

T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINI NO: 2968

AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINI NO: 1923

SEMBOLİK MANTIK

Yazar

Yrd.Doç.Dr. Tarık Necati ILGICIOĞLU (Ünite 1-6)

Editör

Yrd.Doç.Dr. Aliye KARABÜK KOVANLIKAYA



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Anadolu Üniversitesine aittir.
“Uzaktan Öğretim” tekniğine uygun olarak hazırlanan bu kitabın bütün hakları saklıdır.
İlgili kuruluştan izin almadan kitabın tümü ya da bölümleri mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt
veya başka şekillerde çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz.

Copyright © 2013 by Anadolu University

All rights reserved

No part of this book may be reproduced or stored in a retrieval system, or transmitted
in any form or by any means mechanical, electronic, photocopy, magnetic tape or otherwise, without
permission in writing from the University.

UZAKTAN ÖĞRETİM TASARIM BİRİMİ

Genel Koordinatör

Doç.Dr. Müjgan Bozkaya

Genel Koordinatör Yardımcısı

Arş.Gör.Dr. İrem Erdem Aydın

Öğretim Tasarımcısı

Doç.Dr. T. Volkan Yüzer

Grafik Tasarım Yönetmenleri

Prof. Teyfik Fikret Uçar

Öğr.Gör. Cemalettin Yıldız

Öğr.Gör. Nilgün Salur

Dil Yazım Danışmanları

Funda Gürbüz

Hatice Çalışkan

Kitap Koordinasyon Birimi

Uzm. Nermin Özgür

Kapak Düzeni

Prof. Teyfik Fikret Uçar

Öğr.Gör. Cemalettin Yıldız

Dizgi

Açıköğretim Fakültesi Dizgi Ekibi

Sembolik Mantık

ISBN

978-975-06-1629-7

1. Baskı

Bu kitap ANADOLU ÜNİVERSİTESİ Web-Ofset Tesislerinde 45.000 adet basılmıştır.
ESKİŞEHİR, Ocak 2013

İçindekiler

Önsöz	viii
-------------	------

1. ÜNİTE

P Biçimsel Dili ve P Biçimsel Dilinin Yorumu.....	2
GİRİŞ.....	3
BİÇİMSEL DİL.....	3
Biçimsel Kuralları.....	3
P Biçimsel Dili.....	4
P Biçimsel Dili ile Alt Kümeleri Arasındaki Bağlantılar.....	6
Dönüştürme.....	6
Tanımsal Karşılık.....	6
P Biçimsel Dili İçin Dönüştürme Kuralları.....	6
P Biçimsel Dilinin İyi Biçimli Formülleri İçin Tanımsal Karşılık.....	7
P Biçimsel Dili İçin Tanımsal Tamlık.....	7
Tanımsal Tamlık ve P Biçimsel Dilinin Alt Kümesi Olan Biçimsel Diller.....	8
P BİÇİMSEL DİLİNİN YORUMLANMASI.....	8
Aksiyom ve Tanımlar.....	9
P Dilinin Yorumu.....	9
Yorum.....	10
P Dili İçin Yorum Fonksiyonları.....	10
İki Elemanlı Küme Üzerine 2-li Fonksiyon.....	12
Fonksiyonel Tamlık.....	13
P Dilinin Bir Yorumu.....	14
P Dilinin Bir İyi Biçimli Formülünün Bir Yorumu.....	15
$Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler.....	17
P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Dair Üst-Teoremler.....	21
P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumunda Model-Teorik Tutarlılık Üst-Teoremi.....	21
P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumunda Dedüksiyon Üst-Teoremi.....	23
Özet	24
Kendimizi Sınayalım	26
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı	28
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı	29
Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar	31

2. ÜNİTE

P Dilinin Bir İyi Biçimli Formül Kümesinin

$Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumundaki Yorumlarının Analizi..... 32

GİRİŞ..... 33

P DİLİNİN BİR İYİ BİÇİMLİ FORMÜL KÜMESİNİN $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ YORUMUNDAKİ YORUMLARI İÇİN ÇİZELGE ANALİZİ..... 33

P Dilinin Bir İyi Biçimli Formülünün P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumundaki Çizelge Analizi 33

Çizelgenin Tanımlanması ve Çizelge Oluşturma Kuralları..... 34

Çizelgenin Analiz Kuralları..... 34

Çizelgenin Genleşme Kuralları..... 35

P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özelliklerin Çizelgeden Okunması İçin Tanımlar..... 36

P Dilinin A_i İyi Biçimli Formülünün $y_i(A_i)$: d Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması..... 36

P Dilinin A_i İyi Biçimli Formülünün $y_i(A_i)$: y Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması..... 37

P Dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ İyi Biçimli Formül Kümesinin $y_i(\Delta)$: d ve $y_i(A_i)$: y Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması.... 38

P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumu ve Kapalı Dillerde ‘Doğru’..... 39

Çıkarım ve Çıkarım Biçimi..... 40

Çıkarım Biçiminin Geçerliği ve Çıkarımın Sağlamlığı..... 41

Özet 45

Kendimizi Sınayalım 46

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı..... 48

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı..... 52

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar..... 53

3. ÜNİTE

PF Biçimsel Sistemi..... 56

GİRİŞ..... 57

Biçimsel Sistem..... 57

Dil ve Biçimsel Sistem..... 59

PF BİÇİMSEL SİSTEMİ..... 59

PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kuralları..... 60

PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği..... 61

PF Biçimsel Sisteminde Türeme ve Kanıtlama..... 63

PF Biçimsel Sisteminde İçerme ve Teorem..... 63

PF BİÇİMSEL SİSTEMİ İÇİN ÜST TEOREMLER..... 64

PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Üst Teoremi..... 64

PF Biçimsel Sistemi ve P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumu İçin Üst-Teoremler.....	64
Tutarlılık Üst Teoremi.....	65
Tamlık Üst Teoremi.....	65
Kanıt-Kuramsal Tutarlılık.....	66
Model-Kuramsal ve Kanıt-Kuramsal Tutarlılık Üst Teoremi.....	66
Özet	68
Kendimizi Sınayalım	69
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı	73
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı	76
Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar.....	77

4. ÜNİTE

P^Q Dili ve P^Q Dilinin Yorumu.....	78
GİRİŞ.....	79
P^Q DİLİ.....	79
P^Q Dili ile P^Q Dilinin Alt Kümeler Arasındaki Bağlıntılar.....	81
P^Q Dili ve P Dili.....	81
P^Q Dili İçin Dönüştürme Kuralları.....	82
P^Q Dilinde Tanımsal Karşılık.....	82
P^Q Dili İçin Tanımsal Tamlık.....	82
P^Q Dilinin Alt Kümesi Olan Diller	82
P^Q DİLİNİN YORUMU.....	84
P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumu İçin Tanımlar.....	84
P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumu.....	86
P Dilinin $\mathcal{Y}$ Yorumu.....	86
P Dilinin Bir $\mathcal{M}$ Yorumu.....	86
P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumu.....	88
P^Q Dilinin Bir $\mathcal{M}$ Yorumu.....	88
P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler.....	91
P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlı Tanımlar.....	92
Kısayollar.....	93
P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Kısayollarla Bağlı Tanımlar.....	94
P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumu İçin Üst-Teorem	102
P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumunda Dedüksiyon Üst-Teoremi.....	102

Özet	103
Kendimizi Sınayalım	106
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı	108
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı	111
Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar.....	113

5. ÜNİTE

P^Q Dilinin Bir Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $\mathcal{S}$ Yorumundaki Yorumlarının Analizi.....	114
GİRİŞ.....	115
P^Q DİLİNİN KAPALI İYİ BİÇİMLİ FORMÜL KÜMESİNİN $\mathcal{S}$ YORUMUNDAKİ $\mathcal{M}$ YORUMLARI İÇİN ÇİZELGE ANALİZİ.....	115
P^Q Dilinin $\{A_i\}$ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumundaki Çizelge Analizi.....	115
P^Q Dilinin Bir Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumundaki $\mathcal{M}$ Yorumları İçin Analiz Çizelgesinin Tanımlanması ve Çizelge Oluşturma Kuralları.....	116
Çizelgenin Analiz Kuralları.....	117
Çizelgenin Genleşme Kuralları.....	118
P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi Biçimli Formülünün $m_{mi}(A_i) = d$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması.....	119
P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi Biçimli Formülünün $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması.....	120
P^Q Dilinin Δ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması.....	120
P^Q Dilinin Δ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin Tüm A_i Elemanlarının m_{mi} Fonksiyonunda Aldığı Değerin $m_{mi}(A_i) = y$ Olduğu Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması.....	120
P^Q Dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması.....	120
P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özelliklerin Çizelgeden Okunması.....	121
Özet	125
Kendimizi Sınayalım	126
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı	128
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı	132
Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar.....	134

PF^Q Biçimsel Sistemi.....	136
GİRİŞ.....	137
PF ^Q BİÇİMSEL SİSTEMİ.....	137
PF ^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kuralları.....	137
PF ^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği.....	139
PF ^Q Biçimsel Sisteminde Türeme ve Kanıtlama.....	141
PF ^Q Biçimsel Sisteminde İçerme ve Teorem.....	142
PF ^Q BİÇİMSEL SİSTEMİ İÇİN ÜST-TEOREMLER.....	146
PF ^Q Biçimsel Sisteminde İçin Dedüksiyon Üst Teoremi.....	146
PF ^Q Biçimsel Sistemi ve P ^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumu İçin Üst-Teoremler.....	146
Tutarlık Üst Teoremi.....	146
Tamlık Üst Teoremi.....	147
Kanıt-Kuramsal Tutarlılık.....	147
Özet	148
Kendimizi Sınayalım	149
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı	153
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı	155
Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar.....	156

Önsöz

Mantık, genel olarak anlaşıldığı haliyle, nutkun bilimidir. Buradan hareketle mantığın, sözde ifadesini bulabilmesi bakımından düşünmeyi konu aldığı öne sürülebilir. Bilim de dâhil olmak üzere insanın bilmeye yönelik çabalarının düşünmeye bağlı olduğu kabul edilecek olursa, tüm bilimlerin düşünmenin bilimi olarak mantığa dayandığı sonucu bunu takip edecektir.

Mantık düşünmenin bilimi olarak tarif edilirken düşünme ile kastedilen hüküm vermedir. Dilimizde “dir” veya “değildir” diye hükme bağladığımız düşüncelerimizdir ancak bu manada mantığın konusu olabilecekler. Böyle anlaşılacak olursa genel olarak mantık hükümleri arasındaki bağıntıları konu alan bilimdir.

Hükümler arasındaki bağıntılar söz konusu olduğunda, hüküm içeriklerinin genel olarak mantık bakımından hiçbir önemi kalmaz; tamamen göz ardı edilebilirler. Böylece mantık “dir” ve “değildir” ile hükme bağladığımız düşünceler arasında, içeriklerinden bağımsız olarak kurulan bağıntıların geçerliliklerini konu alan bilim olur. Oysaki içerikten bağımsız olarak hüküm verilmesi, verilmiş hükmün içeriğinin olmaması imkânsızdır. Bu nedenle genel mantık araştırmacıları içerikten kurtulmanın yolunu, söz konusu bağıntıların geçerliliğini hükümleri değil, hüküm yerine durduğu uzlaşmaya bağlı olarak kabul edilen “semboller”, daha doğrusu “biçimleri” dikkate alarak incelemede bulmuştur. Bu çabaların ifadeleri de genel olarak biçimsel dil adıyla anılan, bir alfabe ve bazı kurallar belirlenerek inşa edilen yapılardır.

Bu kitap hazırlanırken yukarıda bahsettiğimiz uzlaşmaya, uzlaşmanın gerektirdiği sonuçları *mümkün olduğunca* yerine getirmeye dikkat ederek bağlı kalınmaya çalışıldı. Meselâ bir önermenin doğru veya yanlış olmasından değil, biçimden başka bir şey olmadığı kabul edilen belli bir iyi biçimli formülün ‘*d*’ veya ‘*y*’ değerini almasından bahsedildi. Tek tırnak işaretleri arasında yazılan *d* ve *y* işaretleri, biçimsel mantık açısından doğru ile yanlışın kısaltması olarak değil, sadece ve sadece işaret veya biçim olarak değerlendirilmelidir. Bu söylediklerimiz tüm diğer işaretler için de geçerlidir.

Bu kitapta önce P dili, sonra onun genişletilmesi suretiyle P^Q dili olmak üzere iki biçimsel dil kuruluyor, bu diller ve dillerin elemanları dillere ait olmayan başka şeylerle eşlenerek yorumlanıyor ve dilin elemanları belirli kurallara göre sıralanarak biçimsel sistemler inşa ediliyor. Öğrenciler biçimsel dillerin yorumlanmasını ve biçimsel sistemlerin inşa edilmesini takip etmekte güçlük çekebilirler. Tanımları ve kısa yolları dikkatle incelemek, örnek soru ve çözümler üzerinde çalışmak ve yeni sorular oluşturup çözmek bu güçlüğü aşmaya yardım edecektir.

Galatasaray Üniversitesi Felsefe Bölümü öğretim üyesi Tarık Necati Ilgıcıoğlu’nun titiz çalışmasının ürünü olan başlangıç seviyesindeki bu kitabın, konuya nüfuz edilmesine katkıda bulunacağına inanıyorum.

Editör

Yrd.Doç.Dr. Aliye KARABÜK KOVANLIKAYA

1

SEMBOLİK MANTIK

Amaçlarımız

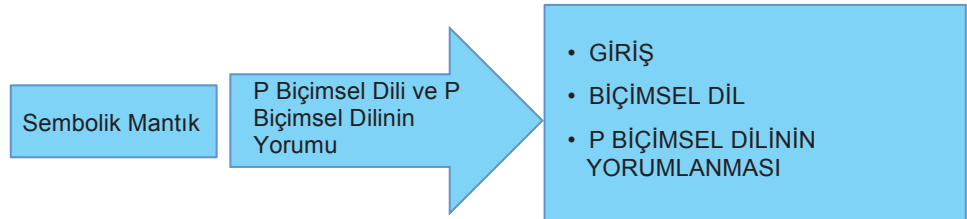
Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- P biçimsel dilini açıklayabilecek,
- P biçimsel dilinin yorumlanmasını değerlendirebilecek,
- P biçimsel dilinin yorumlanmasına bağlı olarak tanımlanan özellikleri açıklayabilecek,
- P biçimsel diline ve yorumuna dair üst-teoremleri açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Biçimsel Dil
- Alfabe
- Harf Tipi
- Harf Örneği
- Geçiş
- Biçimleme Kuralları
- İyi Biçimli Formül
- Üst-Dil
- Nesne-Dil
- Anma
- Dönüştürme
- Tanımsal Karşılık
- Tanımsal Tamlık
- Fonksiyon
- Fonksiyonel Tamlık
- Yorum
- Yorum Fonksiyonu
- Tutarlılık
- Geçerlilik

İçindekiler



P Biçimsel Dili ve P Biçimsel Dilinin Yorumu

GİRİŞ

Bu ünitenin konusu biçimler, biçimlerden oluşan boş olmayan sonlu diziler, bu diziler ile bir başka kümenin elemanlarının eşlenmesidir.

- Önce alfabe adı verilen harf kümesi belirlenecektir. Harfler çalışma için ilk biçimler olacaktır. Sonra bu harflerin örnekleri belirli bir şekilde dizilecektir. Böyle oluşturulmuş dizilerin bütününe ‘P biçimsel dili’ adı verilecektir. P biçimsel dili alfabesinin alt kümeleri için tanımsal tamlık tanımlanacaktır.
- Kendisi bir küme olan P biçimsel dilinin yorumu, biçimsel dilin elemanlarının bir başka kümenin elemanları ile ilişkilendirilmesinden ibarettir. P biçimsel dilinin iyi biçimli formüllerinin yorumunu yapmanın şartı, bu formülleri oluşturan elemanları yorumlamaktır. Bunu yapmak için formülleri oluşturan elemanların harf tiplerinin kümesi olan alfabeyi yorumlamak gerekir.
- Alfabenin bir alt kümesindeki elemanların yorumu, P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü olan farklı diziler için elemanların geçişlerinin dizilişlerine bağlı yorumlar üretir.
- Bu ünite de önce P biçimsel dili alfabesi yorumlanacaktır. Alfabenin yorumlanması için, bir alt kümesi başka bir küme ile ilişkilendirilecek, bir diğer alt kümesi ise önceki kümenin ilişkilendirildiği küme üzerine fonksiyonlarla eşlenecektir. Alfabe bu yolla yorumlandıktan sonra, biçimsel dilin iyi biçimli formülleri, yani, harf örneklerinden oluşmuş boş olmayan sonlu diziler yorumlanacaktır.
- P biçimsel dilinin bu yorumuna bağlı olarak tanımlanan özellikler biçimsel dilin iyi biçimli formülleri ile eşlenecektir.

BIÇİMSEL DİL

Biçimsel dil ‘alfabe’ adı verilen kümedeki elemanların belirli kurallara göre seçilmiş boş olmayan sonlu dizilerinin kümesidir. Alfabenin elemanları ile sonlu dizilerin elemanları arasındaki farkı belirtmek için harf tipi ve harf örneği ayrımı yapılır. Alfabenin elemanlarına *harf tipi*, sonlu dizilerin elemanlarına *harf örneği* adı verilir. Harf örnekleri boş olmayan sonlu dizileri teşkil eder. Bir harf tipinin sonlu dizilerdeki her örneği, o harf tipinin dizideki *geçışı* diye anılır.

Biçimleme Kuralları

Elemanları boş olmayan sonlu diziler olan biçimsel dil, tüm boş olmayan sonlu diziler kümesinin alt kümesidir. Tüm boş olmayan sonlu diziler kümesinin belirli bir alt kümesinin seçilmesini sağlayan kurallara, o biçimsel dil için *biçimleme*

kuralları adı verilir. Biçimleme kurallarına uyan her dizi o biçimsel dilin elemanıdır ve o biçimsel dilin *iyi biçimli formülüdür*.

ÖRNEK

$\{\Delta, \square\}$ kümesi bir biçimsel dil için alfabe olsun.

Biçimsel dilin biçimleme kuralı “ Δ ’ ile başlayan diziler, dilin iyi biçimli formülleridir ve başka hiçbir şey dilin iyi biçimli formülü değildir” olsun.

Buna göre dil, $\{\Delta, \square\}$ kümesindeki elemanların örneklerinin boş olmayan sonlu dizileri kümesinden seçilmiş olan $\{\Delta\Delta\Delta, \Delta\Delta\square, \Delta\square\Delta, \Delta\Delta\square\}$ kümesidir.

P Biçimsel Dili

P biçimsel dili şöyle seçilir:

Alfabe:

$$\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,)\}$$

Biçimleme kuralları:

- P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü, Γ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizisidir.
- Γ kümesinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların her geçişi P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.
- A_i P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü ise $\sim A_i$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.
- A_i ve A_j P biçimsel dilinin iyi biçimli formülleri ise $(A_i \wedge A_j)$, $(A_i \vee A_j)$, $(A_i \supset A_j)$, $(A_i \equiv A_j)$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülleridir.
- Γ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (ii), (iii) ve (iv)’de belirtilenler hariç, hiçbir şey P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü değildir.

ÖRNEK

$'p_1'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.

$'p_2'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.

$'p_1'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü olduğundan $'\sim p_1'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.

$'p_2'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü olduğundan $'\sim p_2'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.

$'\sim p_1'$ ve $'\sim p_2'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülleri olduğundan $'(\sim p_1 \vee \sim p_2)'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.

$'(\sim q_1 \vee \sim p_2)'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü değildir çünkü $'q_1'$ P biçimsel dilinin alfabesinin elemanı değildir.

$'(\sim 'p_1' \vee \sim p_2)'$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü değildir çünkü $'p_1''$ P biçimsel dilinin alfabesinin elemanı değildir.

$'(\sim p_1 \vee \sim p_2)''$ P biçimsel dilinin iyi biçimli formülü değildir.

ÖRNEK

$'(p_1, p_2 \wedge p_3)'$, $'[\sim p_1 \wedge \sim p_2]'$, $'\wedge p_1, p_2'$, $'(\sim p_1 \sim \wedge \sim p_2)'$ ve $'(\sim p_1 \wedge \sim p_2)'$ dizilerinden $'(\sim p_1 \wedge \sim p_2)'$ dizisi P dilinin iyi biçimli formülüdür. $'(p_1, p_2 \wedge p_3)'$, $'\wedge p_1, p_2'$, $'(\sim p_1 \sim \wedge \sim p_2)'$ dizileri P dilinin biçimleme kurallarına uymaz. $'[\sim p_1 \wedge \sim p_2]'$ dizisinde ise P dilinin alfabesi Γ kümesinin elemanı olmayan $[\vee]$ bir şekilleri vardır.

ÖRNEK

' q_2 ' P dilinin alfabesi olan Γ kümesinin elemanı olmadığından ' $((p_3 \wedge p_3) \supset \sim q_2)$ ' dizisi P dilinin iyi biçimli formülü değildir.

ÖRNEK

Geçiş: ' $\sim \sim p_3$ ', ' $((p_3 \supset \sim p_2) \supset p_1)$ ', ' $\sim (p_3 \vee \sim p_2)$ ', ' $p_3 \supset \sim p_3$ ' ve ' p_3 ' iyi biçimli formüllerinden ' p_3 ' P dilinin bir harfinin birden fazla geçişini içermeyen iyi biçimli formülüdür. ' p_3 ' iyi biçimli formülünde tek harfin, yani ' p_3 ' harfinin geçişi vardır. P dilinin ' $\sim \sim p_3$ ' iyi biçimli formülünde ' $\sim$ ' harfinin, P dilinin ' $((p_3 \supset \sim p_2) \supset p_1)$ ' iyi biçimli formülünde ' $\supset$ ' harfinin, P dilinin ' $\sim (p_3 \vee \sim p_2)$ ' iyi biçimli formülünde ' $\sim$ ' harfinin, P dilinin ' $p_3 \supset \sim p_3$ ' iyi biçimli formülünde ' p_3 ' harfinin birden fazla geçişi vardır.

SIRA SİZDE**' $(\wedge (p_2 \wedge p_3))$ ' P biçimsel dilinin bir iyi biçimli formülü müdür?**

P biçimsel dili seçilirken seçilen dil ile seçmekte kullanılan dil arasındaki ayrıma dikkat etmek gerekir. Yukarıdaki ifadelerde iki farklı dil yer alır. Biri, P biçimsel dilinin alfabesinden ve biçimleme kurallarından söz eden dildir. Diğeri ise alfabesinden ve biçimleme kurallarından söz edilen dildir. P biçimsel dilinden bahseden dile *üst-dil*, P biçimsel diline ise bu üst-dil itibarıyla *nesne-dil* adı verilir. P biçimsel dili için iyi biçimli formüllerin neler olduğunu belirleyen biçimleme kuralları, nesne-dil olan P biçimsel dili hakkında konuşan üst-dilde verilmiştir. Biçimleme kuralları verilirken geçen A_i ve A_j işaretleri nesne-dile değil üst-dile aittir. P biçimsel dilinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin elemanları üst-dilde ' p_1 ', ' p_2 ', ' p_3 ', ... ' p_n ', ' p_{n+1} ', ... adları ile anılmıştır. Üst-dile ait olan ' p_1 ' adı P biçimsel dilinin elemanı değildir. Bu *anma* ve bu *anmayla anılan* dilin elemanı arasındaki fark, biri işaretin solunda diğeri sağında olmak üzere iki kez tek tırnak kullanılarak gösterilmiştir.

Basitçe söylersek, durum kullanılan dile dahil olamayacak bir şey hakkında o dilde konuşurken o şeyin adını anmak gibidir. Adıyla anılan şey dilin unsuru değildir, anmak suretiyle dile dahil edilemez.

ÖRNEK

"Ali kimdir?" ifadesinde geçen ilk kelime bir insanın adıdır. "'Ali' iki harfli değildir" ifadesinde geçen 'Ali' ise "Ali kimdir?" ifadesinde geçen ilk kelimenin adıdır.

ÖRNEK

$\{A_i, (A_i \supset A_j), (p_3 \vee \sim p_2), (p_3 \wedge p_2)\}$ kümesindeki elemanlardan sadece ' $(p_3 \wedge p_2)$ ' P dilinin iyi biçimli formülüdür. Kümenin $\{A_i, (A_i \supset A_j)\}$ alt kümesinin elemanları P dili üzerine değişkenler, $\{(p_3 \vee \sim p_2)\}$ alt kümesinin elemanı P dilinin bir iyi biçimli formülünün üst-dildeki adıdır. Her iki kümenin de elemanları üst-dilin ifadeleridir.

ÖRNEK

' $(p_3 \wedge p_3)$ ' P dilinin iyi biçimli formülüdür, ' p_3 ' P dilinin elemanıdır, ' p_3 ' P dilinin iyi biçimli formülüdür, ' p_3 ' P dilinin iyi biçimli formülüdür' ve ' $(p_3 \wedge p_2)$ ' iyi biçimli formülü ' $(p_2 \wedge p_3)$ ' iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığıdır ifadelerinden ' p_3 ' P dilinin iyi biçimli formülüdür' ifadesi P dili hakkındadır. Diğer ifadeler P dilinin iyi biçimli formülleri hakkında değildir. Çünkü, sadece ' p_3 ' P dilinin bir iyi biçimli formülünü anar.

P Biçimsel Dili ile Alt Kümeleri Arasındaki Bağlıntılar

Buraya kadar, P biçimsel dilinin alfabesinden ve biçimleme kurallarından bahsedildi. Şimdi P biçimsel dili ile alt kümeleri arasındaki bağlantıları incelenecek. Bunu yapmak için bazı tanımların verilmesi gerekiyor.

Dönüştürme

Bir biçimsel dilin A_j iyi biçimli formülünü sonlu sayıda adımda A_i iyi biçimli formülüne karşılık getirme işlemine *dönüştürme* adı verilir.

Bir biçimsel dilin A_j iyi biçimli formülünün A_i iyi biçimli formülüne karşılık geldiğini tespit eden üst-dil ifadesine *dönüştürme kuralı* adı verilir.

Tanımsal Karşılık

Bir biçimsel dilin A_i iyi biçimli formülü ile A_j iyi biçimli formülü arasında dönüştürme kurallarına uyan bir dönüştürme varsa A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün *tanımsal karşılığıdır*.

Bir biçimsel dilin A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığı ise A_i iyi biçimli formülü A_j iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığıdır.

$A_i =_{\text{tnm}} A_j$ ifadesinde P biçimsel dilinin iyi biçimli formüllerinin üst-dildeki adları arasında duran '=' $_{\text{tnm}}$ sembolü, iyi biçimli formüllerin her birinin diğerinin tanımsal karşılığı olduğunu gösterir.

Değişme özelliği:
 γ^2_1 ikili ekleminin değişme özelliği, her p_i, p_j için $p_i \gamma^2_1 p_j =_{\text{tnm}} p_j \gamma^2_1 p_i$ olması demektir.

