahiyatçılar arasındaki fark şudur: İlahiyatçıların daha açık ve iyi konuşan sözcüleri, daha çok da müritleri vardır. Bize en çok benzeyenler de manastıra kapanmış ilahiyatçılardır.

O'Meara'nın benzetmesi kötü sayılmaz. "Münzevi ilahiyatçılar" yerine "münzevi keşişler"i koyarsanız daha da iyi olur. Matematikçiler, matematikçi olmayan meslektaşlarından izole edilmiş olarak çalıştıkları anlamında, gerçekten de münzevidirler. Latince dinsel metinler on dördüncü yüzyılda taşradaki köylüler için nasıl anlaşılmaz şeyler idiyse, matematikçilerin ürettikleri çalışmalar da başka alanlardaki meslektaşları için aynı ölçüde anlaşılmazdır (Her akademik bölüm –bir anlamda– üniversitenin öteki bölümlerinden bir ölçüde ayrılmıştır. Ancak matematikçiler için bu ayrı olma durumu çok belirgindir, hemen hemen her bakımdan bir ayrılık söz konusudur. Üniversitede hiç kimsenin –belki ufak bir grup teorik fizikçi dışında– matematikçilerin ne yaptıkları hakkında hiçbir fikri yoktur). Matematikçiler kendi duvarları dışında olup bitenlerden etkilenmedikleri için, daha da içine kapanmış münzevilerdir. Keşişlerin duvarları taştan yapılmıştı ve onları dünyadan uzak tutuyordu. Matematikçiler ise gizemden örülmüş duvarlarla çevrilmişlerdir. Öyle bir gizemle ki, çalışmaları yöneticiler ve öteki hocalar için ne kadar anlaşılmaz ve bilinmez olursa olsun, yine de desteklenmeye değer görülürler. Hiç şaşırmayın, bu gizem duvarları matematikçiler için, taş duvarların keşişler için yaptığı görevin aynısını yaparlar: Rüzgârı dışarıda tutarlar.

Her şeyden soyutlanmış bir dünyada değişim ve reform rüzgârları esebilir, ancak keşişler de Latince teoloji yazmayı sürdürürler. Aynı rüzgâr akademik dünyada da eser. Tarihçiler, kimyacılar, mühendisler karşı koymaya, mücadele etmeye çalışırlar, ancak matematikçiler dokunulmazlıklarını korurlar, defterlere ya da karatahtaya matematik yazmayı sürdürürler. Morris Kline matematik eğitiminde "zorunlu reform" isteyebilir ve *New York Times* ve *Washington Post* gazetelerinin okuyucularına erişebilir, ama matematikçiler onu duymayacaklardır. Gillman, Steen ve başkaları her yıl bir milyon öğrenciye okutulan temel dersin bir "skandal", bir "başarısızlık" olduğunu ileri sürebilirler, ama matematikçiler bunlardan etkilenmeyeceklerdir. Fırtına essin, sizin yanaklarınızı çatlatsın; matematikçiler içeride soğuktan etkilenmezler bile.

O'Meara'nın "ilahiyatçı benzetmesi" tam doğru değildir, çünkü akademik ilahiyatçılar teoloji yazmazlar. Onlar daha çok başkalarının kaleme aldığı tarihi ve psikolojik teolojinin bir tür akademik eleştirisini yaparlar. Matematikçiler ise, görmüş olduğumuz gibi, eleştirmen değildirler. Gerçekten de Hardy'nin *Apology* (Savunma) kitabının yayımlanmasından bu yana matematikçiler eleştiriye yalnız "ikinci sınıf beyinler" için uygun bir iş olarak bakmaktadırlar. Keşişlerin teoloji yazdıkları gibi, matematikçiler de matematik *yazarlar*.

Ancak keşiş benzetmesi de uygun değildir. Çünkü keşişler daha yüksek bir otoritenin varlığını kabul ederler ve bu yüce varlığın görkemi ve bilgeliği karşısında kendilerini bir yere kapatırlar, tefekküre dalarlar ve yazarlar. Matematikçiler ise matematiği sevdikleri ve güzel buldukları için yazarlar. Matematikçiler birbirlerinden başka otorite tanımazlar. Biz ilahiyatçı ve keşiş benzetmelerinden daha iyi bir benzetme yapabiliriz. Ona da az sonra geleceğiz.

Şimdi, Timothy O'Meara'yı bırakmadan önce, açılış konuşmasına matematikçilerin gösterdiği tepkiye bir göz atalım. O'Meara yapmaya çalıştığı şeyi şöyle dile getiriyordu:[9]

> Bir matematikçi ve bir eğitim yöneticisi olarak, matematik toplumunun gelecekteki gelişmesine engel oluşturan bazı iç etkenleri saptamak için üniversite camiasında matematikçiler hakkında genellikle benimsenen izlenimler üzerinde durmak istiyorum.

Başka bir deyişle, O'Meara matematikçilerin nasıl bir izlenim bıraktıkları ve bu izlenimin nasıl zararlı olabileceği üzerinde durmak istiyordu. Konuşmasından sonra sorular ve yanıtlara geçildi. Bu sorulardan beşi *Notices of the American Mathemati-*

cal Society'de (Amerikan Matematik Derneği Haberleri) yayımlandı. Bunlardan üçü, doğrudan, araştırma ve araştırma için sağlanan destekle, biri de üniversite matematiği için kaç yarıyıl gerektiği ile ilgiliydi. Bunlardan hiçbirinin O'Meara'nın konuşma konusuyla ilişkili olmadığı açık. Görünen odur ki, siz matematikçilere ne söylerseniz söyleyin, karşılık olarak onlar, her zaman, matematiksel araştırmadan söz edeceklerdir.

O'Meara'nın amacı, biraz da, matematikçilere, kıt olan parasal destek için yarışta, diğer bölümler ve disiplinler arasındaki konumlarını iyileştirmeye yönelik bazı öğütler vermekti. Bu öğütlerle ilgili olarak dekan O'Meara'ya beşinci bir soru sorulmuştu: "Bize ne yapacağımızı söylemek yerine, neden hiç kimse o kalın kafalı dekanlara ve rektörlere bir şeyler söylemiyor?"

Ayrıcalık

Matematikçileri çerçeveleyen gizem duvarları, bir hapishane olmak yerine, onlara bir ayrıcalık sağlamaktadır. Bu duvarlar onları korur. Hemen hiç kimse onlara dokunamaz; ne ana-babalar, ne rektörler, ne de kalın kafalı dekanlar güruhu.

Alfred Adler *New Yorker*'da şunları yazmıştı:[10]

> Matematikçiler, belki de, dış dünyanın kapsamını ve karmaşıklığını değerlendirecek düş gücünden yoksun oldukları için, ufak tefek başarıları gerçek başarı sanarak onlarla yetinirler. Başarısızlıkla karşılaştıklarında onu çoğu kez fark edemezler. Bu başarısızlığı, daha çok kendilerine hep yukarıdan bakan toplumun, daha aşağı konumlarda oldukları besbelli olan başkalarını yüceltirken, kendilerine yaptığı bir ihanet olarak düşünürler. Öte yandan, akademik dünyada matmatikçiler çoğu kez hak etmedikleri ödüllerin tadını çıkarırlar. Dört yanları felsefe ve sosyal bilimler bölümlerinden hayranlarla çevrilmiştir.

Gerçekten de matematikçiler "çoğu kez hak etmedikleri ödüllerin tadını çıkarırlar" ve bu ödüller, temelde, matematikçilerin gizem duvarları arkasında dünyadan uzak yaşamlarının sonucudur. Üniversitede matematikçi olmayanlar matematikçilerin ne yaptıklarını bilmezler, ancak yaptıklarının değerli şeyler olduğuna inanırlar, tıpkı on dördüncü yüzyıl köylülerinin, keşişlerin yaptıklarının değerli şeyler olduğuna inanmaları gibi. Matematikçi olmayanlar için matematiğin tümü derin ve anlaşılmazdır. Onun değeri, bir inanç öğesiymiş gibi, sorgulanmadan kabul edilir.

Matematikçilerin "hayranları" yalnızca felsefeden değil, niceliklerle uğraşan bütün disiplinlerden gelir. Fizikçi L. T. More şöyle der:[11]

> Matematiğin bilim için çok değerli olmasının nedeni, bilimsel yasa ve teorilerin en güzel, belki de yegâne tam ifadelerinin matematiksel formüller biçiminde olmasıdır. Bir bilimsel teorinin matematiksel teori ile ifade edilmesindeki kesinlik ölçüsü, o bilimin durumunun bir ölçüsüdür.

Böylece, More'a göre, bir bilimin gelişmesini onun ne kadar matematiksel olduğuna bakarak ölçebilirsiniz - gelişme matematiksel düzey ile doğru orantılıdır. More "bilim" sözcüğünü genel anlamda kullanıyor ve şöyle yazıyor:[12]

> Bu yolla bilimleri, olguların istatiksel birikimi durumundan çıkarıp, bu olguların genelleştirilerek kapsamlı ve kesin yasalar haline getirilmelerini ölçüt alarak sınıflandırmak olanaklıdır. Bu sınıflandırmada sosyoloji, ya da bugünkü toplumun incelenmesi, en alt sırayı alır, çünkü gerçek yasalar yalnızca sonuçları bilinen eylemlerden çıkarılabilirler. O nedenle de sosyoloji, yasalarını tarihin incelenmesi üzerine oturtmaya çalışır, yani geçmişteki toplumun incelenmesi üzerine. Tarih de, aynı biçimde, toplumun bireylerinin eylemleri ile ilgili olan psikolojiye dayanmak zorundadır, psikoloji biyolojiye dayanır, biyoloji kimyaya, kimya fiziğe, fizik de pür matematiğe.

Bu nedenle pür matematik akademik ast üst sıralamasında en üst sırada yer alır. En yalın, en önemsiz matematikçiler bile hak etmedikleri bir hayranlık payının mirasına konarlar. Bu hayranlık da anlaşılır bir şeydir. Adler "Matematikçiler bu hayranlığın gerçek değerini ölçemeyecek kadar kendini beğenmiştirler" diyor.[13]

Bu hayranlığın varlığı, kabulü ve matematiğin gizeminin sürmesi akademik dünyada birçok sonuçlara yol açar. Çok önemli olan bir sonuç, matematikçilerin dış kontrol ve değerlendirmeden çok büyük ölçüde bağımsız olmalarıdır. Matematikçi olmayanlar, ister yönetici, ister hoca olsun, matematik huzurunda kendilerini cahil ve sindirilmiş hissederler, diğer meslektaşlarına uygulayageldikleri standartları matematikçilere uygulamak için yetersiz olduklarına inanırlar.

Bu kontrol ve değerlendirme yokluğu kalkülüs eğitiminin "acıklı" durumunda açıkça görülür. Bu konuda, her gözlemci tarafından "başarısız" ve "skandal" olarak nitelenen bir eğitim sistemi sürüp gitmektedir. Çünkü *yalnız* matematikçiler bunun sürmesini istemektedir, akademik ya da yönetimsel önderlik konumunda olan kimseler de buna karşı gelecek istek ve cesarete sahip değildirler. Böyle bir durum yalnızca, saygınlığın gizemden kaynaklandığı matematik için söz konusu olabilir. Örneğin tarihçiler temel bir zorunlu dersi, kalkülüste her zaman yapıldığı gibi, rasgele ve özensiz bir biçimde yapmaya kalkışırlarsa, hemen öğrenci kayıtlarında düşüş, fakülteden sansür, bölümün bütçe payında olası bir indirim ile karşılaşırlar. Gelgelelim kalkülüs bilim, mühendislik ve teknik içeren dallarda zorunlu derstir, çok sayıda öğrencinin kaydolması her zaman güvence altındadır.

Anlamadıkları bir konu için hayranlık içinde olan yöneticiler matematik söz konusu olduğunda ağızlarını açmazlar. Matematikçiler de kendi yollarında giderler. Gizem derinleşir. Manastır duvarları kalınlaşır.

Haksızlık etmemek için, matematikçilerin başlangıçta böyle özel bir muameleyi istemediklerini de belirtmeliyim. Ancak şimdi, onca yıl sonra öğretim ve araştırmanın değerlendirilmesi konusunda bağımsızlık beklemektedirler, ama işin başında onlar bir ayrıcalık istemiş değillerdir. Bu ayrıcalık kendiliğinden önlerine gelmiştir.

Olaylar şöyle gelişti: 1957'de *Sputnik I*'in fırlatılmasından sonra, Amerikalı matematikçiler süreksiz bir kuantum sıçramasıyla, perde arkasından çıkıp ulusal bir önem ve üne kavuştular. Matematik ve matematikçiler, bir gecede, ulusal çıkarlar açısından vazgeçilmez duruma geldiler. Ruslar uzayda bizi geçiyorlardı. Ve –ulus öyle sandı ki– bizi matematikle geçiyorlardı. Ulusal ilginin gücü ve araştırma çalışmalarının sağladığı avantajların yarattığı heyecan matematikçileri öğretimden başka bir yöne çevirdi. Hemen bütün büyük üniversitelerde kalabalık kalkülüs sınıfları ortaya çıktı. Görünürdeki neden, kayıtlardaki artışlardı; ancak gerçek neden eğitim yükünü hafifleterek profesörleri daha çok araştırma çalışmalarına yöneltmekti. Zamanla eğitim, matematikçinin anlamlı bir görevi olmaktan çıkıp ilgi alanı dışındaki bir şey durumuna geldi. Matematiğin liberal eğitimin bir bölümü olduğu düşüncesi yok oldu; temel kalkülüs yarım yamalak anlaşılan ve hemen unutulan bir kirli çıkı durumuna indirgendi. Üniversite dersleri, öğrencilerin matematiğe karşı olan isteksizliklerini güçlendirdi. Profesörlerinin bu kadar çok zaman ve ilgisini aldığı anlaşılan *araştırma* denen şeyin doğası –hatta çoğu kez varlığı– hakkında ise hiçbir fikirleri yoktu.

Bir süre sonra bu duruma kimse aldırmaz oldu. *Sputnik* korkusu azaldı. Dış dünya omuz silkerek her zamanki işine koyuldu.

Yine Adler'e dönüyoruz:[14]

> Son olarak da, matematikçilerin başarılı olamadıkları düşünülen, hemen her hususta, ağız birliği etmişçesine, matematikçiye karşı kaya gibi sert bir aldırmazlık gösteren, matematik dışı dünya var. Öyle ki, matematikçiler için hiçbir çıkış yolu yok, başka matematikçilere ya da kendi içlerine dönmekten başka gidebilecekleri bir yer yok.

Evet. Ve bu içe dönüş çeyrek yüzyıldır yerleşmiş bulunuyor. Bütün bu süre içinde matematikçiler matematiği yalnız kendi aralarında konuştular; matematik hakkında ise hiç kimse ile konuşmadılar. Üniversitede matematik hakkında işittiklerimiz de, daha çok, matematiği bir araç olarak kullanan ve konuya estetik bakımdan çok yakın oldukları için, onda estetik değer görmeyen fen bilimcilerden ve mühendislerden gelmektedir. Yine de –matematik hakkında fen bilimcilerin çoğu kez yanlış şeyler söylemelerine, matematikçilerin ise hiçbir şey söylememelerine karşın– üniversitede, matematiğin değeri ve önemi konusunda bazı anıların varlıklarını sürdürmesi hoş bir sürpriz. Yöneticilerin ve matematik dışı öğretim üyelerinin aklında, uzun süre önce öğrendikleri şeylerden bazı kalıntılar, ya da matematiğin yararlılığı hakkında bir içgüdüsel duyum kalmıştır. Böylece, gizeme karşın (ya da o nedenle) akademisyenler, matematiğin ve matematik araştırmalarının desteklenmeye değer olduğu kanısını sürdürmektedirler.

Matematikçiler kendi içlerine dönmüşler ve dünyayı dışlamışlardır. Dünyadan uzak, bu dünyada başkalarının yaptığı gibi akademik dünya ve onun bürokrasisi ile uğraşma sıkıntısı olmadan, matematiklerini yapabilmektedirler. Ancak, hâlâ o bürokrasinin *desteğine* gereksinimleri vardır. Akademik matematikçilerin malzemeye, paraya, kitaplığa büroya gereksinimleri vardır. Fakültede sürekli kadrolara ve onları dolduracak insanlara gereksinimleri vardır. Bu destek sürdürüldüğü için matematikçiler şanslıdırlar. Ancak bu daha ne kadar sürer?

"Manastır keşişleri" metaforu ancak bir noktaya kadar geçerlidir. Eski manastırların bir özelliği de kendilerine yeterli olmak için gösterdikleri çabaydı. Bazıları kendi besinlerini üretip kendi giysilerini yapıyorlardı. Keşişler günün yalnızca bir bölümünde teoloji ile uğraşıyor, geri kalan sürede de sağ kalmak için çalışıyorlardı.

Araştırmacı matematikçiler ile bu bakımdan hiçbir benzerlikleri yoktur. Matematikçiler gerçekten de kendi içlerine dönmüşlerdir. Ve de kendilerini üniversitenin başka bölümlerinden ayırmışlardır, ancak kendilerine yeterli olmak gibi yapmacık bir iddiaları da yoktur. Matematikçiler matematiklerini başkalarının sağladığı olanaklar sayesinde yapmaktadırlar.

Matematikçilerin yaptıkları gibi kendinizi içinize kapatır, aynı zamanda da tümüyle dışarıya bağımlı kalırsanız keşiş olamazsınız. Hem kendi içinize kapanır hem de dışarıdakiler tarafından desteklenirseniz ayrıcalıklı olursunuz. Belirli bir sınıfın bir bölümü olursunuz. Ve bu belirli sınıfa *aristokrasi* denir.

Soyluluk Borcu

Matematikçiler ayrıcalık isteminde kendileri bulunmadılar; ona sahip olduklarının da pek farkında değildirler. Altmışlı yılların başında kendi içlerine döndüklerinde akademik bürokrasinin inceliklerine karşı önce kayıtsız kaldılar, sonra da onu anlamakta güçlük çektiler. Duvarlar arasında çok, çok uzun süre kalmışlardı. Kıt olan akademik kaynaklardan kendi paylarını almak için diğer bölümlerle yarışamayacak ölçüde onlardan uzaktılar. Buna katlandılar, çünkü –diğerleri gibi– rekabet şansları yoktu. Adler matematikçiler için şunları söylemektedir:[15]

> Ancak onların en uç ve spekülatif konumlar dışında kalan her şeyden yüz çevirmeleri bürokratik konularda esasen zayıf olan güç ve etkilerini bile kaybetmelerine neden olmuştur. Sonunda matematikçiler bürokrasiyle ilgili şeylerin her düzeyinde diğer bilimlerden daha az etkin hale gelmişlerdir, kendi bilimsel önemlerinin ve işlevsel yararlarının hak ettiğinden çok daha az etkindirler.

Sanırım Adler matematiğin doğasının özünde, onunla sırf matematik olduğu için uğraşanların dünya işleriyle ilişkilerini kaybetmelerine neden olan bir şeyler olduğuna inanmaktadır. Çünkü şöyle devam ediyor:[16]

> Bütün bunlar, matematikçilerin matematik yaparken başardıklarıyla (hem hipotez hem de ispatlarda ısrarla uyguladıkları,

> tam rasyonellik sonucu elde edilen kısa, basit ve anlamlı sonuçlar) çok belirgin bir çelişki oluşturmaktadır. Mesleki sınırlamaları çok katı olduğu için tepkileri de o ölçüde güçlüdür. Zincirler gevşediği anda matematikçiler dikkatsiz bir tutuma girerler. Bu da güçlü bir kendini beğenme ve entelektüel üstünlüklerine olan güven ile birleşince, yaptıkları işlerin pek önemli olan yönlerini gözden kaçırmalarına, hemen her başarılı insan çabası için gerekli olan zihinsel kontrolu yitirmelerine neden olur.

Adler'in, matematikçilerin "güçlü kendini beğenmişlik duygusu ve entelektüel üstünlükleri konusunda da güçlü bir güvene sahip oldukları" sonucuna varması yerindedir. Matematikçiler, rasyonellik "zincirleri gevşetildiğinde" zihinsel kontrollerini yitiriyor olabilirler, tıpkı bir köktenci vaizin, çocuğu evin dışına çıktığında onun üzerindeki kontrolünü yitirmesi gibi. Ancak, eğer öyleyse, bütün söylediği, matematikçilerin matematikten başka bir şey yaptıklarında disiplinlerini yitirdikleridir. Dışarıya olan "dikkatsiz tutumları"nın matematiğe adanmışlıklarının bir sonucu olduğunu söylememektedir.

Matematikçilerde ortak olan şey, matematiğin estetik niteliğini anlamaları ve takdir etmeleridir. Matematiğin zarafeti konusundaki bu ortak ve benzersiz beğeni matematiksel aristokrasiyi tanımlamaktadır. Bu bir *zarafet aristokrasisi*dir.

Eukleides'ten bu yana matematikçiler "Yalın güzelliği gözlemektedirler."[17] Onun parlaklığı matematikçilerin gözlerini dış dünyaya karşı kör etmekte, bu körlük de tökezlemelerine, kontrolü yitirmelerine yol açmaktadır. Matematikçilerin matematiğin güzelliğine karşı olan tepkileri belki de Truvalıların Helen'in güzelliğine olan tepkilerinin aynısıdır. Helen Helen'di, hiçbir gemiyi suya indirmemişti. Ancak onun güzelliğine irrasyonel bir tepki gösteren erkekler binlerce gemiyi suya indirdiler ve bir on yıl boyunca da başka erkekleri kana buladılar:[18]

> Helen çok güzel olmalı,
> Her gün onu böyle boyarsan kendi kanınla.

Anımsayacaksınız, Adler matematikçilerin, kendileri dışında olanların "hayranlıklarını" doğru olarak değerlendiremeyecek ölçüde "aşırı bir kendini beğenmişlik" içinde olduklarını söylemişti. Bu görüşü, temelde, doğrudur. Matematikçiler ayrıcalıklı olduklarını fark edemeyecek kadar akademik dünya dışında yaşarlar. Genel olarak matematikçiler çalıştıkları üniversitelerin örgütlenmesi, yönetimi ve bürokrasisi hakkında, terfi, değerlendirme ve eğitim beklentileri konularında ayrıcalıklı muamele gördüklerini fark edemeyecek ölçüde, az şey *bilirler*. Yine de ayrıcalıklı muamele görürler. Diğer öğretim üyeleri de –üniversite işlerine sürekli katılanlar– onların ayrıcalıklı muamele gördüklerini bilirler. Bunun sonucu, alt sınıfların kendilerinin üstündeki sınıflara karşı her zaman takındığı kaçınılmaz tavrın oluşmasıdır: Matematikçi olmayan akademisyenler matematikçilere gıpta ve buruklukla bakarlar. Eğitim yüklerinin saptanmasında, eğitim ve araştırmanın değerlendirilmesinde, onlara tanınan bağımsızlık ayrıcalığını kıskanırlar, matematikçilerin ayrıcalıklı olup kendilerinin bundan yoksun olmasına içerlerler.

Öte yandan matematikçiler ayrıcalığı herkes için (bu nedenle de hiç kimse için) isterler. Bir matematikçiyi masasından kaldırıp elinden tutarak üniversitenin normal bütçe işlemlerini, terfi kurallarını gösterdiğinizi, sonra da ona "Bak, bütün bu ödemeleri ve toplamları, bütün bu yazışma ve muhasebe işlerini görüyorsun. Bunlar, Bay Matematikçi, üniversitede herkesin, bir öğretim kürsüsü edinmek, terfi etmek, mezuniyet sonrası öğrenci desteğini hak etmek için herkesin, yani sizler dışında herkesin, yapmaya katlanması gereken şeylerdir. Siz birini terfi ettirmek istediğinizde yalnızca onun iyi bir eğitimci ya da iyi bir araştırmacı olduğunu söylersiniz. Hiç kimse matematikçilerin masa işi yapmasını beklemez. Hiç kimse sizin hiçbir şeyi gerçekleştirmeniz gerektiğini düşünmez. Siz, Bay Matematikçi, apayrı bir dünyada yaşarsınız: Ayrıcalıklı bir dünyada." dediğinizi düşünün.

Matematikçi "Haklısınız Bay Bürokrat," diye yanıtlar, "ancak bu herkes için böyle olmalı. Bizler profesörleriz. Bizim işimiz araştırma yapmaktır, bizim işimiz yeni bilgidir, toplantılar ve yazışmalar değildir. Hepimizin –bütün disiplinlerdeki bütün profesörlerin– çalışmalarımızı yapmaya vakit bulmak için anlamsız işlerden bağışıklığa gereksinimimiz vardır."

Çeyrek yüzyıl önce matematikçiler kendi içlerine dönüp dünyayı duvarların dışında bıraktıklarında, içeriye bazı felsefi görüşler de aldılar. Onlardan biri, yasaklardan özgür olmanın, iyiliğin önünü açacağıdır. Bu görüş konusunda Bertrand Russell'ı anımsamak yerinde olur: "Özgürlüğün, ahlaki kusursuzluğu güvenceye alacağına inanmak Rousseau teorilerinin bir kalıntısıdır, eğer hayvanları dikkatle gözlemlerseniz bu kalıntının uçup gittiğini görürsünüz."[19] Matematikçilerin incelenmesi de aynı sonucu verir.

Matematikçiler benden öğüt istemezler. Bildiğim kadarıyla, başka matematikçiler dışında hiç kimseden öğüt istemezler, onlardan da, doğrudan matematikle ilgili konularda isterler. Ancak, bana gelselerdi onlara üç şey söylerdim:

1. Kendinize matematik dışı dünya ile ilişki kuracak yetenek ve deneyimi olan önderler seçin. Bunu yaparken de, önder seçiminin matematik araştırma yetisinden bağımsız olabileceğini unutmayın (Gerçekte –eğer Adler haklı ise– matematik aristokrasisi ile dış dünya arasında olumlu ilişki kurabilecek yeteneklere sahip birinci sınıf bir matematik araştırmacısının bulunması hiç de olası değildir. Adler'in bu konuda yanıldığını sanıyorum, matematikçilerin akademik önderlik konusunda ilgisiz olmaları, Hardy'nin eleştirmenler, yayımcılar ve yaratıcı olmayan her şeye karşı duyduğu küçümsemenin bir genellemesi olabilir).
2. İyi araştırmanın iyi öğretmeyi *gerektirdiği* yolundaki saçmalığı sonsuza dek unutun. İyi matematik öğreticileri topluluğu ile iyi araştırmacılar topluluğuna dikkatle bakan herkes bunun doğru olmadığını bilir. Matematik araştırması kendi değerleri ile haklı kılınabilir, kılınmalıdır da. Eğitim ile araştırma arasında irrasyonel bir bağ-

lantı kurulması her ikisini de küçültür. Eğitim ile araştırma arasında olumlu bir ilişki olması doğaldır. Ancak bu korelasyon istatikseldir; tek tek olaylarda kanıtsal değeri yoktur. Profesör Aklıderin'in iyi bir araştırmacı olması onun iyi bir öğretici olmasını gerektirmez. Bu görüş her ileri sürüldüğünde matematikçilerin inanılırlıkları azalır.

3. Kendinizin akademik dünyada ayrıcalıklı bir konumda olduğunuzu ve buna bağlı olan bir yükümlülük, bir soyluluk borcu kavramı olduğunu kabul edin. Temel yükümlülük, estetik halkayı önemli ölçüde ve daha çok sayıda fen bilimciyi ve beşeri bilimciyi çevreleyecek şekilde genişletmektir. Bu, matematiğin, liberal eğitimin bir bölümü olduğu kavramına dönmeniz ve üniversite eğitiminin araştırmacı matematikçilerin önemli işlerinden biri olduğu, duvarlar öncesi zamana dönmeniz demektir. Bu aynı zamanda G. H. Hardy'nin matematiksel açıklamaların başarısızlıkla ilgili olduğu düşüncesini de bırakmanız demektir. Tam tersine, matematiği ve matematiksel araştırmaları matematik dışı olanlara açıklayacak bir grup insanı bulmak ve bu işi yaptıkları için onları ödüllendirmek çok önemlidir.

Matematikçiler 3 numaralı öğüdü kabul etmeden önce 1 numarada tanımladığım önderleri seçmek durumunda olabilirler. Uzun süredir duvarlar arkasındadırlar. Eğitim ve matematiksel açıklamalar çoktandır duvarların dışına atılmışlardır. Matematikçiler bu konuları akıllı bir biçimde tartışmadan önce bunların nasıl tartışılacaklarını anlatacak birisine gereksinimleri olabilir. Matematikçi olmayan birisini ciddi olarak dinlemeleri gerekebilir.

Matematikçilerin böyle bir önder bulmaları çok yerinde olur. Çünkü, zarafet aristokratları –bütün aristokratların er geç oldukları gibi– tozlanmış ve yorgun düşmüşlerdir. Yirmi beş yıllık kabile içi evlenme neredeyse özdeş bir meslek davranışı ve kafa yapısı olan bir matematikçi manastırına yol açmıştır. Matematiğin zarafeti için besledikleri benzersiz beğenileri dışında dikkatimizi çeken nokta onların tümüyle homojen oluşlarıdır. Birbirlerine hayli benzer görünüştedirler, birbirlerine benzer düşünürler. Ve de, görmüş olduğumuz gibi, yöntemin içerilmesi uğruna, temel eğitim derslerinden matematiğin bütün insani yönlerinin kaldırılmasına göz yummuşlardır.

Öğrenciler, matematiğin de tıpkı diğer sanatlar ve bilimler gibi, çok uzun sürede, gerçek kadın ve erkeklerin büyük çabaları sonucu geliştiğini öğrenmiyorlar. Örneğin, Weierstrass'ın adını duymuşlardır, ancak onun sonradan matematiğe gösterdiği adanmışlıkla, bira içerek ve eskrim yaparak geçirdiği Bonn'daki öğrenci yaşamı hakkında hiçbir şey bilmezler. Onun, elli yaşındayken, göz kamaştırıcı güzellikteki ve matematik dünyasında büyüklük yolunda ilerleyen yirmi beş yaşındaki öğrencisi Sonya Kovalevskaya ile olan ve çok hoş bir skandala yol açan ilişkisini de bilmezler. Matematik derslerinde Galois Teorisi öğretilir, ancak hüzünlü ve romantik bir kişi olan Evariste Galois'nın mum ışığında matematik yazarken sayfanın kenarına "Zamanım yok, zamanım yok!" diye not düşerek şafağın sökmesini umutsuzca geciktirmeye çalışmasından hiç söz edilmez. Ancak şafak söktü ve Galois –önceden tahmin ettiği gibi– "onur alanında" yenildi. Yirmi bir yaşında, bir düelloda vurularak öldü. Bunlar gerçek kişilerdir. Ancak matematik sınıflarında görünmezler.

Öğrenciler matematiğin insan yüzünü ancak hocaları yoluyla öğrenirler. Ama görülen o ki, öğrenciler matematik hocaları gibi olmak istemiyorlar.

Bütün yaşlanan aristokratlar gibi matematikçiler de yeni kan ve yeni fikirlere kuvvetli bir gereksinim duyarlar. Onlar için en gerekli fikirler de eğitimle, matematiğin açıklanmasıyla ve matematikçilerin dış dünya ile ilişkileriyle ilgili olanlarıdır. Öyle olmakla beraber, matematikçiler bu tür düşünceleri benimseme eğiliminde değillerdir. Manastırın içinde, ortak merkezli iç içe halkalar boyunca, merkeze dönük bir şekilde otururlarken matematikçilerin konuştukları, yalnızca matematik yapmaktır. Gerekli olan fikirler ise akıl almaz düşüncelere dönüşür. O fikirler, güneşin ışığı gibi, ancak dışarıdan gelebilir - eğer geleceklerse.

Ancak gelmelidirler. Yoksa şenlik de sona erer. Çünkü matematikçiler şimdiki tutumlarını olduğu gibi sürdüremezler. Soylu olsun olmasın, aynı anda hem ayrıcalıklı hem de sorumsuz olan hiçbir sınıf uzun süre varlığını koruyamaz. Zarafet aristokrasisi zaten yirmi beş yıldan fazladır yaşamaktadır. Matematikçiler kendilerini duvarların içine kapatmışlar, matematiği altı kuşak boyu üniversite öğrencilerinden uzak tutmuşlardır. Bu böyle sürüp gidemez.

> Sizleri tanıyorum ve ses etmeyeceğim biraz daha,
> Aylaklığın keyfini çıkarmanıza.
> Lakin bu arada güneşi örnek alacağım,
> Ses çıkarmıyor zehirli alçak bulutların
> Dünyadan güzelliğini saklamalarına,
> Tekrar kendi olmak isteyince,
> Kirli ve çirkin sislerden
> Kendisini boğuyor gibi gelen bulutlardan çıkarak,
> Daha da şaşırtıcı olabiliyor özlendiği için.[20]

Paradoks

Dışarıdan bakıldıklarında, üniversite hocaları, politik bakımdan aynı kalıptan çıkmış, açık fikirli kişiler izlenimi verirler. Politik yelpazenin en solunda bulundukları, devletin görevinin sosyal reformlara aracı olmaktan ibaret olduğu şeklinde uyumlu ve tek tür bir görüşe sahip oldukları düşünülür. Amerikan seçmeni –en azından son seçimlerde– daha tutucu yöne kaymıştır. Halkın yüksek öğrenime olan güveninin sarsılmasında bu dış izlenimin de katkısı olmuştur.

Bu dış algı temelde doğrudur. Politik görüşleri ortanın çok sağında olan üniversite hocaları da vardır. "Tutucu profesör" deyimi yalnızca zıt anlamlı iki sözcük oyunu değildir - birçok akademik eleştirmen sizi buna inandırmak istese de. Yine de, hocalar arasında yaygın olan politik görüş –özellikle büyük üniversitelerde– daha çok liberal doğrultudadır.

Normalde bunun önemi yoktur. Ancak bir grup üniversite hocası politik inandırma etkisini politik gruplara yöneltirlerse durum önemli hale gelir. Politik görüşlerini, kolayca etkilenebilen gençlere öğretici olma rolünden ayrı tuttukları sürece, onların neye inanıp neye inanmadıkları, benim için, bir dişçinin politik eğiliminden daha önemli değildir. Ne var ki, hocaların politikaları çoğu kez toplum gruplarına yansımaktadır... Bu da, ya politik görüşlerini öğrencilerine aşılamalarına, ya da öğrencilerin eğitim sistemine olan saygısının daha da azalmasına yol açmaktadır. Her iki durumda da, hocaların politikalarının sınıflara sokulması, en iyi ya da en kötü haliyle, bir şanssızlık olur.

Matematikçiler bu açıdan temizdirler. Matematik sınıflarında geçen bütün yıllarım boyunca tek bir hocanın ders sırasında politik görüşler ileri sürdüğü bir an anımsamıyorum. Daha sonraki yıllarda da, kalkülüs derslerine yaptığım beklenmedik ziyaretlerin hiçbirinde, sınıfta matematik dışında bir konuda konuşan bir matematikçiye rastlamadım.

Bu, matematikçilerin topluca benimsedikleri politik görüşleri olmadığı anlamına gelmez. Bunun anlamı, sınıfta öğrencilerin karşısında, yalnızca konuşmaları gereken konu hakkında, matematik hakkında, konuşuyor olmalarıdır. Sanırım matematikçiler, gerçekte, politik yelpazede akademik meslektaşlarının birçoğundan daha da soldadır. Alfred Adler şöyle söylüyor: [21]

> Matematikçiler herhangi bir düzeydeki siyasal eylemleriyle de göze çarpmazlar. Genellikle solda, bazen de sağda olan köktenci tutumlarıyla tanınırlar, bu tutumlarını da duygusallıkla ve çoğu kez de irrasyonel olarak savunurlar.

Adler'in, matematikçileri "genellikle solda" olarak tanımlaması, kanımca, çok büyük bir hafife almadır. Eğer dört büyük üniversitenin herhangi birinden rasgele bir araştırmacı matematikçiyi seçerseniz, onun mutlaka bir liberal olacağını deneyimlerimle biliyorum. Tutucular –matematikçilerin deyimiyle– ölçümü sıfır olan bir küme oluştururlar.

Araştırmacı matematikçiler topluluğunda liberallerin çoğunlukta olduğundan hiç kuşkum yok. Bunu otuz yıldan beri görmekteyim. Bunun akademik bir önemi olmadığından da eminim. Çünkü matematikçiler politik görüşlerini sınıfa taşımazlar. Matematikçi Profesör Aklıderin, Leon Troçki'nin solunda olabilir. Ancak en umutsuz anlarında bile, yüzlerce öğrencinin önünde bocalayarak (sin x)/x'in limitini bulmaya çabalarken, Başkan Mao'nun düşüncelerini sınıfta okuyarak işin içinden sıyrılmaz.

Politik görüşlerin hiçbir akademik önemi yoktur. Öyle olmakla beraber, bunları, matematikçilerin yarı politik bir ortamda, işleri gereği yer aldıkları Amerikan üniversitelerindeki tutum ve davranışlarıyla karşılaştırmak ilginç olur. Bunu irdelediğimizde dış görünüşleri liberal olan matematikçilerin akademik konularda üniversitedeki en tutucu profesörlerin bir altkümesini oluşturduklarını görürüz; bu da bir paradokstur.

Örneğin, politik açıdan liberaller olarak matematikçiler, devletin bir araç olduğu yolundaki genel görüşle uyum içindedirler. Onlar da –çoğu Amerikalı gibi– devletin, ırk ayrımı konusundaki davranışları, kürtaj, cinsel seçim gibi konularda toplumun takındığı tutumu yasalar yoluyla değiştirmesinden yanadırlar. Dahası, bu değişimlerin gerçekleştirilebilmesi için devletin yapısal olarak daha karmaşık hale gelmesi ve faaliyet alanının genişletilmesi zorunluluğunu –memnunlukla olmasa da– anlayışla karşılarlar. Ancak bu normal liberal yaklaşım üniversite toplumunun bir üyesi olarak yaptıklarına, öğrenci kütlelerini matematiğin sırlarıyla yakınlaştırıp onları eğitme işlerine hiçbir şekilde yansımaz.

Matematikçiler kutsal köşelerine çekilmiş oldukları için, kendi soylulukları dışında kalan her şey onlar için dış dünyadır. Bu nedenle Adler, matematikçilerin "dış dünyanın çerçevesini ve karmaşıklığını değerlendirecek düş gücünden yoksun oldukları"nı söylediğinde, onların kendi dünyaları dışında olan her şeye karşı olan tutumlarından söz ediyordu. Özellikle de, matematikçiler üniversitelerinin yönetimini kendi varlıklarından tümüyle ayrı bir şey olarak algılarlar. Dekanlara başarılı olmamış profesörler olarak bakarlar, akademik yönetimin karmaşık katlarını ise doğrudan profesörlerin aylıklarına gitmesi gereken kaynakları alıp götürmekten başka hiçbir işe yaramayan asalakların ve yeteneksizlerin sığınağı olarak görürler. Timothy O'Meara'ya yöneltilen beşinci soru, "kalın kafalı rektörler ve dekanlar" sorusu, bir şaka değildir.

Matematikçiler özellikle de üniversite komitelerinde görev almaktan hoşlanmazlar, bu komitelerin varlığından da yöneticileri sorumlu tutarlar. Profesör Aklıderin kalkülüs öğretmek için araştırmalarına ara vermek zorunda olmasına sinirlenebilir, ama yöneticiler ve diğer fakültelerin yöneticileri ile bir masa çevresinde oturup, mezuniyet için gerekli koşulları, ya da eğitim programlarına ilişkin ne idüğü belirsiz başka bir konuyu bir saat boyunca konuşmak uğruna matematiğini bırakmak onu çileden çıkarır. Aklıderin'e göre komiteler yalnızca yöneticiler var olduğu için vardır. Ona göre, eğer yönetim yarın yok olsa komiteler de yok olur; ve tabii beraberlerinde de uğraştıkları bütün bu saçma akademik sorunlar.

Matematikçilerin, kendilerine ait pek az toplantıları olur, çünkü toplantılarda matematik yapılamaz. Yaptıkları ender bölüm toplantılarında da pek bir şey yapılmaz - yüksek sesli, irrasyonel konuşmalar dışında. Alfred Adler şöyle diyor: "Örneğin, bölüm ve matematik derneği toplantıları daha çok konuşmayla geçer - Latince lügat parçalamalarla, bilgiçlik taslayan konuşmalarla. Dişe dokunur pek az şey başarılır, hatta amaçlanır."[22]

Buna karşın, matematikçileri aşağıdaki karar taslağı üzerinde oylamaya çağırabilirsiniz:

Karar: Bölüm başkanlığı ve bölümün yardımcı elemanlarına ait kadrolar dışında kalan, bütün yönetici kadroları bundan böyle kaldırılmıştır.

Böyle bir oylamada bütün matematikçileri hazır bulursunuz. Karar, tartışmaya gerek duyulmadan, oybirliğiyle alınır. Gelirler, toplantıyı açarlar, birkaç dakika içinde hep birlikte "kabul" oyu verirler. Profesör Aklıderin odasından çıkar, koridordan toplantı odasına yürür, oyu ile bütün yönetimi ortadan kaldırır ve siz daha "ayrılabilir Lebesque düzene konulabilir birleşimleri" diyemeden araştırmasına döner.

Ve –Tanrı korusun– eğer matematikçilerin ellerinde gereken güç olsaydı, Aklıderin koridordan daha odasına bile dönmeden yöneticiler yok olurdu. Zamanla da koridorlarda çöpler birikir, bahçede çimenler uzar, telefonlar birer birer kesilirdi. Diğer öğretim üyeleri –onlar dış dünya ile daha uyumludurlar– çevrelerindeki kampüsün harabeye döndüğünü fark ederlerdi. Hizmetlerin yok olduğunu, araştırma bursu başvurularının işleme konmadığını, gelecek yıl alınacak öğrencilerin başvuru belgelerinin bir yerlerde bir masada yığıldığını, gelecek yılki ders programlarının ortalıkta görülmediğini fark ederlerdi. Bu öğretim üyeleri, az sonra başka bir şeyin daha farkına varırlardı: Arada bir üniversiteye gelen, rektörün eşliğinde kampüsteki tesisleri gezen, arkalarında da üniversitenin inşaat fonuna cömert bağışlar bırakan önemli ziyaretçileri getiren kocaman lüks arabaların ve helikopterlerin artık görünmeyişini.

Ancak matematikçiler yine de hiçbir şey fark etmezlerdi. Aklıderin her zaman olduğu gibi matematikle uğraşmayı sürdürdü. Elektrik faturasını kimse ödemediği için ışıklar yanmayınca da mum ışığında çalışırdı. Telefonunu almaya geldiklerinde sadece çalışmasını kestiklerine canı sıkılırdı. Üniversite Eriha gibi çökebilirdi. Ama kâğıt ve kalem bulunduğu sürece Aklıderin'in çalışması sürerdi. Artık kendisine para ödenmediğini fark etmesi için de en az bir yarıyıl gerekirdi.

Matematikçilerin akademik yönetim hakkındaki görüşlerine tümüyle katılmıyor değilim, ancak çok ileri gittiklerini söylüyorum (Adler matematikçilerin bürokratik konulardaki tutumlarının "aşırı ve rizikolu" olduğunu söylüyor). Akademik yönetimin, öğretim üyelerinin ve öğrencilerin gerçek gereksinimleri-ne yeterli ve gereği gibi cevap veremeyecek ölçüde genişlediği ve karmaşık duruma geldiği de doğrudur. Daha yalın ve akademik konulara yönelmiş bir yönetim örgütünü matematikçiler gibi ben de görmek isterim. Ancak bu başka bir konudur. Burada işaret ettiğim –değer yargılaması yapmadan– Federal Devlet'in önemi konusu ile kendilerince uygun görülen üniversite yönetimi konusundaki görüşlerindeki tutarsızlıktır: Bunlardan birincisi aşırı liberal, ikincisi ise tutucudur.