P Biçimsel Dili İçin Dönüştürme Kuralları

$$\begin{aligned} \sim \sim A_i &=_{\text{tnm}} A_i \\ \sim (A_i \wedge A_j) &=_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee \sim A_j) \\ \sim (A_i \vee A_j) &=_{\text{tnm}} (\sim A_i \wedge \sim A_j) \\ A_i &=_{\text{tnm}} A_i \wedge A_i \\ A_i &=_{\text{tnm}} A_i \vee A_i \\ (A_i \supset A_j) &=_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee A_j) \\ (A_i \equiv A_j) &=_{\text{tnm}} ((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_i \wedge A_j) &=_{\text{tnm}} (A_j \wedge A_i) \\ (A_i \vee A_j) &=_{\text{tnm}} (A_j \vee A_i) \\ (A_i \equiv A_j) &=_{\text{tnm}} (A_j \equiv A_i) \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$\begin{aligned} (p_1 \wedge p_2) &=_{\text{tnm}} (p_2 \wedge p_1) \\ (p_1 \vee p_2) &=_{\text{tnm}} (p_2 \vee p_1) \end{aligned}$$

Birleşme özelliği:
 γ^2_1 ikili ekleminin birleşme özelliği, her p_i, p_j, p_k için $(p_i \gamma^2_1 p_j) \gamma^2_1 p_k =_{\text{tnm}} p_i \gamma^2_1 (p_j \gamma^2_1 p_k)$ olması demektir.

$$\begin{aligned} ((A_i \vee A_j) \vee A_k) &=_{\text{tnm}} (A_i \vee (A_j \vee A_k)) \\ ((A_i \wedge A_j) \wedge A_k) &=_{\text{tnm}} (A_i \wedge (A_j \wedge A_k)) \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$\begin{aligned} '((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3)' &=_{\text{tnm}} '(p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3))' \\ '((p_1 \vee p_2) \vee p_3)' &=_{\text{tnm}} '(p_1 \vee (p_2 \vee p_3))' \end{aligned}$$

Dağılıma özelliği
 γ^2_1 ikili ekleminin γ^2_2 ikili eklemi üzerine dağılıma özelliği, her p_i, p_j, p_k için $p_i \gamma^2_1 (p_j \gamma^2_2 p_k) =_{\text{tnm}} (p_i \gamma^2_2 p_j) \gamma^2_2 p_k$ olması demektir.

$$\begin{aligned} ((A_i \vee A_j) \wedge (A_k \vee A_l)) &=_{\text{tnm}} (((A_i \wedge A_k) \vee (A_i \wedge A_l)) \vee ((A_j \wedge A_k) \vee (A_j \wedge A_l))) \\ ((A_i \wedge A_j) \vee (A_k \wedge A_l)) &=_{\text{tnm}} (((A_i \vee A_k) \wedge (A_i \vee A_l)) \wedge ((A_j \vee A_k) \wedge (A_j \vee A_l))) \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$\begin{aligned} (p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))' &=_{\text{tm}} ((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))' \\ (p_1 \vee (p_2 \wedge p_3))' &=_{\text{tm}} ((p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3))' \end{aligned}$$

P Biçimsel Dilinin İyi Biçimli Formülleri İçin Tanımsal Karşılık

P biçimsel dilinin A_i iyi biçimli formülü ile A_j iyi biçimli formülü arasında yukarıda listelenen dönüştürme kurallarına uyan bir dönüştürme varsa A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün *P biçimsel dilinde tanımsal karşılığıdır*.

SIRA SİZDE



P biçimsel dilinin ' $(p_1 \supset \sim p_2)$ ' iyi biçimli formülü ' $\sim (p_1 \wedge p_2)$ ' iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığı mıdır?

P Biçimsel Dili İçin Tanımsal Tamlık

P biçimsel dilinin her iyi biçimli formülünün, formülde geçişi olan $p_{j_1}, \dots, p_{m_n}$ harflerinin ve sadece Δ kümesinin elemanlarının geçişlerinden oluşmuş tanımsal karşılığı varsa P biçimsel dilinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ alt kümesinin Δ alt kümesi *P biçimsel dili için tanımsal tamdır*.

ÖRNEK

$\Delta = \{\sim, \vee\}$ kümesinin tanımsal tam olması için P biçimsel dilinin $p_{j_1}, \dots, p_{m_n}$ harflerinin geçişlerini içeren tüm iyi biçimli formüllerinin, sadece Δ kümesinin elemanlarının ve $p_{j_1}, \dots, p_{m_n}$ harflerinin geçişlerinden oluşan tanımsal karşılıkları olmalıdır.

A_i ve A_j iyi biçimli formülleri, $p_{j_1}, \dots, p_{m_n}$ harflerinin geçişlerini içeren iyi biçimli formüller olsun. ' $\sim$ ' ve ' $\vee$ ' Δ kümesinin elemanları olduğu için, $(A_i \wedge A_j)$, $(A_i \supset A_j)$, $(A_i \equiv A_j)$ formundaki iyi biçimli formüllerin, A_i , A_j ve Δ kümesinin elemanlarının geçtiği tanımsal karşılıklarını yazmak, Δ kümesinin tanımsal tamlığını göstermek için yeterlidir. (P dilinin A_k iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığını, her adımda dönüştürme kuralları belirtilen bir dönüştürmenin sonucu olarak yazmak gerekir.)

- i. $(A_i \wedge A_j) =_{\text{tm}} \sim \sim (A_i \wedge A_j)$ [Kural: $\sim \sim A_i =_{\text{tm}} A_i$]
 $\sim \sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tm}} \sim (\sim A_i \vee \sim A_j)$ [Kural: $\sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee \sim A_j)$]
 $(A_i \wedge A_j) =_{\text{tm}} \sim (\sim A_i \vee \sim A_j)$
- ii. $(A_i \supset A_j) =_{\text{tm}} \sim (A_i \vee A_j)$ [Kural: $(A_i \supset A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee A_j)$]
- iii. $(A_i \equiv A_j) =_{\text{tm}} ((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i))$ [Kural: $(A_i \equiv A_j) =_{\text{tm}} ((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i))$]
 $((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i)) =_{\text{tm}} ((\sim A_i \vee A_j) \wedge (\sim A_j \vee A_i))$ [Kural: $(A_i \supset A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee A_j)$]
 $((\sim A_i \vee A_j) \wedge (\sim A_j \vee A_i)) =_{\text{tm}} \sim \sim ((\sim A_i \vee A_j) \wedge (\sim A_j \vee A_i))$ [Kural: $\sim \sim A_i =_{\text{tm}} A_i$]
 $\sim \sim ((\sim A_i \vee A_j) \wedge (\sim A_j \vee A_i)) =_{\text{tm}} \sim (\sim (\sim A_i \vee A_j) \vee \sim (\sim A_j \vee A_i))$ [Kural: $\sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee \sim A_j)$]
 $(A_i \equiv A_j) =_{\text{tm}} \sim (\sim (\sim A_i \vee A_j) \vee \sim (\sim A_j \vee A_i))$

Tanımın koyduğu şart sağlandığı için $\Delta = \{\sim, \vee\}$ kümesi tanımsal olarak tamdır.

Tanımsal Tamlık ve P Biçimsel Dilinin Alt Kümesi Olan Biçimsel Diller

P biçimsel dilinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ alt kümesinin Δ alt kümesi, P biçimsel dili için tanımsal tamsa P biçimsel dilinin en az bir alt kümesi vardır ki P biçimsel dilinin her iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığı olan iyi biçimli formül o kümenin elemanıdır. Bu küme tanım gereği bir biçimsel dildir. Bu biçimsel dil $\langle p_1, \langle p_2, \langle p_3, \dots, \langle p_n, \langle p_{n+1}, \dots \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle$ harflerinin ve Δ kümesinin elemanlarının geçişlerinin bulunduğu iyi biçimli formüllerin kümesidir.

P biçimsel dilinin, elemanları sadece $\Lambda = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, (\cdot)\}$ kümesinin elemanlarının geçişlerini içeren iyi biçimli formüller olan bir alt kümesi vardır. Örnekte ele alınan Θ kümesinin $\Delta = \{\sim, \vee\}$ alt kümesi, P biçimsel dili için tanımsal tam olduğundan, P biçimsel dilinin her iyi biçimli formülü için formülün tanımsal karşılığı olan iyi biçimli formül, $\Lambda = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, (\cdot)\}$ kümesinin elemanlarının geçişlerini içeren iyi biçimli formül kümesinin elemanıdır.

Bu küme, biçimsel dil tanımı gereği bir biçimsel dildir. Bu biçimsel dilin her elemanı P biçimsel dilinin de elemanı olduğu için, bu dil P biçimsel dilinin alt kümesi olan bir dildir.

Bu dile S biçimsel dili adı verilsin.

S biçimsel dili şu şekilde seçilir:

- S biçimsel dilinin bir iyi biçimli formülü, biçimsel dilin alfabesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizisidir.
- Λ kümesinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların her geçişi P biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.
- A_i S biçimsel dilinin iyi biçimli formülü ise $\sim A_i$ S biçimsel dilinin bir iyi biçimli formülüdür.
- A_i ve A_j S biçimsel dilinin iyi biçimli formülleri ise $(A_i \vee A_j)$ S biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.
- Λ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (ii), (iii) ve (iv)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey S biçimsel dilinin iyi biçimli formülü değildir.

S biçimsel dilinin elemanı olan bütün iyi biçimli formüller P biçimsel dilinin elemanıdır. Dolayısıyla S biçimsel dili P biçimsel dilinin alt kümesidir.

Ancak ' $\wedge$ ', ' $\supset$ ' ve ' $\equiv$ ' harfleri Λ kümesinin elemanı olmadığından, P biçimsel dilinin bu harflerin geçişlerini içeren iyi biçimli formülleri, S biçimsel dilinin iyi biçimli formülü değildir. Bu nedenle P biçimsel dili S biçimsel dilinin alt kümesi değildir.

Dolayısıyla S biçimsel dili P biçimsel dilinin öz-alt kümesidir.

S biçimsel dili, P biçimsel dilinin her iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığının bulunduğu P biçimsel dilinin öz-alt kümelerinden biridir.

SIRA SİZDE



3

$\Delta = \{\sim, \supset\}$ kümesi P biçimsel dili için tanımsal olarak tam mıdır?

P BİÇİMSEL DİLİNİN YORUMLANMASI

P biçimsel dili bir küme olduğundan, yorumu bir kümenin bir başka küme ile ilişkilendirilmesinden ibarettir ve kümeler teorisi çerçevesinde yapılır. Bu sebepten, P biçimsel dilinin yorumlanmasına geçmeden önce, yorumda kullanılacak olan aksiyom ve tanımları sıralayalım.



Aksiyom ve Tanımlar

- İki küme ancak ve ancak elemanları aynı ise *aynıdır*.
 - $a \in X$ ve $b \in Y$ için a ve b 'nin oluşturduğu *sıralı ikili*, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ kümesidir ve (a, b) biçiminde gösterilir.
 - $a \in X$ (a, b) sıralı ikilisinin ilk bileşeni, $b \in Y$ (a, b) ikilisinin ikinci bileşenidir.
 - (a, b) ve (x, y) küme ve $(a, b) = (x, y)$ ise $a = x$ ve $b = y$ olur.
 - $x \in X$ ve $y \in Y$ olan tüm sıralı (x, y) ikilileri kümesine, X kümesi ile Y kümesinin *kartezyen çarpımı* adı verilir ve $X \times Y$ biçiminde gösterilir.
 - Y kümesinin X kümesindeki tümleyeni, X kümesinin Y kümesinin elemanı olmayan elemanlarının kümesidir ve $X - Y$ biçiminde gösterilir.
 - R kümesi, her elemanı sıralı ikili ise *bağıntıdır*.
 - Her elemanı sıralı ikili olan bir kümenin, $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$ özelliğini sağlayan f altkümesi bir *fonskiyondur*.
 - f kümesinin elemanı olan sıralı ikililerin ilk bileşenlerinin kümesi f fonskiyonunun tanım kümesidir.
 - f fonskiyonunun tanım kümesi X kümesi ve f kümesinin elemanı olan sıralı ikililerin ikinci bileşenlerinin kümesi Y kümesinin alt kümesi olduğunda, f kümesi X kümesinden Y kümesine bir fonskiyondur.
- Dolaysız sonuç: f kümesi X kümesinden Y kümesine bir fonskiyon olduğunda, her $x \in X$ için, $(x, y) \in f$ ise bir ve yalnızca tek bir $y \in Y$ vardır.
- f , X kümesinden Y kümesine bir fonskiyon ve g de Y kümesinden Z kümesine bir fonskiyonsa $h(x) = g(f(x))$ olarak tanımlanan, X kümesinden Z kümesine h fonskiyonu g ve f fonskiyonlarının bileşkesidir.
 - Elemanı küme olan küme *koleksiyondur*.

ÖRNEK

$\{\{a\}, \{a, b\}\}$ kümesi, elemanları $\{a\}$ kümesi ve $\{a, b\}$ kümesi olan koleksiyondur.

- X ve Y kümeleri aralarında birebir eşleme varsa eş değerdir.
- X kümesi bir doğal sayıya eş değerse sonlu, aksi hâlde sonsuzdur.
- $(t_1, \dots, t_n)$ sıralı n -lisi (n bir doğal sayı iken) n elemanlı bir kümedir.
- $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni}, t_{(n+1)i}, \dots)$ ve $(t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj}, t_{(n+1)j}, \dots)$ sıralı n -lileri ancak ve ancak $t_{1i} = t_{1j}, t_{2i} = t_{2j}, \dots, t_{ni} = t_{nj}, t_{(n+1)i} = t_{(n+1)j}, \dots$ ise aynıdır.

P Dilinin Yorumu

Yorum, bir kümenin bir elemanına başka bir kümenin bir elemanının karşılık gelmesidir. Bir eleman ve onun karşılığı, ilkinin birinci bileşen, ikincisinin ikinci bileşen olduğu sıralı ikiliyi oluşturur. Sıralı ikilinin elemanı olduğu küme, yorumlanan şeyin elemanı olduğu küme ile ona karşılık gelen şeyin elemanı

olduğu kümenin kartezyen çarpımının alt kümesidir ve bir bağıntıdır. Yorumlanan elemana karşılık gelen tek bir eleman varsa alt kümede yorumlanan elemanın birinci bileşen olduğu tek bir sıralı ikili vardır ve bu alt küme bir fonksiyondur.

P dilinin bir yorumu, dilin her iyi biçimli formülüne bir kümeden tek bir elemanın karşılık gelmesinden ibarettir. Bu nedenle P dilinin yorumları, P dilinden söz konusu kümeye fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlara yorum fonksiyonları adı verilir.

P dilinin iyi biçimli formülünün her yorumu bir yorum fonksiyonunun elemanıdır.

Yorum

P dilinin Y yorumu, elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan $(\Phi \cup T, P, Z)$ sıralı üçlüsüdür.

$f_j^m \in \Phi$ ise $f_j^m \in \{x : x = f_i^n : T_1 \times \dots \times T_n, (n \geq 1) \rightarrow T\}$ olan $\Phi = \{f_e^1, f_g^2, f_k^2, f_l^2, f_m^2\}$ kümesi bir fonksiyon kümesidir.

$T = \{t_1, t_2\}$ kümesi Φ kümesinin elemanları olan fonksiyonların üzerinde tanımlandığı kümedir.

P iyi biçimli formül kümesidir.

Z kümesi ise P dili kümesinden T kümesine olan tüm fonksiyonların koleksiyonudur.

Z koleksiyonunun elemanı olan her z_i fonksiyonuna *yorum fonksiyonu* adı verilir.

Tanım kümesi $T = \{t_1, t_2\}$ olan her f_i^n fonksiyonuna *t-fonksiyonu* adı verilir.

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumu itibarıyla $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ kümesinin elemanları *t-fonksiyonu eklemleri* adını alır.

P dilinin alfabesi olan $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,)\}$ kümesinin $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki her eleman bu yorumda *önerme-değişkeni* adını alır.

P dilinin alfabesi olan $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,)\}$ kümesinin $\Pi = \{(,)\}$ alt kümesi, iyi biçimli formülleri ayırmak için vardır ve bu alt küme fonksiyonları birbirlerinden ayırmak için kullanılan işaretlerle eşlenir.

P Dili İçin Yorum Fonksiyonları

P dili üzerine tanımlanan ve Z koleksiyonunun elemanı olan z_i yorum fonksiyonu, P dilinin bir iyi biçimli formülünü $\Phi \cup T$ kümesinin tek bir elemanı ile eşler. P dilinin bir iyi biçimli formülü ya $A_i : p_i$ ya $A_i : \gamma^1_1 A_j$ ya da $A_i : (A_j \gamma^2_1 A_k)$ biçimindedir. P dilinin elemanı olan A_i iyi biçimli formülünün, z_i fonksiyonundaki değeri $\gamma^1_1 \in \{\sim\}$ ve $\gamma^2_i \in \Theta - \{\sim\}$ olduğunda, A_i iyi biçimli formülü $\gamma^1_1 A_i$ ya da $(A_j \gamma^2_1 A_k)$ ise Φ kümesinin, P dilinin $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin elemanı ise T kümesinin elemanıdır.

Aşağıdaki gibi tanımlanan ve Z koleksiyonunun elemanı olan z_i bir yorum fonksiyonudur.

$$z_i : P \rightarrow \Phi \cup T$$

$$z_i(\gamma^1_1 A_j) = f_e^1 \in \Phi$$

$$z_i((A_j \gamma^2_1 A_k)) = f_i^2 \in \Phi$$

$$z_i(p_i) = t_i \in T$$

P dilinin alfabesi olan Γ kümesinin $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların tüm geçişlerinin kümesi $\Omega_\kappa = \{x : x = p_{ik} : p_i \in \Omega\} = \{p_{11}, \dots, p_{1n}, p_{1n+1}, \dots, p_{n1}, \dots, p_{nn}, p_{nn+1}, \dots\}$ kümesidir. P dilinin tanım kümesi

P dilinin iyi biçimli formüllerindeki tüm p_i geçişlerinin kümesi $\Theta_K = \{x = e_K : e \in \Theta\}$ kümesidir. Tanım kümesi Ω_K kümesi olan z_{ik} fonksiyonunun olduğu kabul edilecektir. Karmaşıklıkla azaltmak için harfleri indeksleyerek geçişleri üreten fonksiyon ise burada tanımlanmayacaktır. Bu fonksiyon verilmediğinde ve p_{ik} bu fonksiyonda p_i lerin kabul ettiği değer olarak alınmadığında $\Omega \times \Omega_K$ kartezyen çarpımının $\{(p_i, p_{i_1}), \dots, (p_i, p_{i_n}), (p_i, p_{i_{n+1}}), \dots\}$ alt kümesi fonksiyon olmayacaktır.

olduğu her z_i fonksiyonu için tanım kümesi $P \cup \Omega_K$ kümesi olan ve P dilinin $\gamma^1_1 A_j$ ve $(A_j \gamma^2_1 A_k)$ elemanlarının fonksiyondaki değerlerinin $z_{ik}(\gamma^1_1 A_j) = f_e^1$ ve $z_{ik}((A_j \gamma^2_1 A_k)) = f_i^2$ olduğu $z_{ik} : P \cup \Omega_K \rightarrow \Phi \cup T$ fonksiyonu vardır.

Ω kümesinin elemanı olan tüm p_i elemanları ve Ω_K kümesinin tüm p_{ik} elemanları için $z_{ik}(p_{ik}) = z_i(p_i)$ olur. z_{ik} fonksiyonu, $z_{ik}(p_{ik})$ değerinin yerine Ω kümesinin p_i elemanının z_i fonksiyonunda aldığı değer olan $z_i(p_i)$ değerinin geçmesini temin eden fonksiyondur.

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda, tanım kümesi Z koleksiyonunun elemanları olan z_i fonksiyonlarının değer kümeleri ve $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in f_j^m$ ise $(x_1, \dots, x_{n-1})$ için $s_i(f_j^m) = x_n$ olan s_i fonksiyonu şu biçimde tanımlanır:

$$\begin{aligned} z_i(p_i) &= t_i \in T \text{ olduğunda,} & s_i(z_i(p_i)) &= t_i, \\ (z_i(A_j), t_i) &\in z_i(\gamma^1_1 A_j) \text{ olduğunda,} & s_i(z_i(\gamma^1_1 A_j)) &= t_i, \\ (z_i(A_j), z_i(A_k), t_i) &\in z_i((A_j \gamma^2_1 A_k)) \text{ olduğunda,} & s_i(z_i((A_j \gamma^2_1 A_k))) &= t_i. \end{aligned}$$

P dilinin A_i iyi biçimli formülünün bir yorumu, formüldeki $p_{j1}, \dots, p_{jk}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{mr}$ geçişleri olan $p_j, \dots, p_m$ harflerinin z_i yorum fonksiyonunda aldığı değerlerdir: $z_i(p_j) = t_i \in T, \dots, z_i(p_m) = t_j \in T$ ($t_i = t_j$ ya da $t_i \neq t_j$). $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ olduğundan $(z_i(p_j), \dots, z_i(p_m), x_n) = (z_i(p_j), \dots, z_i(p_m), x_n)$ olur. Bu sebepten $z_i(p_j) = t_i, \dots, z_i(p_m) = t_j$ yorumu $(x_1, \dots, x_{n-1}) = ((z_i(p_j), \dots, z_i(p_m))) = (t_i, \dots, t_j) \in T \times \dots \times T$ olarak da yazılır.

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda, $s_i(z_i(A_i)) = t_i \in T$, P dilinin A_i iyi biçimli formülünün bir y_i yorumunda aldığı değerdir.

P dilinin A_i iyi biçimli formülünün bir y_i yorumunda aldığı değeri göstermek için $y_i(A_i)$: $s_i(z_i(A_i)) = t_i \in T$ veya kısaca $y_i(A_i)$: $t_i \in T$ yazılır.

ÖRNEK

$$\begin{aligned} A_1 &: 'p_1' \\ A_2 &: \gamma^1_1 p_1 \\ A_3 &: (p_1 \gamma^2_1 p_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^1_1 &\in \{\sim\} \\ \gamma^2_1 &\in \Theta - \{\sim\} \\ T &= \{a, b\} \\ \Phi &= \{f_e^1, f_g^2, f_k^2, f_i^2, f_m^2\} \\ \Omega &= \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m, p_{n+1}, \dots\} \subset P \\ \Omega_K &= \{x = p_{ik} : p_i \in P\} = \{p_{11}, \dots, p_{1m}, p_{1n+1}, \dots, p_{n1}, \dots, p_{nm}, p_{nn+1}, \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &: P \rightarrow \Phi \cup T \\ z_1(\gamma^1_1 p_1) &= f_e^1 = \{(a, a), (b, b)\} \\ z_1((p_1 \gamma^2_1 p_2)) &= f_g^2 = \{(a, a, b), (a, b, b), (b, a, a), (b, b, a)\} \\ z_1('p_1') &= a \\ z_1('p_2') &= b \\ z_1(p_i) &= a \text{ (} i > 2 \text{ için).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i(z_i(p_i)) &= t_i, \quad z_i(p_i) = t_i \in T \text{ olduğunda.} \\ s_i(z_i(\gamma^1_1 p_i)) &= t_i, \quad (z_i(p_i), t_i) \in z_i(\gamma^1_1 p_i) \text{ olduğunda.} \\ s_i(z_i((p_i \gamma^2_1 p_j))) &= t_i, \quad (z_i(p_i), z_i(p_j), t_i) \in z_i((p_i \gamma^2_1 p_j)) \text{ olduğunda.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_i(z_i('p_1')) &= a, \text{ çünkü } z_i('p_1') = a \in T = \{a, b\} \\
s_i(z_i(\gamma_1^1 p_1)) &= a, \text{ çünkü } (z_i('p_1'), a) \in z_i(\gamma_1^1 p_1) = f_e^1 = \{(a, a), (b, b)\} \\
s_i(z_i((p_1 \gamma_1^2 p_2))) &= b, \text{ çünkü } (z_i('p_1'), z_i('p_2'), b) \in z_i((p_1 \gamma_1^2 p_2)) = f_g^2 = \{(a, a, b), (a, b, b), (b, a, a), (b, b, a)\}
\end{aligned}$$

$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in f_j^m$ ise $(x_1, \dots, x_{n-1})$ için $s_i(f_j^m) = x_n$ olduğundan $(a, b, b) \in f_g^2$ 'dir ve (a, b) için $s_i(f_g^2) = b$ olur.

$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ olduğundan

$(z_i('p_1'), z_i('p_2'), t_i) = ((z_i('p_1'), z_i('p_2')), t_i)$ olduğundan yorum için

$z_i('p_1') = a, z_i('p_2') = b$ veya $((z_i('p_1'), z_i('p_2')) = (a, b))$ yazılır.

$z_i('p_1') = a, z_i('p_2') = b$ yorumunda, başka bir deyişle $(z_i('p_1'), z_i('p_2')) = (a, b)$ yorumunda

$$\begin{aligned}
y_i(A_2) : s_i(z_i(\gamma_1^1 p_1)) &= a \\
y_i(A_3) : s_i(z_i((p_1 \gamma_1^2 p_2))) &= b \text{ olur.}
\end{aligned}$$

P dilinin her A_i iyi biçimli formülü için $z_i(A_i) = f_i^n(x_1, \dots, x_n)$ olur ki f_i^n fonksiyonu $\Phi = \{f_e^1, f_g^2, f_k^2, f_m^2\}$ kümesinin elemanı olan fonksiyonların bileşkesidir ve her $x_i = z_i(p_i)$ 'dir.

P dilinin bütününün $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumundan değil de onun parçaları, yani, elemanı veya alt kümesi olan bir iyi biçimli formülün veya iyi biçimli formül kümesinin yorumundan başladığında, P dilinin $p_j, \dots, p_m$ iyi biçimli formüllerinin z_i fonksiyonundaki değerlerinin $(z_i(p_j), \dots, z_i(p_m))$ n -lisi ile z_j fonksiyonundaki değerlerinin $(z_j(p_j), \dots, z_j(p_m))$ n -lisi aynı ise z_i ve z_j fonksiyonları farklı olsalar da y_i yorumu ile y_j yorumu P dilinin $p_j, \dots, p_m$ harflerinin geçişlerinin bulunduğu A_i iyi biçimli formülü için aynıdır.

P dilinin, A_i iyi biçimli formülü için aynı olan y_i yorumlarından biri A_i iyi biçimli formülünün paradigmatik yorumu olarak kabul edilir.

ÖRNEK

Önceki örneğin devamı olarak, P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda Z koleksiyonunun elemanı olan z_2 yorum fonksiyonunda $z_2('p_1') = a, z_2('p_2') = b$ ve $i > 2$ için $z_2('p_i') = b$ olsun. z_3 yorum fonksiyonunda $z_3('p_1') = a, z_3('p_2') = a, i > 2$ için $z_3('p_i') = b$ olsun. z_2 yorum fonksiyonu, $z_1('p_1') = a, z_1('p_2') = b, i > 2$ için $z_1('p_i') = a$ olarak tanımlanan z_1 yorum fonksiyonundan farklıdır. P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda P dilinin y_1 yorumu ile y_2 yorumu farklıdır çünkü $z_1('p_3') \neq z_2('p_3')$ olur. Ancak $A_3 : (p_1 \gamma_1^2 p_2)$ iyi biçimli formülü için y_1 yorumu ile y_2 yorumu aynıdır. Bu iki yorum A_3 iyi biçimli formülü için tek bir yorumdur ve y_3 yorumundan farklıdır.

İki Elemanlı Küme Üzerine 2-li Fonksiyon

Fonksiyonun üzerinde tanımlanacağı T kümesi, elemanları Latin alfabesinin farklı iki harfi 'd' ve 'y' olan $T = \{d, y\}$ kümesi olsun. Fonksiyonun tanım kümesi $T \times T$ olsun. t_i ve t_j T kümesinin elemanı iken $T \times T$ kümesinin elemanı olan (t_i, t_j) sıralı ikilisinin, f_i^2 fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonda kabul ettiği değer olan $f_i^2((t_i, t_j))$ de T kümesinin elemanı olsun.

Tanımlanan f_i^2 fonksiyonu, iki elemanlı küme üzerinde 2-li bir fonksiyondur. İki elemanlı küme üzerinde tanımlanan 2-li fonksiyonlara atfedilen her şey bu fonksiyona da atfedilir.

Her t_i 'nin T^n 'nin elemanlarından biri olduğu sıralı $(x_1, \dots, x_n)$ n -lilerinin sayısı ise 2^n olur. Başka şekilde söylersek $T_1 \times \dots \times T_n$ 'nin eleman sayısı 2^n olur. Bu

durumda her f fonksiyonu için bağımsız değişken olacak $T \times T$ 'nin elemanı olan (x_1, x_2) sıralı ikililerinin sayısı dört olacaktır.

Bu türden fonksiyonların sayısı ise yani iki elemanlı küme üzerine iki değişkenli (sıralı ikilinin her bir terimi T 'nin elemanı olmak kaydıyla değişken olarak alınır) fonksiyonların sayısı ise n eleman sayılı küme üzerine 2-li fonksiyonların sayısı $2^{(2n)}$ olduğundan, $2^{2 \times 2}$ olur. $T = \{d, y\}$ kümesi iki elemanlı olduğundan, T kümesi üzerinde tanımlı 16 fonksiyon vardır.

Bu 2-li fonksiyonların tümü değişkenleri ile birlikte bir çizelge hâlinde yazılırsa:

x_1	x_2	f_0^2	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2
d	d	y	y	y	y	y	y	y	y	d	d	d	d	d	d	d	d
d	y	y	y	y	y	d	d	d	d	y	y	y	y	d	d	d	d
y	d	y	y	d	d	y	y	d	d	y	y	d	d	y	y	d	d
y	y	y	d	y	d	y	d	y	d	y	d	y	d	y	d	y	d

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumu $T = \{t_i, t_j\} = \{d, y\}$ kümesi ile sabitlenildiğinde, bu şekilde sabitlenmiş yorumu tamamlamak için yapılması gereken, $\Phi = \{f_e^1, f_g^2, f_k^2, f_l^2, f_m^2\}$ kümesinin elemanı olan fonksiyonları seçmektir.

Φ kümesinin elemanı olan fonksiyonlar aşağıda sıralanan fonksiyonlardır:

N-fonksiyonu

$$N(d) = y$$

$$N(y) = d$$

C-fonksiyonu

$$C(d, d) = d$$

$$C(d, y) = y$$

$$C(y, d) = y$$

$$C(y, y) = y$$

D-fonksiyonu

$$D(d, d) = d$$

$$D(d, y) = d$$

$$D(y, d) = d$$

$$D(y, y) = y$$

I-fonksiyonu

$$I(d, d) = d$$

$$I(d, y) = y$$

$$I(y, d) = d$$

$$I(y, y) = d$$

E-fonksiyonu

$$E(d, d) = d$$

$$E(d, y) = y$$

$$E(y, d) = y$$

$$E(y, y) = d$$

Fonksiyonel Tamlık

Fonksiyonel tamlık – ilk tanım: Δ fonksiyonlar kümesi, elemanlarının üzerinde tanımlandığı T kümesi üzerinde tanımlanmış bütün fonksiyonların kümesi Σ 'ya eş değer ve sadece Δ kümesindeki fonksiyonlar veya bu kümedeki

fonksiyonlardan oluşmuş bileşke fonksiyonlar kümesi varsa T kümesi için fonksiyonel olarak tamdır.

Fonksiyonel tamlık – ikinci tanım: $T = \{d, y\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış fonksiyonların kümesi Δ , $T = \{d, y\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış bütün fonksiyonlar kümesi Σ 'ya eş değer ve elemanları Δ kümesindeki t -fonksiyonları veya bu kümedeki t -fonksiyonlarından oluşmuş bileşke t -fonksiyonları olan küme varsa $T = \{d, y\}$ kümesi için fonksiyonel olarak tamdır.

$\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesi $T = \{d, y\}$ kümesi için fonksiyonel olarak tamdır. İki elemanlı $T = \{d, y\}$ kümesi üzerindeki tüm 2-li fonksiyonlar için $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesinin elemanlarından oluşan bir bileşke fonksiyon vardır. İki elemanlı $T = \{d, y\}$ kümesi üzerindeki tüm n -li fonksiyonlar için $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesinin elemanlarından oluşan bir bileşke fonksiyon vardır.

P Dilinin Bir Yorumu

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda, Φ kümesinin elemanları bu şekilde belirlendikten sonra, P dilinin bir yorumu dilin elemanları olan iyi biçimli formülleri T kümesi üzerindeki fonksiyonlarla eşler:

$$\Phi = \{x : x = f^2_i : T \times T \rightarrow T \text{ veya } x = f^1_i : T \rightarrow T\} = \{f^1_e, f^2_g, f^2_k, f^2_l, f^2_m\},$$

$$T = \{d, y\},$$

$$Z = \{x : x = z_i : P \rightarrow \Phi \cup T\}.$$

P dilinin $\sim A_i, (A_i \wedge A_j), (A_i \vee A_j), (A_i \supset A_j), (A_i \equiv A_j)$ biçimindeki iyi biçimli formülleri $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesinin elemanlarıyla eşlendiğinde, P dilinin her iyi biçimli formülü bu biçimde olduğundan, P dilinin her iyi biçimli formülüne karşılık gelen T kümesi üzerinde bir fonksiyon olacaktır.

Φ kümesi T kümesi için fonksiyonel olarak tam olduğundan, P dilinin $\sim A_i, (A_i \wedge A_j), (A_i \vee A_j), (A_i \supset A_j), (A_i \equiv A_j)$ biçimindeki iyi biçimli formülleri Φ kümesinin elemanlarıyla eşlendiğinde, T kümesi üzerindeki her fonksiyona P dilinin en az bir iyi biçimli formülü karşılık gelecektir.

P dilinin bir y_i yorumu $(\Phi \cup T, P, z_i)$ sıralı üçlüsüdür. z_i fonksiyonu $P = \{A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots\}$ kümesinden $\Phi \cup T$ kümesine bir fonksiyondur:

$$\begin{aligned} \sigma \in \Omega &= \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\} \text{ yani } \sigma = p_j \text{ ise, } z_i(\sigma) = z_i(p_j) = t_i \in T, \\ \sigma = A_i &= \sim A_j \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = N(z_i(A_j)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \wedge A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = C(z_i(A_j), z_i(A_k)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \vee A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = D(z_i(A_j), z_i(A_k)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \supset A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = I(z_i(A_j), z_i(A_k)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \equiv A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = E(z_i(A_j), z_i(A_k)). \end{aligned}$$

P dilinin bir yorumu olan $y_i = (\Phi \cup T, P, z_i)$ sıralı üçlüsünde z_i bir fonksiyon olduğundan, P dilinin A_i iyi biçimli formülü için bu yorumda ya $s_i(z_i(A_i)) = d \in T$ ya da $s_i(z_i(A_i)) = y \in T$ olur.

P dilinin farklı bir y_j yorumu ise $(\Phi \cup T, P, z_j)$ sıralı üçlüsüdür. z_j fonksiyonu da $P = \{A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots\}$ kümesinden $\Phi \cup T$ kümesine bir fonksiyondur:

$\sigma \in \Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ yani $\sigma = p_i$ ise, $z_j(\sigma) = z_j(p_i) = t_i \in T$, en az bir p_i için $z_j(p_i) \neq z_i(p_i)$,

$$\begin{aligned} \sigma = A_i &= \sim A_j \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = N(z_i(A_j)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \wedge A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = C(z_i(A_j), z_i(A_k)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \vee A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = D(z_i(A_j), z_i(A_k)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \supset A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = I(z_i(A_j), z_i(A_k)), \\ \sigma = A_i &= (A_j \equiv A_k) \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = E(z_i(A_j), z_i(A_k)). \end{aligned}$$

z_i yorum fonksiyonundan farklı z_j yorum fonksiyonu için,

$\sigma = A_i = \sim A_j$	ise	$z_j(\sigma) = z_i(\sigma) = N(z_i(A_j))$,
$\sigma = A_i = (A_j \wedge A_k)$	ise	$z_j(\sigma) = z_i(\sigma) = C(z_i(A_j), z_i(A_k))$,
$\sigma = A_i = (A_j \vee A_k)$	ise	$z_j(\sigma) = z_i(\sigma) = D(z_i(A_j), z_i(A_k))$,
$\sigma = A_i = (A_j \supset A_k)$	ise	$z_j(\sigma) = z_i(\sigma) = I(z_i(A_j), z_i(A_k))$,
$\sigma = A_i = (A_j \equiv A_k)$	ise	$z_j(\sigma) = z_i(\sigma) = E(z_i(A_j), z_i(A_k))$.

Bu nedenle P dilinin bir y_i yorumu, $\sigma \in \Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ olduğunda, z_i yorum fonksiyonunun neticesi olan $(z_i(p_1), \dots, z_i(p_n), z_i(p_{n+1}), \dots)$ dizisini üretir.

z_i ve z_j yorum fonksiyonları aynı ise $(z_i(p_1), \dots, z_i(p_n), z_i(p_{n+1}), \dots)$ dizisi ile $(z_j(p_1), \dots, z_j(p_n), z_j(p_{n+1}), \dots)$ dizisi aynıdır. $(z_i(p_1), \dots, z_i(p_n), z_i(p_{n+1}), \dots)$ dizisi ile $(z_j(p_1), \dots, z_j(p_n), z_j(p_{n+1}), \dots)$ dizisi aynı ise z_i ve z_j yorum fonksiyonlarının değer kümesi $p_j, \dots, p_m$ iyi biçimli formülleri için aynıdır.

DİKKAT



Ancak ve ancak $(z_i(p_1), \dots, z_i(p_n), z_i(p_{n+1}), \dots) = (z_j(p_1), \dots, z_j(p_n), z_j(p_{n+1}), \dots)$ ise $z_i = z_j$ olur.

ÖRNEK

P dilinin ' p_1 ' iyi biçimli formülünün iki yorumu vardır:

- $(\Phi \cup T, P, z_1)$ sıralı üçlüsü. Bu yorumda $z_1(p_1) = d \in T$.
- $(\Phi \cup T, P, z_2)$ sıralı üçlüsü. Bu yorumda $z_2(p_1) = y \in T$.

P Dilinin Bir İyi Biçimli Formülünün Bir Yorumu

P dilinin A_i iyi biçimli formülü Γ kümesinin elemanı olan harflerin geçişlerinin boş olmayan sonlu dizisi olduğundan, A_i iyi biçimli formülü p_i 'den farklı ise formülde $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ kümesinin elemanlarından en az birinin geçişi vardır.

P dilinin Y yorumu için, A_i formülündeki p_i geçişlerinin sayısı r iken, $x_i \in T$ için $f_j^r(x_1, \dots, x_r) : T \times \dots \times T \rightarrow T$ fonksiyonu vardır. P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda, $p_j, \dots, p_m$ harflerinin $p_{j1}, \dots, p_{jk_h}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{mn_r}$ geçişlerini içeren A_i iyi biçimli formülü için, $f_j^r(x_1, \dots, x_r)$ fonksiyonu, Φ kümesinin elemanı veya bu elemanların bileşke fonksiyonu olan t -fonksiyonudur.

$x_i \in T$ olan $(x_1, \dots, x_r)$ sıralı r -lisi, Y yorumunda $p_j, \dots, p_m$ harflerinin $p_{j1}, \dots, p_{jk_h}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{mn_r}$ geçişlerinin z_{ik} fonksiyonunda aldığı değerlerin sıralıdır. $x_i \in T$ olan sıralı n -li $(x_1, \dots, x_n)$ ise $p_j, \dots, p_m$ harflerinin z_i fonksiyonunda aldığı değerlerin sıralıdır.

p_i 'nin bir $y_i = (\Phi \cup T, P, z_i)$ yorumundaki değeri olan eleman $(x_i = z_i(p_i))$ ile onun geçişi olan p_{ik} 'nin aynı yorumdaki değeri olan eleman $(x_{ik} = z_{ik}(p_{ik}))$ aynıdır: $x_i = x_{ik}$ ve $z_i(p_i) = z_{ik}(p_{ik})$ olduğundan, A_i iyi biçimli formülü için $z_i(A_i) = f_j^r(x_1, \dots, x_r) = z_i(A_i) = f_j^r(z_{ik}(p_{j1}), \dots, z_{ik}(p_{jk}), \dots, z_{ik}(p_{m1}), \dots, z_{ik}(p_{mn})) = f_j^r(z_i(p_j), \dots, z_i(p_m))$ olur.

f_j^r fonksiyonunun argümanı olan $(x_1, \dots, x_r)$ sıralı r -lisi için $(x_1, \dots, x_n)$ sıralı n -lilerinden her biri A_i iyi biçimli formülünün bir yorumudur. Her bir $(x_1, \dots, x_n)$ sıralı n -lisi z_i fonksiyonunu $\{p_j, \dots, p_m\}$ kümesinden T kümesine sınırlandıran fonksiyonda $p_j, \dots, p_m$ iyi biçimli formüllerinin aldığı değerlerin sıralıdır. Başka bir deyişle A_i iyi biçimli formülünün her bir yorumu, formülde geçişleri

bulunan harflerin kümesinden T kümesine, $\{p_j, \dots, p_m\}$ kümesinden T kümesine fonksiyonlardan biridir.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü p_i iyi biçimli formülü ise formülde Θ kümesinin elemanlarından hiçbirinin geçişi yoktur. Bu durumda A_i iyi biçimli formülünün bir y_i yorumundaki değeri $s_i(z_i(A_i)) = s_i(z_i(p_i)) = t_i$ olur.

$z_i(A_i) = f_j^r(x_1, \dots, x_r)$ için $(x_1, \dots, x_n)$ sıralı n -lisinin elemanı olan her x_i için, $x_i = z_i(p_i)$ olur. $(x_1, \dots, x_n)$ sıralı n -lisinin x_i elemanı T kümesinin elemanı olduğundan ya $z_i(p_i) = d$ ya da $z_i(p_i) = y$ olur.

ÖRNEK

$$\begin{aligned} z_I('((p_1 \wedge p_3) \supset \sim p_2)') &= I(C(x_1, x_3), N(x_2)) \\ p_{11}, p_{32}, p_{23} \text{ geçişleri için} \\ z_I('p_1') &= d \\ z_I('p_3') &= d \\ z_I('p_2') &= d \\ (z_I('p_1'), z_I('p_3'), z_I('p_2')) &= (d, d, d) \\ s_I(z_I('((p_1 \wedge p_3) \supset \sim p_2)')) &= s_I(C((z_I('p_1'), z_I('p_3')))) = C(d, d) = d \\ s_I(z_I(' \sim p_2')) &= s_I(N(z_I('p_2'))) = N(d) = y \\ s_I(z_I('((p_1 \wedge p_3) \supset \sim p_2)')) &= s_I(I(z_I('p_1 \wedge p_3'), z_I(' \sim p_2'))) = I(d, y) = y \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$\begin{aligned} z_I('((p_1 \wedge p_2) \vee (\sim p_2 \wedge p_2))') &= D(C(x_1, x_2), C(N(x_2), x_2)) \\ p_{11}, p_{22} \text{ harflerinin geçişleri } p_{11}, p_{22}, p_{23}, p_{24} \text{ için} \\ z_I('p_1') &= d \\ z_I('p_2') &= d \\ (z_I(p_{11}), z_I(p_{22}), z_I(p_{23}), z_I(p_{24})) &= (d, d, d, d) \\ s_I(z_I('((p_1 \wedge p_2) \vee (\sim p_2 \wedge p_2))')) &= s_I(C((z_I('p_1'), z_I('p_2')))) = C(d, d) = d \\ s_I(z_I(' \sim p_2')) &= s_I(N(z_I('p_2'))) = N(d) = y \\ s_I(z_I('(\sim p_2 \wedge p_2)')) &= s_I(C((z_I(' \sim p_2'), z_I('p_2')))) = C(y, d) = y \\ s_I(z_I('((p_1 \wedge p_2) \vee (\sim p_2 \wedge p_2))')) &= s_I(D(z_I('p_1 \wedge p_2'), z_I('(\sim p_2 \wedge p_2)')))) \\ &= D(d, y) = d \end{aligned}$$

P dilinin A_i iyi biçimli formülü ya sadece $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ kümesinin bir elemanının geçişidir ya da Θ kümesinin en az bir elemanının geçişini içerir.

A_i iyi biçimli formülü Θ kümesinin en az bir elemanının geçişini içerdiğinde, P dilinin Y yorumunda, her z_i için $z_i(A_i) = f_j^r(x_1, \dots, x_r)$ ve $f_j^r(x_1, \dots, x_r)$ fonksiyonu belirli bir $(t_1, \dots, t_r)$ r -lisi için $f_j^r(x_1, \dots, x_r) = t_i \in T$ olur. Fonksiyon tanımı gereği ancak ve ancak bir tane $t_i \in T$ vardır. Bu durumda T kümesinin elemanı olan t_i için ya $t_i = d$ ya da $t_i = y$ olur.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü sadece $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ kümesinin bir elemanının geçişi ise P dilinin Y yorumunda, $z_i(A_i) = z_i(p_i) = t_i \in T$ olur. Bu durumda ya $z_i(p_i) = d$ ya da $z_i(p_i) = y$ olur.

DİKKAT



Her bir yorumda $p_{j1}, \dots, p_{m_n}$ listesinde bulunan her p_i için ya $z_i(p_i) = d$ ya da $z_i(p_i) = y$ olur.

P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler

Tanım 1.1. P dilinin Y yorumunda, P dilinin A_i iyi biçimli formülünün bir y_i yorumu, yorumda $s_i(z_i(A_i)) = d$ ise A_i iyi biçimli formülünün *modelidir*.

ÖRNEK

P dilinin $\sim (p_1 \wedge p_1)$ iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumunda bir modeli vardır. $y_1(p_1)$: y olan yorumda $y_1(\sim (p_1 \wedge p_1))$: d olur. y_1 yorumu $\sim (p_1 \wedge p_1)$ iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumunda modelidir.

SIRA SİZDE



4

P dilinin iyi biçimli formül kümesi $\Delta = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1), (p_1 \vee p_1)\}$ kümesinin elemanlarının hangisinin veya hangilerinin P dilinin Y yorumuna göre bir modeli vardır?

Tanım 1.1.1. P dilinin Y yorumunda, P dilinin A_i iyi biçimli formülünün y_i yorumunda $s_i(z_i(A_i)) = d$ ise A_i iyi biçimli formülü y_i yorumunda *doğrudur*.

Tanım 1.2. P dilinin Y yorumunda, P dilinin A_i iyi biçimli formülünün y_i yorumu ancak ve ancak yorumda $s_i(z_i(A_i)) = y$ ise A_i iyi biçimli formülünün *modeli* değildir.

Tanım 1.2.1. P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak P dilinin A_i iyi biçimli formülü için y_i yorumunda $s_i(z_i(A_i)) = y$ ise A_i iyi biçimli formülü y_i yorumunda *yanlıştır*.

SIRA SİZDE



5

(i) P dilinin $(p_1 \wedge \sim p_2)$ iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumuna göre karşılığı bir fonksiyondur.

(ii) $z_1((p_1 \wedge p_2))$ bir yorum fonksiyonudur.

(iii) P dilinin $(p_1 \wedge p_2)$ iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumuna göre bir yorumda *doğrudur*.

Yukarıdaki ifadelerden hangisi P dilinin Y yorumuna göre, bir y_i yorumunda *doğrudur*?

SIRA SİZDE



6

P dilinin Y yorumuna göre, $(p_1 \wedge p_2)$ bir y_i yorumda *doğru* mudur?

Tanım 1.3. P dilinin Y yorumunda, P dilinin $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}_{(n \geq 1)}$ iyi biçimli formül kümesinin bir y_i yorumu, elemanlarında geçişi olan $p_j, \dots, p_m$ listesindeki harflerin bir yorumudur.

Tanım 1.4. P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $y_i(A_1) : s_i(z_i(A_1)) = d$ ve ... ve $y_i(A_n) : s_i(z_i(A_n)) = d$ ise $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}_{(n \geq 1)}$ iyi biçimli formül kümesi için $y_i(\Delta) : d$ olur.

Tanım 1.4.1. P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}_{(n \geq 1)}$ iyi biçimli formül kümesi için en az bir $y_i(A_i) : s_i(z_i(A_i)) = y$ varsa $y_i(\Delta) : s_i(z_i(\Delta)) = y$ olur.

Tanım 1.5. P dilinin Y yorumunda, P dilinin $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}_{(n \geq 1)}$ iyi biçimli formül kümesinin bir y_i yorumu ancak ve ancak yorumda Δ kümesinin elemanı olan her A_i iyi biçimli formülü için $y_i(A_i) : s_i(z_i(A_i)) = d$ ise Δ iyi biçimli formül kümesinin *modelidir*.

ÖRNEK

$Z = \{(p_1 \supset \sim p_1), (p_1 \vee \sim p_1)\}$ kümesinin P dilinin Y yorumunda modeli vardır. $Z = \{(p_1 \supset \sim p_1), (p_1 \vee \sim p_1)\}$ kümesinin, elemanlarında geçişleri olan tek harf ' p_1 ' olduğu için iki yorumu bulunur. $y_1('p_1')$: y olan yorumda $y_1('p_1 \supset \sim p_1')$: d ve $y_1('p_1 \vee \sim p_1')$: d olur. y_1 yorumu, P dilinin Y yorumunda Z kümesinin modelidir.

ÖRNEK

$\Delta = \{(p_1 \supset \sim p_1), (\sim p_1 \supset p_1)\}$ kümesinin P dilinin Y yorumunda modeli yoktur. $\Delta = \{(p_1 \supset \sim p_1), (\sim p_1 \supset p_1)\}$ kümesinin $y_1('p_1')$: y olan yorumunda $y_1('p_1 \supset \sim p_1')$: d ve $y_1('(\sim p_1 \supset p_1)')$: y olur. y_1 yorumunda $y_1('(\sim p_1 \supset p_1)')$: y olduğundan, tanım gereği $y_1 \Delta$ kümesinin modeli değildir. $y_2('p_1')$: d olan yorumda $y_2('p_1 \supset \sim p_1')$: y ve $y_2('(\sim p_1 \supset p_1)')$: d olur. y_2 yorumunda $y_2('p_1 \supset \sim p_1')$: y olduğundan, tanım gereği $y_2 \Delta$ kümesinin modeli değildir. P dilinin Y yorumunda Δ kümesinin modeli yoktur.

SIRA SİZDE



P dilinin alt kümesi $\Delta = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1), (p_1 \vee p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesi için P dilinin Y yorumuna göre küme elemanlarından hiçbirinin modeli olmayan bir y_i yorumu var mıdır?

Tanım 2.1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülünün modeli varsa yeterlidir.

Tanım 2.2. P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülünün tüm y_i yorumları A_i iyi biçimli formülünün modeli ise geçerlidir.

Tanım 2.2.1 P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak geçerli ise totolojidir.

ÖRNEK

P dilinin ' $(p_1 \vee \sim p_1)$ ' iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda geçerlidir. ' $(p_1 \vee \sim p_1)$ ' iyi biçimli formülünün iki yorumu vardır. $y_1('p_1')$: d olan yorumda $y_1('p_1 \vee \sim p_1')$: d olur. $y_2('p_1')$: y olan yorumda $y_2('p_1 \vee \sim p_1')$: d olur. ' $(p_1 \vee \sim p_1)$ ' iyi biçimli formülü, y_1 ve y_2 yorumları modeli olduğu için P dilinin Y yorumunda geçerlidir.

Tanım 2.3. P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülünün $y_k(A_i)$: $s_k(z_k(A_i)) = d$ olduğu bir yorumu ve $y_m(A_i)$: $s_m(z_m(A_i)) = y$ olduğu bir yorumu varsa olumsaldır.

ÖRNEK

P dilinin ' $\sim (p_1 \vee p_1)$ ' iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda olumsaldır. ' $\sim (p_1 \vee p_1)$ ' iyi biçimli formülünün formülde geçişi olan tek harf ' p_1 ' olduğundan iki yorumu vardır. $y_1('p_1')$: d olan yorumda $y_1('(\sim (p_1 \vee p_1))')$: y olur. $y_2('p_1')$: y olan yorumda $y_2('(\sim (p_1 \vee p_1))')$: d olur. ' $\sim (p_1 \vee p_1)$ ' iyi biçimli formülü, $y_1('(\sim (p_1 \vee p_1))')$: y olan ve $y_2('(\sim (p_1 \vee p_1))')$: d olan y_1 ve y_2 yorumları olduğu için, P dilinin Y yorumunda olumsaldır.

Tanım 2.4. P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülünün tüm yorumlarında $y_i(A_i)$: $s_i(z_i(A_i)) = y$ ise çelişkidir.

Tanım 2.4.1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak *çelişki* ise *antilojidir*.

Tanım 2.5. P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta = \{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm yorumlarında $y_i(A_i): s_i(z_i(A_i)) = d$ iken $y_i(A_j): s_i(z_i(A_j)) = d$ ise *içerir*.

Tanım 2.5.1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta = \{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i(A_i): s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $y_i(A_j): s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir yorumu yoksa *içerir*.

Tanım 2.5.11. P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda *içeriyorsa* P dilinin A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün Y yorumunda *sonucudur*.

Tanım 2.5.2. P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta = \{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_k(A_i): s_k(z_k(A_i)) = d$ ve $y_k(A_j): s_k(z_k(A_j)) = y$ olan bir yorumu varsa *içermez*.

Tanım 2.5.2.1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda *içermiyorsa* P dilinin A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün Y yorumunda *sonucu* değildir.

Tanım 2.6. P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta \cup \{A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm yorumlarında $y_i(\Delta): s_i(z_i(\Delta)) = d$ iken $y_i(A_j): s_i(z_i(A_j)) = d$ ise *içerir*.

Tanım 2.6.1. P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta \cup \{A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i(\Delta): s_i(z_i(\Delta)) = d$ ve $y_i(A_j): s_i(z_i(A_j)) = y$ olan hiçbir yorumu yoksa *içerir*.

Tanım 2.6.2. P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda, $\Delta \cup \{A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_k(\Delta): s_k(z_k(\Delta)) = d$ ve $y_k(A_j): s_k(z_k(A_j)) = y$ olan bir yorumu varsa *içermez*.

Tanım 2.6.3 P dilinin $(A_1, \dots, A_n, A_{(n+1)})$ sıralı n -lisi P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ olduğunda, $\Delta \cup \{A_{(n+1)}\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm yorumlarında $y_i(\Delta): s_i(z_i(\Delta)) = d$ iken $y_i(A_{(n+1)}): s_i(z_i(A_{(n+1)})) = d$ ise *geçerlidir*.

Tanım 2.6.3.1 P dilinin $(A_1, \dots, A_n, A_{(n+1)})$ sıralı n -lisi P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ olduğunda, $\Delta \cup \{A_{(n+1)}\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_k(\Delta): s_k(z_k(\Delta)) = d$ ve $y_k(A_{(n+1)}): s_k(z_k(A_{(n+1)})) = y$ olan hiçbir yorumu yoksa *geçerlidir*.

Tanım 2.6.3.2 P dilinin $(A_1, \dots, A_n, A_{(n+1)})$ sıralı n -lisi P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ olduğunda, $\Delta \cup \{A_{(n+1)}\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_k(\Delta): s_k(z_k(\Delta)) = d$ ve $y_k(A_{(n+1)}): s_k(z_k(A_{(n+1)})) = y$ olan enaz bir yorumu varsa *geçersizdir*.

ÖRNEK

P dilinin $((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)$ iyi biçimli formülü p_2 iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içerir*.

P dilinin $\Delta = \{((p_1 \supset p_2) \wedge p_1), p_2\}$ iyi biçimli formül kümesi için, küme elemanlarında geçişleri olan iki harf olduğundan, dört yorum fonksiyonu vardır.

i. $z_1(p_1) = d$

$z_1(p_2) = d$;

$s_1(z_1((p_1 \supset p_2))) = s_1(I(z_1(p_1), z_1(p_2))) = I(d, d) = d$;

$s_1(z_1(((p_1 \supset p_2) \wedge p_1))) = s_1(C(z_1((p_1 \supset p_2)), z_1(p_1))) = C(d, d) = d$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } & z_2('p_1') = d \\
& z_2('p_2') = y ; \\
& s_2(z_2('p_1 \supset p_2')) = s_1(I(z_2('p_1'), z_2('p_1'))) = I(d, y) = y ; \\
& s_2(z_2('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)')) = s_1(C(z_2('p_1 \supset p_2'), z_2('p_1'))) = C(y, d) = y \\
\text{iii. } & z_3('p_1') = y \\
& z_3('p_2') = d ; \\
& s_3(z_3('p_1 \supset p_2')) = s_1(I(z_3('p_1'), z_3('p_1'))) = I(y, d) = d ; \\
& s_3(z_3('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)')) = s_1(C(z_3('p_1 \supset p_2'), z_3('p_1'))) = C(d, y) = y \\
\text{iv. } & z_4('p_1') = y \\
& z_4('p_2') = y ; \\
& s_4(z_4('p_1 \supset p_2')) = s_1(I(z_4('p_1'), z_4('p_1'))) = I(y, y) = d ; \\
& s_4(z_4('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)')) = s_1(C(z_4('p_1 \supset p_2'), z_4('p_1'))) = C(d, y) = y
\end{aligned}$$

Y yorumunda içleme tanımına göre, P dilinin $\Delta = \{((p_1 \supset p_2) \wedge p_1), p_2\}$ iyi biçimli formül alt kümesinin $s_i(z_i('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)')) = d$ ve $z_i('p_2') = y$ olan hiçbir yorumu yoksa P dilinin $'((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'$ iyi biçimli formülü, P dilinin $'p_2'$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir.