Onların tutuculukları kalkülüs eğitimindeki bozukluğu giderme çağrısına verdikleri yanıtlarda çok iyi görülmektedir. *Calculus for a New Century* (Yeni Bir Yüzyıl İçin Kalkülüs) gibi konferanslarda matematikçilerin durmadan söyledikleri şöyledir: "Eğer anlamlı bir değişim olacaksa, bu matematik toplumunun *içinden* gelmelidir, dışarıdan zorlanmamalıdır." *New Century* (Yeni Yüzyıl) konferansının yayımlanan raporunda Matematikçi Ronald C. Douglas "(....) Değişim, kesin olarak, yukarıdan aşağıya dikte edilemez."[23] diye yazmıştır. Aynı raporda, bir bilim yazarı olan Gina Bari Kolata "Değişiklikler insanlara empoze edilemez, yavaş yavaş yer almalıdırlar."[24] demektedir. Matematikçi Richard W. Hamming de konferans raporunu irdelediği "Toward a Lean and Lively Calculus" (İnce ve Canlı Bir Kalkülüse Doğru) başlıklı yazısında "Kalkülüs dersinde reform gereklidir. Ancak bu reform matematik toplumunun içinden gelmelidir, dışarıdan empoze edilemez."[25] demektedir.

Gerçekten de bütün matematikçiler bu görüştedirler. Bu inancı, *Mathematical Association of America*'nın (Amerika Matematik Derneği) başkanı Leonard Gillman'ın bir sözü ile birleştirince Amerikalı matematikçilerin aşırı akademik tutuculuğunu açıkça görürsünüz. 1988 baharında Gillman şöyle yazmıştı: "Kalkülüs sahnesi uzun yıllardır perişan durumdadır ve mesleğimizin eylemsizliği göz önüne alındığında daha çok uzun yıllar da öyle olmayı sürdürecektir."[26]

Başka bir deyişle, kalkülüs perişan bir durumdadır, ama matematikçiler değişikliğe *zorlanamaz.* Onların fikirlerini değiştirmelerini beklemek zorundayız. Bu bekleyiş daha "uzun yıllar" da sürebilir.

Eğer bir matematikçinin tutumunun abartılı bir örneğini görmek isterseniz, size öğle yemeğinde onun yanına oturmanızı öneririm. Çorba ile son fincan kahve arasında bir yerlerde, en yumuşak sesinizle ona şunları söyleyin:

"Tıp mesleğinde azınlıkların olmaması gerçekten de çok kötü bir şey. Ancak tıp okullarına zorla dışarıdan kontenjanlar koyarak durumu değiştiremezsiniz. Sabırlı olup, tıp okulunun kabul işlerine bakan kişilerin fikirlerini değiştirmesini beklemek zorundasınız."

Bunu söylerken ayağa kalkmanız da gerekir, çünkü, kaba kuvvete başvurmak matematikçinin adeti olmasa da, ifadede şiddet tam ona göredir. Onun bir öfke nöbetine tutulmasına neden olursunuz. Ve bu fırtına sizin üstesinden gelebileceğiniz türden değildir. En iyisi kaçıp fırtınadan uzaklaşmaktır.

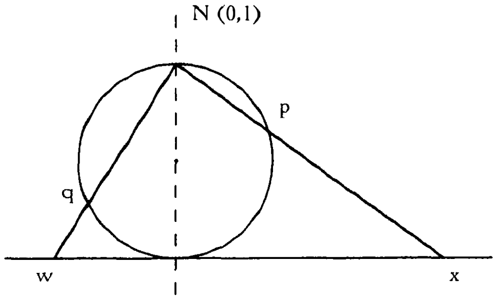
Matematikçilerin tutucu yapıları Morris Kline ve Timothy O'Meara gibi kişilerin onlarda saptadığı özelliklerde de görülür. "Kabileci ruhlu, seçkinlik tutkunu, kendini beğenmiş, bireyci" ya da "kendine yeterli, içine dönük, bu dünyadan uzak" gibi sözcük ve deyimler, normalde, politik liberallere yakıştırılan nitelikler değildir. Kline, O'Meara ve başkalarının matematikçileri betimlemeleri ile tümüyle tutarlı olan aşağıdaki üç eleştiriye bakalım:

1. *Matematikçiler*in zayıf yönleri köktencilik veya aşırılık değil, dar görüşlülüktür. Ortalama bir matematikçi kendini seyreder ve zevkten dört köşe olur.
2. *Matematikçiler* çevrelerindeki dünyaya aldırış etmezler.
3. Amerikalı *matematikçiler*in dar kafalılığı bir gizemdir.
4. Sonuç, kendi kısıtlı değerlerini insansı deneyimlerin geniş ufku ile birleştirmeyen *matematikçiler*in ortaya koydukları türden bir *matematik*tir.

Bu tümceler Morris Kline ya da Timothy O'Meara, hatta benim tarafımdan kolayca yazılmış olabilirlerdi. Ben bunları Mart 1987'de *Wall Street Journal*'da yayımlanmış bir makaleden aldım. Makale R. Emmet Tyrrell, Jr. tarafından yazılmıştı, başlığı da "A Conservative Crack-up?" (Muhafazakârların Çöküntüsü?) idi.[27] Makalenin ana teması, Reagan yönetiminin tökezlemesine "Ronald Reagan'ın muhafazakârlarının başarısızlığı"nın neden olduğu görüşüydü. Tyrrell bu başarısızlığın muhafazakârların statik ve uyumsuz özelliklerinin doğasından kaynaklandığını ileri sürüyordu. Eğer yukarıdaki dört ifadede "matematikçiler" yerine "muhafazakârlar", "matematik" yerine de "muhafazakârlık" koyarsanız Tyrrell'in makalesinden doğrudan alınmış dört tümceniz olur. Tyrrell'in politik muhafazakârlar hakkındaki eleştirisi, her sözcüğüyle, politik yönden liberal olan matematikçi için de geçerlidir. Matematikçiler, bir anlamda, siyasal yelpazenin iki ucunu birleştirmektedirler.

Bu birleştirmenin bir adı da vardır. Şekil 2'de görmüş olduğumuz reel sayılar doğrusu şemasına yeniden bakalım. Reel sayılar doğrusunun özelliklerinden biri de onun sınırsız olmasıdır. Başlangıç noktasının sağında herhangi bir reel sayı seçtiğinizde, ne kadar uzakta olursa olsun, onun daha sağında olan bir reel sayı bulabilirsiniz. Bunun gibi, reel doğru sola doğru, yani negatif yönde de sınırsızdır. Kalkülüs derslerinde, x "pozitif sonsuz"a yaklaştığı zaman $f(x)$ fonksiyonunun davranışından söz ederiz, bunun anlamı "x, pozitif olarak istediğimiz kadar büyüdüğü zaman $f(x)$ fonksiyonunun limiti"dir. Aynı şekilde, x "negatif sonsuz"a yaklaştığı zaman, $f(x)$ fonksiyonunun davranışından söz edebiliriz. Ancak bu negatif ve pozitif sonsuz kavramları limit kavramının bir parçasından ibarettir ve reel doğru üzerinde bunları temsil eden noktalar yoktur. Reel doğru her iki yönde de sınırsızca uzanır.

Bununla beraber, reel doğru yerine –bire bir tekabül yoluyla– sınırlı olan bir şey koyabiliriz. Daha açık bir deyimle, reel doğru bir daire üzerine o şekilde yerleştirilebilir ki, doğru üzerindeki her nokta daire üzerinde yalnız bir noktaya tekabül etsin ve –tek bir nokta dışında– daire üzerindeki her bir noktaya da doğru üzerinde yalnızca tek bir nokta tekabül etsin. Bu tekabülün nasıl yapıldığı Şekil 15'te gösterilmiştir.



Şekil 15. Dairenin doğru üzerinde izdüşümü.

Yapılan şudur: Reel doğru üzerine yarıçapı 1/2 olan bir daireyi o şekilde koyalım ki reel doğruya başlangıç noktasında teğet olsun ve düzlemsel koordinatları (0,1) olan nokta da dairenin kuzey kutbunu göstersin. Reel doğru üzerinde rasgele bir x noktası alalım. Bu x noktası ile dairenin kuzey kutbunu birleştiren doğruyu çizelim. Bu doğrunun daireyi kestiği noktayı p ile gösterelim. p noktası, bizim çizimimizde x noktasının imgesidir. Veya, bunun tersi olan bir işlemle, daire üzerinde, kuzey kutbu dışında, herhangi bir q noktası alalım ve kuzey kutbu ile q noktasından geçen doğruyu çizelim. Bu doğruyu, reel sayı doğrusunu kesinceye kadar uzatalım. Bu kesme noktasına w diyelim. Öyleyse w noktası, çizimimizde, q noktasının imgesidir.

Bu yolla, reel doğru üstündeki her noktaya daire üstünde tek bir noktanın karşılık geldiği açıkça görülüyor. Daire üstündeki her bir nokta da –kuzey kutbu dışında– reel doğru üzerindeki yalnız bir nokta ile ilintilidir. Doğru üzerinde başlangıç noktasına yakın noktalar, dairenin güney kutbuna yakın noktalarına giderler. Dairenin üzerinde kuzey kutbuna yakın noktalar ise doğru üzerinde çok, çok uzak noktalara giderler.

Görüldüğü gibi, bu "stereografik izdüşüm", bire bir tekabül yoluyla, reel doğrunun yerine sınırlı olan bir şey koymaktadır, yani, reel doğruyu kuzey kutbu çıkarılmış bir daireyle değiştirmektedir. Eğer istersek kuzey kutbu için de, reel doğruya kuzey kutbuna karşılık gelen bir nokta ekleyerek, işlem yapabiliriz. Kuzey kutbuna yakın noktalar, bizim çizimimizde başlangıç noktasından çok uzak noktalara gittiğinden, bu eklenen noktaya "sonsuzdaki nokta" demek doğaldır.

Sonsuzdaki noktayı reel sayılar doğrusuna ekleyip bu noktayı da kuzey kutbuna tahsis edersek, çizim reel doğruyu, yalnızca sınırlı değil aynı zamanda kapalı da olan bir şeyle değiştirmiş olur. Tam olarak ifade edersek, reel doğru artı, sonsuzdaki nokta, merkezi (0,1/2)'de olan ve yarı çapı 1/2 olan kapalı daireyle değiştirilmiş olur. Matematikçiler, hem sınırlı hem de kapalı olan geometrik nesnelere *kompakt* derler. Biraz önce anlatmış olduğumuz stereografik izdüşüm işlemine "reel doğruyu bir nokta ile kompakt hale getirme" denir. Sonsuzdaki noktadan da "ideal" nokta olarak söz edilir.

Muhafazakârların sağda, liberallerin de solda yer aldığı söylendiğinde, esas olarak, reel doğruyu siyasal yelpaze için bir model olarak almış oluyoruz. Başlangıç noktası siyasal merkezi temsil ediyor. Doğru boyunca sağa doğru gittiğinizde önce muhafazakârları, sonra süper muhafazakârları geçer, gericilere doğru yönelirsiniz. Sola doğru gittiğinizde ise liberallerle karşılaşırsınız, daha sonra da köktencilerle. Solda, yeterince güçlü bir yönetim ve gerektiği ölçüde sosyal yönlendirme yoluyla ideal dünyayı kuracaklarına inanan insanları bulursunuz. Sağda ise, her türlü yönetimin, daha güçsüz ve daha yeteneksiz kişilerce kendilerine empoze edilmiş olan bir musibet olduğunu düşünen insanlar vardır.

İlginçtir ki, her iki uçta da matematikçileri bulabilirsiniz. Onlar hükümet politikaları bakımından solun uzağında yaşarlar. Ancak kendi akademik çevrelerinde politik ve bürokratik işleri ele almaları bakımından sağda, üniversitenin diğer bütün altkümelerinin çok daha sağında yer alırlar.

Bu özellik yalnız matematikçilere özgü olabilir. Eğer öyle ise, siyasal yelpaze için verdiğimiz daire modelinde "sonsuzdaki nokta" için en doğru seçim onlardır. Matematikçiler dairenin kuzey kutbunu oluştururur ve doğruyu "kompakt yapan" noktayı temsil ederler. Politik aşırı sağ ile politik aşırı solu birleştirirler. Matematikçiler –bu modelde– siyasal yelpazenin bir nokta ile kompakt hale getirilmesini temsil ederler.

Bu modelin geçerli olduğunu ve matematikçiler için zarafet aristokrasisi sınıfına mensup olmaları dışında, benzersiz bir özellik sağladığını sanıyorum. Bu model siyasal yelpazeyi temsil eden doğru üzerinde, veya bu doğruya her noktasıyla karşılık gelen daire üzerinde soyluların bulunduğu konumu veriyor. Model size her iki düzende de matematikçilerin sırf kendilerine özgü bir nokta işgal ettiğini söylüyor; onlar daire üzerinde kuzey kutbunda yaşarlar, doğru üzerinde ise sonsuzdaki noktaya yerleşmişlerdir. Zarafet aristokrasisi ideal noktada yaşar.

Çok güzel! Matematikçiler hakkında "ideal" bir şeyin var olması çok yerindedir çünkü matematikte bu sıfatın uygun düştüğü çok şey vardır. Siyasal yelpaze için yaptığımız doğru-daire modelini akademik disiplin için de, tümüyle aynı şekilde inşa edebiliriz. Bu modelde, bilimleri ve "bilime yakın" diyebileceğimiz disiplinleri sağa koymak doğaldır. Bu disiplinleri sıralamanın bir yolu, onları pozitif reel doğru üzerinde L. T. More'un hiyerarşisinde göründükleri gibi sıralamaktır. Buna göre sosyoloji başlangıç noktasının hemen sağındadır. Sosyolojinin ötesinde tarih yer alır, tarihin ötesinde de psikolojiyi bulursunuz. Daha sonra, doğru üzerinde sağa doğru gittikçe, sırasıyla biyoloji, kimya ve fizik gelir. Diğer bilimler, doğru üzerinde, More'un ifadesiyle, "olgulara ilişkin olarak toplanan istatistiksel verilerden, bu olguların kapsamlı ve kesin yasalar halinde genelleştirilmelerine geçilmesi" ölçüsüne göre sıralanabilirler.[28]

L. T. More'un sıralamasında pür matematik diğer bilimlerin veya bilime yakın alanların hepsinden "daha büyüktür". Çünkü *sıralamadaki konum, tümüyle konunun matematiksel gelişim derecesine bağlıdır*. Bu nedenle matematik, doğru modelinde, bütün diğer disiplinlerin sağına konulmalıdır.

Diğer akademik disiplinler –özellikle de sanat ve beşeri bilimler– doğru üzerinde başlangıç noktasının solunda yer alırlar. Bu disiplinlerin hangi sırada oldukları, diğer yöndeki bilimlerin sıralaması gibi belirli değildir. L. T. More –bildiğim kadarıyla– bilim olmayan disiplinler için benzer bir hiyerarşi vermez. Biz bu disiplinleri, en azından, sezgisel bir yöntemle *este-*

tik olarak sıralayabiliriz. Yani "en çirkin" olanı başlangıç noktasına, "en güzel" olanı da en sola yerleştirebiliriz.

Bilim olmayan disiplinlerin bu yöntemle sıralanmasının pratik değerden çok kavramsal değeri olduğu açıktır. Herhangi bir durumda bir disiplini bir diğerinin soluna koymaya kalktığımızda güçlüklerle karşılaşacağımız kesindir. Örneğin, İngiliz edebiyatının, akademik bir disiplin olarak, eğitim yönetiminden daha büyük estetik değeri olduğu ortadadır sanırım. Bu nedenle ben kişisel olarak, estetik sıralamada İngiliz edebiyatını eğitim yönetiminin çok daha soluna koyarım. Ancak bu yargıya hangi ölçütlerle vardığımı ifadeye çalışmam biraz zor –ve gereksiz– olur. Ayrıca, bir tartışmaya yol açması da çok olasıdır.

Yine de, bilim dışı disiplinlerin estetik sıralaması, teorik olarak olanaklıdır. Bu sıralamada matematik en uzaktadır. Bertrand Russell'ın sözlerini anımsayalım: "Matematik, doğru açıdan bakıldığında, yalnızca gerçek değil, şahane bir güzellik de içerir. (....) son derece arı (....) en yüksek sanatın gösterebileceği kesin kusursuzluğa muktedir, yüce bir güzellik."[29]

Evet! "Şahane güzellik", "kusursuzluk", "en yüce sanat". Eğer Russell'a inanıyorsanız –ben gerçekten inanırım– estetik sıralamada matematiğin, bütün diğer bilim dışı disiplinlerin ötesinde olduğunu kabul edersiniz.

Böylece, matematikçilerin siyasal yelpazede çok özel bir konumları olması gibi, matematik disiplininin de akademik yelpazede çok özel bir yeri olduğunu görüyoruz. Matematik –doğru üzerinde– bütün bilimlerin sağında ve bütün diğer disiplinlerin solunda yer alır. Bu paradokstan bir anlam çıkarmak için, doğru yerine bire bir tekabül yoluyla daireyi koyarız. O zaman matematik, dairenin kuzey kutbuna oturur. Genişletilmiş reel doğru üzerinde ise, matematik –ideal olarak ve tek başına– sonsuzdaki noktaya oturur.

Bundan sonra, matematiğin bu benzersizliğini incelememiz gerekiyor. Modelimizde matematik, bilimleri ve bilim dışı alanları birleştirmektedir. Ancak bu birleştirme yalnızca kavramsaldır. Matematiğin, bu bilimsel ve estetik sıralamaları birleştirme benzersizliğinin herhangi bir pratik değerinin olup olmadığını öğrenmemiz gerekir.

VII. Bölüm

İki Kültür

C. P. Snow'un 1959'da Cambridge'deki ünlü Rede Konferansı'nı vermesinden bu yana onlarca yıl geçti. O konuşmada Lord Snow şunları söylemişti:[1]

> Bütün Batılı toplumlarda entelektüel yaşamın iki kutba, giderek daha çok ayrıldığına inanıyorum. (....) Bir kutupta yazınsal entelektüeller; ötekinde de fen bilimciler ve onları en iyi temsil eden, fizikçiler. Bu iki grup arasında da, birbirlerini anlayamamaktan kaynaklanan derin bir uçurum - bazen de (özellikle gençler arasında) beğenmezlik ve karşıtlık, her şeyden çok da anlayış eksikliği.

Aradan geçen yıllarda bu iki grubu "beşeri bilimciler" ve "fen bilimciler" olarak algılamaya ve onlardan, Snow'un deyimiyle, *iki kültür* olarak söz etmeye başladık.

Lord Snow'un konuşması uzun tartışma ve yorumlara yol açmıştır. Konuşmadan hemen sonra yığınla mektup ve makale yazıldığı gibi, günümüzde de eğitimsel felsefenin hemen bütün dallarında yapılan çalışmalarda ona sürekli göndermeler yapılmaktadır. Topluca bakıldığında, bu konudaki yorumlamaların tek bir sonuca ulaşmadığı görülür. Snow, aynı ölçüde, suçlanmış ve de övülmüştür.

Ancak şu üç şey açıklıkla görülmektedir: Bu iki ayrı grup mevcuttur, aralarındaki uçurum gerçektir ve "iki kültür" deyimi dilimize girmiş, onun bir parçası haline gelmiştir. Bu deyimi hepimiz biliyoruz. İki grubun varlığından ve aralarındaki uçurumdan emin olmak için yapacağınız tek şey herhangi bir büyük üniversitenin kampüsüne gidip *gözlem yapmak*tır. Herhangi bir kampüste fen bilimcilerinin, beşeri bilimcilerin çalışmalarını pek az anladıklarını, beşeri bilimcilerin ise fen bilimlerini hiç anlamadıklarını görürsünüz. Daha da çarpıcı olan, her iki grubun da diğerinin çalışmasına değer vermediğini fark etmenizdir. Fen bilimciler yazınsal entelektüelleri yüzeysel ve bulanık fikirli bulurlar. Yazınsal entelektüeller de fen bilimcileri dar görüşlü ve yeterince kültürlü olmayan kişiler olarak düşünürler. Aradaki uçurumun da "anlayamama"dan çok "karşıtlık ve beğenmezlik" olduğunu görürsünüz.

Bu üç şeyi görme olanağı kesindir. Bu grupların kesin olarak var oldukları sonucuna varmak için analize, psikolojik çıkarımlara, ve hatta tartışmaya gerek yoktur. Bu somut bir deneyim olgusudur. Yalnızca gidip bakmanız yeterlidir.

Snow'un kavramlarına yöneltilen eleştiriler, çoğunlukla, bu ayrı grupların gerçekten kültürler olup olmadığı ve yalnızca *iki* grubun var olup olmadığı ile ilintilidir. Bu nedenle, Snow'un "fen bilimciler" ve "yazınsal entelektüeller" kavramlarını inceleyen ve bunların çeşitli "kültür" kavramlarıyla karşılaştırmasını yapan bir yığın makale yazılmıştır. Snow bütün bu eleştirileri yanıtladı. 1964'te "kültür" sözcüğünün kabul edilebilir iki anlamı olduğunu ileri sürdü:[2]

> İlk olarak, "kültür"ün sözlük tanımına göre bir anlamı vardır: "entelektüel gelişme, aklın gelişmesi". (....) "kültür" sözcüğü-

nün, konferansta açıkça işaret ettiğim ikinci ve teknik bir anlamı daha vardır. Sözcük, bu anlamda, insanbilimcilerce aynı çevrede yaşayan, ortak alışkanlıklar, ortak varsayımlar ve ortak bir yaşam tarzı ile bir araya gelmiş olan bir grup insanı ifade etmek için kullanılır.

Lord Snow her iki anlamın da onun konusuna göre geçerli olabileceğini, "kültür" sözcüğünün "yerinde olduğunu ve aklı başında bir insana doğru anlamı çağrıştırdığını"[3] –sanırım etkili biçimde– savunmuştur.

İkinci eleştiriye –iki kültürden söz etmenin doğru olmadığı yolundaki eleştiriye– gelince, Snow'un kendisinin de bazı "haklı kuşkuları" vardı. Rede konuşmasında şöyle demişti:[4]

> İki sayısı çok tehlikeli bir sayıdır: Eytişimin tehlikeli bir süreç olma nedeni de budur. Herhangi bir şeyi ikiye bölme girişimlerine kuşku ile bakmalıdır. Daha incelikli ayrımlar yapma üstünde uzun süre düşündüm, ancak sonuçta bundan vazgeçtim. Çok çarpıcı bir benzetimden biraz daha fazla, bir kültür haritası yapmaktan da oldukça az olan bir şey arıyordum. Bu amaç için iki kültür deyimi yerinde sayılır, daha ince ayrıma girişmek ise yarardan çok sakıncaya yol açar.