P dilinin $\Delta = \{((p_1 \supset p_2) \wedge p_1), p_2\}$ iyi biçimli formüller alt kümesinin $s_i(z_i('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)')) = d$ ve $z_i('p_2') = y$ olan bir yorumu yoktur.

Tanım gereği, P dilinin $'((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'$ iyi biçimli formülü P dilinin $'p_2'$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir.

$$'((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)' \models_p 'p_2'$$

Tanım 2.7. P dilinin A_i iyi biçimli formülü ile P dilinin A_j iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm yorumlarında, $y_i(A_i): s_i(z_i(A_i))$ ve $y_j(A_j): s_j(z_j(A_j))$ için $s_i(z_i(A_i)) = s_j(z_j(A_j))$ ise [yani, $y_i(A_i): s_i(z_i(A_i)) = t_i$ ve $y_j(A_j): s_j(z_j(A_j)) = t_j$ olduğunda, $t_i \in T$ ve $t_j \in T$ için $t_i = t_j$ ise] eş değerdir.

Tanım 2.7.1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü ile P dilinin A_j iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda, $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i(A_i): s_i(z_i(A_i)) = t_i$ ve $y_j(A_j): s_j(z_j(A_j)) = t_j$ ve $t_i \neq t_j$ ($t_i \in T$ ve $t_j \in T$) olan hiçbir yorumu yoksa eş değerdir.

SIRA SİZDE



8

'P dilinin A_i A_j iyi biçimli formülleri eş değer ise A_i iyi biçimli formülü A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir mi?

DİKKAT



P dilinin A_i iyi biçimli formülünün Y yorumunda geçerli olduğunu veya A_i iyi biçimli formülü ile A_j iyi biçimli formülü arasında Y yorumunda içermeyi göstermek için $\models_p$ işareti kullanılacaktır.

ÖRNEK

$\models_p A_j$: P dilinin A_j iyi biçimli formülü geçerlidir.

$A_i \models_p A_j$: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir.

$$\models_p '(\sim p_1 \vee p_1)'$$

$$'((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)' \models_p 'p_2'$$



‘ $\models_p$ ’ işareti üst-dile aittir ve P dilinin iyi biçimli formülleri arasındaki, Y yorumuna bağlı bağıntıyı gösterir.



P dilinin ‘ p_2 ’ iyi biçimli formülü ‘ $((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)$ ’ iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir mi?

Tanım 2.8. P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda, $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa *model-teorik tutarlıdır*. [*m-tutarlı*].

Tanım 2.8.1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda, $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa *model-teorik tutarsızdır*. [*m-tutarsız*].

Tanım 2.9. P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi, P dilinin Y yorumunda, $\Delta \models_p A_j$ ve $\Delta \models_p \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa *model-teorik tutarlıdır*.

Tanım 2.9.1. P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi, P dilinin Y yorumunda, $\Delta \models_p A_j$ ve $\Delta \models_p \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa *model-teorik tutarsızdır*.

P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Dair Üst-Teoremler

P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumunda Model-Teorik Tutarlılık Üst-Teoremi

Üst teorem: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak bir modeli varsa *model-teorik tutarlıdır*.

Kanıtlama: ‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak bir modeli varsa, *model-teorik tutarlıdır*’ ifadesi, (i) ‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda *model-teorik tutarlı* ise A_i iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumunda bir modeli vardır’ ve (ii) ‘P dilinin A_i iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumunda bir modeli varsa *model-teorik tutarlıdır*’ olarak analiz edilsin.

(i) **Hipotez 1:** P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda *model-teorik tutarlıdır*.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda *model-teorik tutarlı* ise Y yorumunda *model-teorik tutarlılık* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoktur.

Hipotez 2: P dilinin A_i iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumunda bir modeli yoktur.

P dilinin A_i iyi biçimli formülünün bir modeli yoksa A_i iyi biçimli formülünün $s_i(z_i(A_i)) = d$ olan hiçbir y_i yorumu yoktur.

A_i iyi biçimli formülünün $s_i(z_i(A_i)) = d$ olan hiçbir y_i yorumu yoksa $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan hiçbir y_i yorumu yoktur.

$\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan hiçbir y_i yorumu yoksa Y yorumunda *içerme* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir: $A_i \models_p A_j$

A_i iyi biçimli formülünün $s_i(z_i(A_i)) = d$ olan hiçbir y_i yorumu yoksa $\{A_i, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(\sim A_j)) = y$ olan hiçbir y_i yorumu yoktur.

$\{A_i, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(\sim A_j)) = y$ olan hiçbir y_i yorumu yoksa Y yorumunda *içerme* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içerir*: $A_i \models_p \sim A_j$

Dolayısıyla P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır.

Bu sonuç, ‘P dilinin A_i iyi biçimli formülünün bir modeli yoktur’, hipotezinin sonucudur.

‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoktur’ ve ‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır’, ifadeleri birlikte tutulamaz.

Sonuç: P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda *model-teorik tutarlı* ise P dilinin A_i iyi biçimli formülünün bir modeli vardır.

(ii) *Hipotez 1*: P dilinin A_i iyi biçimli formülünün P dilinin Y Yorumunda bir modeli vardır.

P dilinin A_i iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumunda bir modeli varsa A_i iyi biçimli formülünün $s_k(z_k(A_i)) = d$ olan bir y_k yorumu vardır.

Hipotez 2: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda *model-teorik tutarsızdır*.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü *model-teorik tutarsız* ise *model-teorik tutarlılık* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır.

$\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin herhangi bir y_i yorumunda, $s_i(z_i(A_j)) = d$ ise $s_i(z_i(\sim A_j)) = y$, $s_i(z_i(A_j)) = y$ ise $s_i(z_i(\sim A_j)) = d$ olur.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içeriyorsa* Y yorumunda *içerme* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülünün $s_k(z_k(A_i)) = d$ olan y_k yorumunda, $s_k(z_k(A_j)) = d$ ve $s_k(z_k(\sim A_j)) = y$ olur.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içeriyorsa* $s_k(z_k(A_i)) = d$ olan y_k yorumunda $s_k(z_k(\sim A_j)) = y$ olduğundan, $\{A_i, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(\sim A_j)) = y$ olan bir y_i yorumu vardır.

Y yorumunda *içerme* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içermez*.

Ara sonuç: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içeriyorsa* P dilinin A_i iyi biçimli formülü $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içermez*.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içeriyorsa* Y yorumunda *içerme* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülünün $s_k(z_k(A_i)) = d$ olan y_k yorumunda, $s_k(z_k(\sim A_j)) = d$ ve $s_k(z_k(A_j)) = y$ olur.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içeriyorsa* $s_k(z_k(A_i)) = d$ olan y_k yorumunda $s_k(z_k(A_j)) = y$ olduğundan, $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir y_i yorumu vardır.

Y yorumunda *içerme* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülü, A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içermez*.

Ara sonuç: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içeriyorsa* P dilinin A_i iyi biçimli formülü, A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda *içermez*.

Sonuç: P dilinin A_i iyi biçimli formülü, P dilinin A_j iyi biçimli formülünü ve $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda birlikte *içermez*.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_p A_j$ ve $A_i \models_p \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoktur.

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda *model-teorik tutarlılık* tanımı gereği, P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda *model-tutarlıdır*.

Sonuç: P dilinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülünün Y yorumunda bir modeli varsa P dilinin Y yorumunda *model-teorik tutarlıdır*.

P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumunda Dedüksiyon Üst-Teoremi

Üst teorem: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $(A_i \supset A_j)$ Y yorumunda geçerli ise içerir. Yani, $A_i \models_p A_j$ ancak ve ancak $\models_p (A_i \supset A_j)$

Kanıtlama: ' $A_i \models_p A_j$ ancak ve ancak $\models_p (A_i \supset A_j)$ ' ifadesi (i) ' $A_i \models_p A_j$ ise $\models_p (A_i \supset A_j)$ ' ve (ii) ' $\models_p (A_i \supset A_j)$ ise $A_i \models_p A_j$ ' olarak analiz edilsin.

(i) *Hipotez 1:* $A_i \models_p A_j$

Eğer $A_i \models_p A_j$ ise, P dilinin Y yorumunda *içerme* tanımı gereği $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan hiçbir y_i yorumu yoktur.

Hipotez 2: $\models_p (A_i \supset A_j)$ değildir.

$(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda geçerli değil ise P dilinin Y yorumunda *geçerlilik* tanımı gereği, $(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülünün $s_i(z_i((A_i \supset A_j))) = y$ olan bir yorumu vardır. $(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülü için $s_i(z_i((A_i \supset A_j))) = y$ olan yegâne yorum, $(A_i \supset A_j)$ biçimindeki iyi biçimli formüllere P dilinin Y yorumunda karşılık gelen I fonksiyonu gereği $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan yorumdur. Bu yorum da $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan y_i yorumudur. Öyleyse $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir y_i yorumu vardır.

Ancak $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan hiçbir y_i yorumu olmadığı ve $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir y_i yorumu olduğu, birlikte kabul edilmez.

Öyleyse $A_i \supset A_j$ iyi biçimli formülünün $s_i(z_i(A_i \supset A_j)) = y$ olan hiçbir yorumu yoktur. Y yorumunda *geçerlilik* tanımı gereği, $(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülü geçerlidir: $\models_p (A_i \supset A_j)$

(ii) *Hipotez 1:* $\models_p (A_i \supset A_j)$

Eğer $(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülü Y yorumunda geçerli ise Y yorumunda *geçerlilik* tanımı gereği, $(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülünün $s_i(z_i(A_i \supset A_j)) = y$ olan hiçbir yorumu yoktur.

$(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülü için $s_i(z_i(A_i \supset A_j)) = y$ olan yegâne yorum, $(A_i \supset A_j)$ biçimindeki iyi biçimli formüllere karşılık gelen I fonksiyonu gereği $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan yorumdur. Dolayısıyla $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir y_i yorumu yoktur.

Hipotez 2: $A_i \models_p A_j$ değildir.

$\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin, Y yorumunda *içerme* tanımı gereği $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir y_i yorumu vardır.

' $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir y_i yorumu vardır' ve ' $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan hiçbir yorum yoktur', birlikte kabul edilmez.

Öyleyse A_i iyi biçimli formülü A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir: $A_i \models_p A_j$

Sonuç: $A_i \models_p A_j$ ancak ve ancak $\models_p (A_i \supset A_j)$

Özet



P biçimsel dilini açıklamak.

Biçimsel dil ‘alfabe’ adı verilen kümedeki elemanların belirli kurallara göre seçilen boş olmayan sonlu dizilerinin kümesidir. Boş olmayan sonlu diziler kümesi olan biçimsel dil, tüm boş olmayan sonlu dizilerin kümesinin alt kümesidir.

Alfabenin elemanları ile sonlu dizilerin elemanları arasındaki farkı belirtmek için harf tipi ve harf örneği ayrımı yapılır. Alfabenin elemanlarına ‘*harf tipi*’, sonlu dizilerin elemanlarına ‘*harf örneği*’ adı verilir. Harf örnekleri boş olmayan sonlu dizileri teşkil eder. Bir harf tipinin sonlu dizilerdeki her örneği, o ‘*harf tipinin dizideki geçişi*’ diye anılır.

P kümesi, bu şartlara uyduğu için biçimsel bir dildir. P dilinin elemanları, dilin alfabeti olan $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,)\}$ kümesinin elemanlarının geçişlerinden, dilin biçimleme kurallarına uyan boş olmayan sonlu dizilerdir.

P dilini seçen veya P dili hakkında konuşan dil üst-dil, P dili ise bu üst-dil için nesne-dildir. P dilinin elemanlarının adları üst-dile aittir.

Bir dilin bir A_j iyi biçimli formülünün A_i iyi biçimli formülüne karşılık geldiğini tespit eden üst dil ifadesine *dönüştürme kuralı* adı verilir. Bir dilin A_j iyi biçimli formülünü sonlu sayıda adımda A_i iyi biçimli formülüne karşılık getirme işlemine *dönüştürme* adı verilir.

Dilin A_j iyi biçimli formülünün A_i iyi biçimli formülünden, o dil için belirli kurallara göre *dönüştürmesi* varsa A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün dildeki *tanımsal karşılığıdır*.

P dilinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ alt kümesinin Δ alt kümesi, P dilinin tüm iyi biçimli formüllerinin, formülde geçişi olan ‘ $p_{i1}, \dots, p_{m_n}$ ’ harflerinin ve sadece Δ kümesinin elemanlarının geçişlerini içeren tanımsal karşılıkları varsa P dili için *tanımsal tamdır*.



P biçimsel dilinin yorumlanmasını değerlendirmek.

P dili bir küme olduğundan, P dilinin yorumu bir kümenin bir başka küme ile ilişkilendirilmesinden ibarettir ve kümeler teorisi çerçevesinde yapılır. Yorum, bir kümenin bir elemanına başka bir kümenin bir elemanının karşılık gelmesidir. Bir eleman ve onun karşılığı, ilkinin birinci bileşen, ikincisinin ikinci bileşen olduğu sıralı ikiliyi oluşturur. Sıralı ikilinin elemanı olduğu küme, yorumlanan şeyin elemanı olduğu küme ile ona karşılık gelen şeyin elemanı olduğu kümenin kartezyen çarpımının alt kümesidir ve bir bağıntıdır. Yorumlanan elemana karşılık gelen tek bir eleman varsa alt kümede yorumlanan elemanın birinci bileşen olduğu tek bir sıralı ikili vardır ve bu alt küme bir fonksiyondur.

P dilinin bir yorumu, dilin her iyi biçimli formülüne bir kümeden tek bir elemanın karşılık gelmesinden ibarettir. Bu nedenle P dilinin yorumları, P dilinden söz konusu kümeye fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlara yorum fonksiyonları adı verilir.

P dilinin iyi biçimli formülünün her yorumu bir yorum fonksiyonunun elemanıdır.

P dilinin Y yorumu, elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan $(\Phi \cup T, P, Z)$ sıralı üçlüsüdür:

$f_j^m \in \Phi$ ise $f_j^m \in \{x : x = f_i^n : T_1 \times \dots \times T_n, (n \geq 1) \rightarrow T\}$ olan $\Phi = \{f_e^1, f_g^2, f_k^2, f_i^2, f_m^2\}$ bir fonksiyonlar kümesidir.

$T = \{t_1, t_2\}$ kümesi Φ kümesinin elemanları olan fonksiyonların üzerinde tanımlandığı kümedir.

P iyi biçimli formül kümesidir.

Z kümesi ise P dili kümesinden T kümesine olan tüm fonksiyonların koleksiyonudur.

P dili üzerine tanımlanan ve Z koleksiyonunun elemanı olan z_i yorum fonksiyonu, P dilinin bir iyi biçimli formülünü $\Phi \cup T$ kümesinin tek bir elemanı ile eşler. P dilinin bir iyi biçimli

formülü ya A_i p_i ya A_i $\gamma^1_1 A_i$ ya da A_i $(A_j \gamma^2_1 A_k)$ biçimindedir. P dilinin elemanı olan A_i iyi biçimli formülünün, z_i fonksiyonundaki değeri $\gamma^1_1 \in \{\sim\}$ ve $\gamma^2_1 \in \Theta - \{\sim\}$ olduğunda, A_i iyi biçimli formülü $\gamma^1_1 A_i$ ya da $(A_j \gamma^2_1 A_k)$ ise Φ kümesinin, P dilinin $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin elemanı ise T kümesinin elemanıdır.

P dilinin Y yorumunda, Φ kümesinin elemanları N, C, D, I, E fonksiyonları olarak belirlenince, P dilinin bir yorumu dilin elemanları olan iyi biçimli formülleri $T = \{d, y\}$ kümesi üzerindeki fonksiyonlarla eşler.

P dilinin $\sim A_i, (A_i \wedge A_j), (A_i \vee A_j), (A_i \supset A_j), (A_i \equiv A_j)$ biçimindeki iyi biçimli formülleri $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesinin elemanlarıyla eşlendiğinde, P dilinin her iyi biçimli formülü bu biçimde olduğundan, P dilinin her iyi biçimli formülüne karşılık $T = \{d, y\}$ kümesi üzerinde bir fonksiyon olacaktır.

f_j^r fonksiyonunun argümanı olan $(x_1, \dots, x_r)$ sıralı r -lisi için $(x_1, \dots, x_n)$ sıralı n -lilerden her biri A_i iyi biçimli formülünün bir yorumudur. Her bir $(x_1, \dots, x_n)$ sıralı n -lisi z_i fonksiyonunu $\{p_1, \dots, p_m\}$ kümesinden T kümesine sınırlayan fonksiyonda $p_1, \dots, p_m$ iyi biçimli formüllerinin aldığı değerlerin sıralısıdır. Başka bir deyişle A_i iyi biçimli formülünün her bir yorumu, formülde geçişleri bulunan harflerin kümesinden T kümesine yani $\{p_1, \dots, p_m\}$ kümesinden T kümesine fonksiyonlardan biridir.



P biçimsel dilinin yorumlanmasına bağlı olarak tanımlanan özellikleri açıklamak.

A_k iyi biçimli formülünün veya $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ iyi biçimli formül kümesinin P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumundaki özellikleri, P dilinin Y yorumunda, P dilinin bir A_k iyi biçimli formülünün veya $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarının farklı y_i yorumlarındaki s_i fonksiyonunda aldığı $s_i(z_i(A_i)) = t_i \in T$ değerlerinin tasnifine bağlı olarak tanımlanır.



P biçimsel diline ve yorumuna dair üst-teoremleri açıklamak.

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda model-teorik tutarlılık üst-teoremi: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak bir modeli varsa Y yorumunda model-teorik tutarlıdır.

P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda dedüksiyon üst-teoremi: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin A_j iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda ancak ve ancak $(A_i \supset A_j)$ geçerli ise içerir. Yani, $A_i \models_p A_j$ ancak ve ancak $\models_p (A_i \supset A_j)$.

Kendimizi Sınayalım

1. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin iyi biçimli ' $(\sim p_1 \supset \sim p_2)$ ' formülünün tanımsal karşılığıdır?

- a. $(\sim p_1 \vee \sim p_2)$
- b. $(p_1 \vee \sim p_2)$
- c. $(\sim p_1 \vee p_2)$
- d. $(\sim p_1 \vee p_2)$
- e. $(p_2 \supset \sim p_1)$

2. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin iyi biçimli ' $(p_1 \wedge \sim p_2)$ ' formülünün tanımsal karşılığıdır?

- a. $(\sim p_1 \wedge p_2)$
- b. $(\sim p_1 \vee p_2)$
- c. $\sim(\sim p_1 \vee p_2)$
- d. $(p_1 \vee \sim p_2)$
- e. $(p_1 \vee p_2)$

3. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin iyi biçimli ' $(p_1 \vee \sim p_1)$ ' formülünün tanımsal karşılığıdır?

- a. $(p_1 \wedge \sim p_1)$
- b. $(p_1 \supset \sim p_1)$
- c. $(p_1 \equiv \sim p_1)$
- d. $(\sim p_1 \supset \sim p_1)$
- e. p_1

4. K dilinin alfabesi P dilinin alfabesi olan $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,)\}$ kümesinin alt kümesi $\Lambda = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \supset, (,)\}$ olsun.

K dilinin biçimleme kuralları ise şunlar olsun:

- i. K dilinin iyi biçimli bir formülü K dilinin alfabesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan bir dizisidir.
- ii. Λ kümesinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların her geçişi K dilinin iyi biçimli formülüdür.
- iii. eğer A_i K dilinin iyi biçimli bir formülü ise $\sim A_i$ K dilinin iyi biçimli bir formülüdür.

iv. eğer A_i ve A_j K dilinin iyi biçimli formülleri ise $(A_i \supset A_j)$ K dilinin iyi biçimli formülüdür.

v. Λ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (ii), (iii) ve (iv)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey K dilinin iyi biçimli formülü değildir.

Aşağıdaki cümlelerden hangisi K dili ve P diline dair sonuçlardan biridir?

- a. K dili P dilinin öz-alt kümesidir.
- b. Eğer A_i K dilinin iyi biçimli formülü değil ise A_i P dilinin de iyi biçimli formülü değildir.
- c. Eğer A_i P dilinin iyi biçimli formülü ise A_i K dilinin de iyi biçimli formülüdür.
- d. K dili ve P dili aynı dildir.
- e. K dilinin P dilinin iyi biçimli formülü olmayan iyi biçimli bir formülü vardır.

5. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin iyi biçimli ' $(p_1 \equiv p_2)$ ' formülünün 4. soruda seçilen K dilindeki tanımsal karşılığıdır?

- a. $\sim \sim (p_1 \equiv p_2)$
- b. $((p_1 \supset p_2) \wedge (p_2 \supset p_1))$
- c. $((\sim p_1 \vee p_2) \wedge (\sim p_2 \vee p_1))$
- d. $\sim(\sim(\sim p_1 \vee p_2) \vee \sim(\sim p_2 \vee p_1))$
- e. $\sim((p_1 \supset p_2) \supset \sim(p_2 \supset p_1))$

6. Aşağıdaki hangi $\{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi için P dilinin Y yorumuna göre $A_i \models_p A_j$ olur?

- a. $\{(p_1 \supset \sim p_1), (\sim p_1 \supset p_1)\}$
- b. $\{(p_1 \supset \sim p_1), \sim p_1\}$
- c. $\{(\sim p_1 \vee p_1), \sim p_1\}$
- d. $\{(\sim p_1 \vee p_1), p_1\}$
- e. $\{\sim(\sim p_1 \wedge p_1), \sim p_1\}$

7. Aşağıdaki hangi Δ iyi biçimli formül kümesi için P dilinin Y yorumuna göre $\Delta \models_p \sim p_1$ olur?

- a. $\{p_1\}$
- b. $\{(p_1 \supset \sim p_2), \sim p_1\}$
- c. $\{(\sim p_1 \vee p_1), p_1\}$
- d. $\{(p_1 \supset \sim p_2), p_2\}$
- e. $\{(\sim p_1 \equiv \sim p_1), p_1\}$

8. P dilinin aşağıdaki iyi biçimli formüllerinden hangisi ' $\sim (\sim p_1 \wedge p_1)$ ' iyi biçimli formülüne P dilinin *Y yorumunda eşdeğerdir*?

- a. $\sim p_1$
- b. $(\sim p_1 \wedge p_1)$
- c. $(\sim p_1 \vee p_1)$
- d. p_1
- e. $(\sim p_1 \supset p_1)$

9. P dilinin aşağıdaki iyi biçimli formüllerinden hangisi P dilinin *Y yorumunda model-teorik tutarlıdır*?

- a. $\sim (p_1 \supset p_1)$
- b. $\sim (p_1 \vee \sim p_1)$
- c. $(p_1 \wedge \sim p_1)$
- d. $\sim (p_1 \wedge p_1)$
- e. $\sim (p_1 \equiv p_1)$

10. R dili şu şekilde seçilmiş olsun:

Alfabe:

$\Gamma \cup \{\downarrow\} = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \downarrow, (,)\}$

Biçimleme kuralları:

- i. R dilinin bir iyi biçimli formülü, dilin alfabesinin elemanı olan harf tiplerinin geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizisidir.
- ii. Γ kümesinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların tek başına her geçişi R dilinin iyi biçimli formülüdür.
- iii. Eğer A_i R dilinin iyi biçimli bir formülü ise $\sim A_i$ R dilinin iyi biçimli formülüdür.
- iv. Eğer A_i ve A_j R dilinin iyi biçimli formülleri ise $(A_i \wedge A_j)$, $(A_i \vee A_j)$, $(A_i \supset A_j)$, $(A_i \equiv A_j)$, $(A_i \downarrow A_j)$ R dilinin iyi biçimli formülleridir.
- v. $\Gamma \cup \{\downarrow\}$ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (ii), (iii) ve (iv)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey R dilinin iyi biçimli formülü değildir.

T: $\{d, y\}$ üzerinde *Z* fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

$$Z(d, d) = y$$

$$Z(d, y) = y$$

$$Z(y, d) = y$$

$$Z(y, y) = d$$

R dilinin bir yorumu $(\Pi \cup T, R, z_i)$ olsun.

Z koleksiyonunun elemanı olan z_i fonksiyonu, $R = \{A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots\}$ kümesinden, elemanları $T = \{d, y\}$ kümesi üzerinde fonksiyonlar olan $\Pi = \{N, C, D, I, E, Z\}$ kümesi ile $T = \{d, y\}$ kümesinin bileşimi olan $\Pi \cup T$ kümesine bir fonksiyon olarak şu şekilde tanımlansın:

$\sigma \in \Omega = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ yani $\sigma = p_i$ ise $z_i(\sigma) = z_i(p_i) = t_i \in T$,

$$\sigma = A_i = \sim A_j \quad \text{ise} \quad z_i(\sigma) = N(z_i(A_j)),$$

$$\sigma = A_i = (A_j \wedge A_k) \text{ ise} \quad z_i(\sigma) = C(z_i(A_j), z_i(A_k))$$

$$\sigma = A_i = (A_j \vee A_k) \text{ ise} \quad z_i(\sigma) = D(z_i(A_j), z_i(A_k))$$

$$\sigma = A_i = (A_j \supset A_k) \text{ ise} \quad z_i(\sigma) = I(z_i(A_j), z_i(A_k))$$

$$\sigma = A_i = (A_j \equiv A_k) \text{ ise} \quad z_i(\sigma) = E(z_i(A_j), z_i(A_k))$$

$$\sigma = A_i = (A_j \downarrow A_k) \text{ ise} \quad z_i(\sigma) = Z(z_i(A_j), z_i(A_k))$$

Üst-teorem: R dilinin $(\Pi \cup T, R, Z)$ yorumunda, $\Delta = \{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm yorumlarında $y_i(A_i): s_i(z_i(A_i)) = d$ olduğunda $y_i(A_j): s_i(z_i(A_j)) = d$ ise, R dilinin A_i iyi biçimli formülü R dilinin A_j iyi biçimli formülünü $(\Pi \cup T, R, Z)$ yorumunda içerir.

R dilinin aşağıdaki iyi biçimli formüllerinden hangisi ' $(p_1 \downarrow p_2)$ ' iyi biçimli formülünü R dilinin $(\Pi \cup T, R, Z)$ yorumunda içerir?

- a. $(p_1 \vee p_2)$
- b. $(\sim p_1 \wedge p_2)$
- c. $\sim (p_1 \vee p_2)$
- d. $(p_1 \supset \sim p_1)$
- e. $(\sim p_1 \supset p_1)$

Kendimizi Sınavalım Yanıt Anahtarı

1. b Yanıtınız yanlış ise “Tanımsal Karşılık” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Bkz. Dönüştürme kuralı: $(A_i \supset A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee A_j)$
2. c Yanıtınız yanlış ise “Tanımsal Karşılık” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Bkz. Dönüştürme kuralları: $\sim \sim A_i =_{\text{tm}} A_i$ ve $\sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee \sim A_j)$
3. d Yanıtınız yanlış ise “Tanımsal Karşılık” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Bkz. Dönüştürme kuralı: $(A_i \vee A_j) =_{\text{tm}} (A_j \vee A_i)$ ve $(A_i \supset A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee A_j)$
4. a Yanıtınız yanlış ise “P Biçimsel Dili için Tanımsal Tamlık” ve “Tanımsal Tamlık ve P Biçimsel Dilinin Alt Kümesi Olan Biçimsel Diller” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Bkz. Tanımsal tamlık. P dilinin K dilinin iyi biçimli formülü olmayan iyi biçimli formülleri vardır. Örnek: P dilinin iyi biçimli $(p_1 \wedge p_2)$ formülü K dilinin iyi biçimli formülü değildir. Γ kümesinin elemanı olan ‘ $\wedge$ ’ harf tipinin geçişinin bulunduğu herhangi bir dizi, biçimleme kuralları gereği K dilinin iyi biçimli formülü değildir.
5. e Yanıtınız yanlış ise “P Biçimsel Dili için Tanımsal Tamlık” ve “Tanımsal Tamlık ve P Biçimsel Dilinin Alt Kümesi Olan Biçimsel Diller” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Sadece e seçeneğindeki formül K dilinin iyi biçimli formülüdür. Diğer seçeneklerdeki formüller K dilinin alfabesi olan Λ kümesinin elemanı olmayan harf tiplerinin geçişlerini içermektedir.
6. b Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\{(p_1 \supset \sim p_1), \sim p_1\}$ iyi biçimli formül kümesinin, $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: d olan yorumunda ya $y_i(p_1)$: d ya da $y_i(\sim p_1)$: y olur. $y_i(p_1)$: d olamaz: çünkü $y_i(p_1)$: d ise $y_i(\sim p_1)$: y olur. $y_i(p_1)$: d ve $y_i(\sim p_1)$: y ise $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: y olur. Aynı yorumda $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: d ve $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: y olamaz. Öyleyse $y_i(p_1)$: y olur. Başka bir deyişle, $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: d olan tek yorum $y_i(p_1)$: y olan yorumdur. Yorumda, $y_i(p_1)$: y ise $y_i(\sim p_1)$: d olur. $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: d olduğu yorumda $y_i(\sim p_1)$: d olduğundan, $\{(p_1 \supset \sim p_1), \sim p_1\}$ kümesinin tüm yorumlarında $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: d ise

$y_i(\sim p_1)$: d olur. *Y yorumunda içermeye* tanımı gereği: $(p_1 \supset \sim p_1) \models_p \sim p_1$.

7. d Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\{(p_1 \supset \sim p_2), p_2\} \cup \{\sim p_1\} = \{(p_1 \supset \sim p_2), p_2, \sim p_1\}$ kümesinin $y_i((p_1 \supset \sim p_2))$: d ve $y_i(p_2)$: d olan y_i yorumunda $y_i(\sim p_2)$: y olur ve ancak ve ancak $y_i(p_1)$: y ise $y_i((p_1 \supset \sim p_2))$: d olur. y_i yorumunda $y_i(\sim p_1)$: d olur. *Y yorumunda içermeye* tanımı gereği: $\{(p_1 \supset \sim p_1), p_1\} \models_p \sim p_1$
8. c Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\{(\sim p_1 \wedge p_1), (\sim p_1 \vee p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin, iki yorumu vardır: $y_1(p_1)$: d olan y_1 yorumu ve $y_2(p_1)$: y olan y_2 yorumu. y_1 yorumunda $y_1(\sim p_1 \wedge p_1)$: d ve $y_1(\sim p_1 \vee p_1)$: d olur. y_2 yorumunda $y_2(\sim p_1 \wedge p_1)$: d ve $y_2(\sim p_1 \vee p_1)$: d olur. Tüm yorumlarda $y_i(\sim p_1 \wedge p_1) = y_i(\sim p_1 \vee p_1)$ olduğu için, $\sim p_1 \wedge p_1$ iyi biçimli formülüne *Y yorumunda eşdeğer* olan formül $(\sim p_1 \vee p_1)$ iyi biçimli formülüdür.
9. d Yanıtınız yanlış ise “P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumuna bağlı olarak tanımlanan özellikler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\sim(p_1 \wedge p_1)$ iyi biçimli formülü seçeneklerde modeli olan tek formül olduğu için [bkz. Kendimizi Sınavalım Yanıt Anahtarı, yanıt 1] model-teorik tutarlılık üst-teoremi gereği, $\sim(p_1 \wedge p_1)$ iyi biçimli formülü *Y yorumunda model-teorik tutarlıdır*.
10. c Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. R dilinin $(\Pi \cup T, R, Z)$ yorumunda, R dilinin $(p_1 \downarrow p_2)$ iyi biçimli formülünün $y_i((p_1 \downarrow p_2))$: d olduğu yorum, $y_i(p_1)$: y ve $y_i(p_2)$: y olan y_i yorumudur. y_i yorumunda $y_i(\sim p_1 \vee p_1) = d$ olur. R dili için verilen $(\Pi \cup T, R, Z)$ yorumunda *içermeye* tanımı gereği: $(p_1 \downarrow p_2) \models_R \sim(p_1 \vee p_2)$

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

‘ $\wedge (p_2 \wedge p_3)$ ’ P dilinin iyi biçimli bir formülü değildir çünkü ilk elemanı ‘ $\wedge$ ’ harfinin geçişi olan bir dizi, biçimleme kuralına göre P dilinin bir iyi biçimli formülü değildir.

Sıra Sizde 2

Tanım gereği, ‘ $(p_1 \supset \sim p_2)$ ’ formülü ile ‘ $\sim (p_1 \wedge p_2)$ ’ formülü arasında P için belirlenmiş kurallara uyan bir *dönüştürme* varsa ‘ $(p_1 \supset \sim p_2)$ ’ formülü ‘ $\sim (p_1 \wedge p_2)$ ’ formülünün *tanımsal karşılığıdır*. Böyle bir *dönüştürme* olduğu gösterilirse ‘ $(p_1 \supset \sim p_2)$ ’ formülünün ‘ $\sim (p_1 \wedge p_2)$ ’ formülünün *tanımsal karşılığı* olduğu gösterilir.

Dönüştürme:

$$‘\sim (p_1 \wedge p_2)’ =_{\text{tnm}} ‘(\sim p_1 \vee \sim p_2)’ \quad [\text{Kural} : \sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee \sim A_j)]$$

$$‘(\sim p_1 \vee \sim p_2)’ =_{\text{tnm}} ‘(p_1 \supset \sim p_2)’ \quad [\text{Kural} : (A_i \supset A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee A_j)]$$

Dolayısıyla ‘ $(p_1 \supset \sim p_2)$ ’ formülü ‘ $\sim (p_1 \wedge p_2)$ ’ formülünün *tanımsal karşılığıdır*.

Sıra Sizde 3

$\Delta = \{\sim, \supset\}$ kümesinin *tanımsal tam* olması için, tanım gereği, P’nin ‘ $p_{j_1}, \dots, p_{m_n}$ ’ harflerinin geçişlerini içeren tüm iyi biçimli formüllerinin sadece Δ kümesindeki elemanların ve ‘ $p_{j_1}, \dots, p_{m_n}$ ’ harflerinin geçişlerinden oluşan tanımsal karşılıkları olmalıdır.

A_i ve A_j içinde ‘ $p_{j_1}, \dots, p_{m_n}$ ’ harflerinin geçişlerini içeren iyi biçimli formüller olsun. ‘ $\sim$ ’ ve ‘ $\supset$ ’ $\Delta = \{\sim, \supset\}$ kümesinin elemanları olduğu için, sadece $(A_i \wedge A_j)$, $(A_i \vee A_j)$, $(A_i \equiv A_j)$ formundaki formüllerin içinde A_i , A_j ve Δ kümesinin elemanlarının geçtiği tanımsal karşılıklarını yazmak yeterlidir.

$$\text{i. } (A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} \sim \sim (A_i \wedge A_j) \quad [\text{Kural: } \sim \sim A_i =_{\text{tnm}} A_i]$$

$$\sim \sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} \sim (\sim A_i \vee \sim A_j) \quad [\text{Kural: } \sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee \sim A_j)]$$

$$\sim (\sim A_i \vee \sim A_j) =_{\text{tnm}} \sim (A_i \supset \sim A_j) \quad [\text{Kural: } (A_i \supset A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee A_j)]$$

$$(A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} \sim (A_i \supset \sim A_j)$$

$$\text{ii. } (A_i \vee A_j) =_{\text{tnm}} \sim \sim (A_i \vee A_j) \quad [\text{Kural} : \sim \sim A_i =_{\text{tnm}} A_i]$$

$$(\sim \sim A_i \vee A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \supset A_j) \quad [\text{Kural: } (A_i \supset A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee A_j)]$$

$$(A_i \vee A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \supset A_j)$$

$$\text{iii. } (A_i \equiv A_j) =_{\text{tnm}} ((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i)) \quad [\text{Kural: } (A_i \equiv A_j) =_{\text{tnm}} ((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i))]$$

$$((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i)) =_{\text{tnm}} \sim ((A_i \supset A_j) \supset \sim (A_j \supset A_i)) \quad [\text{i: } (A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} \sim (A_i \supset \sim A_j)]$$

$$(A_i \equiv A_j) =_{\text{tnm}} \sim ((A_i \supset A_j) \supset \sim (A_j \supset A_i))$$

Tanımın koyduğu şart sağlandığı için $\Delta = \{\sim, \supset\}$ kümesi *tanımsal tamdır*.

Sıra Sizde 4

P dilinin alt kümesi $\Delta = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1), (p_1 \vee p_1)\}$ kümesinin elemanlarında en az bir geçişi bulunan ve Ω kümesinin elemanı olan harf ‘ p_1 ’ harfidir. Buna göre, Δ iyi biçimli formül kümesinin iki yorumu vardır: $z_1(‘p_1’)$ = d olan y_1 yorumu ve $z_2(‘p_1’)$ = y olan y_2 yorumu.

$$z_1(‘p_1’)$$
 = d olan y_1 yorumunda $s_1(z_1(‘\sim p_1’)) = s_1(N(z_1(‘p_1’))) = y$ olur.

$$y_1 \text{ yorumunda } s_1(N(z_1(‘p_1’))) = y \text{ olduğundan } s_1(z_1(‘(p_1 \wedge \sim p_1)’)) = s_1(C(z_1(‘p_1’), N(z_1(‘p_1’)))) = C(d, y) = y \text{ olur.}$$

$$y_1 \text{ yorumunda } s_1(N(z_1(‘p_1’))) = y \text{ ise } s_1(z_1(‘(\sim p_1 \vee p_1)’)) = s_1(D(N(z_1(‘p_1’)), z_1(‘p_1’))) = D(y, d) = d, s_1(z_1(‘\sim (\sim p_1 \vee p_1)’)) = N(d) = y \text{ olur.}$$

$$y_1 \text{ yorumunda, } s_1(z_1(‘(p_1 \supset p_1)’)) = s_1(I(z_1(‘p_1’), z_1(‘p_1’))) = I(d, d) = d, s_1(z_1(‘\sim (p_1 \supset p_1)’)) = s_1(N(I(z_1(‘p_1’), s_1(z_1(‘p_1’)))) = N(d) = y \text{ olur.}$$

$$y_1 \text{ yorumunda, } s_1(N(z_1(‘p_1’))) = y \text{ ise } s_1(z_1(‘(\sim p_1 \equiv p_1)’)) = s_1(E(N(z_1(‘p_1’)), z_1(‘p_1’))) = y \text{ olur. } y_1 \text{ yorumunda, } s_1(z_1(‘(p_1 \vee p_1)’)) = s_1(D(z_1(‘p_1’), z_1(‘p_1’))) = D(d, d) = d \text{ olur.}$$

Y yorumunda *model tanımı gereği* ‘ $(p_1 \vee p_1)$ ’ iyi biçimli formülünün P dilinin Y yorumunda bir modeli vardır.

Yine aynı tanım gereği, y_1 yorumu, $\Delta = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1), (p_1 \vee p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarından ne ‘ $(p_1 \wedge \sim p_1)$ ’ ne ‘ $\sim (\sim p_1 \vee p_1)$ ’ ne ‘ $\sim (p_1 \supset p_1)$ ’ ne de ‘ $(\sim p_1 \equiv p_1)$ ’ iyi biçimli formülünün modelidir.

Ancak y_1 yorumunun P dilinin bu iyi biçimli formüllerinin modeli olmamasından, bu formüllerden hiçbirinin hiçbir modeli olmadığı sonucu çıkartılamaz. Bu sebepten, karar vermek için, P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesinin $\Gamma = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1)\}$ alt kümesindeki elemanların s_2 fonksiyonunda aldığı değerlere bakmak gerekir.

$z_2('p_1') = y$ olan y_2 yorumunda $s_2(z_2(\sim p_1)) = s_2(N(z_2('p_1')))$ $= d$ olur.

y_2 yorumunda $s_2(N(z_2('p_1')))$ $= d$ olduğundan $s_2(z_2((p_1 \wedge \sim p_1))) = s_2(C(z_2('p_1'), N(z_2('p_1')))) = C(y, d) = y$ olur

y_2 yorumunda $s_2(N(z_2('p_1')))$ $= d$ ise $s_2(z_2(\sim p_1 \vee p_1)) = s_2(D(N(z_2('p_1')), z_2('p_1')))$ $= D(d, y) = d$, $s_2(z_2(\sim (\sim p_1 \vee p_1))) = N(d) = y$ olur.

y_2 yorumunda $s_2(z_2((p_1 \supset p_1))) = s_2(I(z_2('p_1'), z_2('p_1')))$ $= I(y, y) = d$, $s_2(z_2(\sim (p_1 \supset p_1))) = s_2(N(I(z_2('p_1'), z_2('p_1')))) = N(d) = y$ olur.

y_2 yorumunda $s_2(N(z_2('p_1')))$ $= d$ olduğundan $s_2(z_2(\sim p_1 \equiv p_1)) = s_2(E(N(z_2('p_1')), z_2('p_1')))$ $= y$ olur.

P dilinin Y yorumunda model tanımı gereği, y_2 yorumu, $\Gamma = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarından ne $(p_1 \wedge \sim p_1)$ ne $(\sim p_1 \vee p_1)$ ne $(\sim p_1 \supset p_1)$ ne de $(\sim p_1 \equiv p_1)$ iyi biçimli formülünün modelidir.

Ne y_1 yorumu ne de y_2 yorumu Γ kümesinin elemanlarından herhangi birinin modelidir. Γ kümesinin elemanlarından hiçbirinin modeli yoktur.

P dilinin $\Delta = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1), (p_1 \vee p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin, P dilinin Y yorumunda yegâne modeli olan elemanı $(p_1 \vee p_1)$ iyi biçimli formülüdür.

Sıra Sizde 5

'Doğru' teriminin verilen tanımı uyarınca, P dilinin Y yorumuna göre bir yorumda doğru ya da yanlış denilen yegâne şey P dilinin bir iyi biçimli formülüdür. (i), (ii) ve (iii)'deki ifadelerden hiçbiri P dilinin iyi biçimli formülü değildir.

Sıra Sizde 6

$(p_1 \wedge p_2)$ P dilinin bir iyi biçimli formülüdür. z_i fonksiyonlarının tanım kümesi P dili olduğundan, $(p_1 \wedge p_2)$ iyi biçimli formülünün, her s_i fonksiyonu altında T kümesinde bir karşılığı vardır. $s_k(z_k('p_1')) = d$ ve $s_k(z_k('p_2')) = d$ olan s_k fonksiyonu için, $s_k(z_k((p_1 \wedge p_2))) = s_k(C(z_k('p_1'), z_k('p_2')))$ $= C(d, d) = d$ olduğundan, P dilinin bir iyi biçimli formülü $(p_1 \wedge p_2)$ y_k yorumunda doğrudur.

Sıra Sizde 7

Elemanlarında en az bir geçişi bulunan ve Ω kümesinin elemanı olan tek harf $'p_1'$ harfi olduğundan, P dilinin alt kümesi olan $\Delta = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1), (p_1 \vee p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin iki yorumu olduğu gösterildi: $z_1('p_1') = d$ olan z_1 yorumu ve $z_2('p_1') = y$ olan y_2 yorumu.

y_1 yorumu Δ kümesinin bir elemanının, yani $(p_1 \vee p_1)$ iyi biçimli formülünün Y yorumunda modelidir. Öyleyse y_1 yorumu Δ kümesinin elemanlarından hiçbirinin modeli olmayan bir yorum değildir.

y_2 yorumu ne $(p_1 \wedge \sim p_1)$ ne $(\sim p_1 \vee p_1)$ ne $(\sim p_1 \supset p_1)$ ne de $(\sim p_1 \equiv p_1)$ iyi biçimli formülünün modeli olduğundan, eğer y_2 yorumu $(p_1 \vee p_1)$ iyi biçimli formülünün modeli değil ise Δ kümesinin elemanlarından hiçbirinin modeli değildir.

y_2 yorumunda $s_2(z_2((p_1 \vee p_1))) = s_2(D(z_2('p_1'), z_2('p_1')))$ $= D(y, y) = y$ olur. y_2 yorumu P dilinin $(p_1 \vee p_1)$ iyi biçimli formülünün modeli değildir.

P dilinin Y yorumunda model tanımı gereği, y_2 yorumu $\Delta = \{(p_1 \wedge \sim p_1), \sim (\sim p_1 \vee p_1), \sim (p_1 \supset p_1), (\sim p_1 \equiv p_1), (p_1 \vee p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarından ne $(p_1 \wedge \sim p_1)$ ne $(\sim p_1 \vee p_1)$ ne $(\sim p_1 \supset p_1)$ ne de $(\sim p_1 \equiv p_1)$ iyi biçimli formülünün modelidir.

Δ kümesinin elemanlarından hiçbirinin modeli olmayan yorum y_2 yorumudur.

Sıra Sizde 8

P dilinin Y yorumunda, iyi biçimli formül kümesi $\{A_i, A_j\}$ kümesinin $s_i(z_i(A_i)) = t_i$ ve $s_i(z_i(A_j)) = t_j$ ve $t_i \neq t_j$ olan hiçbir yorumu yoksa P dilinin A_i iyi biçimli formülü ile P dilinin A_j iyi biçimli formülü Y yorumunda eş değerdir.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü ile P dilinin A_j iyi biçimli formülü eş değer ise $s_i(z_i(A_i)) = t_i$ ve $s_i(z_i(A_j)) = t_j$ ve $t_i \neq t_j$ olan hiçbir yorumu olmayacağından, $s_i(z_i(A_i)) = d$ iken $s_i(z_i(A_j)) = y$ olan bir yorumu da olamaz.

Y yorumunda içermeye tanımı gereği, A_i iyi biçimli formülü, P dilinin A_j iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir.

Sıra Sizde 9

P dilinin $\Delta = \{((p_1 \supset p_2) \wedge p_1), p_2\}$ iyi biçimli formül alt kümesi için, küme elemanlarında geçişleri olan Ω kümesinin iki harfi olduğundan, dört yorum fonksiyonu vardır.

- i. $z_1('p_1') = d$
 $z_1('p_2') = d$;
 $s_1(z_1('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_1('p_1')) = I(d, d) = d$;
 $s_1(z_1('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_1('p_1')) = s_1(C(z_1('p_1 \supset p_2'), z_1('p_1')) = C(d, d) = d$
- ii. $z_2('p_1') = d$
 $z_2('p_2') = y$;
 $s_2(z_2('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_2('p_1')) = I(d, y) = y$;
 $s_2(z_2('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_2('p_1')) = s_2(C(z_2('p_1 \supset p_2'), z_2('p_1')) = C(y, d) = y$
- iii. $z_3('p_1') = y$
 $z_3('p_2') = d$;
 $s_3(z_3('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_3('p_1')) = I(y, d) = d$;
 $s_3(z_3('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_3('p_1')) = s_3(C(z_3('p_1 \supset p_2'), z_3('p_1')) = C(d, y) = y$
- iv. $z_4('p_1') = y$
 $z_4('p_2') = y$;
 $s_4(z_4('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_4('p_1')) = I(y, y) = d$;
 $s_4(z_4('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'), z_4('p_1')) = s_4(C(z_4('p_1 \supset p_2'), z_4('p_1')) = C(d, y) = y$

$$= s_4(I(z_4('p_1'), z_4('p_1'))) = I(y, y) = d ;$$

$$s_4(z_4('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1'))$$

$$= s_4(C(z_4('p_1 \supset p_2'), z_4('p_1'))$$

$$= C(d, y) = y$$

Y yorumunda içermeye tanımına göre, P dilinin $\Delta = \{p_2, ((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin $z_i('p_2') = d$ ve $s_i(z_i('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1')) = y$ olan hiçbir yorumu yoksa P dilinin ' p_2 ' iyi biçimli formülü P dilinin ' $((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)$ ' iyi biçimli formülünü Y yorumunda içerir.

Eğer P dilinin $\Delta = \{p_2, ((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin $z_i('p_2') = d$ ve $s_i(z_i('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1')) = y$ olan bir yorumu varsa P dilinin ' p_2 ' iyi biçimli formülü P dilinin ' $((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)$ ' iyi biçimli formülünü Y yorumunda içermez.

P dilinin $\Delta = \{p_2, ((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin (iii) numaralı yorumunda $z_3('p_2') = d$ ve $s_3(z_3('((p_1 \supset p_2) \wedge p_1')) = y$ olur.

Tanım gereği, P dilinin ' p_2 ' iyi biçimli formülü, P dilinin ' $((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)$ ' iyi biçimli formülünü Y yorumunda içermez.

$$'p_2' \not\#_p '((p_1 \supset p_2) \wedge p_1)'$$

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Çoker, D. ve Karaçay, T. (1983). **Matematik Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. ve Onart, A. (1976). **Mantık Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. (1972). **Symbolic Logic**, Ankara: Faculty of Art and Sciences Publication.

Halmos P. R. (1960). **Naive set theory**, Princeton, NJ, D. Van Nostrand Company.

Koç, Y. (1980). **Introduction to Logic**, İstanbul: Boğaziçi University Publications.

Mendelson, E. (1964). **Introduction to Mathematical Logic**, Princeton: D. Van Nostrand Company, Inc.

Taşdelen, İ. (2010). **Sembolik Mantık**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

2

SEMBOLİK MANTIK

Amaçlarımız

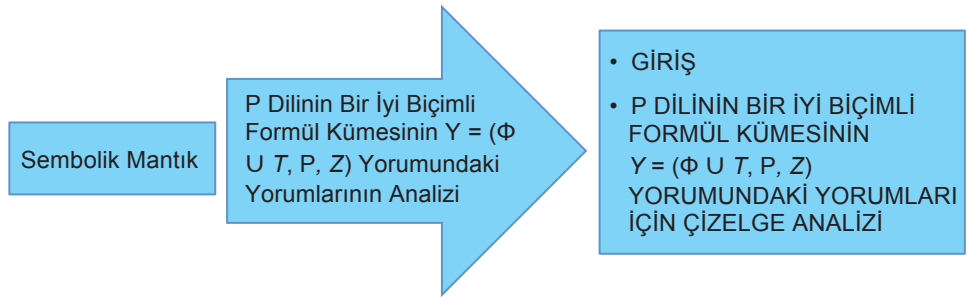
Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- 👁️ P dilinin bir iyi biçimli formül kümesinin P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumundaki yorumlarının çizelge analizini açıklayabilecek,
- 👁️ Çıkarımı ve çıkarım biçimini ifade edebilecek,
- 👁️ Çıkarım biçiminin geçerliliğini ve çıkarımın sağlamlığını açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Çizelge Analizi
- Çıkarım
- Çıkarım Biçimi
- Çıkarım Biçiminin Geçerliliği
- Sağlamlık

İçindekiler



P Dilinin Bir İyi Biçimli Formül Kümesinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumundaki Yorumlarının Analizi

GİRİŞ

Birbirlerine bağlı sonlu sayıdaki dönüştürme kuralını içeren bütüne ‘saptama yönergesi’ adı verilir. Çizelge analizi, P dilinin iyi biçimli formül kümelerinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumuna bağlı olarak tanımlanan özellikleri için etkin bir saptama yönergesidir. Bu ünite, P dilinin bir iyi biçimli formül kümesinin, dilin Y yorumundaki yorumlarının çizelge analizi ve buna bağlı olarak, biçimsel olmayan bir dildeki çıkarımın P dilindeki karşılığı olarak kabul edilen çıkarım biçiminin geçerliliğinin saptanması ele alınacaktır.

P DİLİNİN BİR İYİ BİÇİMLİ FORMÜL KÜMESİNİN $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ YORUMUNDAKİ YORUMLARI İÇİN ÇİZELGE ANALİZİ

P dilinin bir iyi biçimli formülünün Y yorumunda yeterli, olumsal, geçerli veya çelişik olduğunu belirleyecek birbirlerine bağlı sonlu sayıdaki dönüştürme kuralını içeren bütüne ‘saptama yönergesi’ adı verilir. Tanımlanacak kurma kuralları verilecek olan çizelge bu saptama yöntemlerinden biridir.

P Dilinin Bir İyi Biçimli Formülünün P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumundaki Yorumları İçin Çizelge Analizi

$(\Phi \cup T, P, z_i)$ sıralı üçlüsünde z_i bir fonksiyon olduğundan, P dilinin A_i iyi biçimli formülü için bir y_i yorumunda ya $s_i(z_i(A_i)) = d \in T$ ya da $s_i(z_i(A_i)) = y \in T$ olur. Çizelge analizi, $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ kümesindeki elemanların geçişlerinin bulunduğu A_i iyi biçimli formülünün aldığı değeri veya $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ formül kümesinin elemanlarının aldığı değerleri sabitleyerek, bu değeri veya değerleri aldığı yorumları saptama yöntemidir. Bir iyi biçimli formülün yorumu formülde geçişleri bulunan harflerin yorumu olduğu için, iyi biçimli formülde veya formül kümesinin elemanlarında geçişleri olan $p_j, \dots, p_m$ harflerinin farklı yorumlardaki $y_i(p_j): s_i(z_i(p_j)), \dots, y_i(p_m): s_i(z_i(p_m)), \dots, y_k(p_j): s_k(z_k(p_j)), \dots, y_k(p_m): s_k(z_k(p_m))$ değerlerini bulmak, iyi biçimli formülün veya formül kümesindeki elemanların başlangıçta sabitlenen değeri aldığı yorum veya yorumlarını saptamaktır.

Çizelgenin kurulması için A_i iyi biçimli formülünün bir yorumda alacağı değere bağlı olarak, $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesinin elemanları t -fonksiyonlarının analizini takip eden analiz kuralları oluşturulur. t -fonksiyonları şu şekilde analiz edilir:

$$\begin{aligned} z_i(\sim A_j) &= N(z_i(A_j)) \text{ için} \\ s_i(z_i(\sim A_j)) &= s_i(N(z_i(A_j))) = d \text{ ise } s_i(z_i(A_j)) = y \\ s_i(z_i(\sim A_j)) &= s_i(N(z_i(A_j))) = y \text{ ise } s_i(z_i(A_j)) = d \end{aligned}$$

$z_i((A_j \wedge A_k)) = C(z_i(A_j), z_i(A_k))$ için

$s_i(z_i((A_j \wedge A_k))) = s_i(C(z_i(A_j), z_i(A_k))) = d$ ise $s_i(z_i(A_j)) = d$ ve $s_i(z_i(A_k)) = d$
 $s_i(z_i((A_j \wedge A_k))) = s_i(C(z_i(A_j), z_i(A_k))) = y$ ise $s_i(z_i(A_j)) = y$ veya $s_i(z_i(A_k)) = y$

$z_i((A_j \vee A_k)) = D(z_i(A_j), z_i(A_k))$ için

$s_i(z_i((A_j \vee A_k))) = s_i(D(z_i(A_j), z_i(A_k))) = d$ ise $s_i(z_i(A_j)) = d$ veya $s_i(z_i(A_k)) = d$
 $s_i(z_i((A_j \vee A_k))) = s_i(D(z_i(A_j), z_i(A_k))) = y$ ise $s_i(z_i(A_j)) = y$ ve $s_i(z_i(A_k)) = y$

$z_i((A_i \supset A_j)) = I(z_i(A_i), z_i(A_j))$ için

$s_i(z_i((A_i \supset A_j))) = s_i(I(z_i(A_i), z_i(A_j))) = d$ ise $s_i(z_i(A_i)) = y$ veya $s_i(z_i(A_j)) = d$
 $s_i(z_i((A_i \supset A_j))) = s_i(I(z_i(A_i), z_i(A_j))) = y$ ise $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$

$z_i((A_i \equiv A_j)) = E(z_i(A_i), z_i(A_j))$ için

$s_i(z_i((A_i \equiv A_j))) = s_i(E(z_i(A_i), z_i(A_j))) = d$ ise $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = d$
veya $s_i(z_i(A_i)) = y$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$
 $s_i(z_i((A_i \equiv A_j))) = s_i(E(z_i(A_i), z_i(A_j))) = y$ ise $s_i(z_i(A_i)) = d$ ve $s_i(z_i(A_j)) = y$
veya $s_i(z_i(A_i)) = y$ ve $s_i(z_i(A_j)) = d$

Çizelgenin Tanımlanması ve Çizelge Oluşturma Kuralları

Tanım 1. Her sonlu segment dizisi bir daldır.