Bu eleştiriler bazen öyle iç içedir ki Snow'un savlarının hangi bölümünün hedef alındığını anlamak güçtür. Bazen, sadece, eleştirmenin, Snow'un söylediklerinden hoşlanmadığını görürsünüz. Az ya da çok belirsizlik taşıyan bu eleştirinin uçurumun beşeri bilimci yakasından gelmesine şaşmıyorum. Örneğin Jacques Barzun *A Stroll with William James* (William James ile Bir Gezinti) kitabında şöyle yazmaktadır (italik harfler benim tercihim):[5]

> *İki değil, açıkça tek bir kültür olan* sanat ve bilimin gelişigüzel bir şekilde birbirinin yerini alması olayını betimlerken, bilim sözcüğü hep ilk genel zaferinden günümüze kadar sanki tek bir şeymiş gibi kullanılagelmiştir.

Burada, Barzun'un ne demek istediğini söylemek zor. "Tek kültür" bölümü açık, ama bunun hangi kültür olduğu açık değil. Ancak yine de, "gelişigüzel olarak birbirinin yerini alma" fikri Snow'un uçurum kavramı ile bağdaşmaktadır, eğer bir uçurum varsa en az iki grubu ayırması gerekir. Bundan başka Barzun bilimin, çok değiştiği için, tanımlanamayacağını ileri sürüyor gibi. Bu nokta da özellikle tuhaf kaçıyor; çünkü üç sayfa sonra şöyle yazmakta (italik harfler benim tercihim): "Bu nedenle bilimin, kendi varsayımlarıyla, *sınırları değişmeyen tek bir alan* olduğunu söyleyebiliriz."[6] Bu değişmez sınırlar kavramı değişim ile uyuşmamaktadır: Meslekten olmayan kimseler bile bilimsel değişimi, sınırları genişletmek bağlamında kullanırlar.

Allan Bloom da, *The Closing of the American Mind* (Amerikan Düşünüşünün Tıkanması) adlı kitabında Snow'un düşünceleri hakkında şöyle diyor:[7]

> Bazıları bu adlandırmayı, C. P. Snow'un bilime bir "kültür" demesine benzer, önemsiz bir şey olarak düşünebilir. Bizim yaratıcılığın gerçek anlamını unutmuş olmamız ve onu hipotezler öne sürmek, ispatlar bulmak ve deneyler tasarlamaktaki beceriler olarak algılamamız bilimin yaratıcı olarak görülmesinin yegâne nedeni olabilir. (....) Bu proje C. P. Snow'un "iki kültür" konusundaki saçma fikirlerinden esinlenmiştir. (....) Bir fen bilimcisi için beşeri bilimler birer eğlencedirler (kendisinin verdiğinin ötesinde bir şeylere de gerek olduğunu fark ederek çoğu kez ona derin bir saygı duyar, ancak onu nerede bulacağını bilemez). Bir beşeri bilimci için de doğa bilimleri, en iyisinden, ilgiye değmeyen, en kötüsünden de yabancı ve düşman şeylerdir.

Bloom'un söylediklerinden bir anlam çıkarmak –benim için– çok zor. Bir yanda bilimin bir kültür olması düşüncesine saldırmaktadır, ama bunu destekleyen ifadesi, kültür değil, "yaratıcılık" hakkındadır. "Hipotezler" ve "ispatlar" bölümü ise bilimden çok matematiği çağrıştırmaktadır. Daha sonra "iki kültür" düşüncesiyle alay etmekte; ancak hemen ardından, beşeri bilimcilerin fen bilimciler hakkındaki yabancı ve düşmanca görüşlerinden söz etmektedir, bu ise tümüyle Snow'un "uçurum"unu çağrıştırmaktadır. Açıkça görünen de şudur: Bloom, Snow'un düşüncelerine sempati duymamaktadır.

Jacques Barzun'a gelince, William James'in pragmatizmine bu ölçüde ateşli biçimde hayran olan bir insanın nasıl olur da kampüste bir gezintiye çıkıp, bilim ile sanat fakültelerinin iki farklı, hiç ortak noktaları olmayan, birbirinden kopuk ve hiçbir şekilde "tek kültür" olarak düşünülemeyecek dünyalarda yaşadıklarını *gözlemlemediği*ni insan merak ediyor. Ayrıca, eğitimde reform gerektiği konusunda bu kadar belagatle ve etkileyici biçimde yazılar kaleme alan Allan Bloom'un, Snow'un –eğer yerinde kullanılırsa– eğitim mekanizmasının tekrar çalışmasında itici bir güç olabilecek bir düşüncesine karşı bu denli öfkeli davranması da hayret vericidir.

Korkarım, kendi bilgisizlikleri nedeniyle bilimi olduğundan çok daha önemsiz bir şey olarak algılamakla Barzun ve Bloom, Snow'un savının geçerli olduğunu kanıtlayıcı örnekler oluşturmaktadırlar. Uçurumun bilimsel olmayan "diğer taraf"ından söz ederken Snow'un aklından geçen örnekler onlar olsa gerek:[8]

> Ancak diğer taraf için ne diyebiliriz? Onlar da güçlerini yitirmişlerdir - belki de daha ciddi biçimde yitirmişlerdir, çünkü bu konuda daha çok kendilerini beğenmişlerdir. Sanki doğal düzen yokmuş gibi, hâlâ, geleneksel kültür "kültür"ün tümünü oluşturuyormuş gibi davranmak yolundadırlar. Sanki doğal düzenin araştırılmasının, gerek kendi değeri açısından gerek sonuçları bakımından hiçbir önemi yokmuş gibi. Sanki, fiziksel dünyanın bilimsel yapısı entelektüel derinliği, karmaşıklığı ve ifadesi bakımlarından insan beyninin en güzel ve en harikulade toplu başarısı değilmiş gibi. Ancak, fen bilimci olmayanların çoğunun bu büyük yapı hakkında hiçbir fikri yoktur. İsteseler bile ona sahip olamazlar. Sanki, bu gruba giren insanlar, çok geniş bir alanı kaplayan entelektüel deneyimler karşısında, ses tonları arasındaki farkları duyamayan kişiler gibidirler. An-

> cak, bu ses tonu sağırlığı doğuştan değil; eğitim sonucu, daha doğrusu eğitimsizlik sonucu ortaya çıkar. Ses tonu sağırlığında olduğu gibi, neler kaybettiklerini de bilmezler.

Barzun ve Bloom hakkında yanıldığımı umarım. Her ikisinin de çalışmalarına saygı duyuyorum. Ancak bilimden söz ettiklerinde onları ciddiye alma konusunda kuşkuluyum.

Snow iki entelektüel gruptan ve aralarındaki uçurumdan söz ettiğinde onun yanılmadığını biliyorum. Ayrıca, "diğer taraf" ve onun "çok geniş bir entelektüel deneyim alanı için ses tonu sağırı" olduğu betimlemesinin de kesin olarak doğru olduğunu biliyorum. Snow, bu bağlamda, bilimsel taraf kusursuzdur demek istemiyor - ben de öyle. Snow yukarıdaki paragrafı yazmadan önce fen bilimcilerin *yoksullaşması*ndan söz etmişti. Özellikle, fen bilimcinin yaşamında sanatın yokluğuna –müzik dışında– ve "yazınsal insanlar için ekmek peynir gibi olan kitapların" azlığına dikkat çekmişti. Snow fen bilimcilerin –roman, tarih, şiir ve tiyatro konularında– neredeyse hiç kitap okumadıklarını söylüyor.[9]

Dahası, birçok fen bilimci, bütün dünyası kitaplar ve okuma çevresinde dönen kişilere saygı da duymaz. Bir zamanlar, çalıştığım üniversitenin fen edebiyat fakültesinde yardımcı dekan olduğum sırada, bilimin ilerlemesi ile ilgili bir komitede görev almıştım. Komite üyelerinden birisi de, tüm dünyası bir balığın iç organlarına bir mikroskopla baktığında gördüklerine indirgenmiş saygın bir biyokimyacıydı. Deniz hayvanlarında kötü huylu urların gelişimi hakkında herkesten çok bilgisi vardı ve yayımlarının listesi elden kaçırdığı bütün balıkların boyundan daha uzundu. Ancak edebiyat hakkında bildikleri kol saatinizin içine sığardı. Adı Hücre'ydi, her yere beyaz laboratuvar önlüğü ile ve üzerinde "araştırma" yazılı şişkin bir dosya taşıyarak giderdi. Komite toplantılarında yanımda otururdu. Beni edebiyat ve okuma dozu yüksek olan liberal eğitim sisteminin bir savunucusu olarak düşünürdü. Bu nedenle de beni yola getirilmesi gereken bir hasım olarak görüyordu.

Toplantı öncesi sohbetlerde en sevdiği şeylerden biri bana, çalışma ahlakı konusunda, fen bilimcilerle fen bilimci olmayanlar arasındaki farkı tekrar tekrar anlatmaktı. Ona göre fen bilimci olmayanlar fen bilimciler kadar sıkı çalışmıyorlardı. Bu tezini desteklemek için de, biyoloji binasında her akşam bütün ışıkların gece yarılarına kadar yandığına, bunun ise hummalı bir çalışmanın işareti olduğuna dikkatimi çekiyordu. Buna karşılık, bana söylediğine göre, beşeri bilimler binası her gece mezarlık kadar karanlıktı. "O beylerin yapacak bir işleri yok." diyordu. Hücre'nin "o beyler" dedikleri, nerede olurlarsa olsunlar, bütün beşeri bilimcilerdi.

"Gündüzleri odalarında çalışırlar; geceleri de evlerinde ya da kütüphanede. Bir laboratuvarda olmaları gerekmiyor." dedim.

"Saçma," dedi, "gece ya da gündüz, yapacak hiçbir işleri yok."

Bir gün Hücre, laboratuvarından dışarı çıkmış. Üzerinde beyaz önlüğü, elinde araştırma dosyası, beşeri bilimler binasının bir koridoru boyunca yürümüş. Çağdaş Amerikan romanı konusunda üniversitede otorite olan saygın Profesör Nesir'in odasının önünden geçmiş. Kapı açıkmış. Gördükleri Hücre'yi öylesine heyecanlandırmış ki bana anlatmak için hemen odama gelmişti.

Araştırma dosyasını iki eliyle tutarak bana uzatırken şöyle diyordu: "Sabahtan beri laboratuvarımda *çalıştım*." Bir mikroskoptan çekilmiş siyah beyaz bir fotoğraf gözüme ilişti. Bir ayı tarafından yalanmış olan bir bal peteğine benziyordu. "Araştırma yapıyordum." dedi.

"Çok iyi," diye karşılık verdim.

Dosyayı masamın köşesine koydu. "İngilizce bölümündeki o Nesir denen adama ne ücret veriyorsun?" diye sordu.

"Hiçbir profesör benim için çalışmıyor. Üniversitenin ödediği maaşları da kimseyle konuşamayacağımı bilirsin." dedim.

"Ona yüklü bir para veriyorsundur herhalde," dedi, "gereğinden çok fazla."

"Kendisi ünlü ve kıdemli bir profesördür." dedim.

"O herifin *vaktini* nasıl geçirdiğini biliyor musun?"

"Hiç fikrim yok," dedim.

"Şu anda o hergele ayaklarını masasına uzatmış, roman okuyor."

"Hangi romanı?" diye sordum.

"Bilmiyorum. Adında iki tane A olan bir şey. Abalone, Abalone gibi."

Söylemiş olduğum gibi, profesör Hücre su altında yaşayan şeylerle uğraşır.

"*Absalom, Absalom* olabilir mi?"

"Tamam, o," dedi.

"Profesör Nesir'in ne okuttuğunu biliyor musun?"

"Ah ah'lar, vah vah'lar herhalde," dedi.

"Nesir, Faulkner, Hemingway ve Joyce konusunda bir doktora dersi veriyor."

Hücre yalnızca omuz silkti.

Masamda duran araştırma dosyasını alıp göğsüne, kalbinin üstüne bastırdı.

"Bu adamların hiçbir iş yapmadıklarını sana söyledim."

Fen bilimciler –bazıları– fena halde yoksuldurlar.

Ancak iki grubun yoksulluğu arasında bir boyut farkı vardır. Fen bilimciler, eğer isterlerse, ya da yeterli bir neden görürlerse, beşeri bilim tarafına veya yazınsal tarafa –ağır aksak da olsa– geçebilirler. Shakespeare bir fizikçinin erimi ötesinde değildir. Bir fizikçinin sıkça ve ciddi olarak bu ozanın sonelerini okuyup okumaması onun kişisel seçimidir. Ancak, diğer tarafta durum bundan çok farklıdır. Fen bilimci olmayanlar bilimin "yüce yapısı" hakkında bir fikre sahip değildirler. Ve –Snow'un deyişiyle– hatta isteseler bile sahip olamazlar.

Fen bilimciler müziği geceleri de sürdürürler. Ancak diğerleri *Venedik Taciri*'ndeki Jessica gibi müziği fark etmezler. Bu diğerleri bilimin müziğine karşı sağırdırlar.

1959 Rede Konferansı sırasında C. P. Snow "Ciddi bir şey amaçlıyorum." sözlerini iki kez tekrarlamıştır. Ben de ciddi bir şey amaçlıyorum, beşeri bilimcilerin fen bilimlerinin müziğine karşı sağır olmalarının nedenlerini saptamak. Bu sağırlığın da beşeri bilimcilerde var olan virüs gibi bir şeyden değil, onlarda olmayan bir şeyden kaynaklandığını iddia edeceğim. Fen bilimcilerde, beşeri bilimcilerde olmayan bir şey vardır. Bu şeyin varlığı, fen bilimcilerin, gerçek olgular için metaforlar bularak ve bu metaforları açıklayan ve kapsamını genişleten teoriler kurarak, doğayı anlamalarını olanaklı kılar. Göldeki Lady'nin Kral Arthur'un kılıcına güç verdiği gibi, bu şey de fen bilimciye beyin gücü verir. Bu şey ile, fen bilimci gerçekliğin karışık ve bölük pörçük deneyimlerini düzenli ve anlamlı soyutlamalara dönüştürür. Fen bilimciler bu şeyi kullanarak, doğanın duyumsadıkları kırık dökük parçalarını, her biri Cézanne'ın düşlediği herhangi bir şeyden daha izlenimci olan, sonsuz bir tablolar koleksiyonuna dönüştürürler.

Bir merdiven olmadan tilki nasıl üzümlere erişemezse söz konusu "şey"in yokluğu da beşeri bilimcileri bütün bunlardan uzak tutar. Bilimin amacı bu izlenimci resim koleksiyonunu Snow'un yüce "yapı"sını oluşturacak şekilde düzenlemektir, tıpkı kırık cam parçalarının büyük bir ayna oluşturacak biçimde düzenlenmesi gibi. Ve bütün bunlar –soyutlamalar, metafor, izlenimler– en yüce ölçüde sanat olarak düşünülmelidir. Ancak bu "şey"in yokluğu beşeri bilimcileri bütün bu faaliyetlerin dışında tutmaktadır. Bu "şey"in yokluğu bilimin bütün bu yüce sanatını beşeri bilimcilerin algılamalarından uzak kılar. Bu "şey"in yokluğu, Aisopos'un tilkisinin üzümleri hor görmesi gibi, beşeri bilimcilerin fen bilimcileri hor görmesine neden olmaktadır. Beşeri bilimcilere göre "Bilim tatsız tuzsuzdur." Eksik olan şey, kuşkusuz, matematiktir.

M Tipi

1979 baharında, Pennsylvania'daki bir devlet üniversitesinden iki konuşma yapmak için aldığım çağrı üzerine batıya gitmiştim. Konferanslar başarılı oldu ve sonra fakültedeki meslektaşlarımla yemek yiyip şarap içerek güzel bir akşam geçirdik. Yemekten sonra bu ılık bahar akşamında yürüyerek otelime döndüm. Ertesi sabah aynı yolu izleyerek doğuya doğru arabamla yola çıktım. Öğle sıralarında Harrisburg'un hemen dışındaki Susquehanna Nehri'ni geçtim. Hava güzeldi, güneş açık pencereden üzerime vuruyordu. Radyoda Pinchas Zukerman Beethoven çalıyordu. Güneş suların üstünde parıldıyor, her şey yolunda gidiyordu.

Beethoven'ın Keman Konçertosu'nun hızlı bölümünde, Zukerman arşesini teller üzerinde dans ettirirken, birden müzik durdu. Bir spiker araya girdi ve heyecanını belli etmemeye çalışarak günün önemli olayına ait son haberleri vermeye, Three Mile Adası'ndaki nükleer santralde meydana gelen sızıntı tehlikesi yüzünden bölgeyi boşaltma planlarını anlatmaya başladı. Three Mile Adası'nın Susquehanna Nehri üzerinde, Harrisburg yakınlarında olduğunu da ekledi.

Bu, dolu bir tabancanın namlusuna bakmaktan farklı bir şeydi. Zaman durmuyor, ancak bir şeyler değişiyordu. Beethoven unutuldu. Dünkü başarı ve akşamki sohbet önemini yitirdi. Sudaki parıltı yok oldu. Nehir bir örümceğinki gibi koyu bir renge büründü. Sağa dönüp akıntı yönüne, sola dönüp ters yöne baktım. Her iki yönde de soğutma kulelerinin alışılmış ve ürkütücü silindirleri görünmüyordu. Yine de rahatlayamadım. Arabanın camını kapatıp daha hızlı sürmek dışında yapabileceğim bir şey yoktu.

İki hafta sonra fakülte yemek salonunda öğle yemeğine gitmiştim. Yemekte yanıma iki genç asistan profesör oturmuştu: sosyoloji bölümünden genç bir bayan, fizik bölümünden genç bir bay. Three Mile Adası'ndan konuştuk. Onlara, programın kesilip haberin verilmesini ve kazayı ilk duyduğumda tam Susquehanna Nehri üzerinde olduğumu anlattım. Ama kendimi çaresiz hissettiğimden hiç söz etmedim. Benim yaşımda ve konumumda olan yetişkin erkekler çaresizliklerini itiraf etmezler. Hiç olmazsa yüksek sesle itiraf etmezler.

Ben bitirdiğimde sosyolog bayan konuşmaya başladı. Hiç hasar belirlenmediği halde kazadan, medyanın hâlâ kullandığı "felaket" deyimi ile söz ediyordu. Geçmişteki nükleer felaketlerden ve gelecekteki potansiyel felaketlerden bahsetti. Sarı derili insanlar üzerine nükleer bombalar atan beyaz insanlardan söz etti. Robert Oppenheimer'ın ünlü "Artık ben dünyaları yok eden ölüm oldum." sözlerini tekrarladı. Elektrik enerjisi için duyulan ilginin insanlar için duyulan ilgiden üstün tutulmasına yol açan kapitalist açgözlülükten ve tökezleyen ahlak kurallarından söz etti. Sonra da, nükleer enerji ile bağlantılı olan sakat doğumlar ve iyileşmeyen hastalıklar gibi sağlık bakımından tehlikelerle dolu karanlık geleceği dile getirdi.

Endişeli ve heyecanlıydı. Masadaki meyve salatasının ısınmasına, çayın soğumasına aldırmaksızın, hiç ara vermeden konuşuyordu. Ben ise, bir şey söylemeden arada başımı sallıyor, balıklı sandviçimi yiyordum. Fizikçi de sessiz ve hareketsiz dinliyordu. Sosyolog konuşmasını bitirdiğinde ona sakin sakin:

"Konuştuklarınız hakkında bir şey bilmiyorsunuz." dedi.

Sosyolog sinirlendi ve "Sakın bana, hiç kimse yaralanmadı diye, bunun bir felaket olmadığını söylemeye kalkmayın. Bütün bildiğimiz herhangi birinin yaralandığının henüz saptanmamış olmasıdır. Bölgede oturanların vücutlarında ne kadar nükleer zehir taşıdıklarını bilmiyoruz." dedi.

Fizikçi daha da sakin bir şekilde "Benim söylemek istediğim o değil." dedi.

"Nedir, öyleyse?"

Ceketinin cebinden ufak bir not defteri ve eski tip bir dolmakalem çıkardı, mürekkebi şişeden doldurulan gerçek bir dolmakalem. Kapağını ağır ağır açtı, boş sayfaya bir şeyler yazdı ve ona verdi. O da göreceğim bir şekilde bana uzattı. Fizikçi tek bir denklem yazmıştı:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

"Peki ne var bunda?"

Fizikçi, defteri göstererek "Bunun anlamını biliyor musunuz?" diye sordu.

"Ben matematikçi değilim."

"Ben de değilim. Bunu anlamak için matematikçi olmak gerekmez. Bunu üniversitenin birinci sınıflarında öğretiyoruz. Dekana sorun isterseniz."

Sosyolog hanım bana baktı, ben yine başımı salladım.

Şimdi fizikçinin sesinde hafiften bir üstünlük seziliyordu:

"Bu, nükleer bozulmayı açıklayan bir diferansiyel denklemdir. Onu çözdüğümüzde bozulmayı açıkça tarif eden bir ifade elde ederiz. Basit işlemler uygulayarak bu ifadeden nükleer maddenin yarı ömrünü saptayabiliriz. Bütün bunları anlamıyorsanız gelecekteki sağlık sorunları hakkında konuşamazsınız. Ve siz de anlamıyorsunuz. Bütün söyledikleriniz boş laf, hepsi hava cıva."

Durdu, çayından bir yudum aldı. Sosyolog yine bana baktı. Şaşırmış ve çaresizdi.

Fizikçi "Size denklemin çözümünü yazabilirim" dedi, "ama onu da anlayamazsınız."

Sosyolog bir şey söylemeden kalktı, masayı ve odayı terk etti. Ben de sandviçimin son lokmasını yutup onun arkasından yürüdüm. Arkada genç fizikçi, kendinden hoşnut ve mutlu, yemeğiyle baş başa kaldı.

Akşam evde, o gün öğle yemeği sırasında masada geçen olayı karıma anlattım.

"Bu kurallara tam olarak uygun bir müsabaka sayılmaz." dedim. "Fizikçi M tipi, sosyolog da N tipiydi."

"M tipi nedir?"

"M harfi matematiği temsil eder. O matematikten yararlanma kolaylığına sahip. Böyle insanlar M tipidir."

"Kan grubu gibi doğuştan var olan bir şey mi demek istiyorsun?"

"Kesinlikle hayır," dedim, "matematik *öğrenerek* M tipi olunur, doğuştan olunmaz. 'Kolaylık' ile de belli bir düzeyde bilgi ve beceriyi kastediyorum. Herkes M tipi olabilir, bunun için yalnızca öğrenim ve pratik yapma gerekir."