Tanım 2. A_i iyi biçimli formülünün adı bir dalın sol tarafında ise $y_i(A_i) = d$, sağ tarafında ise $y_i(A_i) = y$ olur.

Tanım 3. Bir dalın her iki tarafında da aynı iyi biçimli formülün adı bulunuyorsa o dal kapalıdır.

Tanım 3.1. Bir dal kapalı ise o dal bir yorumu göstermez.

Tanım 4. Bir dal kapalı değilse açıktır.

Tanım 4.1. Bir dal açık ise o dal bir yorumu gösterir.

Tanım 5. Bir çizelgenin tüm dalları kapalı ise o çizelge kapalıdır.

Tanım 6. Bir çizelgede kapalı olmayan en az bir dal varsa, o çizelge kapalı değildir.

Tanım 6.1. Bir çizelge kapalı değilse açıktır.

Kural 1. Her sonlu segmentin sağına veya soluna P dilinin bir iyi biçimli formülünün adı yazılır.

Kural 2. Bir segmentin sağında veya solunda P dilinin bir iyi biçimli formülünün adını belirtmek için tek tırnak işareti kullanılmaz.

Kural 3. Bir segmentin sağına veya soluna adı yazılan P dilinin bir iyi biçimli formülünde $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ kümesinin elemanlarından en az birinin geçişi varsa o formül Y yorumundaki çizelge kuralları ile analiz edilir.

Kural 4. Analiz edilen her formülün yanına çizelge kuralı ve çizelge kuralı uygulama sıra numarası yazılır.

Kural 5. P dilinin bir iyi biçimli formülünün adı formüle çizelge kuralı uygulanması sonucu çizelgeye yazılıyorsa, kuralın uygulandığı iyi biçimli formülün yanına çizelge kuralı uygulama sıra numarası parantez içinde yazılır.

Kural 6. Çizelgedeki bir dal kapalı ise o dalın ucuna 'x' yazılır.

Tanım 7. Çizelgedeki dal açık dal ise o dalın ucuna 'o' yazılır.

Çizelgenin Analiz Kuralları

A_i iyi biçimli formülü dalın solunda ise A_i Sol, sağında ise Sağ A_i yazılır.

P dilinin $\sim A_j$ iyi biçimli formülü için analiz kuralları

- $\sim A_j$ Sol: $y_i(\sim A_j): d$: $y_i(A_j): y$
Sağ A_j

- Sağ $\sim A_j$: $y_i(\sim A_j): y$: $y_i(A_j): d$
 A_j Sol

P dilinin $(A_j \wedge A_k)$ iyi biçimli formülü için analiz kuralları

- $(A_j \wedge A_k)$ Sol: $y_i((A_j \wedge A_k)): d$: $y_i(A_j): d$ ve $y_i(A_k): d$
 A_j Sol ve A_k Sol

- Sağ $(A_j \wedge A_k)$: $y_i((A_j \wedge A_k)): y$: $y_i(A_j): y$ veya $y_i(A_k): y$
Sağ A_j veya Sağ A_k

P dilinin $(A_j \vee A_k)$ iyi biçimli formülü için analiz kuralları

- $(A_j \vee A_k)$ Sol: $y_i((A_j \vee A_k)): d$: $y_i(A_j): d$ veya $y_i(A_k): d$
 A_j Sol veya A_k Sol

- Sağ $(A_j \vee A_k)$: $y_i((A_j \vee A_k)): y$: $y_i(A_j): y$ ve $y_i(A_k): y$
Sağ A_j ve Sağ A_k

P dilinin $(A_j \supset A_k)$ iyi biçimli formülü için analiz kuralları

- $(A_j \supset A_k)$ Sol: $y_i((A_j \supset A_k)): d$: $y_i(A_j): y$ veya $y_i(A_k): d$
Sağ A_j veya A_k Sol

- Sağ $(A_j \supset A_k)$: $y_i((A_j \supset A_k)): y$: $y_i(A_j): d$ ve $y_i(A_k): y$
 A_j Sol ve Sağ A_k

P dilinin $(A_j \equiv A_k)$ iyi biçimli formülü için analiz kuralları

- $(A_j \equiv A_k)$ Sol: $y_i((A_j \equiv A_k)): d$: $y_i(A_j): d$ ve $y_i(A_k): d$ veya $y_i(A_j): y$ ve $y_i(A_k): y$
 A_j Sol ve A_k Sol veya Sağ A_j ve Sağ A_k

- Sağ $(A_j \equiv A_k)$: $y_i((A_j \equiv A_k)): y$: $y_i(A_j): d$ ve $y_i(A_k): y$ veya $y_i(A_j): y$ ve $y_i(A_k): d$
 A_j Sol ve Sağ A_k veya Sağ A_j ve A_k Sol

Çizelgenin Genleşme Kuralları

P dilinin $\sim A_j$ iyi biçimli formülü için

$N\text{-sol}$	m	$\sim A_j$							
				A_j	(m)	n			
				$\sim A_j$	m	$N\text{-sağ}$			
n	(m)	A_j							

P dilinin $(A_j \wedge A_k)$ iyi biçimli formülü için

$C\text{-sol}$	m	$(A_j \wedge A_k)$							
	N	(m)	A_j						
	$n+1$	(m)	A_k						
					$(A_j \wedge A_k)$	m	$C\text{-sağ}$		
				$\bigwedge$					
n	(m)	A_j		A_k	(m)	n			

P dilinin $(A_j \vee A_k)$ iyi biçimli formülü için

$D\text{-sol}$	m	$(A_j \vee A_k)$							
			$\bigwedge$						
	n	(m)	A_j		A_k	(m)	n		
					$(A_j \vee A_k)$	m	$D\text{-sağ}$		
					A_j	(m)	n		
					A_k	(m)	$n+1$		

P dilinin $(A_j \supset A_k)$ iyi biçimli formülü için

<i>I-sol</i>	<i>m</i>		$(A_j \supset A_k) \mid$						
				$\bigwedge$					
	<i>n</i>	(m)	$\mid A_j$		$A_k \mid$	(m)	<i>n</i>		
	<i>n</i>	(m)	A_j		$\mid (A_j \supset A_k)$	<i>m</i>	<i>I-sağ</i>		
	<i>n+1</i>	(m)			$\mid A_k$				

P dilinin $(A_j \equiv A_k)$ iyi biçimli formülü için

<i>E-sol</i>	<i>m</i>		$(A_j \equiv A_k) \mid$						
				$\bigwedge$					
	<i>n</i>	(m)	$A_j \mid$		$\mid A_j$	(m)	<i>n</i>		
	<i>n+1</i>	(m)	$A_k \mid$		$\mid A_k$	(m)	<i>n+1</i>		
					$\mid (A_j \equiv A_k)$	<i>m</i>	<i>E-sağ</i>		
				$\bigwedge$					
	<i>n</i>	(m)	$A_j \mid$		$\mid A_j$	(m)	<i>n</i>		
	<i>n+1</i>	(m)	$\mid A_k$		$A_k \mid$	(m)	<i>n+1</i>		

P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özelliklerin Çizelgeden Okunması İçin Tanımlar

Tanım 1 A_i iyi biçimli formülünün $y_i(A_i)$: d olan bir y_i yorumu varsa, A_i iyi biçimli formülünün modeli vardır ve A_i iyi biçimli formülü *yeterlidir*.

Tanım 2 A_i iyi biçimli formülünün $y_k(A_i)$: d olan en az bir y_k yorumu ve $y_m(A_i)$: y olan en az bir y_m yorumu varsa, A_i iyi biçimli formülü *olumsaldır*.

Tanım 3 A_i iyi biçimli formülünün $y_i(A_i)$: y olan hiçbir y_i yorumu yoksa, A_i iyi biçimli formülü geçerlidir. Aksi halde A_i iyi biçimli formülü *geçerli değildir*.

Tanım 4 A_i iyi biçimli formülünün $y_i(A_i)$: d olan hiçbir y_i yorumu yoksa, A_i iyi biçimli formülünün modeli yoktur, A_i iyi biçimli formülü *çelişkidir*.

P Dilinin A_i İyi Biçimli Formülünün $y_i(A_i)$: d Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması

A_i iyi biçimli formülünün adı çizelgenin sol tarafına yazılır.

Analiz sonucunda çizelgede açık olan bir dal varsa o dalın gösterdiği yorumda, $y_i(A_i)$: d olur.

Analiz sonucunda çizelgede tüm dallar kapalı ise A_i iyi biçimli formülünün $y_i(A_i)$: d olan hiçbir yorumu yoktur.

ÖRNEK

' $(\sim p_1 \vee p_1)$ ' ve ' $(\sim p_1 \vee p_2)$ ' ve ' $(\sim p_1 \wedge p_1)$ '

<i>D-sol</i>	<i>1</i>		$(\sim p_1 \vee p_1) \mid$						
				$\bigwedge$					
<i>N-sol</i>	<i>2</i>	(I)	$\sim p_1 \mid$		$p_1 \mid$	(I)	<i>2</i>		
	<i>3</i>	(I)	$\mid p_1$	(2)	$\circ$				
			$\circ$						

D-sol 1 $(\sim p_1 \vee p_2) \mid$

$\bigwedge$

N-sol 2 (1) $\sim p_1 \mid$ $p_2 \mid$ (1) 2

3 (1) $\mid p_1$ (2) 0

0

$y_1('p_1')$: y olan yorumda $y_1('(\sim p_1 \vee p_2)')$: d ve $y_2('p_2')$: d olan yorumunda $y_2('(\sim p_1 \vee p_2)')$: d olur. P dilinin $'(\sim p_1 \vee p_2)'$ iyi biçimli formülünün $y_1('(\sim p_1 \vee p_2)')$: d olan yorumları vardır.

$$\begin{array}{rcl}
C-sol & 1 & (\sim p_1 \wedge p_1) \mid \\
N-sol & 2 & (1) \quad \sim p_1 \mid \\
& 3 & (1) \quad p_1 \mid \\
& 4 & \mid p_1 \quad (2) \\
& & x
\end{array}$$

A_i iyi biçimli formülünün adı çizelgenin sağ tarafına yazılır.

Analiz sonucunda çizelgede açık olan bir dal varsa o dalın gösterdiği yorumda, $y_i(A_i)$: y olur.

Analiz sonucunda çizelgede tüm dallar kapalı ise A_i iyi biçimli formülünün $y_i(A_i)$: y olan hiçbir yorumu yoktur.

' $(\sim p_1 \vee p_2)$ ' ve ' $(\sim p_1 \wedge p_1)$ ' ve ' $(\sim p_1 \vee p_1)$ '

4 (2)	p ₁	(∼p ₁ ∨ p ₂)	1	D -saġ	
		∼p ₁	(1)	2	N -saġ
		p ₂	(1)	3	
		0			

P dilinin ' $(\sim p_1 \vee p_2)$ ' iyi biçimli formülünün $y_i('(\sim p_1 \vee p_2)')$: y olan yorumu vardır. $y_i('p_1')$: d ve $y_i('p_2')$: y olan yorum P dilinin ' $(\sim p_1 \vee p_2)$ ' iyi biçimli formülünün $y_i('(\sim p_1 \vee p_2)')$: y olan yorumudur.

		$(\sim p_1 \vee p_1)$	1	$\mathbf{D}\text{-}sa\check{g}$
		$\sim p_1$	(1)	$\mathbf{N}\text{-}sa\check{g}$
		p_1	(1)	
4 (2)	p_1			
	x			

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & | \ (\sim p_1 \wedge p_1) & 1 & \mathbf{C}\text{-}sa\check{g} \\
 & & & \wedge & & \\
 N\text{-}sa\check{g} & 2 & & | \ \sim p_1 & & \\
 & 3 & (2) & p_1 & | \ p_1 & (1) & 2 \\
 & & & \text{o} & & & \\
 & & & \text{o} & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{C-sol} & 1 & (\sim p_I \wedge p_I) \\
& 2 & \\
\mathbf{N-sol} & 3 \text{ (I)} & \sim p_I \\
& 4 \text{ (I)} & p_I \\
& 5 & \\
& & \text{X}
\end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ p_I \\ | \\ p_I \\ | \\ p_I \end{array} \quad (3)$$
$$\begin{array}{c}
\{\sim p_1 \vee p_1\} \models_p 'p_1' \\
D-sol \quad 1 \qquad (\sim p_1 \vee p_1) \mid_{p_1} \qquad 2 \\
\qquad \qquad \qquad \wedge \\
N-sol \quad 3 \quad (1) \quad \sim p_1 \mid \qquad p_1 \mid \quad (1) 3 \\
\quad 4 \quad (1) \qquad \mid_{p_1} (3) \qquad x \\
\qquad \qquad \qquad 0
\end{array}$$

Bu kabullerle birlikte P dilinin ‘~’ harfi biçimsel olmayan dilde basit beyan cümlesini değilleyen ‘değil’ ile P dilinin ‘ $\wedge$ ’, ‘ $\vee$ ’, ‘ $\supset$ ’, ‘ $\equiv$ ’ harfleri ise biçimsel olmayan dilde basit beyan cümlelerini birleştiren ‘ve’, ‘veya’, ‘ise’, ‘ancak ve ancak’ ve bunlara karşılık gelen eş anlamlı ifadeler ile aynı sırada eşlenir.

Böylelikle ‘Erdal geliyor’ cümlesi P dilinin ‘ p_1 ’ iyi biçimli formülü ile eşlendiğinde, ‘Erdal gelmiyor’ cümlesi P dilinin ‘ $\sim p_1$ ’ iyi biçimli formülüyle eşlenir. Tersinden söylenilirse, ‘Erdal gelmiyor’ cümlesi ‘ $\sim p_1$ ’ iyi biçimli formülünün bir yorumu olarak alınır.

ÖRNEK

i. Zeynep arp çalışıyorsa saat üçtür. Saat üç değilse Firûze resim yapıyordur. Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordur. Saat üç.

Yukarıdaki ardışık dört beyan cümlesine karşılık olarak P dilinin iyi biçimli cümleleri sırasıyla ‘ $(p_1 \supset p_3)$ ’, ‘ $(\sim p_3 \supset p_2)$ ’, ‘ $(p_2 \supset p_1)$ ’, ‘ p_3 ’ ‘Zeynep arp çalışıyor’ cümlesine karşılık olarak ‘ p_1 ’, ‘Firûze resim yapıyor’ cümlesine karşılık olarak ‘ p_2 ’, ‘Saat üç’ cümlesine karşılık olarak ‘ p_3 ’ iyi biçimli formülleri alındığında. (Örnekte ve takip eden örneklerde, biçimsel olmayan dilin o dilde birbirleri yerine geçtiği kabul edilen ifadeleri için P dilinde aynı karşılık kullanılmıştır: ‘Saat üçtür’ ve ‘saat üç’, ‘Firûze resim yapıyordur’ ve ‘Firûze resim yapıyor’, ‘ise’ ve ‘-sa’ gibi.)

Çıkarım ve Çıkarım Biçimi

Örnekteki ardışık beyan cümleleri, her dizilişte dördüncü cümle farklı olacak şekilde sıralanabilir:

- Zeynep arp çalışıyorsa saat üçtür. Saat üç değilse Firûze resim yapıyordur. Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordur. Saat üç.
- Zeynep arp çalışıyorsa saat üçtür. Saat üç değilse Firûze resim yapıyordur. Saat üç. Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordur.
- Zeynep arp çalışıyorsa saat üçtür. Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordur. Saat üç. Saat üç değilse Firûze resim yapıyordur.
- Saat üç değilse Firûze resim yapıyordur. Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordur. Saat üç. Zeynep arp çalışıyorsa saat üçtür.

Dizilişleri birlikte ele alabilmek için beyan cümlelerine, örnekteki diziliş takip edilerek C_1 , C_2 , C_3 , C_4 adları verildiğinde, örnekteki diziliş (i) C_1 , C_2 , C_3 , C_4 ; (ii)’deki diziliş C_1 , C_2 , C_4 , C_3 ; (iii)’deki diziliş C_1 , C_3 , C_4 , C_2 ; (iv)’deki diziliş C_2 , C_3 , C_4 , C_1 şeklinde yazılır.

Bu farklı dizilişlerin P dilindeki örnekte verilen karşılıkları dizildiğinde şu sıralı n -liler yazılır: (i) için $((p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3)$, (ii) için $((p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), p_3, (p_2 \supset p_1))$, (iii) için $((p_1 \supset p_3), (p_2 \supset p_1), p_3, (\sim p_3 \supset p_2))$, (iv) için $((\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3, (p_1 \supset p_3))$.

Tanım 1. Çıkarım beyan cümlelerinin sonlu dizisidir: $(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$

Adlandırma: $\{S_1, \dots, S_n\}$ kümesinin elemanına ‘öncül’, S_{n+1} ’e ‘sonuç’ adı verilir.

Tanım 2. S_{n+1} cümlesi $\{S_1, \dots, S_n\}$ kümesinin sonucudur.

Tanım 3. Çıkarım biçimi, elemanları P dilinin iyi biçimli formülleri olan $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ sıralı $(n+1)$ -lisidir ki A_i iyi biçimli formülünün, S_i cümlesinin ait olduğu dildeki biçimine karşılık geldiği kabul edilir.

ÖRNEK

Verilen tanımlara göre aynı dört cümlelerin farklı dört dizilişi dört ayrı çıkarımdır. Her dizilişteki dördüncü cümle ilk üç cümlelerin sonucudur. Sonuçlar sıralanırsa; ilk çıkarımda ‘Saat üç’, ikincisinde ‘Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordur’, üçüncüsünde ‘Saat üç değilse Firûze resim yapıyordur’ ve dördüncüsünde ‘Zeynep arp çalışıyorsa saat üçtür’dür.

Çıkarım Biçiminin Geçerliliği ve Çıkarımın Sağlamlığı

Tanım 4. $(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$ çıkarımının $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ çıkarım biçimi ancak ve ancak $\{A_1, \dots, A_n\} \models_p A_{n+1}$ ise Y yorumunda geçerlidir.

DİKKAT



$(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ çıkarım biçimi ancak ve ancak $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ kümesi A_{n+1} iyi biçimli formülünü, P dilinin Y yorumunda, $\Delta = \{A_1, \dots, A_n, A_{n+1}\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i(A_1): s_i(z_i(A_1)) = d, \dots, y_i(A_n): s_i(z_i(A_n)) = d$ olan yorumlarında, $y_i(A_{n+1}): s_i(z_i(A_{n+1})) = d$ ise, içerir.

Tanım 5. $(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$ çıkarımı, ancak ve ancak çıkarım biçimi $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ Y yorumunda geçerli ise ve $S_1, \dots, S_n$ cümleleri ifade edildikleri dilde 'doğru' ise biçimsel olmayan bir dil için sağlamdır.

ÖRNEK

$(C_1, C_2, C_3, C_4), (C_1, C_2, C_4, C_3), (C_1, C_3, C_4, C_2)$, ve (C_2, C_3, C_4, C_1) çıkarımlarının sağlam olmasının zorunlu koşulu $((p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3), ((p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), p_3, (p_2 \supset p_1)), ((p_1 \supset p_3), (p_2 \supset p_1), p_3, (\sim p_3 \supset p_2)), ((\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3, (p_1 \supset p_3))$ çıkarım biçimlerinin Y yorumunda geçerli olması, yani, $\{(p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1)\} \models_p 'p_3', \{(p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), p_3\} \models_p '(p_2 \supset p_1)', \{(p_1 \supset p_3), (p_2 \supset p_1), p_3\} \models_p '(\sim p_3 \supset p_2)', \{(\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3\} \models_p '(p_1 \supset p_3)'$ olmasıdır.

$((p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3)$ çıkarım biçimi için çizelge oluşturulduğunda:

<i>I-sol</i>	1			$(p_1 \supset p_3) \mid$			
<i>I-sol</i>	2			$(\sim p_3 \supset p_2) \mid$			
<i>I-sol</i>	3			$(p_3 \supset p_1) \mid$			
	4						p_3
	5					$\bigwedge$	
6	(1)			$\mid p_1$		$p_3 \mid$	(1) 6
				$\mid$		x	
				$\bigwedge$			
<i>N-sağ</i>	7 (2)		$\mid \sim p_3$		$p_2 \mid$		(2) 7
8	(7)		$p_3 \mid$		$\mid$		
			x		$\mid$		
					$\bigwedge$		
6	(1)			$\mid p_1$		$p_3 \mid$	(1) 6
				o		x	

Çizelgenin kapalı olmaması $((p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3)$ çıkarım biçiminin geçerli olmadığını gösterir. $\{(p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1)\} \cup \{p_3\}$ yani, $\{(p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i('p_1 \supset p_3'): d, y_i('(\sim p_3 \supset p_2)': d, y_i('p_2 \supset p_1'): d$ ve $y_i('p_3'): y$ olan y_i yorumu vardır. Bu yorum $y_i('p_1'): y, y_i('p_2'): d, y_i('p_3'): y$ olan yorumdur. Yani: $\{(p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1)\} \not\models_p 'p_3'$.

$((p_1 \supset p_3), (\sim p_3 \supset p_2), p_3, (p_2 \supset p_1))$ çıkarım biçimi için çizelge oluşturulduğunda:

p_2)': $d, y_i(' (p_2 \supset p_1))$: $d, y_i(' p_3)$: d ve $y_i(' (p_2 \supset p_1))$: y olan y_i yorumu yoktur. Yani: $\{(\sim p_3 \supset p_2), (p_2 \supset p_1), p_3\} \models_p (' (p_1 \supset p_3))$.

C_1, C_2, C_3, C_4 cümlelerinin farklı dizilişlerinden sadece (iii) 'Zeynep arp çalışırsa saat üçtür. Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordu. Saat üç. Saat üç değilse Firûze resim yapıyordu' ve (iv) 'Saat üç değilse Firûze resim yapıyordu. Firûze resim yapıyorsa Zeynep arp çalışıyordu. Saat üç. Zeynep arp çalışırsa saat üçtür' çıkarımları, eğer öncüller doğru ise sağlamdır.

DİKKAT



Bir çıkarımın geçerliliği öncüllerinin sırasına bağlı değildir.

SIRA SİZDE

3



Çıkarım: x sayısı ile y sayısının toplamı m sayıdır veya x sayısı ile y sayısının toplamı m sayısı değildir. x sayısı ile y sayısının toplamı m sayısı değilse, m sayısı x sayısından büyüktür. m sayısı x sayısından büyük değilse, x sayısı ile y sayısının toplamı m sayısı değildir. Öyleyse m sayısı x sayısından büyüktür. Çıkarımın biçimi Y yorumunda geçerli midir?

SIRA SİZDE

4



Aşağıdaki çıkarımın çıkarım biçimi Y yorumunda geçerli midir?

x ve y doğal sayılarının toplamı m doğal sayısına eşit ise y ve z doğal sayılarının toplamı, m ve n doğal sayılarının toplamına eşittir. y ve z doğal sayılarının toplamı, m ve n doğal sayılarının toplamına eşit değilse, x ve y doğal sayılarının toplamı m doğal sayısına eşittir. Ancak y ve z doğal sayılarının toplamı m ve n doğal sayılarının toplamına eşit değildir. Öyleyse z doğal sayısı m doğal sayısına ancak ve ancak y doğal sayısı n doğal sayısına eşitse eşittir.

DİKKAT



$(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$ çıkarımına ait $S_1, \dots, S_n$, cümlelerinin ifade edildikleri dilde 'doğru' olmaları, bu çıkarımın $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ çıkarım biçiminin Y yorumunda geçerli olmasını içermediği gibi, $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ çıkarım biçiminin geçerli olması $S_1, \dots, S_n$, cümlelerinin ifade edildikleri dilde 'doğru' olmalarını içermez. $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ sıralısı için geçerli olma tanımı uygulanırsa, $(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$ çıkarımına ait $S_1, \dots, S_n$, cümlelerinin ifade edildikleri dilde 'doğru' olmaları $\{A_1, \dots, A_n\} \models_p A_{n+1}$ olmasını içermez, $\{A_1, \dots, A_n\} \models_p A_{n+1}$ olması da $S_1, \dots, S_n$, cümlelerinin ifade edildikleri dilde 'doğru' olmalarını içermez.

ÖRNEK

Çıkarım 1: Bir ile birin toplamı iki ise bir ile ikinin toplamı üçtür. Bir ile ikinin toplamı üçtür. Öyleyse bir ile birin toplamı ikidir.

Çıkarım 2: Bir ile birin toplamı iki değilse, bir ile ikinin toplamı üçtür. Bir ile ikinin toplamı üç değildir. Öyleyse bir ile birin toplamı ikidir.

Çıkarım 3: Bir ile birin toplamı iki ise bir ile ikinin toplamı üçtür. Bir ile birin toplamı ikidir. Öyleyse bir ile ikinin toplamı üçtür.

'Bir ile birin toplamı ikidir' ifadesine karşılık olarak ' p_1 ' iyi biçimli formülü, 'bir ile ikinin toplamı üçtür' ifadesine karşılık olarak ' p_2 ' iyi biçimli formülü alındığında, $((p_1 \supset p_2), p_2, p_1)$ sıralısı çıkarım 1'in, $((\sim p_1 \supset p_2), \sim p_2, p_1)$ çıkarım 2'nin, $((p_1 \supset p_2), p_1, p_2)$ çıkarım 3'ün çıkarım biçimleridir.

$((p_1 \supset p_2), p_2, p_1)$ için çizelge:

<i>I-sol</i>	1		$(p_1 \supset p_2) \mid$			
	2		$p_2 \mid$			
	3		$\mid p_1$			
			$\bigwedge$			
	4	(1)	$\mid p_1$	$p_2 \mid$	(1)	4
			o	o		

$\{(p_1 \supset p_2), p_2\} \not\models_p 'p_1'$

$((p_1 \supset p_2), p_2, p_1)$ sıralı üçlüsü geçerli bir çıkarım biçimi değildir.

$((\sim p_1 \supset p_2), \sim p_2, p_1)$ için çizelge:

<i>I-sol</i>	1		$(\sim p_1 \supset p_2) \mid$			
<i>N-sol</i>	2		$\sim p_2 \mid$			
	3		$\mid p_1$			
	4	(2)	$\mid p_2$			
			$\bigwedge$			
<i>N-sol</i>	5	(1)	$\mid \sim p_1$	$p_2 \mid$	(1)	4
	6	(5)	$p_1 \mid$	x		
			x			

$\{(\sim p_1 \supset p_2), \sim p_2\} \models_p 'p_1'$

$((\sim p_1 \supset p_2), \sim p_2, p_1)$ sıralı üçlüsü geçerli bir çıkarım biçimidir.

$((p_1 \supset p_2), p_1, p_2)$ için çizelge:

<i>I-sol</i>	1		$(p_1 \supset p_2) \mid$			
	2		$p_1 \mid$			
	3		$\mid p_2$			
			$\bigwedge$			
	4	(1)	$\mid p_1$	$p_2 \mid$	(1)	4
			x	x		

$\{(p_1 \supset p_2), p_1\} \models_p 'p_2'$

$((p_1 \supset p_2), p_1, p_2)$ sıralı üçlüsü geçerli bir çıkarım biçimidir.

Özet



P dilinin bir iyi biçimli formül kümesinin P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumundaki yorumlarının çizelge analizini açıklamak.

P dilinin Y yorumundaki yorumlar analizinde çizelgenin kurulması için bir A_i iyi biçimli formülünün bir y_i yorumunda alacağı değere bağlı olarak, $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesinin elemanları olan t -fonksiyonlarının analizini takip eden analiz kuralları oluşturulur. Çizelge analizi, $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ kümesinin elemanlarının geçişlerinin bulunduğu A_i iyi biçimli formülünün veya $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ kümesinin elemanlarının aldığı değeri veya değerleri sabitleyerek, A_i iyi biçimli formülünün veya $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ kümesinin bu değerleri aldığı yorumları saptama yöntemidir.



Çıkarım ve çıkarım biçimini ifade etmek.

Elemanları beyan cümleleri olan $(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$ $(n+1)$ -li sıralı bir çıkarımdır. $\{S_1, \dots, S_n\}$ kümesinin elemanlarına ‘öncül’, S_{n+1} ’e ‘sonuç’ adı verilir. S_{n+1} cümlesi $S_1, \dots, S_n$ cümlelerinin sonucudur. Elemanı olan her A_i iyi biçimli formülünün S_i cümlesinin ait olduğu dildeki biçimine karşılık geldiği kabul edilen $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ sıralı $(n+1)$ -lisi bir çıkarım biçimidir.



Çıkarım biçiminin geçerliliğini ve çıkarımın sağlamlığını açıklamak.

$(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$ çıkarımının çıkarım biçimi $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ ancak ve ancak $\{A_1, \dots, A_n\} \models_p A_{n+1}$ ise geçerlidir. $(S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$ çıkarımı ancak ve ancak çıkarım biçimi $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ geçerli ise ve $S_1, \dots, S_n$ cümleleri ifade edildikleri dilde ‘doğru’ ise biçimsel olmayan bir dil için sağlamdır.

Bir çıkarımın geçerliliği öncüllerinin sırasına bağlı değildir.

Kendimizi Sıneyalım

1. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin Y yorumunda geçerlidir?

- a. $((p_1 \vee \sim p_1) \supset p_2)$
- b. $(p_1 \supset \sim p_1) \vee p_2)$
- c. $(p_1 \vee \sim p_2) \wedge p_2)$
- d. $(p_1 \supset \sim p_1) \wedge \sim p_2)$
- e. $((p_1 \vee \sim p_1) \vee (p_2 \wedge \sim p_2))$

2. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin Y yorumunda geçerli değildir?

- a. $\sim (p_1 \wedge \sim p_1)$
- b. $\sim ((p_1 \vee \sim p_1) \wedge (p_1 \wedge \sim p_1))$
- c. $\sim \sim (\sim p_1 \supset \sim p_1)$
- d. $(p_1 \supset \sim p_1)$
- e. $((p_1 \wedge \sim p_1) \vee \sim (p_2 \wedge \sim p_2))$

3. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin Y yorumunda yeterlidir?

- a. $(p_2 \wedge \sim p_2)$
- b. $\sim (p_1 \vee \sim p_1)$
- c. $\sim (p_1 \supset (\sim p_2 \supset p_1))$
- d. $((\sim p_2 \supset p_1) \wedge (\sim p_1 \supset p_2))$
- e. $((p_2 \vee \sim p_2) \supset (p_1 \wedge \sim p_1))$

4. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P dilinin Y yorumunda olumsuzdur?

- a. $(p_1 \supset ((p_2 \vee p_3) \supset p_1))$
- b. $((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3)))$
- c. $((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))$
- d. $\sim (p_1 \supset (\sim (p_2 \wedge p_3) \supset p_1))$
- e. $(p_1 \supset \sim (p_1 \vee \sim p_1))$

5. Aşağıdaki ifadelerden hangisi P dilinin Y yorumundaki içleme tanımına uymaz?

- a. $\{\sim (p_1 \vee \sim p_1), (p_1 \supset p_2)\} \models_p '(p_2 \supset p_3)'$
- b. $\{(p_1 \supset p_2), (p_2 \supset p_3)\} \models_p '\sim (p_1 \vee \sim p_1)'$
- c. $\{(p_1 \supset p_2), (p_2 \supset p_3)\} \not\models_p '\sim (p_1 \vee \sim p_1)'$
- d. $\{\sim (p_1 \vee \sim p_1), (p_1 \supset p_2), (p_2 \supset p_3)\} \models_p '\sim (p_1 \vee \sim p_1)'$
- e. $\{\sim (p_1 \vee \sim p_1), (p_2 \supset p_3)\} \models_p '(p_1 \supset p_2)'$

6. Aşağıdaki çıkarım biçimlerinden hangisinin geçerlilik şartı geçerlilik tanımına göre diğerlerinden farklıdır?

- a. $((p_1 \supset p_2), (p_2 \supset p_3), \sim (p_1 \vee \sim p_1), (\sim p_1 \wedge p_3))$
- b. $((p_1 \supset p_2), (p_2 \supset p_3), (\sim p_1 \wedge p_3), \sim (p_1 \vee \sim p_3))$
- c. $((p_1 \supset p_2), \sim (p_1 \vee \sim p_1), (p_2 \supset p_3), (\sim p_1 \wedge p_3))$
- d. $(\sim (p_1 \vee \sim p_1), (p_2 \supset p_3), (p_1 \supset p_2), (\sim p_1 \wedge p_3))$
- e. $(\sim (p_1 \vee \sim p_1), (p_1 \supset p_2), (p_2 \supset p_3), (\sim p_1 \wedge p_3))$

7. Çıkarım biçimi $((p_1 \vee \sim p_1), (p_2 \supset p_3), (\sim p_1 \supset p_2), p_1)$ sıralı dörtlüsü olan çıkarım aşağıdakilerden hangisidir?

- a. 'n sayısı' ikinin katıdır veya n sayısı ikinin katı değildir. n sayısı ikinin katı ise ikiye bölünür. Bir sayı ikiye bölünmez ise tektir. n sayısı tek ise ikiye bölünmez.
- b. Bir yorumun içeriği ya vardır ya da yoktur. Bir yorumun içeriği yoksa boştur. Bir yorum dolu ise dilde bir karşılığı vardır, yoksa içeriği yoktur. Biçimsel bir dilde karşılığı olmayan bir yorum olmaz.
- c. Bugün günlerden salıdır veya değildir. Sedef bitirme projesini tamamlarsa okula erken gider. Bugün salı değilse Sedef bitirme projesini tamamlamıştır. Sedef okula erken gitmedi. Bugün günlerden salıdır.
- d. Bir cümle yanlış veya doğrudur. Bir cümle yanlış ise doğru değildir. Bir cümle yanlış ise doğru yorumu yoktur. Bir cümlemin doğru yorumu varsa cümle doğrudur.
- e. 'Bugün günlerden salıdır veya değildir' cümlesi yanlış veya doğrudur. 'Bugün günlerden salıdır veya değildir' cümlesinde iki cümle varsa cümlemin yorum sayısı ikidir. Bugün günlerden salı ise 'Bugün günlerden salıdır' cümlesi bir yorumda doğrudur. Bugün günlerden salıdır.

8. Bir çıkarım biçimi olduğu kabul edilen aşağıdaki sıralı üçlülerden hangisi P dilinin Y yorumunda geçerlidir?

- a. $((p_1 \supset p_2), (\sim p_1 \supset p_2), p_2)$
- b. $((p_1 \vee \sim p_1), (p_1 \supset p_2), p_2)$
- c. $((p_1 \vee \sim p_1), (\sim p_1 \supset p_2), p_2)$
- d. $((p_1 \supset p_2), (p_1 \vee \sim p_1), p_2)$
- e. $((\sim p_1 \supset p_2), (p_1 \vee \sim p_1), p_2)$

9. Bir çıkarım biçimi olduğu kabul edilen aşağıdaki sıralı üçlülerden hangisi P dilinin Y yorumunda geçerli değildir?

- a. $(p_1, \sim p_2, p_1)$
- b. $((p_1 \equiv p_2), (p_2 \supset p_3), \sim p_3, \sim p_1)$
- c. $((p_1 \equiv p_2), \sim p_2, \sim p_1)$
- d. $((p_1 \equiv (p_2 \vee p_3)), p_1, \sim p_3, p_2)$
- e. $((p_1 \equiv (p_2 \vee p_3)), p_2, p_1, p_3)$

10. Aşağıdakilerden hangisi P dilinin Y yorumunun üst-dilinin bir ifadesidir?

- a. $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ çıkarım biçimi $y_i(A_1): d, \dots, y_i(A_n): d$ ise doğrudur.
- b. $\{A_1, \dots, A_n\} \models_p A_{n+1}$ ise $A_i \models_p A_{n+1}$ olur.
- c. $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ çıkarım biçimi $y_i(A_{n+1}): y$ ise yanlıştır.
- d. $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ çıkarım biçimi doğru ise $y_i(A_1): d, \dots, y_i(A_n): d, y_i(A_{n+1}): d$ doğrudur.
- e. Hiçbiri.

Kendimizi Sınyalım Yanıt Anahtarı

- 1. c** Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin Bir A_i İyi Biçimli Formölünün $y_i(A_i)$: y Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Çizelgenin kapalı olması ‘ $((p_1 \vee \sim p_1) \vee (p_2 \wedge \sim p_2))$ ’ iyi biçimli formölünün Y yorumunda geçerli olduğunu gösterir.

		$(p_1 \vee \sim p_1) \vee (p_2 \wedge \sim p_2)$	1	D-sağ
		$(p_1 \vee \sim p_1)$	(1) 2	D-sağ
		$(p_2 \wedge \sim p_2)$	(1) 3	
		p_1	(2) 4	
		$\sim p_1$	(2) 5	N-sağ
p_1			(5) 6	
	x			

‘ $((p_1 \vee \sim p_1) \vee (p_2 \wedge \sim p_2))$ ’ iyi biçimli formölünün Y yorumunda $y_i((p_1 \vee \sim p_1) \vee (p_2 \wedge \sim p_2))$: y olan hiçbir yorumu yoktur.

- 2. d** Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin Bir A_i İyi Biçimli Formölünün $y_i(A_i)$: d Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Çizelgede açık dal olması P dilinin ‘ $(p_1 \supset \sim p_1)$ ’ formölü Y yorumunda geçerli olmadığını gösterir.

			$(p_1 \supset \sim p_1)$	1	I-sağ
	2	(1)	p_1		
N-sol	3	(1)		$\sim p_1$	
	4	(3)	p_1		
					o

‘ $(p_1 \supset \sim p_1)$ ’ formölünün $y_i((p_1 \supset \sim p_1))$: y olan bir yorumu vardır: $y_i(p_1)$: y olan y_k yorumunda $y_k((p_1 \supset \sim p_1))$: y olur.

- 3. d** Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin Bir A_i İyi Biçimli Formölünün $y_i(A_i)$: d Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Çizelgenin kapalı olmaması ‘ $((\sim p_2 \supset p_1) \wedge (\sim p_1 \supset p_2))$ ’ iyi biçimli formölünün Y yorumunda modeli olduğunu gösterir, tanım gereği ‘ $((\sim p_2 \supset p_1) \wedge (\sim p_1 \supset p_2))$ ’ formölü yeterlidir.

N-sol	1		$((\sim p_2 \supset p_1) \wedge (\sim p_1 \supset p_2))$		
I-sol	2	(1)		$(\sim p_1 \supset p_2)$	
I-sol	3	(1)		$(\sim p_2 \supset p_1)$	
					$\bigwedge$
N-sağ	4	(2)		$\sim p_1$	
	5	(4)	p_1		
					$\bigwedge$
N-sağ	6	(3)		$\sim p_2$	p_1 (3) 5
	7	(6)	p_2		o
					o

$y_k(p_1)$: d olan y_k yorumu ve $y_m(p_2)$: d olan y_m yorumu, $y_i((\sim p_2 \supset p_1) \wedge (\sim p_1 \supset p_2))$: d olan yorumlardır.

- 4. c** Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin Bir A_i İyi Biçimli Formölünün $y_i(A_i)$: d Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “P Dilinin Bir A_i İyi Biçimli Formölünün $y_i(A_i)$: y Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz. ‘ $((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))$ ’ iyi biçimli formölü Y yorumunda olumsuzdur.

I-sol	1	$((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))$		
			$\bigwedge$	
D-sağ	2 (1)	$(p_1 \vee p_2)$	$((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3))$	(1) 2
		p_1		
		p_2		
		o		

Çizelgedeki ilk dalda analiz ilerletilemeyeceğinden ve o dal açık olduğundan, aranan yorum da $y_i('((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))')$: d olan yorum olduğundan diğer daldaki analizi sürdürmek gerekmez. ' $(p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3))$ ' iyi biçimli formülünün $y_k('p_1')$: y ve $y_k('p_2')$: y olan y_k yorumu, $y_i('((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))')$: d olan yorumdur.

		$((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))$	1	I-sağ
D-sol	2 (1)	$(p_1 \vee p_2)$		
		$((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3))$	(1) 3	I-sağ
	4 (3)	$(p_1 \supset p_2)$		
		$(p_2 \supset p_3)$	(3) 5	I-sağ
	6 (5)	p_2		
		p_3	(5) 7	I-sağ
		$\bigwedge$		
	8 (2)	p_1		p_2 (2) 8
		$\bigwedge$		$\bigwedge$
	9 (4)	p_1 p_2	p_1 p_2	(4) 9
		x o	o o	

' $(p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3))$ ' iyi biçimli formülünün $y_i('((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))')$: y olan yorumu vardır: ' $(p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3))$ ' iyi biçimli formülünün $y_m('p_2')$: d ve $y_m('p_3')$: y olan y_m yorumu, $y_i('((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))')$: y olan yorumdur. $y_k('((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))')$: d ve $y_m('((p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3)))')$: y olan y_k ve y_m yorumları olduğundan ' $(p_1 \vee p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_2 \supset p_3))$ ' iyi biçimli formülü Y yorumunda olumsaldır.

- 5. b** Yanıtınız yanlış ise “P Dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ İyi Biçimli Formül Kümesinin $y_i(\Delta)$: d ve $y_i(A_i)$: y Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\{(p_1 \supset p_2), (p_2 \supset p_3), \sim(p_1 \vee \sim p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i('p_1')$: d , $y_i('p_2')$: d , $y_i('p_3')$: y olan en az bir yorumu vardır.

I-sol	1	$(p_1 \supset p_2)$		
I-sol	2	$(p_2 \supset p_3)$		
	3		$\sim(p_1 \vee \sim p_1)$	
D-sol	4	$(p_1 \vee \sim p_1)$		
			$\bigwedge$	
	5 (4)	p_1		$\sim p_1$ (4) 5
			p_1	(4) 6
		$\bigwedge$		$\bigwedge$
	6 (1)	p_1 p_2	p_1 p_2	(1) 7
		x	$\bigwedge$	$\bigwedge$
	7 (2)	p_2 p_3	p_2 p_3	(2) 8
		x o	o o x o	

$\{(p_1 \equiv (p_2 \vee p_3)), p_2, p_1\} \cup \{p_3\} = \{(p_1 \equiv (p_2 \vee p_3)), p_2, p_1, p_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i('p_1 \equiv (p_2 \vee p_3)')$: d , $y_i('p_2')$: d , $y_i('p_1')$: d ve $y_i('p_3')$: y olan bir yorumu vardır. $y_k('p_2')$: d , $y_k('p_1')$: d olan y_k yorumunda $y_k('p_1 \equiv (p_2 \vee p_3)')$: d ve $y_k('p_3')$: y olur. O halde: $\{(p_1 \equiv (p_2 \vee p_3)), p_2, p_1\} \not\models_p 'p_3'$

- 10. e** Yanıtınız yanlış ise “Çıkarım ve çıkarım biçimi” ve “Çıkarım biçiminin geçerliği ve çıkarımın sağlamlığı” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz. P dilinin Y yorumunun üst-dilinde ‘doğru’ terimi çıkarım biçimleri için tanımlanmamıştır. ‘Doğru’ terimi sadece P dilinin bir A_i iyi biçimli formülünün bir y_i yorumunda aldığı değer $y_i('p_2')$: d ise o formül için kullanılır. P dilinin Y yorumunda $\{A_1, \dots, A_n\} \models_p A_{n+1}$ ise $A_n \not\models_p A_{n+1}$ olan en az bir iyi biçimli formül kümesi vardır. Örnek: $\{A_1, \dots, A_n\} \cup \{A_{n+1}\} = \{(p_1 \supset p_2), p_1\} \cup \{p_2\} = \{(p_1 \supset p_2, p_1, p_2)\}$ formül kümesi için $\{(p_1 \supset p_2), p_1\} \models_p 'p_2'$ olur ama $\{(p_1 \supset p_2)\} \not\models_p 'p_2'$ ve $\{p_1\} \not\models_p 'p_2'$ olur.

<i>I-sol</i>	1	$(p_1 \supset p_2)$					
<i>I-sol</i>	2		p_1				
	3				p_2		
				$\wedge$			
	4 (1)			p_1		p_2	
			x				x
							(1) 4

$\{(p_1 \supset p_2), p_1, p_2\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i('p_1 \supset p_2')$: d , $y_i('p_1')$: d ve $y_i('p_2')$: y olan hiçbir yorumu yoktur. O hâlde: $\{(p_1 \supset p_2), p_1\} \models_p 'p_2'$

<i>I-sol</i>	1	$(p_1 \supset p_2)$					
	2			p_2			
				$\wedge$			
	3 (1)			p_1		p_2	
			o				x
							(1) 4

$\{(p_1 \supset p_2), p_2\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i('p_1 \supset p_2')$: d , ve $y_i('p_2')$: y olan bir yorumu vardır. $y_k('p_1')$: y ve $y_k('p_2')$: y olan y_k yorumunda $y_k('p_1 \supset p_2')$: d ve $y_k('p_2')$: y olur. O hâlde: $\{(p_1 \supset p_2)\} \not\models_p 'p_2'$

1	p_1		
2			p_2
			o

$\{p_1, p_2\}$ iyi biçimli formül kümesinin $y_i('p_1')$: d , ve $y_i('p_2')$: y olan bir yorumu vardır; $y_m('p_1')$: d ve $y_m('p_2')$: y olan y_m yorumu. O hâlde: $\{p_1\} \not\models_p 'p_2'$

Çizelge oluşturulduğunda:

[illegible]

Çizelgenin kapalı olmaması $\{(p_1 \supset p_2), (\sim p_2 \supset p_1), \sim p_1\} \not\models_p '(p_3 \equiv p_4)'$ olduğunu gösterir: $y_1('p_1')$: y , $y_1('p_2')$: d , $y_1('p_3')$: d , $y_1('p_4')$: y olan y_1 yorumu ve $y_2('p_1')$: y , $y_2('p_2')$: d , $y_2('p_3')$: y , $y_2('p_4')$: d y_2 yorumu, $y_3('p_1 \supset p_2')$: d , $y_3('(\sim p_2 \supset p_1)')$: d , $y_3('(\sim p_1)')$: d ve $y_3('p_3 \equiv p_4')$: y olan yorumlardır.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

- Çoker, D. ve Karaçay, T. (1983). **Matematik Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Grünberg, T. ve Onart, A. (1976). **Mantık Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Grünberg, T. (1972). **Symbolic Logic**, Ankara: Faculty of Art and Sciences Publication.
- Halmos P. R. (1960). **Naive set theory**, Princeton, NJ.: D. Van Nostrand Company.
- Koç, Y. (1980). **Introduction to Logic**, İstanbul: Boğaziçi University Publications.
- Mendelson, E. (1964). **Introduction to Mathematical Logic**, Princeton, NJ.: D. Van Nostrand Company, Inc.
- Tarski, A. (1944). *“The Semantic Conception of Truth and The Foundations of Semantics”*, **Philosophy and Phenomenological Research**, Vol. 4, No.3.
- Taşdelen, İ. (2010). **Sembolik Mantık**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

3

SEMBOLİK MANTIK

Amaçlarımız

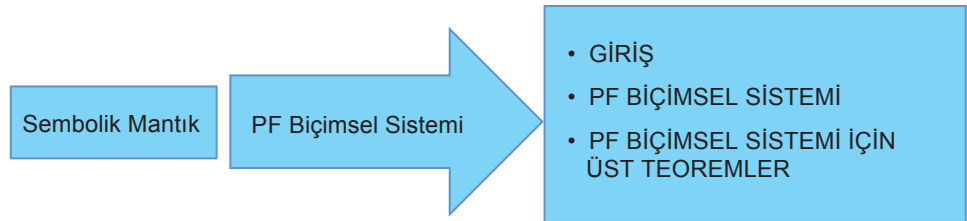
Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Biçimsel sistem ve PF biçimsel sistemini açıklayabilecek,
- PF biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremini tanımlayabilecek,
- PF biçimsel sistemi ve P dilinin $\mathcal{Y}$ yorumu için tutarlılığı ifade edebilecek,
- PF biçimsel sistemi ve P dilinin $\mathcal{Y}$ yorumu için tamlığı açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Biçimsel sistem
- PF Biçimsel Sistemi
- Dedüksiyon Kuralı
- Dolaysız Sonuç
- Kanıtlama
- Teorem
- Türeme
- PF Biçimsel Sisteminde İçerme
- Dedüksiyon
- Tutarlılık
- Kanıt-Kuramsal Tutarlılık
- Tamlık

İçindekiler



PF Biçimsel Sistemi

GİRİŞ

Bu ünite de PF biçimsel sistemi, PF biçimsel sistemine dair üst teoremler ve PF biçimsel sistemi ile P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunu bir araya getiren üst teoremler anlatılacaktır.

Biçimsel Sistem

Bir biçimsel sistem, iyi biçimli formül kümesinin elemanlarını başka bir kümenin elemanları ile eşleyen bir yorumdan farklı olarak iyi biçimli formül kümesinin elemanlarını sıralar. Bir S biçimsel sistemi (i) sayılabilir elemanlı bir Γ kümesi, (ii) Γ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinin kümesinden seçilen Δ kümesi, (iii) Δ kümesinden seçilen Θ kümesi, (iv) elemanları Δ kümesindeki elemanlar arasındaki bağıntılar olan sonlu Λ kümesinden oluşur.

(i)'de anılan sayılabilir elemanlı Γ kümesi S biçimsel sisteminin alfabesidir. (ii)'de anılan Γ kümesinin alt kümesi olan Δ kümesi S biçimsel sisteminin iyi biçimli formül kümesidir. Δ kümesi S biçimsel sisteminin dilidir ve S dili olarak adlandırılır. Çoğunlukla S biçimsel sisteminin alfabesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinin kümesinden seçilen Δ kümesindeki elemanların hangi sonlu diziler oluşunu saptamak için etkin yönergeler vardır. (iii)'de anılan Δ kümesinin alt kümesi olan Θ kümesi S biçimsel sisteminin aksiyom kümesidir. Bu küme bazı biçimsel sistemlerde seçilmemiştir. S biçimsel sisteminde verili bir iyi biçimli formülün aksiyom kümesinin elemanı olup olmadığı etkin olarak saptanıyorsa S aksiyomatik sistemdir. (iv)'de anılan Λ kümesindeki $R_1, \dots, R_n$ bağıntıları S biçimsel sisteminin dedüksiyon kurallarıdır.

$R_1, \dots, R_n$ bağıntılarının sonlu kümesinin elemanı olan her R_i bağıntısı için tek bir pozitif j tamsayısı vardır ki, her j elemanlı iyi biçimli formül kümesi ve her A_k iyi biçimli formülü için, j sayıdaki iyi biçimli formülün A_k formülüyle R_i bağıntısında olup olmadığı etkin olarak saptanır. Eğer A_k iyi biçimli formülü j sayıda iyi biçimli formül ile R_i bağıntısında ise, $A_{k,j}$ elemanlı iyi biçimli formül kümesinin elemanlarının R_i bağıntısı ile dolaysız sonucudur.

S biçimsel sisteminde bir kanıtlama, S biçimsel sisteminin iyi biçimli formüllerinin $(A_1, \dots, A_n)$ sonlu dizisidir ki, dizideki her A_i ya S biçimsel sisteminin aksiyomu ya da önce gelen iyi biçimli formül veya formüllerin bir R_i bağıntısı ile dolaysız sonucudur.

S biçimsel sisteminin teoremi, S biçimsel sisteminin bir A_k iyi biçimli formülüdür ki, A_k iyi biçimli formülü $(A_1, \dots, A_n)$ sıralı n -lisinin son elemanı olan A_n iyi biçimli formülüdür ve $(A_1, \dots, A_n)$ sıralı n -lisindeki her A_i ya S biçimsel sisteminin aksiyomudur ya da bir dedüksiyon kuralıyla kendisinden önce gelen formül veya formüllerin dolaysız sonucudur. $(A_1, \dots, A_n)$ sıralı n -lisi S biçimsel

sisteminde bir kanıtlamadır. Bu kanıtlamaya A_n iyi biçimli formülünün kanıtlaması denir.

Aksiyomlu veya aksiyomatik bir sistemin dedüksiyon kuralları aksiyomlar ile iyi biçimli formülleri bağlar. Bu kurallar silsilesiyle aksiyomlara bağlanan bir iyi biçimli formül ise sistemin teoremidir.

ÖRNEK

Alfabe: $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \supset, (,)\}$

- i. S biçimsel sisteminin bir iyi biçimli formülü alfabadeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizisidir.
- ii. Alfabenin p_i elemanının her geçişi S biçimsel sisteminin iyi biçimli formülüdür.
- iii. Eğer A_i S biçimsel sisteminin iyi biçimli formülü ise $\sim A_i$ S biçimsel sisteminin iyi biçimli formülüdür.
- iv. Eğer A_i ve A_j S dilinin iyi biçimli formülleri ise $(A_i \supset A_j)$ S biçimsel sisteminin iyi biçimli bir formülüdür.
- v. Γ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (ii), (iii) ve (iv)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey S biçimsel sisteminin iyi biçimli formülü değildir.
- vi. A_i, A_j, A_k S biçimsel sisteminin iyi biçimli formülleri ise aşağıdakiler S biçimsel sistemini aksiyomudur:
 - (1) $(A_i \supset (A_j \supset A_i))$
 - (2) $(A_i \supset (A_j \supset A_k)) \supset ((A_i \supset A_j) \supset (A_j \supset A_k))$.
 - (3) $(\sim A_j \supset \sim A_i) \supset ((\sim A_j \supset A_i) \supset A_j)$
- vii. A_j iyi biçimli formülü A_i ve $A_i \supset A_j$ iyi biçimli formüllerinin dolaysız sonucudur.

Yukarıda yer alan kurallarla kurulan S biçimsel sistemi bir aksiyomatik sistemdir. ' $(p_1 \supset (p_2 \supset p_1))$ ' iyi biçimli formülü, $(A_i \supset (A_j \supset A_i))$ aksiyom şemasına göre S biçimsel sisteminin aksiyomlarından biridir.

S biçimsel sistemi aksiyomatik olsa da yani, bir iyi biçimli formülün S biçimsel sisteminin aksiyomu olup olmadığını saptayacak etkin bir yönerge olsa da, bir formülün S biçimsel sisteminin teoremi olmadığını saptayacak etkin bir yönergenin olması zorunlu değildir. Bir biçimsel sistemde, bir A_i iyi biçimli formülünün biçimsel sistemin teoremi olmadığını saptayacak bir yönerge varsa, o biçimsel sisteme '*saptanır sistem*' adı verilir. Bir biçimsel sistemde bu türden bir yönerge yoksa o biçimsel sisteme '*saptanmaz sistem*' adı verilir.

A_k iyi biçimli formülü, ancak ve ancak sıralıdaki her A_i iyi biçimli formülünün ya S biçimsel sisteminin aksiyomu, ya Γ iyi biçimli formül kümesinin elemanı ya da bir dedüksiyon kuralıyla kemdisinden önce gelen formül veya formüllerin dolaysız sonucu olduğu, sıralının son terimi olan A_n ile A_k iyi biçimli formülünün aynı olduğu bir $(A_1, \dots, A_n)$ sıralı n -lisi varsa, Γ iyi biçimli formül kümesinin S biçimsel sistemindeki sonucudur.

$(A_1, \dots, A_n)$ sıralı n -lisine ' A_k iyi biçimli formülünün Γ iyi biçimli formül kümesinden türemesi' adı verilir. Γ kümesinin elemanına 'hipotez' adı verilir. $\Gamma \vdash A_k$, ' A_k iyi biçimli formülü Γ iyi biçimli formül kümesinin sonucudur' ifadesinin kısaltmasıdır. A_k iyi biçimli formülünün Γ iyi biçimli formül kümesinden türemesinin S biçimsel sisteminde olduğunu göstermek için S alttakısı eklenerek ' $\Gamma \vdash_S A_k$ ' yazılır.