"N tipi nedir?"

"N de 'M olmayan'ı temsil eder. M tipi olmayan insanlar N tipidirler. N tipi insanların gerçek matematiksel becerileri hiç yoktur."

"İlginç."

"Bu, ilginçten de öte, daha *temel* bir şey," dedim, "N tipi insanlar M tipi olan insanlarla bilim ve teknoloji konularında tartışamazlar."

"Neden?"

"Çünkü her zaman kaybederler."

"Bundan emin misin?"

"Evet. Haklı olduklarında bile kaybederler."

C. P. Snow herhangi bir nesneler kümesini ikiye ayırma işine "çok kuşku ile" bakılması uyarısını yapmıştı. Ancak yine de bu ayırma her zaman yapılabilir. Yapılacak tek şey nesnelere bakmak ve bazılarında bulunan ama hepsinde bulunmayan özelliği saptamaktır. O zaman küme doğal olarak ve kendiliğinden iki bölüme ayrılır: O özelliği taşıyan nesneler ve taşımayanlar.

Örneğin, fen-edebiyat fakültesinde ders veren profesörler topluluğunu ele alalım. Bu profesörlerden bazılarının boyu 1,80 m'den daha uzundur, geriye kalanlar ise 1,80 m ya da daha kısa boyludur. Böylece fakültedeki profesörler kesin ve doğal olarak iki gruba ayrılabilir: 1,80 m'den daha uzun olanlar ve olmayanlar.

Bunun gibi, profesörleri, mavi gözlü olanlar ve olmayanlar şeklinde de iki gruba ayırabilirsiniz. Ya da, Shakespeare'in 18 numaralı sonesini ezbere bilenler ve bilmeyenler altkümelerine ayırabilirsiniz. Bir profesörün doğru gruba alınması onun boyunun ölçülmesinin, göz renginin saptanmasının ve on sekizinci sone hakkındaki bilgisinin değerlendirilmesinin ne ölçüde hassasiyetle yapıldığına bağlıdır. Ancak, kuramsal olarak, iki gruba ayırma işi belirgin ve alışılagelmiş bir şeydir. Bir özellik belirleyip bu özelliği olan nesneleri bir grup olarak tanımlamak yeterlidir. Tanım nedeniyle diğer nesneler öbür grupta yer alırlar.

Bir nesneler kümesini ayırmakta kullanılan bu basit yöntemin bir avantajı, açıkça görüldüğü gibi, bir nesnenin bir gruba ya da diğerine ait olmasında yatar. Fakültedeki bir profesörün boyu ya 1,80 m'den büyüktür, ya da değildir, gözleri mavidir, ya da başka bir renktir, on sekizinci soneyi ezbere söyleyebilir ya da söyleyemez. Boy ölçme, göz rengini saptama ya da şiir okuma için yöntemi belirlediğinizde bir profesörün hangi grupta olduğunu da saptayabilirsiniz; hiçbir profesör dışarıda kalmaz. Her biri ya bu gruba ya da öbür gruba girer.

C. P. Snow'un sorunlarından birisi, "bütün Batı toplumunun entelektüel yaşamını" ikiye ayırırken bazı insanların dışarıda kalmasıydı. Snow'un iki grubu bir yanda fen bilimciler, öbür yanda da yazınsal entelektüellerden oluşuyordu. Ancak entelektüellerin hepsinin de muhakkak bu iki gruptan birine girmediği ortadadır. Snow'un grupları ne kadar dikkatle tanımlanırsa tanımlansın, örneğin bir ekonomisti şu ya da bu gruba koymakta sıkıntı çekersiniz. Entelektüel bir yaşam süren, ama fen bilimci ya da yazınsal entelektüel olmayan insanların var olduğu da açıktır. Snow'un fikirlerine yöneltilen eleştirilerin çoğu gerçekte, onun, dışarıdan, herkesi bu iki gruptan birine zorla sokmaya çalıştığı yolunda algılanmasından kaynaklanıyordu.

Gereken şey, Snow'un savlarının amacı doğrultusunda, onun ayrımı ile aşağı yukarı uyum içinde olan ve hiç kimseyi dışarıda bırakmayan, daha açık olarak belirlenmiş bir ayırma yapılmasıdır.

Böyle bir ayrım gerçekten vardır, onun sonucu olan iki kültür de gerçekten vardır. Bir kültür matematik bilgisi olan insanları içerir, diğer kültür de matematik bilgisi olmayanlardan oluşur. Birinci kültürde olan insanlar M tipidirler. Diğer kültürün bütün üyeleri ise N tipidirler. Bu iki kültür yüksek bir duvarla birbirinden ayrılmıştır. Bu duvarın adı da matematiktir.

Grupların kesin olarak belirlenmesi için, matematik bilgisi ölçümü yeterince belirli standartlara göre yapılmalıdır. (Bir kişi eğer temel kavramlara ve kalkülüs tekniklerine aşina ise onun M tipi olduğunu söylemek akla yakın bir standart olabilir). Ancak böyle bir standart saptamaksızın da açıkça görülen iki olgu vardır:

* M tipi herhangi iki kişi birbirlerini hemen tanırlar.
* Tanımlar "entelektüel yaşam" süren kişilerle sınırlandırılırsa, M ve N tipi kültürler, Snow'un fen bilimci ve yazınsal entelektüellerden oluşan iki kültürüne iyice yaklaşmış olur.

C. P. Snow bir elektrik mühendisini ve bir kuramsal fizikçiyi fen bilimci grubuna, bir klasikler uzmanı ile bir tarihçiyi de yazınsal entelektüel grubuna koyar sanırım. Ben de öyle yaparım. Öyle olmakla beraber, bir elektrik mühendisi ile bir fizikçide ortak olan şey, ikisinin de, bilimsel bir kuramı dikkatli deneylerle sınamak şeklindeki bilimsel yöntemi temel alan ortak bir yöntembilime adanmış olmalarından daha temel ve esaslı bir şeydir. Gerçekte, kuramsal fizikçi deney yapmaktan çok uzak olabilir. Buna karşılık elektrik mühendisi de sınai yenilik sayılabilecek uygulamalar içeren bir çalışma içinde olabilir. Ancak, mühendis ve fizikçinin ortak yanı, doğanın kitabının matematik diliyle yazılmış olduğu ilkesine temelde ve derin bir şekilde adanmış olmalarıdır. Her ikisi de –farklı okumuşluk düzeylerinde– bu dili anlayabilirler. Çalışmalarını birbirleriyle tartışırken matematiksel semboller ve terimler kullanmada duraksamazlar. Her biri M tipi bir kişidir. Diğeri de bunu hemen anlar.

Buna karşılık, klasikler uzmanı ve tarihçinin matematik kolaylığına sahip olmadığı kesin gibidir. Onların her ikisi de kalkülüs düzeyinde bile üniversite matematiği almamıştır, her ikisinin de araştırma yaparken, ya da ders verirken matematik kullanması pek olası değildir. Makaleleri açıklayıcı ve betimleyicidir. Bu makaleler önemli olabilirler, ama en ufak ölçüde bile matematiksel değildirler. Kendi aralarında, ya da başka N tipi kişilerle konuşurlarken matematik kolaylığının bulunmaması önemli olmasa da, diğer kültürdeki insanlarla konuşurken bu noksanlık sorunlara neden olur - tıpkı yemek masasında sosyoloğun düştüğü durumda olduğu gibi. Bir tartışma çıktığında M tipi insan eninde sonunda matematiğe yönelir. O zaman da N tipi insan, kendini cahil hissederek, hep geri çekilir.

Böyle bir karşılaşmanın ünlü bir örneği on sekizinci yüzyıl filozofu Denis Diderot ile çağdaşı İsviçreli büyük matematikçi Leonhard Euler arasında geçer. Bu olayın öyküsü hem Ian Stewart[10] hem de Augustus De Morgan tarafından nakledilmiştir. De Morgan'ın versiyonu şöyledir:[11]

> Diderot, İmparatoriçe'nin daveti üzerine Rus Sarayı'nı ziyaret etti. Rahat bir şekilde konuşuyor ve saray çevrelerinin genç üye-

lerine uzun uzun ve canlı bir şekilde Tanrı tanımazlıktan söz ediyordu. İmparatoriçe çok hoşlanmıştı. Ancak danışmanlarından bazıları bu doktrin yorumlamalarını frenlemenin iyi olacağını ileri sürdüler. İmparatoriçe konuğunun ağzını doğrudan tıkamayı hoş karşılamayınca şöyle bir yol bulundu: Diderot'ya, ünlü bir matematikçinin elinde, Tanrı'nın varlığının cebirsel yolla yapılmış bir kanıtlaması bulunduğunu, eğer isterse, bütün sarayın huzurunda matematikçinin bunu kendisine verebileceğini söylediler. Diderot memnunlukla kabul etti. Matematikçinin adı verilmemişti; ama o Euler idi. Euler, Diderot'ya doğru yürüdü, ciddi bir tavırla ve tam inandırıcı bir ses tonuyla: "Mösyö, öyleyse

$$\frac{(a+b^n)}{n} = x,$$

Tanrı vardır!" dedi. Etraftan kahkahalar yükselirken, cebir bilgisi kuş dili kadar bile olmayan Diderot çok bozuldu ve sinirlendi, Fransa'ya hemen dönmek için izin istedi, bu izin de verildi.

Euler'in Diderot'ya söylediği anlamsız bir şeydi. Ancak bunu Diderot bilmiyordu, çünkü M tipi bir insanla karşı karşıyaydı, kendisi ise N tipiydi. Tartışma –bütün bu tür tartışmaların sonuçlandığı gibi– N tipi insanın kaçmasıyla son buldu.

C. P. Snow iki kültürden söz ederken aklında Batı "entelektüel yaşamı"nın birbirinden ayrılmış iki bölümü vardı. Onun iki gruba ayırdığı insanlar kümesi, akademik olarak çalışan, ya da temel etkinlikleri akademik türden olan –yazarlar, besteciler, ya da üniversite dışındaki fen bilimciler– insanlardı. O, toplumun tümüyle ilgili değildi ve onun iki kültürü, işleri, şu veya bu anlamda, öncelikle entelektüel olmayan kişileri kapsamıyordu. Snow iki kültür kavramını ayakkabı satıcısına kadar genişletmemişti.

Öte yandan, M tipi ve N tipi kavramları bütün uygarlığı iki kategoriye ayırmaktadır. Her insanda matematik becerisi ya vardır ya da yoktur. Varsa o M tipidir, yoksa N grubundadır. Ancak, M tipi ve N tipi kavramları –Snow'un iki kültürü için olduğu gibi– daha çok akademisyen entelektüellere uygulandığı zaman ilgiye değer. Bu sınırlama yapıldığında, M tipi ve N tipi akademisyenler Snow'un "fen bilimciler" ve "yazınsal entelektüeller" kategorileri ile hemen tam olarak uyuşurlar.

M tipi ve N tipi kavramları Snow'un iki kültür fikriyle esasta uyuşmakla beraber, gerçekte onlardan çok daha fazlasını açıklarlar. Bir kere, bu kavramlar aynı alanda çalışan araştırmacılar arasındaki büyük farklılıkların anlaşılmasına olanak verirler; –Snow'un tablosunda– aynı kültüre mensup olması gereken araştırmacılar, demek oluyor ki gerçekte öyle değildir. Böyle bir ayrımın örneği uluslararası ilişkilerde görülebilir.

Uluslararası ilişkiler alanında çalışanlar uluslararası siyaset, diplomatik kararlar, dış politika uygulamaları, bağımsız devletlerin birbirlerine karşı olan genel tutumları gibi konularla uğraşırlar. İlk bakışta bu alan, tümüyle, Snow'un fen bilimciler ve yazınsal entelektüeller kategorilerinin dışındaymış gibi görünür. Bununla beraber, Snow ve onun kavramlarını destekleyenlerin, bu araştırmaları, kendilerine yakın meslektaşları olan tarihçiler ve siyaset bilimcileriyle birlikte, yazınsal entelektüeller kategorisine koyacaklarından hiç kuşkum yok. Ancak böyle genel bir sınıflandırma, işi basite indirgeme olur, çünkü bu alandaki araştırmacılar kendi içlerinde kesin çizgilerle gruplara ayrılmışlardır. Bu gruplar, bu alana giren konularda ortaya koydukları farklı analitik yaklaşımlarla kendilerini gösterirler. Bu iki yaklaşım Hedley Bull tarafından *klasik yaklaşım* ve *bilimsel yaklaşım* olarak adlandırılmıştır. Bull'un tanımının yer aldığı *Contending Approaches to International Politics* (Uluslararası Politikada Çatışan Yaklaşımlar) kitabının editörleri olan Klauss Knorr ve James N. Rosenau bu yaklaşımları kullanan araştırmacıları, sırasıyla, *gelenekçiler* ve *bilim adamları* olarak tanımlamaktadırlar.

Eğer Hedley Bull'un denemesini okursanız bu iki grup arasındaki bölünmenin derin ve bağdaşmaz olduğunu (en azından kitabın yayımlandığı tarihe kadar) görürsünüz. Kendisi bir gelenekçi olan Hedley Bull diğer taraf için şöyle demektedir:[12]

> (....) bilimsel yaklaşımın uluslararası ilişkiler teorisine katkısı çok az olmuştur; bundan sonra da çok az olması beklenir. Kla-

sik yaklaşımın sınırlarını zorlaması ve sonunda onu yerinden etmesi amaçlandığı takdirde kesin olarak zararlıdır da. (....) Bilim adamları onu, sözümona "model"lerin meydana getirilmesi ve uygulanması olarak algılamakla, bu alandaki teoriye büyük zararvermişlerdir.

Öte yandan, aynı kitapta Morton A. Kaplan şunları yazmaktadır:[13]

> Bu durum (yöntemlerin yanlış kullanılması) şu olguyla da anlaşılmaktadır ki, kendisinin birbiriyle uyumsuz şeyler hakkında konuşmakta olabileceği tehlikesini açıkça fark eden ve politikanın bu ölçüde akıllı bir öğrencisi olan Hedley Bull, aşırı yandaşlık ve yersiz genelleştirmeler yapma şeklindeki, benim de gelenekçilik tuzağı adını verdiğim tuzağa düşmekten kurtulamamıştır.

Kaplan, bundan başka, "Gelenekçiler çoğunlukla zeki ve esprili kimselerdir. Nasıl oluyor da bu kadar büyük hatalar yapıyorlar?" demektedir.[14]

Bütün kitap bu yolda devam ediyor: Tez ve karşı tez, eleştiri ve karşı eleştiri; ortadan ikiye bölünmüş tek bir alan. Ancak bu bölünmeyi dikkatle incelerseniz "gelenekçi" ve "bilim adamı" terimlerinin tam olarak kusursuz olmadıklarını görürsünüz. "Bilim adamları"nın ayırt edici nitelikleri, burada da, bilimsel yönteme ya da deneyselliğe bağlı olmaları değil, sadece, uluslararası ilişkiler alanındaki araştırmalarında geniş ölçüde matematik ve matematiksel yöntemler kullanmalarıdır. Buna karşılık, "gelenekçiler" çalışmalarında matematik kullanmazlar. Uluslararası ilişkilerde bilim adamları M tipi, gelenekçiler N tipi insanlardır. Aralarındaki bölünme derin ve katıdır, çünkü M tipinden olanlar, N tipinden olan kişilerle mesleki konularda iletişim kurmazlar. N tipinden olanlar da M tipi insanlarla konuşmak *istemezler*; bunun başlıca nedeni M tipi kimselerden çekinmeleridir. Ters yöndeki iletişim de, tanım gereği arada anlaşmazlık bulunduğundan, olanaksızdır.

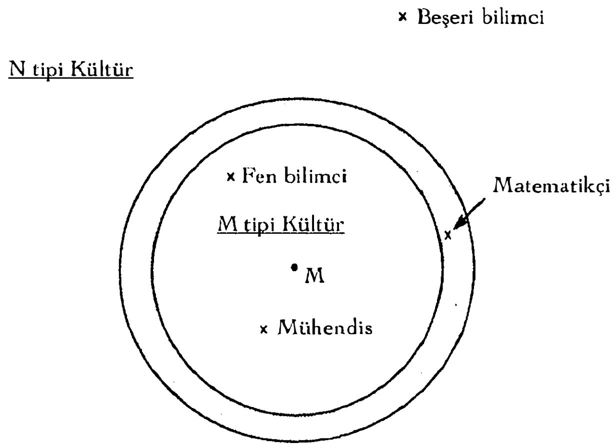
Bu yolla, M tipi ve N tipi kavramları –Snow'un iki kültürü ile temelde tutarlı olduğu halde– entelektüel toplum için daha net bir ayrım sağlamaktadır. Bu kavramlar *aynı* alanda çalışan araştırmacılar arasında çoğu zaman var olan farkları görmemize ve anlamamıza olanak verirler. Ancak bu kavramlar bir başka şey daha sağlar: Ayrımın netliğinden ve belirginliğinden daha temel olan bir şey. Bu kavramlar ayrılmayı ortadan kaldırmak için, iki kültürü birleştirmek için, ne yapılması gerektiğini de tam olarak ortaya koymaktadırlar.

Gerçekten de sorun artık çok basit olarak ifade edilebilir. İki kültür M tipi ve N tipi insanlar topluluğudur. Birinci tipteki insanların matematik becerileri vardır, ikinci tiptekilerin ise yoktur. "Beceri"yi temel kalkülüs düzeyindeki matematiğe aşina olmak şeklinde tanımlanmış olarak kabul edebiliriz. M tipi sınıfının üyeleri işlerinde matematiği *kullanan*, ancak onu estetik olarak algılamayan mühendisler, fen bilimciler ve diğer insanları içerir. M tipi insanlar matematiği estetik olarak duyumsayamayacak kadar ona *yakındırlar*, estetik uzaklık açısından, "yeterince uzaklaşmamış"tırlar. Onlar için matematik çok sıcaktır. İkaros'un güneşe çok yaklaştığı gibi, onlar da matematiğin çok yakınındadırlar.

Diğer tarafta –uzakta, yeterli ölçüden çok daha uzakta– N tipi insanlar yaşamaktadır. Onlar –beşeri bilimciler, şairler, sanatçılar– oralarda karanlık bir yerlerdedirler. Onlar için matematik denilen sanat yapıtının, kutup buzlarının millerce derinine gömülü bir mermer parçasından farkı yoktur. Matematik ilgisiz bir şeydir.

Bu iki grup, Şekil 16'da yeniden verilen, matematiğin estetik halkasında gösterilmiştir. Bu iki grubun arasında, matematiğin yumurta kabuğu inceliğindeki estetik halkası içinde, matematikçiler yalnız başlarına yaşarlar, konunun büyük estetik zevklerini, ihtişamla ve bilgece, birbirleriyle paylaşırlar, doğal müşterileri olan M tipi insanlardan ve kendileriyle hiçbir alışverişleri olmayan N tipi insanlardan esirgerler.

Matematiğin estetik halkası, iki kültürü belirler ve onları birbirinden ayrı tutar. Bu ayrılığın büyüklüğü, halkanın dış sınırı dışında yaşayan entelektüellerle (N tipi) iç sınır içindeki



Şekil 16. Matematiğin estetik halkası ve iki kültür

entelektüellerin (M tipi) sayılarının toplamı ile kesin olarak belirlenmiştir. Eğer bu kültürleri birleştirmek istiyorsanız tek bir şey yapabilirsiniz: En azından, ilköğretim ve üniversite düzeyi matematik öğretiminde devrim gerektiren bir şey. İki kültürü birleştirmek için halkayı genişletmeniz gerekir.

Benzersizlik

Matematikçiler, bildiğim kadarıyla, konularının *benzersiz* olduğu düşüncesini taşımazlar. En azından benim deneyimlerime göre matematiğin benzersiz olduğunu söylemezler. Araştırma üniversiteleri dışındaki üniversite hocaları bile –meslekleri matematik öğretmek olan ve matematik hakkında konuşan kişiler bile– onun benzersizliğinden söz etmezler. Bana söz etmedikleri ise kesin.

Matematikçilerin, kendi konularının bütün diğerlerinden daha entelektüel, daha önemli olduğunu düşündükleri doğrudur. Ancak onların, konularının akademik yelpazede benzersiz olduğunu iddia ettiklerini duymadım. Eğer araştırmacı matematikçiler dikkatlerini ciddi olarak diğer akademik disiplinlere çevirirlerse, matematiğin benzersiz olduğunu hemen fark edeceklerdir. Ancak araştırmacı matematikçiler dikkatlerini sadece matematiğe yöneltirler. Aristokrasi dışında olup bitenlere aldırmazlar, öyle şeyler onlara ilginç gelmez.

Belki de matematikçiler ormanı görmeyecek kadar ağaçların içine dalmış durumdalar. Belki de matematikçiler akademik dersler arasında matematiğin konumunu fark edemiyorlar, tıpkı amirallerin, deniz kuvvetlerinin uluslararası siyasetteki rolünü çok kere fark edemedikleri gibi (Bir amiralin işi askeri bir iştir, siyaset başka bir şeydir). Belki de dışarıdan ve konu hakkında bilgili bir değerlendirmeye gereksinim vardır. Allen L. Hammond tarafından böyle bir değerlendirme yapılmış bulunmaktadır.

Hammond'un oldukça geniş bir matematik eğitimi ve bilgisi vardır, ancak kendisi doğrudan matematikle uğraşmaz. O, matematik aristokratlarının dışında durup içeriye bakar. Matematiği oldukça berrak bir şekilde görmesi belki de bu nedenledir. "Mathematics, Our Invisible Culture" (Matematik, Görünmeyen Kültürümüz) makalesinde "Bu benzersiz bilgi alanının, bu benzersiz insan uğraşının doğasında bulunan, onu bu kadar ıraklara götüren ve onunla uğraşanları popüler kültürden bu kadar soyutlayan şey nedir?" diye soruyor.[15]

Matematikçiler topluluğunun dışında olan Hammond matematiğin benzersiz olduğunu görmektedir. İki tümce sonra da konunun hemen hemen en önemli olan noktasına geliyor. Şunları yazıyor:[16]

> Örneğin, matematik hemen her zaman bilimin bir kolu, salt uslamlamanın özü olarak betimlenir. Bilimin ulaştığı çağdaş yapı ve onun verimli teknolojik sonuçları için matematiğin çok yararlı, belki de vazgeçilmez olduğu, kuşku götürmez. Ancak matematikçiler konuları hakkında konuşurken ısrarla sanatla ilişkili terimler –güzellik, zarafet, yalınlık gibi– kullanırlar; resme, müziğe benzetmeler yaparlar. Çoğu matematikçi, çalışmalarının yararlı olmayı amaçlamadığını, herhangi bir pratik uygulama olanağı ile güdülenmediğini ısrarla vurgular. Tuhaf bir yararlılık anlayışı ve estetik eylem ilkesi ve de ileride hayli inceleme gerektirecek bir ikilik...

Evet. Hammond beş tümce ile her şeyi anlatmış. Bilim için matematik "derinden yararlıdır". Ve evet, matematikçiler konularını bir "sanat" olarak algılarlar. Anımsayacaksınız, Eugene P. Wigner matematiğin bilimler için "akıl almaz etkinliği"nden söz etmişti. Cambridge fizikçisi John Polkinghorne da "Matematik, fiziksel evrenin kilidini açan soyut anahtardır." [17] sözleriyle hem Hammond'a hem de Wigner'e katılmaktadır.

Hammond tuhaf ve derin bir "estetik eylem ilkesi"nin var olduğunu söylemekte gerçekten haklıdır. Ayrıca, yerinde olarak, ilke-eylem ikilisinin öneminin de farkındadır. Ancak bu sözlerin sonucunu getirmez. Makalesinde Hammond bu estetik ilkeden söz eder ve matematikçilerin bu konuda birbirleriyle konuşmalarından örnekler verirse de bunun dış dünyaya doğrudan açıklanmasının M tipi ile N tipi arasında var olan derin ayrılık ile olan bağlantısına hiçbir yerde dokunmaz.

Bu bağlantıyı fark etmediği için de Hammond'un görüşleri eksik kalır. Matematikçilerin estetik ilkesinde yatan muazzam eğitimsel potansiyelin farkında değildir. Bunun dışında kusuru olmayan Hammond'un özetine bir şey daha eklemeye gerek vardır. Ben bu eklemeye *matematiğin benzersizlik özelliği* diyorum:

> Mezuniyet öncesi akademik disiplinler içinde matematik hem bilim hem de sanat olarak *benzersiz* bir konumdadır. Mühendisler ve fen bilimciler matematiğe yararlı olduğu için değer verirler, matematik olmadan işlerini yapamazlar. Diğerleri –beşeri bilimciler, yazınsal entelektüeller, bütün N tipi kişiler– eğer matematik kendilerine matematikçilerin onu gördüğü şekilde sunulursa, zarif ve yaratıcı bir sanat olarak, etkilenebilirler. Beşeri bilimcilerin matematiğe ilgi duymaları, konunun yararlı oluşu ve uygulanabilirliği öne sürülerek sağlanamaz. Çünkü matematik onlara daha önce de bu yolla sunulmuştu ve bu yaklaşım onları matematikten uzaklaştırmış, bu da iki kültürün var olmasına yol açmıştı.

Hammond yalnızca tezini mantıksal sonucuna götürmede "kusur etmiştir". Matematikçilerin kusuru ise önemli sonuçları olan bir ihmalden kaynaklanan eksikliktir. Matematikçiler kendilerinin doğal misyonu olması gereken şeyi, yani kendileri için var olan, matematiğin zarafet ve sanat kavramlarını kendi soylularının dışındaki eğitim görmüş olan kadın erkek herkese iletmeyi ihmal etmişlerdir. Bu iş ise onlardan başka kişilerce yapılamaz. Konu üzerinde gerçekten düşünenlerin algılayabileceği yaratıcı sanat deneyimi yalnız matematikçiler tarafından anlaşılabilir. Konunun estetik bağlamını yalnız matematikçiler anlayabilirler. Onlar Hammond'un "estetik eylem ilkesi"ni iyi bilirler. Böyle bir ilkenin var olduğunu kendileri dışındaki kişilere aktarmakta kusur etmişlerdir.

R. G. Collingwood *The Principles of Art* kitabında sanatçının, izleyicisi ile ilişki kurmasının önemini vurgulamakta, bu ilişkinin de sadece sanatçıdan izleyicisine doğru bir iletişimden ibaret kalmaması gerektiğini –bana göre etkileyici bir biçimde– iddia etmektedir. Collingwood, bu ilişki bir işbirliğine dönüşmediği takdirde sanatçının –sonunda da sanatın kendisinin– başarısızlığa uğrayacağını vurgulamaktadır. "Gerekli olan ilişki, izleyicinin de yaratıcı eyleme yürekten katıldığı, işbirliğine dayalı bir ilişkidir." diye yazar.[18]

Collingwood bize, sanatçı eğer başarılı olacaksa, izleyicisine karşı tutumunun nasıl olması gerektiğini anlatıyor:[19]

> Kendisi izleyicilerini kendi aklının karanlık ve çetin patikalarında gidebilecekleri kadar uzağa arkasından sürükleyen bir mistagog* olmamalı, bunun yerine, kendisini izleyicilerinin sözcüsü olarak, onların söylemek istedikleri, ancak yardım edilmeden söyleyemediklerini dile getiren bir sözcü olarak algılamalıdır.

Matematikçilerin Collingwood'un ölçütlerine ters düştükleri –fena halde ters düştükleri– ortadadır.

Soylular arasında yer alan matematikçi ile bu sınıfın dışındaki bir kimse arasında, işbirliği içeren herhangi bir ilişki yoktur.

* Mistagog: Dinsel gizemleri yorumlayan ve yayan kimse. (ç.n.)

Aristokrasi'nin üyeleri yaratıcı etkinliklerini dışarıdan bir dinleyici ile paylaşmanın arzu edilir –hatta olanaklı– bir şey olduğu yolunda bir düşünce taşımazlar. Ve de –dışarıdaki izleyicilerin beşeri bilimcilerden oluşan bölümüne gelince– bu yaratıcı etkinliğin varlığından bile haberleri yoktur.

Kendi yüce sanatlarının zarafet ve güzelliği konusunda beşeri bilimcilerin dikkatini çekememeleri, matematikçilerin bütün kusurları içinde en büyük kusurudur. Çünkü matematiğin en uzağında olanlar beşeri bilimcilerdir. Fen bilimciler matematiğe yaklaşırlar, çünkü ona gereksinimleri vardır, çünkü o yararlıdır. İsteseler de istemeseler de doğanın dilini öğrenmek zorundadırlar - eğer onun kitabını okuyacaklarsa.

Beşeri bilimciler matematiğin mistagogluğuna gerek duymazlar, o nedenle de ondan uzak dururlar. Estetik halkanın çok uzağından matematik onlara kış rüzgârları kadar soğuk gelir. Matematiğin sihirli dilinden çok uzakta olduklarından beşeri bilimcilerin *söyleyemedikleri* şeyler vardır: Doğa hakkında, kendisine karşı güçlü duygular besledikleri, önemli düşünceler taşıdıkları çağdaş teknoloji hakkında. Ancak bunlar, teknik dünyaya egemen olan M tipi, kendileri, yani beşeri bilimciler de N tipi oldukları için ifade edemedikleri şeylerdir.

Bu beşeri bilimciler matematikçilerin doğal izleyicileridir, öyle izleyiciler ki, matematikçi onların sözcüsü, kendilerinin "söylemek istediklerini, ancak yardım görmeden söyleyemedikleri"ni dile getiren bir sözcü olmalıdır. Ancak bunun gerçekleşmesi için matematikçinin, beşeri bilimci izleyicisi ile bir işbirliği duygusu paylaşması gerekir. Bu da matematikçinin öncelikler ve değerler konusundaki düşüncelerini büyük ölçüde değiştirmesini gerektirir. Collingwood'un ifadesi ile:[20]

> Bu onun kendisini küçültmesi anlamına gelmez. Bu, onun, kendi kişisel duygularını dile getirmeyi değil, onun yerine, izleyicileriyle paylaştığı duyguları ifade etmeyi iş edinmesi demektir; başkalarının onun duygularını hissedip etmemesi önemli değildir.

Doğru. Ancak sanatçı-izleyici işbirliği için bu reçeteyi verirken Collingwood matematikçileri düşünmüyordu. Ben de, beşeri bilimcilerin kendi matematiksel estetik duygularını paylaşabilecekleri bir izleyici oluşturduğuna inanan yarım düzine matematikçi bulabileceğinizden kuşku duyarım. Beşeri bilimcilerle olan ilişkilerinde matematikçiler Collingwood'un mistagogları gibidirler; matematiğin karanlık bir halkanın içinde bir yerlere saklanmış olan gizemlerini elden ele birbirlerine geçirirler.

VIII. Bölüm

Yüce Şeyler

Bertrand Russell, bir keresinde, insanın neden matematik öğrenmesi gerektiği sorusunu ciddi olarak ele almıştı. Verdiği yanıt sorunun dar kapsamının çok ötesinde oldu; bugün de, insanın herhangi bir şeyi neden öğrenmesi gerektiği sorusuna kabul edilebilir bir yanıt oluşturmaktadır. Ben söz konusu yanıtın liberal eğitim kavramının bir tümce ile dile getirilişi olduğunu düşünüyorum. Lord Russell şöyle yazıyor: "(....) arzu edilen şeyin sadece yaşamak olgusu olmayıp, yüce şeyler üzerinde düşünerek yaşamak sanatı olduğunun hatırlanmasında yarar vardır."[1]

Evet, *yüce şeyler* üzerinde düşünerek yaşamak *sanatı*.

Russell'ın yüce şeylerden kastettiği, resim, heykel, edebiyat, müzik, mimari ve normal olarak "sanat" genel başlığı altında toplanan şeylerdi. Ancak o bunlardan fazlasını da kastetmekteydi. "Yüce şeyler" içinde *yüce ideler* de vardır. Russell'ın yaşama sanatı, insanın "düşünmenin güzelliğine bütünüyle duyarlı" olmasını gerektirmektedir.

Ben de aynı kanıdayım. Düşünsel güzellik dünyasının en geniş alanlarından biri de matematiktir. Yalnız bu bile onu öğrenmek için yeterli nedendir.

Niteliksiz Sanat

Ben matematiğe onun güzelliği nedeniyle başlamadım. Tanıdığım kişilerin hiçbiri de öyle yapmadı. Bütün okul çocukları gibi ben de hiçbir seçeneğim olmadığı için matematik okudum. Bana –herkese olduğu gibi– matematiğin eninde sonunda benim için yararlı olacağı anlatılıyordu. Konunun –öğretmenlerimin söylediğine göre– büyük yararı vardı. "Bekle, bir gün sen de göreceksin." diyorlardı.

Bana neden "bekle" yerine "tahammül et" demediklerini o zamanlar anlamamıştım. Çünkü benim yıllar boyu, matematik söz konusu olduğunda yaptığım şey buydu: Tahammül etmek.

Öğretmenlerim bana matematiği sadece "anlattılar". Sayılar ve sembollerle işlem kurallarını gösterdiler. Bu süreçte bana düşen şey, ev ödevlerinde ve sınavlarda bazı şeyleri becerdiğimi gösterebilmek için, bu işlemler üzerinde yeterince alıştırma yapmaktan ibaretti. Üniversite düzeyi öncesinde, öğretmenlerim matematik ile benim belirsiz bir şekilde liberal eğitim olarak anladığım şey arasında bir ilişki olabileceğine bir kez bile değinmediler. Benim okula gittiğim günlerde matematik demek işlem yapmak demekti - yalnızca işlem, başka bir şey değil.

Gösterdikleri kurallar o zamanlar bana karmaşık geliyordu, ancak ezberleyerek öğrenebiliyordum. Şimdi, onların karmaşık olmadıklarını, öyle görünmelerinin onları öğretme şeklinden ve onları akılda tutmak için önerilen yöntemden kaynaklandığını biliyorum. Bu yöntem düşünmemek ve her gün tekrar etmekten oluşuyordu. Şimdi bildiğim bir başka şey de, öğretmenlerin matematiği bize bu şekilde öğretmelerinin nedeninin onların da bu yolla öğrenmiş olmalarıydı. Onu benden daha çok anlamıyorlardı.

Çocukların çoğu gibi, eksi sayılarda (bkz. s. 54) benim de kafam karışıyordu. Bir gün öğretmene "–2 ile –3 çarpıldığında neden +6 olduğunu anlamıyorum." demiştim. Sert bir tavırla "Matematiğe yaklaşım biçimin çok kötü. İki eksi sayının çarpımının artı olduğunu sana daha önce de söylemiştim." diye yanıtladı.

O dönemde matematik yalnızca *anlatılırdı*. Anlatmak ise öğretmekten daha azını içerir. Etkili bir Amerikalı ressam olan Robert Henri "anlatma" için şöyle demişti: "Niteliksiz sanat yalnızca 'işte bu, gecedir' şeklinde anlatmadır. Yüce sanat ise size geceyi duyumsatır."[2]

Benim ilk öğretmenlerim matematiği niteliksiz bir sanatmış gibi öğretiyorlardı. Konuya ilişkin bir *duygu* aşılamadılar. Ne yazıktır ki bu duygu kendilerinde de yoktu.

Üniversiteye yeni başlayan öğrenciler ve onların matematik geçmişleri hakkındaki deneyimlerimden anladığıma göre hâlâ değişen pek bir şey de yok. Öğrenciler matematiğin sanatla herhangi bir biçimde ilgili olabileceği yolunda bir duygu taşımaksızın üniversiteye geliyorlar. Gerçekten de, böyle bir duyumun olanaklı olmadığına inanmış görünüyorlar, ya da, bunun –çok yüksek frekanslı sesler gibi– normal insanların duyum sınırları dışında olduğundan eminler. Onlar üniversiteye –vaktiyle benimde yaptığım gibi– yıllarca sıralarda oturup, matematiğin kendilerine anlatılmasını dinledikten sonra geliyorlar.

Daha önce de açıklamaya çalıştığım gibi, ben matematik duyarlılığının doğuştan olmadığı kanısındayım. Bu kitapta ileri sürülen tezin bir bölümü de, gerçekte, matematiğin bir sanat olarak geniş bir izleyici için, özellikle de müzik, edebiyat, resim gibi sanatları vazgeçilmez bulan insanlar için, anlaşılabilir kılınabileceğine ilişkindir. Matematiğin çoğu insanın sanatsal erişimi ötesinde kalması, ne o insanların ne de matematiğin kusurudur. Yanlışlık konunun sunuluş şeklinde. Öyle olmasa, şiir sevdiği halde matematikten nefret eden insan bulunabilir miydi? Gereği gibi sunulduğunda bunların ikisi hemen hemen aynı şeydir.

Öğrenciler üniversiteye, matematiği uzun yıllar bir niteliksiz sanat olarak duyumsamış olarak geliyorlar. Ne yazık ki birçoğu da üniversiteyi aynı şekilde bitirip gidiyor.

Değer

Öğrenciliğimin ilk yıllarında öğretmenlerim pratik değer kavramını bir nakarat gibi tekrarlayıp dururlardı. İlkokuldan başlayarak lise sonuna kadar her derste, her düzeyde bu tekrarlandı. Öğretmenlerim "değer" sözcüğü ile, Bertrand Russell'ın kullandığı anlamda "soyut değer"i değil daha dünyalık bir şeyi kastediyorlar, matematiği, günlük yaşamın yürütülmesindeki yararını ileri sürerek değerlendirmeyi amaçlıyorlardı.

Eğer çok ileri gitmeselerdi, çok iddialı olmasalardı, bunda herhangi bir sakınca olmayacaktı. Matematik o anlamda *yararlıdır*. Ancak "değer"in bu dar anlamlı kullanımı ile az olan bir şey, çok fazla gibi görünmektedir. Para üstü saymak, halıları ölçmek, çek defteri hesabını tutturmak çok az matematik bilgisi gerektirir. Böylesine sıradan işlerin nasıl olup da bu kadar uzun eğitim gerektirdiğini eskiden beri merak etmişimdir.

Matematiğin gerçek değeri sıradan etkinliklerin dışındadır. "Matematiğin değeri"nin temelde iki bileşeni vardır:

1. Matematiğin, Russell'ın "Yüce Şeyler"inden biri olarak değeri, "gerçek" değil de, "sanat" gibi, yaşam için gerekli olan bir şey olarak değeri.
2. Matematiğin, Polkinghorne'un "fiziksel evrenin kilidini açan soyut anahtar" olarak değeri.

Gördüğümüz gibi, bunlardan birincisi matematiğin, bir yaratıcı ve entelektüel sanat olarak, kendi iç değeri ile ilgilidir. İkinci değer ise, bildiğimiz gibi, gerçek dünyanın fiziksel olgularını açıklama ve önceden tahmin etme konularında matematiğin akıl almaz etkinliğinden kaynaklanmaktadır. Bu değerlerden herhangi birini tam olarak takdir etmek için belli bir düzeye kadar ciddi şekilde matematik okumak gereklidir.

Benim buradaki amacım öyle bir matematik sunmak değildir. Ben, daha çok, matematiği bu değerlerin var olduğunun açıkça görüleceği şekilde anlatmaya çalışmaktayım. Özellikle de, matematiğin değerinin, şöyle ya da böyle, önemsiz olduğu düşüncesini tümüyle ortadan kaldırmak istiyorum.

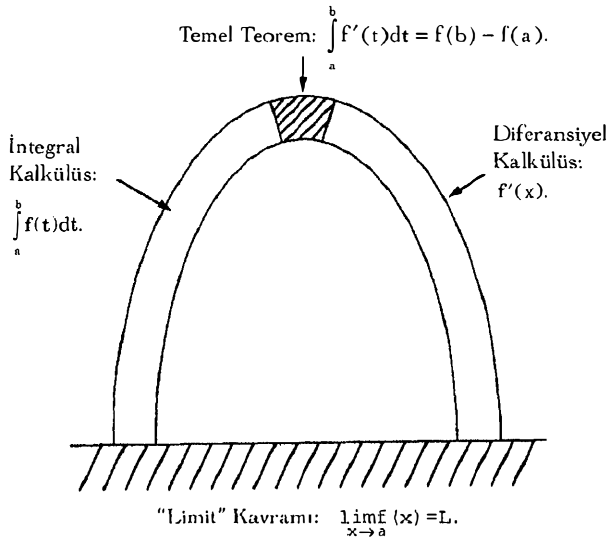
Ciddi çalışmaya gelince, matematiğin değerinin tam olarak algılandığı düzeyin ölçüsü hiç de kendiliğinden gözler önünde değildir. Gerçekten de, eğer "tam olarak" deyimi kesin biçimde yorumlanırsa belirli bir düzey belki de hiç yoktur, tıpkı, örneğin, çağdaş İngiliz romanının değerinin tam olarak algılanması için kesin bir edebiyat düzeyinin var olmaması gibi.

Öyle olmakla beraber, "önem taşıyan matematik düzeyi" çoğumuz için "kalkülüs konusunun sonuna kadar olan matematik" demektir. Anımsayacaksınız: M tipi ve N tipi kültürlerin özelliklerini tartışırken söz konusu ettiğim de bu düzeydi. Benim pratik kuralıma göre, eğer bir kimsenin kullandığı matematik bilgisi yeterli ölçüde kalkülüs içeriyorsa o kişi M tipidir.

Bu düzey tartışması sırasında matematik ders programlarında kalkülüsün oynadığı özel rolü anlamanız yararlı olabilir. Çoğu kimse için kalkülüs daha yüksek matematiğin çekirdeğini temsil eder. Bu kimselerin amaçladığı en üst düzey matematik dersi kalkülüstür. Öte yandan, çoğu matematikçi için kalkülüs –en iyi haliyle– matematiğin ilk gerçek dersidir. Kalkülüs öncesi şeylerin tümü –birçok matematikçi için– matematik için hazırlık eğitimi niteliğindedir. New Haven'in, Broadway için hazırlık olması gibi, yalnızca hazırlıktır.

Taraf tutmadığıma lütfen inanın. Ben yalnızca matematikçilerin görüş açısından durumun nasıl olduğunu açıklıyorum. Doğruyu söylemek gerekirse, onlarla aynı kanıda değilim. Otuz yıldır kalkülüs öğretirim. Yine de her keresinde konunun daha önce bilmediğim bir yönünü keşfediyorum. Kalkülüs eğitimi vermenin, işimin en anlamlı bölümü, yaptığım en önemli iş olarak düşünürüm. Bunu lütfen yaptığım bir iş olarak görmüyorum.

Kalkülüsün değeri hakkında fikir sahibi olmak için konuyu sezgisel olarak kavramanız gerekir. Kalkülüsü, taşlar yerine idelerin yerleştirilmesiyle oluşmuş büyük bir kemer olarak düşünün (bkz. Şekil 17).



Şekil 17. Kalkülüs kemeri.

En eski ve kaba düşünce MÖ 200 yıllarında Siraküzalı Arkhimedes'den ve on yedinci yüzyıl Fransasındaki Pierre Fermat'dan geldi. İngiltere'de Isaac Newton (1642-1727) ve Almanya'da Gottfried Leibniz (1646-1716) birbirlerinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanda kemerin taşlarının büyük bölümünü yarattılar, yonttular ve yerine koydular.

Kemerin iki ayağının da isimleri vardır: Birisine *diferansiyel kalkülüs*, ötekine de *integral kalkülüs* denir. Bu iki ayak görünürde birbirinden çok farklı iki kavramı, bir fonksiyonun türevini ve integralini temsil ederler. Newton ve Leibniz'in büyüklükleri, esas itibariyle, iki ayağı birleştirerek kemeri tamamlamalarından kaynaklanır. Newton ve Leibniz iki ayağı tepede birleştiren kilit taşını bulmuşlardır. Bu kilit taşına *Kalkülüsün Temel Teoremi* denir.

Bu başarının önemini abartmak olanaksızdır. Matematiksel analizin tamamı ile kalkülüsün açıklayıp güçlendirdiği fizik ve bütün diğer bilimler bu büyük kemerin üstünde, onun desteğiyle oturmaktadır. Floransa'da en güzel ipeklileri, porselenleri ve altın tepsileri satan dükkânların Vecchio Köprüsü üstünde durmaları gibi, matematik ve bilim kalkülüs üstünde oturmaktadır.

Kemerin ayaklarına adlarını veren, birbirine hiç benzemeyen türev ve integral kavramlarının kendileri de daha temel bir şeyden gelmektedirler. Şimdi soyut matematik olarak bilinen şeylerin çoğunda olduğu gibi, bu kavramlar da gerçek dünya olgularını anlamak için girişilen ciddi çabalar sonucunda ortaya çıkmışlardır. Türev ve integral, sırasıyla, şu soruları yanıtlama arzusunun sonucu olarak bulunmuşlardır:

i. Bir eğri ile sınırlanmış bir bölgenin alanı nedir?
ii. Hareket eden bir parçacığın anlık hızı nedir?

Bu iki sorudan ilki ötekinden daha eskidir ve Grek matematikçilerinin, özellikle de Arkhimedes'in bu konuda önemli katkıları olmuştur. Arkhimedes özellikle bir dairenin alanını bulma sorusuna el attı. Dairesel alan için, üçgenler kullanarak (onların alanını biliyordu) giderek daha hassas yaklaştırımlar yapmak ve sonra da sezgisel bir "limit argümanı" yoluyla doğru alanı bulmak şeklinde bir yöntem –ünlü tüketme yöntemini– uyguladı.

Arkhimedes'in yöntemi son derece güçlüydü. Yöntem, örneğin, bir göl kıyı şeridi gibi düzensiz bir eğriyle sınırlanmış daha genel "eğrisel alan"lara uygulandığında, integral kalkülüsün öncüsü durumuna gelir. Şekil 17'deki uzun, ince bir S'ye benzeyen sembole "integral işareti" denir ve Arkhimedes'in 2200 yıl önce bulduğu sezgisel yöntemin doğrudan bir genellemesi olan bir tür "sonsuz toplam"ı temsil eder.

Şekil 17'deki diğer ayakta görülen $f'(x)$ ifadesi "f'nin x'e göre türevini" temsil eder. Başka bir tür limit işlemiyle tanımlanan bu yeni fonksiyon, verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun x'e göre değişme hızını verir. x'in zamanı, $f(x)$'in de bir parçacığın bu zaman içinde aldığı yolu gösterdiği özel durumda, $f'(x)$ parçacığın x anındaki anlık hızını verir.

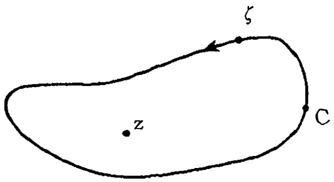
Bu kavramların dikkatle geliştirilmesi (ben 200'den az sözcük kullanarak kabaca özetledim) kolay değildir ve, kanımca, oldukça ileri düzeyde matematik içerir. Yine de bunlar kalkülüs konularıdır ve önde gelen üniversitelerin çoğunda –şu veya bu biçimde– birinci sınıfta öğretilirler.

İlk bakışta yukarıdaki *i* ve *ii* sorularının (ve onların sonuçları olan integral ve türevin) birbirleriyle bağlantılı olması için hiçbir neden yokmuş gibi görünüyor. Örneğin, Tahoe Gölü'nün alanını bulmanın Empire State Building'in tepesinden fırlatılan bir madeni paranın düşme hızını bulmakla ne ilgisi olabilir?

Ancak bu problemler birbirleriyle *ilgili*dirler ve bu nedenle, integral ve türev kavramları da öyledir. Newton ve Leibniz'in büyük başarısı birbirlerinden bağımsız olarak bu ilişkinin kesin biçimini ortaya koymak olmuştur. Bu kişiler, integral ve türevin Şekil 17'de en üstte bulunan denklemle bağıntılı olduklarını, oldukça kesin bir şekilde kanıtladılar. Bu denklem, kısaca şunu söylemektedir: İntegral ve türev birbirlerinin tersidirler, şu anlamda ki, "Bir fonksiyonun türevinin integrali fonksiyonun kendisine eşittir." Bu tümce kesin biçimde ifade edildiğinde, sonuç insan düşüncesinin en yüce başarısı olduğu sorgulanamayacak olan "Kalkülüsün Temel Teoremi"ne dönüşür.

Bu kavramlara paha biçmek olanaksızdır. Onlar olmadan ne bilim, ne teknoloji ve ne de fiziksel dünyanın, basit gözlemler ötesinde, anlaşılmasına olanak olurdu. Galileo "Doğanın kitabı matematikle yazılmıştır." diyor. Bu ifade de matematik yerine kalkülüs koyarsanız pek de yanılmış olmazsınız.

Kalkülüsteki fikirler daha üst düzeydeki başka matematik konularına da uygulanabilecek şekilde genişletilebilirler (matematikçilerin kalkülüse, giriş düzeyindeki bir ders olarak bakma nedenlerinden biri de budur). Benim gönlüme en hoş gelen genişletme ise "kompleks analiz" olarak bilinen konuya ilişkin olanıdır. Burada türev ve integral yöntemleri, z bir kompleks sayı olmak üzere, $f(z)$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerli olacak şekilde genelleştirilmiştir.



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

Şekil 18. Cauchy İntegral Formülü.

Kalkülüs tipi teoremler kompleks fonksiyonları kavrayacak şekilde genişletildiğinde daha güçlü, daha güzel olurlar. Bunlardan birisi, Cauchy İntegral Formülü, Şekil 18'de gösterilmiştir. Burada C kompleks düzlem üzerinde bir eğri, *z*, C'nin içinde bulunan bir kompleks sayı, ζ (zeta) da eğri üstünde yaşayan bir kompleks sayıdır. Teorem –basit varsayımla– çok ilginç bir şeyi dile getirmektedir: Fonksiyonun $f(z)$ ile gösterilen *z*'deki değeri, eğri üzerindeki $f(\zeta)$ değerleri ile saptanabilir.

Bu sonucun bir gerçek-dünya benzetmesi şöyle olabilir: Pazar günü çıkacak olan *New York Times* gazetesinin, yazılar her sayfanın ancak bir yüzünde olacak şekilde, özel olarak basıldığını düşünelim. Bütün gazeteyi sayfalar birbirine değecek şekilde düz olarak yere yayalım. (Çok büyük bir alan gerekecektir; bir yüzü basılı olan bu kopya, gazetenin normal büyüklüğünün iki katıdır. Bu iş için Madison Square Garden'ın oyun alanı yeterli olabilir.) Siyah bir işaret kalemiyle bu yayılmış gazetenin dış kenarları boyunca kapalı bir eğri çizelim. Eğriyi gazetenin dış kenarlarındaki her sözcüğe değecek şekilde çiziyoruz. Şimdi Şekil 18'de ζ'nın yaptığı gibi, eğri boyunca, eğrinin değdiği her sözcüğü okuyarak gidelim. Sonra da Cauchy İntegral Formülü'nü yardıma çağıralım. Teorem, bir sihir gibi, gazetenin tümündeki her sözcüğü bize söyleyecektir.

Cauchy İntegral Formülü'nün estetik değeri olduğunu dile getirmekle yetindiğimin farkındayım. Sonucun bu kitabın çerçevesinin çok ötesinde olması başka bir şey yapmama olanak vermiyor. Burada teoremin ispatını incelemek, ya da sonucunun matematiksel uzantılarını tartışmak olanaklı değil. Ancak, estetik değer vardır ve –yeterli bir matematiksel düzeyde– sonucun minimal tamlık ve maksimum uygulanabilirlik ilkelerini sağladığı açıkça belli olmaktadır. Eğer yeterince hazırlıklı gelirseniz ona tepkiniz, Stravinski'nin Bahar Ayini'nin 1913'te Paris'teki ilk icrasında müziksever dinleyicilerin tepkisi gibi olacak, adeta nefesiniz kesilecektir.

Cauchy İntegral Formülü gerçekten de basit kalkülüsün çok ötesindedir. Ancak, ona yol açan temel kavramlar kalkülüs kavramlarıdır. Hatta bütün kalkülüsü –ve ondan kaynaklanan analiz gibi konuları– geriye doğru tek bir kavrama kadar izlemek olanaklıdır. "Limit kavramı" denilen bu kavram Şekil 17'de, kalkülüs kemerini taşıyan temel taş olarak görülmektedir. Eğer kalkülüs bu tek kavramın üstünde duruyorsa, o zaman onun yol açtığı matematiğin tamamı da aynı durumdadır. Bir anlamda, matematiğin "analiz" adı verilen bölümünün tümü bu temel kavramdan gelmektedir.

1850 yılı dolaylarında, Weierstrass limit kavramının biçimsel bir tanımını verdikten sonra, kalkülüs, gerçek-dünya problemlerinin kısmen sezgisel anlatımı olmaktan çıkıp kesin matematik olma durumuna gelmiştir. Tam tanımın yapılması teknik bir konudur, burada onu anlatmaya çalışmayacağım. Şu anda sadece onun var olduğunu ve bütün matematiğin temelinde yattığını belirtmek istiyorum. Onun kadar verimli olan başka bir matematik kavramı bilmiyorum. Bertrand Russell'ın "yüce şeyler" koleksiyonuna ait olduğu bu kadar aşikâr olan başka bir kavram da bilmiyorum.

Limitin tam tanımı birtakım eşitsizlikleri, mutlak değerleri, iki tane mantıksal niceleyiciyi ve tek bir mantıksal gerektirim içerir; bütün bunların bir arada olması da tanımın karmaşıklığını açıklamaktadır. Ancak bunların her biri, kendi başlarına ele alındığında, oldukça basittir ve bana matematiğin anlatıldığı eski okul yıllarımda hep okutulurdu.

Öğretmenlerim bana matematiği anlatmadan önce onun pratik değerinden söz ettiler. "Değer" sözcüğü ile matematiğin günlerimi geçirmekte bana yardımcı olacağını, "yaşama olgusu"nda bana yardımcı olacağını kastediyorlardı. Ve kastettikleri yalnızca buydu, başka bir şey değil.

Onlar yanlış bilgilendirilmişlerdi.

Matematiğin değeriyle, onun beni buraya, kalkülüs kemerinin temeline, limite getireceğini kastetmiş olmalarını isterdim. O zaman haklı olurlardı.

Vaatler

Sözlerimin başında yeni fikirler vaat etmiştim.

"Bir gezintiye çıkıyorum. Siz de katılın. Bir şeyler bulacağız." demiştim.

Neler bulduğumuza bir bakalım.

Başlangıçtaki, sayı sisteminin geliştirilmesine ilişkin açıklamalarda standart yöntemler izlenmiştir, onlarda yeni bir şeyler ortaya koyduğum iddiasında değilim. Amacım, bir ölçüde, bütün matematiğin birkaç temel ilkeden başlayarak geliştiği gerçeğini (matematikçi olmayanlar için şaşırtıcı bir şey) göstermekti. Bu gelişmede yer alan birçok ayrıntı atlanmıştır, ama benim amacım açısından bunlar önemli değildir. Ben, sayma sayıları olan 1, 2, 3, ... ve beş tane varsayımla (Peano Aksiyomları) başlayıp sistemli bir biçimde tamsayıları, rasyonel sayıları, reel sayıları ve kompleks sayıları yaratabileceğimizi göstermek istedim.

Reel ve kompleks sayılar elde edildikten sonra matematiğin hammaddesi hazırdı. Daha sonra pür ve uygulamalı matematik arasındaki ilişki ve onların Şekil 7'de gösterilen uygulama sürecinde nasıl bir araya geldikleri konularını ele aldım. Bu süreç başkalarınca da açıklanmıştır, ancak, sanırım, tam olarak burada verildiği şekilde değil. Şekil 7 –ve ona ilişkin açıklamalar– analiz aşamasının tümüyle matematiksel-dünyada gerçekleştiğini, uygulama aşamasında ise, bu ideler dünyası ile normal fiziksel olguların yer aldığı gerçek-dünya arasında bir bağıntı kurduğunu açıkça gösteriyor. Sürecin bu bölümü öyle bir sihir ve gizem havası içermektedir ki ünlü bir fizikçi matematiğin "akıl almaz etkinliği"nden söz etmeye gerek duymuştur.

Şekil 7 ile ilgili tartışmaların bir yan ürünü de, pür ve uygulamalı matematikler arasındaki ayrımı kesin olarak belirlemesidir, daha açık bir deyişle, pür matematik matematiksel-dünyadaki analizdir, uygulamalı matematik ise, gerçek dünyada bir ön görüntüsü olan pür matematiktir. Bu ayrım, bildiğim kadarıyla, daha önce yapılmamıştır.

Kitabın bu bölümünden sonra gezintimiz bizi, aşağı yukarı, estetik ülkeye götürdü. Bu noktadan sonra tartışmalarımız estetik dünya ve matematiğin bu dünyadaki yeri üzerinde yoğunlaştı. Kanımca, burada orijinal denebilecek ve tekrar belirtilmeye değer dört ide ileri sürülmüştü. Konuyu toparlamak için bunları tekrar belirtelim.

Bu kavramlar şunlardır:

1. Estetik halka kavramı,
2. Matematik-dünyası kavramı,
3. Minimal tamlık ilkesi ve maksimal uygulanabilirlik ilkesi ve,
4. M tipi kültür ve N tipi kültür.

Estetik halka, Edward Bullough'un daha önceki uzaklık kavramından esinlenmiştir. Ancak Bullough'un kavramı benimkine göre daha az niceldi ve "halkalar"dan söz etmiyordu. Buradaki ana fikir, bir gözlemcinin bir sanat yapıtına karşı gösterdiği estetik tepkinin yeterince belirgin üç kategoriden birine girdiği şeklindeydi: (i) Gözlemci bu nesneyi estetik olarak duyumsar; (ii) Gözlemci nesneye çok yakın olduğundan (estetik uzaklık bağlamında) estetik bir şey duyumsamaz; (iii) Nesne, çok uzak olduğundan estetik duyumsamaya yol açmaz. Sanat yapıtıyla ilgili estetik halka (i) koşulu ile ilgili olan ve Şekil 12'de gösterilmiş olan halkadır. Bu halkanın iç çemberinin içindeki alan (ii) koşulunda belirtilen "çok yakın" alandır, dış çemberin dışındaki alan ise (iii) koşulunda belirtilen "çok uzak" alandır.

Konu matematikçilerin bakış açısından, yani bir sanat yapıtı olarak incelendiğinde bu kavramların matematiğe özellikle uygulanabilir olduğunu gördük (bkz. Şekil 13).

Matematik-dünyası, yakın zamanda ileri sürülen bir kurumsal estetik teorisinin (esas olarak çağdaş felsefeciler George Dickie ve Arthur Danto tarafından geliştirilen teori), matematikçiler ile matematik yapıtlarından oluşan benzer bir düzenli yapı için de, hemen hemen hiç değiştirilmeden, geçerli olması sonucu ortaya çıktı. Dickie-Danto düzenli yapısına sanat-dünyası denilmektedir. Matematik-dünyası, sanat-dünyasının bir altkümesinin izomorfik bir kopyası olacak şekilde tanımlanmıştır. Bunun anlamı, matematik dünyasının, notasyon dışında, sanat-dünyasının bir bölümü olduğudur.

Böylece, sanat-dünyası için geliştirilmiş olan estetik teori matematik-dünyası için de geçerli hale gelmekte ve matematiği bir sanat olarak içeren geçerli bir estetik teori ilk kez var olmaktadır.

Matematik-dünyasının estetik teorisi, hangi matematik yapıtlarının sanat yapıtı olduğu, hangilerinin olmadığını saptamaya yarayan bir araç işlevi görmektedir. Ancak bu teori ortaya iyi ve kötü sanatı ayırt edici bir mekanizma koymamaktadır. Bu sakıncanın giderilmesine yardımcı olmak üzere, minimal tamlık ve maksimal uygulanabilirlik ilkeleri formüle edilmiştir. Her matematiksel yapıt, teorik olarak, bu ilkeler doğrultusunda değerlendirilebilir. Her iki ilkeyi sağlayan bir yapıt, tanım gereği, "iyi" bir sanat yapıtı olarak kabul edilir ve "zarif" unvanına resmen hak kazanır.

Sonuçta, matematikçilerin sezgisel zarafet kavramı, gerçek bir estetik teori şeklinde, yarı resmi bir karakter kazanmış olmaktadır. Matematiksel yapıtın zarafet niteliğini resmen belirleme ölçüsü artık sezgiye ya da alışkanlığa değil, bu iki ilkenin ona ne ölçüde doğru olarak uygulandığına bağlıdır.

Son olarak, gezintimiz bizi C. P. Snow'un iki kültürüne getirdi. Bu iki grubun kabul edilmiş tanımlamalarının (sırasıyla fen bilimciler ve beşeri bilimciler olarak) istendiği ölçüde kesin olmadığını gördük. M tipi kültür belirli bir düzeyde matematik becerisi olan insanlardan, N tipi de olmayanlardan oluşmak üzere, *M tipi* ve *N tipi* kültürler dikkate alındığında daha kesin bir ayrım elde edilir.

Bu iki yeni grup Snow'un kavramlarıyla uyum içinde olmakla beraber, daha belirli olarak tanımlandıkları için kavramsal üstünlükleri vardır. Şekil 16'da görüldüğü gibi, bu gruplar matematiğin estetik halkası ile kesin olarak tanımlanmışlardır. M tipi insanlar matematiğe çok yakın, N tipleri de çok uzaktırlar. Ayrıca bu yeni bakış açısı, olumlu değişim için değerli bir reçete de sağlamaktadır. M tipi ve N tipi kültürler matematiğin estetik halkası ile ayrılmışlardır. Onları birleştirmenin yolu bellidir: Halkayı genişletmek.

Günümüzde estetik halka içinde yalnız matematikçiler yaşar. Orada yaşarlar, çünkü –hangi nedenle olursa olsun– onlar matematiği bir sanat olarak görmektedirler. Halkanın genişlemesi başkalarının da matematiği öyle görmelerini gerektirir. Bu görüşün oluşabilmesi de eğitim sisteminin yeniden planlanmasını gerektirir. O kadar basit ve o kadar karmaşık.

Bu özetle gezimiz tamamlanmış oluyor. Epeyce yol aldık. Reel doğru üzerinde yürüyüp kompleks düzlemde dolaştık. Halkaların parıltısını gördük. Kültürlerin çatışmasını duyumsadık. Sayılar çimenlerde dolaştı, soyutlamalar sis gibi gözlerimizin önünde uçuştu. Yüce sanatın umudu gün ışığı gibi parıldadı.

Yeterince yol aldık. Sanırım bazı yeni fikirler de getirdik. Ancak bunu söylemek bana düşmez. Kararı sizler verin.

Sonsöz

Vermont'ta geçirdiğim o yaz boyunca, bir ağacın gölgesinde Robert Frost'u okumuştum. En çok da eski şiirlerini, kırk yaşlarındayken yazmış olduğu şiirleri seviyordum: "Mowing" (Çayır Biçme), "Birches" (Kızılcık Ağaçları), "Dust of Snow" (Kar Tozları). Ağacımın altında onları okurken ben de aynı yaşlardaydım.

O zamanlar –şimdi de– Frost'u öylesine genç bir adam olarak düşünmek güçtü. O, benim zihnimde hep 1957'de kendisini ilk gördüğüm haliyle yaşar: Kazağının üstünde önü iliklenmemiş spor ceketi, gömleği gibi bembeyaz yaşlı başı, kürsünün arkasında bir baştan öbürüne sallanarak yürüyüşü, eski şiirlerini yorum yapmadan ve tümüyle bellekten "okuyuşu".

İlk kitabı olan *A Boy's Will*'deki (Bir Çocuğun İradesi) son şiir olan "Reluctance"ı (Gönülsüzlük) okumuştu. Son altı dizede o pırıl pırıl gözleriyle –yemin ederim– doğrudan bana bakıyordu:

Olayların sürüklenmesine bırakmak kendini,
    Zarafetle teslim olmak aklın yoluna,
Ve kabullenmek, baş eğerek,
    Bir aşkın ya da bir mevsimin tükenmesini.
Ah! ne zaman daha küçük bir suç sayılmıştır
    İnsan yüreğine ihanetten?

"Ahhh" derken bana bakıyordu. Sözcüğün sonundaki "h" sesi açıkça duyuluyordu, bir sonraki dizedeki "heart" (yürek) sözcüğündeki "h" de öyle. Yaşlı adam "heart"ın sonundaki "t" sesini, o zamanlar onun dizlerinin, şimdi de benim dizlerimin yaptığı gibi çatırdatmıştı.

"Sizi dikkatle dinledim, Bay Frost." dedim içimden. "Ben olayların akışıyla sürüklenmeyeceğim."

Frost benim dikkatimi ilk olarak uzun yıllar önce çekmişti. Daha sonra da, 200'üncü bağımsızlık yıldönümü olan 1976'da, Vermont'taki o yaz mevsiminde yeniden ilgimi uyandırdı.

Ağacım evin arkasındaydı. Daha ötede yüksek ağaçlara doğru uzanan bir çayırlık vardı. Tepeden Yeşil Dağlar'daki yarıktan kuzeye baktığınızda Kanada'yı görebilirdiniz, eğer Vermont'un nerede bitip Kanada'nın nerede başladığını biliyorsanız.

Doğuda New Hampshire sınırı, onun ötesinde de Frost'un, *A Boy's Will*'deki (Bir Çocuğun İradesi) şiirlerinden birçoğunu yazdığı Derry ve Franconia kasabaları vardı. Frost, daha sonraları Vermont'a yerleşti. Ancak ilk şiirleri orada, bulunduğum yerin doğusunda, New Hampshire'da yazılmıştır.

O zamanlar, onu orada bir ağacın altında oturmuş, benim altmış yıl sonra okuyacağım şiirleri yazarken gözümün önüne getirmiştim. Kendi kendime, arada başını kaldırıp gözlerini Vermont'un yeşil tepelerinde dinlendirdiğini düşünmüş; onun bakışlarıyla karşılaşmak için iskemlemi doğuya çevirmiştim.

İçimden ona "Beraber çalışıyoruz; sen yazıyorsun, ben okuyorum." diyordum.

Şiir yazmak için Frost'un, çevresindeki olayların akışından kaçınması gerekiyordu. Kuzeyli çiftçiler her gün ekiyor, biçiyor, süt sağıyor, tarla sürüyorlar, yaşamlarını topraktan çıkaranların her yerde yaptıkları günlük işleri yapıyorlardı. Köylüler çevresinde dolaşırken Frost hareketsiz oturuyordu. Köylüler arada bir onun yürüdüğünü, yüzünde dikkatli ve tuhaf bir ifade ile gökyüzüne, ağaçlara baktığını görüyorlardı. Ancak ona rastladıklarında genellikle oturuyor olurdu. Eğer dikkatle bakarlarsa elinde bir kalemin oynadığını görebilirlerdi.

Robert Frost olayların akışına kapılmadan hareketsiz oturuyor, ilk bakışta basitmiş gibi görünen şiirlerini yazıyordu. Şiirlerini eski moda vezin, kafiye, sentaks kurallarına göre kaleme alıyordu. Onları kulağa bir lisan gibi ses verecek, mantıksal bir düşünce kalıbı ortaya koyacak şekilde biçimliyordu. Şiirleri, yüzeyde, duymak isteyeceğiniz şeyler söylüyorlardı. Frost bu düzeyin altına, güçlü kaslarda olduğu gibi, karmaşıklık ve derinlik yerleştiriyordu.

Frost'un şiirleri basit oldukları için akılda kalırlar, derinlikleri nedeniyle de onları tekrar tekrar okursunuz.

Frost'un şiirlerini çok kişi okumuştur. Pratik aklı olan bir ulusu, hemen hemen sırf kendi çabasıyla, şiire yöneltmiştir. Bu yönelmenin kısa ömürlü olduğu doğrudur. Ancak öyle bir dönem yaşanmıştır. Bazılarımız John F. Kennedy'nin 1961'deki başkanlık yemini töreninde, yaşlı şairin, bütün ülkeye yayın yapan televizyonlardan, güneş ışığından gözlerini kırpıştırarak, "The Gift Outright" (Birden Gelen Armağan) şiirini okuduğunu hâlâ anımsarız. Ciddi şiir Amerika'da daha önce –ve daha sonra– hiç böylesine başarıyla sunulmamıştı. Robert Frost kitaplarıyla, okumasıyla ve kişiliğiyle şiiri bir süre için yığınlara iletmiştir.

Benim için olayların akışı –şimdi de olduğu gibi– hep matematikle ilgili oldu. 1976'ya gelindiğinde Vietnam, toplumsal değişim, ve açıklayamayacağım bazı güçler Amerikan akademik yaşamının görünümünü kökünden değiştirmişti. Matematiğin *Sputnik* ile başlayan altın çağı son bulmuştu. Benim yardımcı doçent olarak matematik mesleğine başladığım altmışlı yılların başlarında matematik araştırmalarına duyulan heyecan ve verilen destek düzeyine, benim yaşamım boyunca, bir daha erişilemeyeceğinden emindim. 1976 yazında genellikle akademik yaşam, özellikle de matematik araştırmaları bir dağınıklık içindeydi. Yirminci yüzyılın geri kalan bölümünün üniversite profesörlerine anlayışlı davranmayacağını biliyordum.

Ancak terslikler hayırlı sonuçlara da yol açabilir. Ben de o yaz, ağacımın gölgesinde otururken, bu tersliklerin bir fırsat yaratıp yaratmayacağı üzerinde düşündüm. Araştırma için parasal destek azaldığına ve üniversiteye karşı sürekli hoşnutsuzluk ortaya çıktığına göre, üniversite öğretiminde anlamlı bir değişiklik yapmak için uygun zaman belki de gelmişti. Belki de araştırma alanındaki şanssızlık matematikçilerin eğitime daha çok önem vermelerine neden olacaktı. *Sputnik*'in araştırma için para getirdiği sıralarda eğitimden uzaklaşma eğilimi başlamıştı. Şimdi ise para akışı yavaşlamıştı. Öyleyse eğitim konusunda ciddi bir şeyler yapabilir, kalabalık sınıfları, önemsiz uygulamaları ve küllenmiş ders kitaplarını kaldırabilirdik.

Evet! Matematik eğitimine yavaş yavaş estetiği katma zamanı gelmişti. Robert Frost kitlelere şiiri götürmüştü. Şimdi biz de onlara matematiği götürecektik.

Bütün bunlar Vermont'ta geçirdiğim o yaz aklıma gelmişti. Şiirle birlikte gelmişti. Rüzgârlarla, uçuşan bulutlarla gelmişti. Bir kutsal esin gibi gelmişti.

Tekrar doğuya baktım. "Sen ve ben birlikteyiz." dedim.

Zaman durmuyor. Aradan on beş yıl geçti, hiçbir şey daha iyiye gitmedi. Sınıflar daha kalabalık, kitaplar daha kabarık, ve sözüm ona uygulamalar daha havadan sudan, daha sıradan. Amerikalı öğrencilerin uluslararası matematik yarışmalarındaki başarısızlıkları görünür duruma geldi. Araştırma matematiği kültürü, bu alanı meslek seçmiş olan üniversite öğrencileri için bile gözle görülemez bir hal almış bulunuyor. İki kültür birbirinden, koca evrende karşı taraflarda bulunan iki yıldız kümesi kadar hızla uzaklaşıyor.

Benim Vermont'ta gelen kutsal esinim hiçbir devrime yol açmadı. Matematik, Robert Frost'unu bulamadı.

Savaşın şövalyelere göre bir oyun olmaması gibi, belki bu da şairlere göre bir iş değildir. Matematiği doğru olarak öğretmek için galiba gerçekten bir şair gerekli. Ancak onu sınıfa sokmak için başka bir şey daha gerekebilir. Okulun kapısında bir mücadele olasılığı vardır. Ve, Horatius gibi, bütün şairler şiir yazdıkları ölçüde iyi kavgacı olamazlar. İçeri girmek için belki bir sokak serserisine gereksiminiz olabilir.

Matematik eğitiminde bir devrim olacaktır, bu, güneşin her gün doğması kadar kesindir. Ancak bu, ardından –daha önce değil– şiirin geldiği bir devrim olabilir.

Her ne ise, ben Robert Frost değilim, öyle olmayı da amaçlamadım. Şimdi kendimi –biraz da romantik bir şekilde– yaşlanmış bir silahşor olarak görmekteyim; Akademi'nin dar sokaklarında tek başına yürüyen bir silahşor olarak. Bu yüzyılın başlarında, adaleti silah zoruyla sağlayan bir silahşorun zamanın akışını, yasa ve düzenin yerleşmesini durduramaması gibi, ben de akademik gidişi durduramam. Bir süre sonra da meslek yaşamım sona erecek.

Silahşor yola getirilecek başka bir kasabayı her zaman bulmuştur. Şimdiye kadar ben de hep öğretecek başka bir ders buldum. Ancak Vermont'taki yaz çok gerilerde kaldı. Dersler tükeniyor. Kısa süre sonra da yalnız tek bir ders kalacak.

Bir ders daha ve sonra işim bitmiş olacak. Bu son dersin klasik kompleks değişkenler olmasını isterim. Onu bir kez daha anlatayım.

Bir gün, rüzgârlar beklenen yönde estiğinde, Cauchy İntegral Formülü'nü son kez anlatacağım, gerçekten anlatacağım. Özenle yazacağım ve öğrenciler eğriyi, onun içindeki şeyi ve fonksiyon değerini çabucak, bir göz açıp kapayıncaya kadar geçen sürede çabucak veren tembel integrali görecekler.

Matematik sanatını görecekler. Ve ondan sonra da hiçbir şeyi onun yarısı kadar bile umursamayacaklar.

Notlar

Giriş

1. G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (Londra: Cambridge, 1973), s. 61. [Türkçesi: Bir Matematikçinin Savunması, Çev. Nermin Arık. TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 1993.]
2. Bertrand Russell, *Mysticism and Logic* (New York: Doubleday, 1917), s. 57. [Türkçesi: Mistisizm ve Mantık, Çev. Ayseli Usluata. Varlık Yayınları, 1972]
3. Ian Stewart, *The Problems of Mathematics* (New York: Oxford, 1987).
4. Robert Frost, *The Poetry of Robert Frost* (New York: Holt, Rinehart & Winston, 1969), s. 1.

I. Bölüm

1. James Dickey, *Poems 1957-1967* (New York: Collier, 1968).
2. W. B. Yeats, *Selected Poems* (New York: Collier, 1962).

II. Bölüm

1. Yuhanna 18 (Kitabı Mukaddes): 37-38.
2. Alfred Renyi, *Dialogues on Mathematics* (San Francisco: Holden-Day, 1967), s. 11.
3. Josephine Tey, *The Daughter of Time* (New York: Berkley, 1959), s. 122.
4. William Shakespeare, *The Tragedy of King Richard III*, perde 4, sahne 3. [Türkçesi: III. Richard, Çev. Berna Moran. Adam Yayınları, 1992] .
5. James R. Newman, *The World of Mathematics* (New York: Simon & Schuster, 1956), s. 728.
6. Jacob Bronowski, *Science and Human Values* (New York: Julian Messner, 1956), s. 58-60.
7. James G. Frazer, *The Golden Bough* (Toronto: Macmillan, 1950), s. 825-826.
8. Stewart, *The Problems of Mathematics*, s. 150.
9. Alfred Adler, "Mathematics and Creativity", *New Yorker*, 19 Şubat 1972, s. 39-45.
10. Hardy, *A Mathematician's Apology* [Bir Matematikçinin Savunması], s. 70.
11. Bertrand Russell, *Mysticism and Logic* [Mistisizm ve Mantık], s. 56.
12. Morris Kline, *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford, 1959), s. 428.
13. David Billington, *The Tower and the Bridge* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1985), s. 9, 15.

III. Bölüm

1. David Burton'un *Elementary Number Theory*'den (Boston: Allyn & Bacon, 1976) alıntı.
2. Russell, *Mysticism and Logic* [Mistisizm ve Mantık], s. 64.
3. Kurt Gödel, *On Formally Undesirable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems* (New York: Basic, 1965).
4. Michael Guillen, *Bridges to Infinity* (New York: Tarcher, 1983) s. 20.
5. Morris Kline, *Mathematics, the Loss of Certainty* (New York: Oxford, 1980), s. 263.
6. Stewart, *The Problems of Mathematics*, s. 214.
7. Guillen, *Bridges to Infinity*, s. 125.
8. Russell, *Mysticism and Logic* [Mistisizm ve Mantık], s. 70.
9. Albert Einstein, "Geometry and Experience", *Readings in the Philosophy of Science*'da, Herbert Feigl ve May Brodbeck (ed.), (New York: Appleton-Century-Crofts), s. 189.
10. Salomon Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1966), s. 48.
11. Guillen, *Bridges to Infinity*, s. 64.
12. Aynı eser.

13. Thomas Tymoczko, "The Four Color Problems", *Journal of Philosophy*, 76 (1979), s. 51-53.
14. Stewart, *The Problems of Mathemathics*, s. 117.
15. Kenneth Appel ve Wolfgang Haken, "The Four-Color Problem", *Mathemathics Today*'de, Lynn Steen (ed.), (New York: Springer Verlag, 1980).

IV. Bölüm

1. Alfred North Whitehead, *Science and Modern World* (New York: Macmillan, 1925), s. 34.
2. Eugene P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 (1980), s. 1-14.
3. "Mathematical Sciences: A Unifying and Dynamical Resource, Report of the Panel on Mathematical Sciences", *Notices of the American Mathematical Society*, Haziran 1986, s. 465.
4. Aynı eser.
5. "Mathematics, the Unifying Thread in Science", *Notices of the American Mathematical Society*, Ekim 1986, s. 725.
6. Bochner, *The Role of Mathematics*, s. 111.
7. Aynı eser, s. 190.
8. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness," s. 14.

V. Bölüm

1. Lynn Steen (ed.), *Mathematics Today*, s. 10.
2. Thomas Munro, *Toward Science in Aesthetics* (New York: Liberal Arts Press, 1956), s. 3.
3. Arthur Berger, P. W. Prall, *Aesthetic Analysis* (New York: Cromwell, 1936), s. IX.
4. Nicholas Wolterstorff, *Works and Worlds of Art* (Oxford: Clarendon, 1980), s. V.
5. John Keats, "Ode on a Grecian Urn."
6. Henri Poincaré, *The Foundations of Science* (New York: Science Press, 1929), s. 386.
7. Aynı eser, s. 385.
8. Aynı eser. s. 391.
9. Seymore A. Papert, "The Mathematical Unconscious", *On Aesthetics and Science*'da, Judith Wechsler (ed.), (Boston: Birkhauser, 1988), s. 106.
10. Hardy, *A Mathematician's Apology* [Bir Matematikçinin Savunması], s. 92.
11. Aynı eser. s. 85, 90.
12. Papert, "The Mathematical Unconscious", s. 106.
13. Aynı eser, s. 111.
14. Aynı eser.
15. Aynı eser, s. 112.
16. Aynı eser, s. 118.
17. Herman Weyl, "Symmetry", *The World of Mathematics*'de, Cilt 1, James R. Newman (ed.) (New York: Simon & Schuster, 1956).
18. James Jeans, "Mathematics & Music", *The World of Mathematics*'de, Cilt 4, James Newman (ed.), (New York: Simon & Schuster, 1956).
19. Gustav Fechner, *Vorschule der Aesthetik* (Leipzig: Breitkopf & Hartel, 1876).
20. I. C. McManus, D. Edmondson ve J. Rodger, "Balance in Pictures", *British Journal of Psychology*, 76 (1985), s. 311-324.
21. George David Birkhoff, "Mathematics of Aesthetics", *The World of Mathematics*'de, Cilt 4, James R. Newman (ed.), (New York: Simon & Schuster, 1956).
22. George Stiny & James Gips, *Algorithmic Aesthetics* (Berkeley: University of California Press, 1978).
23. Mortimer Adler, *Six Great Ideas* (New York, Macmillan 1981).
24. George Dickie, *The Art Circle* (New York: Haven, 1984).
25. Will Durant, *The Story of Philosophy* (New York: Pocket Library, 1954), s. XXVII.
26. Allan Bloom, *The Closing of the American Mind* (New York: Simon & Schuster, 1987), s. 271.
27. Norman Bryson, *Vision and Painting* (Londra: Yale University Press, 1983).
28. Roger Scructon, "Recent Aesthetics in England and America", *Aesthetics and Art Education*'da, Ralph A. Smith ve Alan Simpson (ed.), (Chicago: University of Illinois Press, 1991), s. 43.
29. Arthur Danto, *Connections to the World* (New York: Harper & Row, 1990).

30. Harold Bloom, L. S. Klepp, "Everyman a Philosopher", *New York Times Magazine*, 2 Aralık 1990, s. 117'den alıntı.
31. Arthur Danto, "The Artworld", *The Journal of Philosophy*, *61* (1964), s. 571-584.
32. Aynı eser, s. 573.
33. Aynı eser, s. 581.
34. Eugene F. Kaelin, "Why Teach Art in the Public Schools?", *Aesthetics and Art Education*'da, Ralph A. Smiths ve Alan Simpson (ed.), (Chicago: University of Chicago Press), s. 165.
35. Danto, "The Artworld", s. 571.
36. Dickie, *The Art Circle*, s. 11.
37. Aynı eser, s. 66.
38. Aynı eser, s. 67.
39. Aynı eser, s. 84.
40. Aynı eser, s. 80.
41. Paul Halmos, *Mathematics Today*, Steen (ed.), s. 1'den alıntı.
42. Richard Wollheim, *Art and Its Objects* (New York: Harper & Row, 1968).
43. R. G. Collingwood, *The Principles of Art* (Londra: Clarendon, 1938), s. 130.
44. Hardy, *A Mathematician's Apology* [Bir Matematikçinin Savunması], s. 61.
45. Doug Anderson, "Poets in Prose", *New York Times Book Review*, 28 Nisan 1991, s. 15, Howard Nemerov'dan alıntı.
46. Kline, *Mathematics in Western Culture*, s. 397, David Hilbert'tan alıntı.
47. Aynı kitapta, s. 397, Poincaré'den alıntı.
48. Hardy, *A Mathematician's Apology* [Bir Matematikçinin Savunması], s. 37, C. P. Snow'dan alıntı.
49. Edward Bullough, "Psychical Distance as a Factor in Art and an Aesthetic Principle", *British Journal of Psychology*, 5 (1912), s. 87-118.
50. Donald Sherburne, *A Whiteheadean Aesthetic* (New York: Yale, 1961), s. 108.
51. James L. Jarrett, *The Quest for Beauty* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1957), s. 111.
52. Bullough, "Psychical Distance", s. 92.
53. Aynı eser, s. 93.
54. Aynı eser, s. 94.
55. Aynı eser, s. 95.
56. Ernest Hemingway, *Death in the Afternoon* (New York: Scribners).
57. Ortega y Gasset, *The Dehumanization of Art and Notes on the Novel* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1948), s. 12.
58. Ernest Nagel ve James R. Newman, *Gödel's Proof* (New York: NYU. Press, 1958), s. 24.
59. Martin Gardner, *Mathematical Puzzles and Diversions* (New York: Simon & Schuster, 1959), s. 47.
60. Angus E. Taylor, *Advanced Calculus* (Boston: Ginn, 1955).
61. Martin Gardner, *2nd Book of Mathematical Puzzles and Diversions* (New York: Simon & Schuster, 1961), s. 57.
62. George B. Thomas, *Calculus and Analytic Geometry* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1951).

VI. Bölüm

1. Bloom, *The Closing of the American Mind*, s. 25.
2. Hazzard Adams, *Academic Tribes* (New York: Liveright, 1976), s. 8.
3. Morris Kline, *Why the Professor Can't Teach* (New York: St. Martin's, 1977), s. 240.
4. P. J. Hilton, "Teaching and Research: A False Dichotomy", *The Mathematical Intelligencer*, *1*, (1978), s. 76-80.
5. Timothy O'Meara, "Strategies for Enhancing Resources in Mathematics", *Notices of the American Mathematical Society*, *33*, (1986), s. 327.
6. "Mathematics and the Dilemma of University Education", *The Mathematical Intellegencer*, *1* (1978), s. 10, Kline'dan alıntı.
7. John Barton, *Playing Shakespeare* (Londra: Methuen, 1984), s. 50.
8. O'Meara, "Strategies", s. 329.
9. Aynı eser, s. 327.

10. Adler, "Mathematics and Creativity", s. 39-45.
11. L. T. More, *The Limitations of Science* (New York: Holt, 1915), s. 150.
12. Aynı eser, s. 151.
13. Adler, "Mathematics and Creativity", s. 41.
14. Aynı eser, s. 45.
15. Aynı eser, s. 41.
16. Aynı eser.
17. Edna St. Vincent Millay, *Collected Sonnets* (New York: Harper, 1988), s. 45.
18. William Shakespeare, *Troilus and Cressida*, Perde 1, Sahne 1. [Türkçesi: Troilos ve Kressida, Çev. Sabahattin Eyüboğlu, Mine Irgat. Maarif Vekaleti, 1956].
19. Bertrand Russell, *In Praise of Idleness* (New York: Unwin, 1962), s. 127. [Türkçesi: Aylaklığa Övgü, Çev. Mete Ergin. Say, 1983].
20. William Shakespeare, *Henry IV*, Perde 1, Sahne 1.
21. Adler, "Mathematics and Creativity", s. 41.
22. Aynı eser.
23. Ronald C. Douglas, "Castle in the Sand", *Calculus for a New Century*'de (Mathematical Association of America, 1988).
24. Gina Bari Kolata, "Calculus Reform: Is It Needed? Is It Possible?" *Calculus for a New Century*'de, Lynn Steen (ed.), s. 89.
25. Richard W. Hamming, *Toward a Lean and Lively Calculus* üzerine değerlendirme, *American Mathematical Monthly*, Mayıs 1988, s. 466-471.
26. Leonard Gillman, "The College Teaching Scandal", *Focus 8*, (1988), s. 5.
27. R. Emmett Tyrrell, Jr., "A Conservative Crack-up?", *Wall Street Journal*, 27 Mart 1987.
28. More, *The Limitations of Science*, s. 150.
29. Russell, *Mysticism and Logic* [Mistisizm ve Mantık], s. 57.

VII. Bölüm

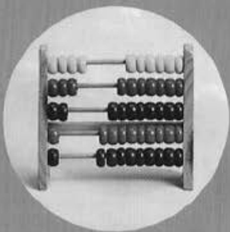
1. C. P. Snow, *The Two Cultures and a Second Look* (New York: Cambridge, 1964), s. 3. [Türkçesi: İki Kültür, Çev. Tuncay Birkan, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 2001)
2. Aynı eser, s. 62.
3. Aynı eser, s. 63.
4. Aynı eser, s. 9.
5. Jacques Barzun, *A Stroll with William James* (New York: Harper & Row, 1983), s. 203.
6. Aynı eser, s. 206.
7. Bloom, *The Closing of the American Mind*, s. 182, 350.
8. Snow, *Two Cultures*, s. 14.
9. Aynı eser, s. 13.
10. Stewart, *The Problems of Mathematics*.
11. Augustus De Morgan, "Assorted Paradoxes", *The World of Mathematics*'de, James R. Newman (ed.), (New York: Simon and Schuster, 1956), s. 2378.
12. Hedley Bull, "Tradition and Science in the Study of International Politics", *Contending Approaches to International Politics*'de, Klaus Knorr ve James N. Rosenau (ed.), (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), s. 26-30.
13. Morton A. Kaplan, "The New Great Debates", *Contending Approaches to International Politics*'de, Knorr ve Rosenau (ed.), s. 55.
14. Aynı eser, s. 61.
15. Allen L. Hammond, "Mathematics, Our Invisible Culture", *Mathematics Today*'de, Lynn Steen (ed.), (New York: Springer Verlag, 1980), s. 16.
16. Aynı eser, s. 16.
17. John Polkinghorne, *One World* (Princeton, NJ: Princeton, 1986), s. 46.
18. Collingwood, *The Principles of Art*, s. 331.
19. Aynı eser, s. 312.
20. Aynı eser.

VIII. Bölüm

1. Russell, *Mysticism and Logic* [Mistisizm ve Mantık], s. 55.
2. Robert Henri, *The Art Spirit* (New York: Harper & Row, 1951), s. 265.

Dizin

Matematik kesinlik gerektirir. Matematik kesin değilse bir hiçtir. Oysa kesinlik her zaman anlaşılabilirlik değildir. Lehigh Üniversitesi'nde matematik profesörü olan Jerry P. King *Matematik Sanatı*'nda, anlaşılabilirlikle kesinlik arasında bir seçim yapıyor ve matematiği mecazlar, benzetmeler yoluyla anlatmayı deniyor. Böylece "Rousseau okuyan, Beethoven dinleyen ve Picasso'dan hoşlananların" da matematiği anlamasını ve yaklaşık 2500 yaşındaki bu uğraştan tat almasını amaçlıyor.



ISBN 978-975-403-078-5

Fiyatı: **7** TL (KDV dahil)

Basılı fiyatından farklı satılamaz