Eğer $(A_1, \dots, A_n)$ sıralı n -lisi bir kanıtlama ise Γ boş kümedir. $\Gamma = \emptyset$ ise, $\emptyset \vdash A_k$ ancak ve ancak A_k bir teorem ise olur. Bu durumda A_k iyi biçimli formülünün teorem olduğunu göstermek için ' $\emptyset \vdash A_k$ ' yerine ' $\vdash A_k$ ' yazılır.

Dil ve Biçimsel Sistem

Bir dil alfabesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan tüm dizileri kümesinin alt kümesi olarak tanımlandı. Elemanları aynı olan kümeler, kümeler teorisine göre aynı olduğu için, iki dil ancak ve ancak elemanları olan iyi biçimli formüller aynı ise aynıdır. Ancak biçimsel sistemi belirleyen, yukarıda anılan Δ kümesinden, eğer seçilmişse, seçilen Θ kümesi ile Δ kümesindeki elemanlar arasındaki bağıntıların Λ kümesidir. Bu kümelerle sırasıyla 'aksiyom kümesi' ve 'dedüksiyon kuralı kümesi' denir. İki biçimsel sistemin teorem kümesi aynı olsa dahi aksiyomu veya dedüksiyon kuralı farklı ise biçimsel sistemler farklıdır. Aksiyomlu bir teoriyle sadece dedüksiyon kuralı olan doğal dedüktif bir sistemin teorem kümesi aynı olabilir. S dilinin elemanları, alfabe kümesindeki elemanlardan hangilerinin geçişlerinin dilin elemanı olacağını belirlemenin yanısıra alfabe kümesindeki elemanların geçişlerinin hangi sıralamaya uyacağını belirleyen biçimleme kuralları ile saptanır. S dilinin bir Y yorumu dilin bir alt kümesini seçer. Bu kümeye ' Y yorumunda geçerli iyi biçimli formül kümesi' adı verilir. S biçimsel sistemi, elemanları S dilinin iyi biçimli formüllerinin sıralıları olan kümeden, her terimi ya sistemde aksiyom kümesi olan kümenin elemanı (eğer sistem aksiyomlu ise) ya da sadece kendisinden önce gelen iyi biçimli formül veya formüllerin dolaysız sonucu olan sıralılar kümesini seçer. Herhangi bir Γ iyi biçimli formül kümesinin elemanını içermeyen bu sıralıların son terimlerinin kümesi S dilinin bir alt kümesidir. S biçimsel sisteminin seçtiği bu kümeye ' S sisteminin teorem kümesi' adı verilir. Bir Y yorumu dilin her Γ iyi biçimli formül kümesi için, Γ kümesinin Y yorumunda içerdiği iyi biçimli formül kümesini seçer. Bu küme de S dilinin bir alt kümesidir. S biçimsel sistemi, elemanları S dilinin iyi biçimli formüllerinin sıralıları olan kümeden, her terimi ya sistemde aksiyom kümesi olan kümenin elemanı (eğer sistem aksiyomlu ise) ya da Γ iyi biçimli formül kümesinin elemanı veya kendisinden önce gelen iyi biçimli formül veya formüllerin dolaysız sonucu olan sıralılar kümesini seçer. Bu sıralıların son terimlerinin kümesi, S dilinin Γ kümesinden S biçimsel sisteminde türemesi olan iyi biçimli formüller alt kümesidir.

PF BİÇİMSEL SİSTEMİ

PF biçimsel sisteminin iyi biçimli formül kümesi ile P dili aynıdır. Bu yüzden PF biçimsel sisteminin iyi biçimli bir formülü ' P dilinin iyi biçimli formülü' adıyla anılır. PF biçimsel sistemi P dili ve her biri $P_1 \times \dots \times P_m$ kartezyen çarpımının alt kümesi olan R_i bağıntılarının sonlu $\mathcal{K} = \{R_1, \dots, R_n\}$ koleksiyonundan oluşan sıralı ikilidir: $(P, \mathcal{K})$. $\mathcal{K}$ koleksiyonunun elemanı olan her R_i bağıntısına 'dedüksiyon kuralı' adı verilir. $\{A_1, \dots, A_j\}$ ($j \geq 1$) iyi biçimli formül kümesi için $(A_1, \dots, A_j, A_k)$ sıralısı $\mathcal{K}$ koleksiyonunun elemanı olan R_i bağıntısının elemanı ise A_k iyi biçimli formülü $\{A_1, \dots, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarının PF biçimsel sisteminde dolaysız sonucudur.

DİKKAT



PF biçimsel sisteminin aksiyomu yoktur.

PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kuralları

- i. $R_1: \{A_i\}$ iyi biçimli formül kümesi için (A_i, A_i) sıralı ikilisi R_1 bağıntısının elemanıdır.

 A_i iyi biçimli formülü, $\{A_i\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının dolaysız sonucudur. [kural adı: R]
- ii. $R_2: \{\sim\sim A_i\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(\sim\sim A_i, A_i)$ sıralı ikilisi R_2 bağıntısının elemanıdır.

 A_i iyi biçimli formülü, $\{\sim\sim A_i\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının dolaysız sonucudur. [kural adı: $\sim E$]
- iii. $R_3: \{(A_j \wedge A_k)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_j \wedge A_k), A_j)$ ve $((A_j \wedge A_k), A_k)$ sıralı ikilileri R_3 bağıntısının elemanıdır.

 A_j iyi biçimli formülü ve A_k iyi biçimli formülü, $\{(A_j \wedge A_k)\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının dolaysız sonuçlarıdır. [kural adı: $\wedge E$]
- iv. $R_4: \{(A_j \vee A_k), (A_j \supset A_i), (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_j \vee A_k), (A_j \supset A_i), (A_j \supset A_i), A_i)$ sıralı dördlüsü R_4 bağıntısının elemanıdır.

 A_i iyi biçimli formülü, $\{(A_j \vee A_k), (A_j \supset A_i), (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\vee E$]
- v. $R_5: \{A_j, (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, (A_j \supset A_i), A_i)$ sıralı üçlüsü R_5 bağıntısının elemanıdır.

 A_i iyi biçimli formülü, $\{A_j, (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\supset E$]
- vi. $R_6: \{A_i, A_j, (A_j \equiv A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, (A_j \equiv A_i), A_i)$ ve $(A_i, (A_j \equiv A_i), A_j)$ sıralı üçlülere R_6 bağıntısının elemanıdır.

 A_i iyi biçimli formülü, $\{A_j, (A_j \equiv A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların ve A_j iyi biçimli formülü $\{A_i, (A_j \equiv A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\equiv E$]
- vii. $R_7: \{(A_i \supset A_j), (A_i \supset \sim A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_i \supset A_j), (A_i \supset \sim A_j), \sim A_i)$ sıralı üçlüsü R_7 bağıntısının elemanıdır.

 $\sim A_i$ iyi biçimli formülü, $\{(A_i \supset A_j), (A_i \supset \sim A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\sim I$]
- viii. $R_8: \{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, A_k, (A_j \wedge A_k))$ sıralı üçlüsü R_8 bağıntısının elemanıdır.

 $(A_j \wedge A_k)$ iyi biçimli formülü, $\{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. kural adı: $\wedge I$
- ix. $R_9: \{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, (A_j \vee A_k))$ ve $(A_k, (A_j \vee A_k))$ sıralı ikilileri R_9 bağıntısının elemanıdır.

 $(A_j \vee A_k)$ iyi biçimli formülü, $\{A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının veya $\{A_k\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının dolaysız sonucudur. [kural adı: $\vee I$]
- x. $R_{10}: \{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, A_k, (A_j \supset A_k))$ sıralı üçlüsü R_{10} bağıntısının elemanıdır.

$(A_j \supset A_k)$ iyi biçimli formülü, $\{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\supset I$]

xi. R_{11} : $\{(A_j \supset A_k), (A_k \supset A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_j \supset A_k), (A_k \supset A_j), (A_j \equiv A_k))$ sıralı üçlüsü R_{11} bağıntısının elemanıdır.

$(A_j \equiv A_k)$ iyi biçimli formülü, $\{(A_j \supset A_k), (A_k \supset A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\equiv I$]

PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği

Kural 1: *Hyp (Türemenin ilk adımı)*

1		A_i	<i>Hyp</i>
2			

Kural 2: *R*

1		A_i	
2		A_i	<i>R</i> , 1

Kural 3: $\sim E$

1		$\sim \sim A_i$	
2		A_i	$\sim E$, 1

Kural 4: $\wedge E$

1		$(A_j \wedge A_k)$	
2		A_j	$\wedge E$, 1
1		$(A_j \wedge A_k)$	
2		A_k	$\wedge E$, 1

Kural 5: $\vee E$

1		$(A_j \vee A_k)$	
2		$(A_j \supset A_i)$	
3		$(A_k \supset A_i)$	
4		A_i	$\vee E$, 1,2,3

Kural 6: $\supset E$

1		$(A_j \supset A_k)$	
2		A_j	
3		A_k	$\supset E$, 1,2

Kural 7: $\equiv E$

1		$(A_j \equiv A_k)$	
2		A_j	
3		A_k	$\equiv E, 1,2$

1		$(A_j \equiv A_k)$	
2		A_k	
3		A_j	$\equiv E, 1,2$

Kural 8: $\sim I$

1		$(A_i \supset \sim A_j)$	
2		$(A_i \supset \sim A_k)$	
3		$\sim A_i$	$\sim I, 1,2$

Kural 9: $\wedge I$

1		A_j	
2		A_k	
3		$(A_j \wedge A_k)$	$\wedge I, 1,2$

Kural 10: $\vee I$

1		A_j	
2		$(A_j \vee A_k)$	$\vee I, 1$
1		A_k	
2		$(A_j \vee A_k)$	$\vee I, 1$

Kural 11: $\supset I$

1		A_j	hyp
2		A_k	
3		$(A_j \supset A_k)$	$\supset I, 1,2$

Kural 12: $\equiv I$

1		$(A_j \supset A_k)$	
2		$(A_k \supset A_j)$	
3		$(A_j \equiv A_k)$	$\equiv I, 1,2$

PF Biçimsel Sisteminde Türeme ve Kanıtlama

P dilinin A_{n+1} iyi biçimli formülünün PF biçimsel sistemindeki bir kanıtlaması P dilinin iyi biçimli formüllerinin $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ sonlu dizisidir. Bu dizideki her A_i iyi biçimli formülü ya PF biçimsel sisteminin teoremi ya da önce gelen iyi biçimli formül ya da formüllerin dolaysız sonucudur.

P dilinin A_{n+1} iyi biçimli formülünün P dilinin Γ iyi biçimli formül kümesinden PF biçimsel sistemindeki bir türemesi, P dilinin iyi biçimli formüllerinin $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ sonlu dizisidir. Bu dizideki her A_i iyi biçimli formülü ya PF biçimsel sisteminin teoremi ya Γ kümesinin elemanı ya da önce gelen iyi biçimli formül ya da formüllerin dolaysız sonucudur.

DİKKAT



Bir türeme içerisinde yer alan türemeye altasıralı türeme adı verilir.

ÖRNEK

1		$(\sim p_1 \wedge p_2)$	<i>Hyp</i>
2			$\sim p_1$
3			p_2
4			$(\sim p_1 \supset p_2)$
			$\wedge E, 1$
			$\supset I, 2, 3$

Yukarıdaki ' $(p_1 \supset \sim p_2)$ ' iyi biçimli formülünün ' $(\sim p_1 \wedge p_2)$ ' iyi biçimli formülünden türemesindeki

2			$\sim p_1$	<i>Hyp</i>
3			p_2	$\wedge E, 1$

türemesi yer alır. Bu türeme ilk türemeye göre alta sıralıdır.

PF Biçimsel Sisteminde İçerme ve Teorem

Tanım 1. P dilinin Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülünün Γ iyi biçimli formül kümesinden PF biçimsel sisteminde türemesi varsa, PF biçimsel sisteminde içerir.

Tanım 2. P dilinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak PF biçimsel sisteminde bir kanıtlaması varsa PF biçimsel sisteminde teoremdir.

ÖRNEK

$(p_1 \supset \sim p_2) \vdash_{PF} (\sim p_1 \vee \sim p_2)$

1	$(p_1 \supset \sim p_2)$	<i>Hyp</i>
2	$\sim (\sim p_1 \vee \sim p_2)$	<i>Hyp</i>
3	p_1	<i>Hyp</i>
4	$(p_1 \supset \sim p_2)$	<i>R</i> , 1
5	$\sim p_2$	$\supset E$, 3, 4
6	$(\sim p_1 \vee \sim p_2)$	$\vee I$, 5
7	$(p_1 \supset (\sim p_1 \vee \sim p_2))$	$\supset I$, 3, 6
8	p_1	<i>Hyp</i>
9	$\sim (\sim p_1 \vee \sim p_2)$	<i>R</i> , 2
10	$(p_1 \supset \sim (\sim p_1 \vee \sim p_2))$	$\supset I$, 8, 10
11	$\sim p_1$	$\sim E$, 7, 10
12	$(\sim p_1 \vee \sim p_2)$	$\vee I$, 12
13	$(\sim (\sim p_1 \vee \sim p_2) \supset (\sim p_1 \vee \sim p_2))$	$\supset I$, 2, 12
14	$\sim (\sim p_1 \vee \sim p_2)$	<i>Hyp</i>
15	$\sim (\sim p_1 \vee \sim p_2)$	<i>R</i> , 14
16	$(\sim (\sim p_1 \vee \sim p_2) \supset \sim (\sim p_1 \vee \sim p_2))$	$\supset I$, 14, 15
17	$\sim \sim (\sim p_1 \vee \sim p_2)$	$\sim I$, 13, 16
18	$(\sim p_1 \vee \sim p_2)$	$\sim E$, 17

SIRA SİZDE

1

PF biçimsel sisteminin aşağıdaki teoremini kanıtlayın.

$\vdash_{PF} '(((p_1 \supset p_2) \wedge \sim p_2) \supset \sim p_1)'$

SIRA SİZDE

2

PF biçimsel sisteminin aşağıdaki teoremini kanıtlayın.

$\vdash_{PF} '(p_1 \vee (\sim p_2 \wedge \sim p_3)) \supset ((p_1 \vee \sim p_2) \wedge (p_1 \vee \sim p_3))'$

PF BİÇİMSEL SİSTEMİ İÇİN ÜST TEOREMLER

PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Üst Teoremi

$\Gamma \cup \{A_n\}$ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içeriyorsa Γ iyi biçimli formül kümesi $(A_n \supset A_i)$ iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içerir: $\Gamma \cup \{A_n\} \vdash_{PF} A_i$ ise, $\Gamma \vdash_{PF} (A_n \supset A_i)$

PF Biçimsel Sistemi ve P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$

Yorumu İçin Üst-Teoremler

PF biçimsel sistemi bir *saptanmaz* sistemdir: PF biçimsel sisteminde P dilinin A_i iyi biçimli formülünün PF biçimsel sisteminin teoremi olmadığını saptayacak etkin bir yönerge yoktur. Bu sebepten P dilinin A_i iyi biçimli formülünün PF biçimsel sisteminin teoremi olmadığını saptamak için, PF biçimsel sistemi ile P dilinin Y yorumunu bağlayan üst teoremlere müracaat edilir.

Tutarlılık Üst Teoremi

Teorem: P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde teorem ise P dilinin Y yorumunda geçerlidir: $\vdash_{PF} A_i$ ise $\models_P A_i$

Dolaysız çıkarım 1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda geçerli değilse PF biçimsel sisteminde teorem değildir: $\not\models_P A_i$ ise $\not\vdash_{PF} A_i$

ÖRNEK

P dilinin $(\sim p_1 \wedge p_1)$ iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda geçerli değildir. Tutarlılık teoreminin ilk sonucuna ($\not\models_P A_i$ ise $\not\vdash_{PF} A_i$) göre $\not\models_P (\sim p_1 \wedge p_1)$ ise $\not\vdash_{PF} (\sim p_1 \wedge p_1)$ olduğundan, $\not\vdash_{PF} (\sim p_1 \wedge p_1)$ olur. Yani, $(\sim p_1 \wedge p_1)$ iyi biçimli formülünün PF biçimsel sisteminde bir kanıtlaması yoktur.

Dolaysız çıkarım 2. P dilinin Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içeriyorsa, Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü P dilinin Y yorumunda içerir: $\Gamma \vdash_{PF} A_i$ ise $\Gamma \models_P A_i$.

Dolaysız çıkarım 3. Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü P dilinin Y yorumunda içermiyorsa P dilinin Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içermez: $\Gamma \not\models_P A_i$ ise $\Gamma \not\vdash_{PF} A_i$

ÖRNEK

P dilinin $\{(p_1 \supset p_2)\}$ iyi biçimli formül kümesi $'p_2'$ iyi biçimli formülünü Y yorumunda içermez. Tutarlılık üst teoreminin üçüncü dolaysız çıkarımına ($\Gamma \not\models_P A_i$ ise, $\Gamma \not\vdash_{PF} A_i$) göre, $\{(p_1 \supset p_2)\} \not\models_P 'p_2'$ ise $\{(p_1 \supset p_2)\} \not\vdash_{PF} 'p_2'$ olduğundan, $\{(\sim p_1 \wedge p_1)\} \not\vdash_{PF} 'p_1'$ olur. Yani, P dilinin $'p_2'$ iyi biçimli formülünün $\{(p_1 \supset p_2)\}$ iyi biçimli formül kümesinden PF biçimsel sisteminde bir türemesi yoktur.

Dolaysız çıkarım 4. P dilinin Y yorumunda geçerli olmayan en az bir formülü vardır. Öyleyse, P dilinin PF biçimsel sisteminde teorem olmayan bir iyi biçimli formülü vardır.

Dolaysız çıkarım 5. P dilinin A_i ve $\sim A_i$ iyi biçimli formüllerinin ikisinin de Y yorumunda geçerli olduğu hiçbir $\{A_i, \sim A_i\}$ alt kümesi yoktur. Öyleyse P dilinin A_i ve $\sim A_i$ iyi biçimli formüllerinin ikisinin de PF biçimsel sisteminde teorem olduğu hiçbir $\{A_i, \sim A_i\}$ alt kümesi yoktur.

Tamlık Üst Teoremi

Teorem: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda geçerliyse PF biçimsel sisteminin teoremidir: $\models_P A_i$ ise $\vdash_{PF} A_i$

ÖRNEK

P dilinin Y yorumunda $\models_P (\sim p_1 \vee p_1)$ olur. Tamlık üst teoreminin ilk sonucuna ($\models_P A_i$ ise, $\vdash_{PF} A_i$) göre, $\models_P (\sim p_1 \vee p_1)$ ise $\vdash_{PF} (\sim p_1 \vee p_1)$ olduğundan, $\vdash_{PF} (\sim p_1 \vee p_1)$ olur. Yani, P dilinin $(\sim p_1 \vee p_1)$ iyi biçimli formülünün PF biçimsel sisteminde kanıtlaması vardır.

Dolaysız çıkarım 1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde teorem değilse, P dilinin Y yorumunda geçerli değildir: $\not\vdash_{PF} A_i$ ise $\not\models_P A_i$

Dolaysız çıkarım 2. P dilinin Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü P dilinin Y yorumunda içeriyorsa Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içerir: $\Gamma \models_P A_i$ ise $\Gamma \vdash_{PF} A_i$

ÖRNEK

P dilinin Y yorumunda $\{(\sim p_1 \wedge p_1)\} \models_P 'p_1'$ olur. Tamlık üst teoreminin ilk sonucuna ($\Gamma \models_P A_i$ ise $\Gamma \vdash_{PF} A_i$) göre, $(\sim p_1 \wedge p_1) \models_P 'p_1'$ ise $\{(\sim p_1 \wedge p_1)\} \vdash_{PF} 'p_1'$ olduğundan, $\{(\sim p_1 \wedge p_1)\} \vdash_{PF} 'p_1'$ olur. Yani, P dilinin ' p_1 ' iyi biçimli formülünün $\{(\sim p_1 \wedge p_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinden PF biçimsel sisteminde türemesi vardır.

Dolaysız çıkarım 3. P dilinin Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içermiyorsa Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü P dilinin Y yorumunda içermez: $\Gamma \not\vdash_{PF} A_i$ ise $\Gamma \not\models_P A_i$

SIRA SİZDE



3

Aşağıdaki ifadeyi kanıtlayın.

' $(\sim p_1 \wedge p_1)$ ' $\vdash_{PF} 'p_1'$ ve ' $(\sim p_1 \wedge p_1)$ ' $\vdash_{PF} '\sim p_1'$ ise, $\vdash_{PF} '\sim(\sim p_1 \wedge p_1)'$

Kanıt-Kuramsal Tutarlılık

Tanım 1. P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıdır [k -tutarlı].

Tanım 1.1. P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi için $\Delta \vdash_{PF} A_j$ ve $\Delta \vdash_{PF} \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa Δ iyi biçimli formül kümesi PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıdır.

Tanım 2. P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa, A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarsızdır [k -tutarsız].

Tanım 2.1. P dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi için $\Delta \vdash_{PF} A_j$ ve $\Delta \vdash_{PF} \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa Δ iyi biçimli formül kümesi PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarsızdır.

Model-Kuramsal ve Kanıt-Kuramsal Tutarlılık Üst Teoremi

P dilinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıysa Y yorumunda model-kuramsal tutarlıdır.

Kanıtlama: ' P dilinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıysa, Y yorumunda model-kuramsal tutarlıdır' ifadesi (i) ' P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda model-kuramsal tutarlıysa A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıdır' ve (ii) ' P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıysa A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda model-kuramsal tutarlıdır', olarak analiz edilsin.

(i) Hipotez 1: P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda model-kuramsal tutarlıdır.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda model-kuramsal tutarlı ise A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_P A_j$ ve $A_i \models_P \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoktur.

Hipotez 2: P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlı değildir.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlı değilse A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır.

A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ise tutarlılık teoreminden ikinci dolaysız çıkarım gereği A_i iyi biçimli formülü A_j iyi biçimli formülünü P dilinin Y yorumunda içerir: $A_i \models_P A_j$

A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ ise tutarlılık teoreminden ikinci dolaysız çıkarım gereği A_i iyi biçimli formülü $\sim A_j$ iyi biçimli formülünü P dilinin Y yorumunda içerir: $A_i \models_P \sim A_j$

P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_P A_j$ ve $A_i \models_P \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır.

‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_P A_j$ ve $A_i \models_P \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır’ ve ‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_P A_j$ ve $A_i \models_P \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoktur’ birlikte tutulamaz.

Öyleyse, P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıdır.

(ii) *Hipotez 1*: P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıdır.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıysa, A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoktur.

Hipotez 2: P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda model-kuramsal tutarlı değildir.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda model-kuramsal tutarlı değilse A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_P A_j$ ve $A_i \models_P \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır.

A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_P A_j$ ise tamlık teoreminden ikinci dolaysız çıkarım gereği A_i iyi biçimli formülü A_j iyi biçimli formülünü PF *biçimsel sisteminde içerir*: $A_i \vdash_{PF} A_j$

A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_P \sim A_j$ ise tamlık teoreminden ikinci dolaysız çıkarım gereği A_i iyi biçimli formülü A_j iyi biçimli formülünü PF *biçimsel sisteminde içerir*: $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$

P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır.

‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi vardır’ ve ‘P dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF} \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoktur’ birlikte tutulamaz.

Öyleyse, P dilinin A_i iyi biçimli formülü Y yorumunda model-kuramsal tutarlıdır.

Öyleyse, P dilinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıysa Y yorumunda model-kuramsal tutarlıdır.

Özet



Biçimsel sistem ve PF biçimsel sistemini açıklamak.

Bir biçimsel sistem, dilin alt kümelerini seçer. Dilin elemanları ve alt kümeleri arasında bağıntılar kurar. Bu seçimi aksiyomları veya ‘dedüksiyon kuralları’ adı verilen bağıntıların sonlu kümesi vasıtasıyla yapar. Biçimsel sistemin teorem kümesi, dilin biçimsel sistemde kanıtlaması olan iyi biçimli formülleridir. PF biçimsel sistemi aksiyomları olmayan bir biçimsel sistemdir. PF biçimsel sistemi P dili ve her biri $P_1 \times \dots \times P_m$ kartezyen çarpımının alt kümesi olan R_i bağıntılarının sonlu $\mathcal{K} = \{R_1, \dots, R_n\}$ koleksiyonundan oluşan sıralı ikilidir: $(P, \mathcal{K})$. $\mathcal{K}$ koleksiyonunun elemanı olan her R_i bağıntısına ‘dedüksiyon kuralı’ adı verilir. $\{A_i, \dots, A_j\}$ ($j \geq 1$) iyi biçimli formül kümesi için $(A_i, \dots, A_j, A_k)$ sıralısı $\mathcal{K}$ koleksiyonunun elemanı olan R_i bağıntısının elemanıysa, A_k iyi biçimli formülü $\{A_i, \dots, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarının PF biçimsel sisteminde dolaysız sonucudur.



PF biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremini tanımlamak.

$\Gamma \cup \{A_n\}$ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içeriyorsa Γ iyi biçimli formül kümesi $(A_n \supset A_i)$ iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içerir: $\Gamma \cup \{A_n\} \vdash_{PF} A_i$ ise $\Gamma \vdash_{PF} (A_n \supset A_i)$



PF biçimsel sistemi ve P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumu için tutarlılığı ifade etmek.

PF biçimsel sistemi saptanmaz bir sistemdir. P dilinin A_i iyi biçimli formülünün PF biçimsel sisteminin teoremi olup olmadığına saptamak için, PF biçimsel sistemi ile P dilinin Y yorumunu bağlayan üst teoremlere müracaat edilir. Tutarlılık üst teoremi bu üst teoremlerden biridir. P dilinin A_i iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminde teorem ise P dilinin Y yorumunda geçerlidir: $\vdash_{PF} A_i$ ise, $\models_P A_i$. P dilinin A_i iyi biçimli formülünün PF biçimsel sisteminin teoremi olmadığı tutarlılık üst teoreminin ilk sonucuyla saptanır: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin Y yorumunda geçerli değilse PF biçimsel sisteminde teorem değildir: $\not\models_P A_i$ ise $\not\vdash_{PF} A_i$



PF biçimsel sistemi P dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ yorumu için tamlığı açıklamak.

Tamlık üst teoremi: P dilinin A_i iyi biçimli formülü P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda geçerliyse, PF biçimsel sisteminin teoremidir: $\models_P A_i$ ise $\vdash_{PF} A_i$. Bir A_i iyi biçimli formülünün PF biçimsel sisteminin teoremi olduğu tamlık üst teoremi ile saptanır.

Kendimizi Sıneyalım

1. Aşağıdaki grafikteki hangi adımlar silindiğinde geride kalan grafik P dilinin ' $(\sim p_1 \supset (p_1 \supset p_2))$ ' iyi biçimli formülünün ' $(\sim p_1 \vee p_2)$ ' iyi biçimli formülünden PF biçimsel sistemindeki türemesinin grafiğidir?

1		$(\sim p_1 \vee p_2)$
2		$\sim p_1$
3		p_1
4		$\sim p_2$
5		$\sim p_1$
6		$(\sim p_2 \supset \sim p_1)$
7		$\sim p_1$
8		p_1
9		$(\sim p_1 \supset p_1)$
10		$\sim p_2$
11		p_1
12		$(\sim p_2 \supset p_1)$
13		$\sim \sim p_2$
14		p_2
15		$(p_1 \supset p_2)$
16		$(\sim p_1 \supset (p_1 \supset p_2))$

- a. 1, 2, 15
- b. 10, 11, 12
- c. 7, 8, 9
- d. 6, 12, 15
- e. 4, 5, 6

2. P dilinin ' $(p_1 \supset p_2)$ ' iyi biçimli formülünün ' $(\sim p_1 \vee p_2)$ ' iyi biçimli formülünden PF biçimsel sistemindeki türemesinin grafiğinde 11, 12 ve 16 numaralı adımlarda uygulanan kurallar ile kuralların uygulandığı adımlar hangi seçenekte sırasıyla yer alır?

1		$(\sim p_1 \vee p_2)$
2		p_1
3		$\sim p_1$
4		$\sim p_2$
5		p_1
6		$(\sim p_2 \supset p_1)$
7		$\sim p_2$
8		$\sim p_1$
9		$(\sim p_2 \supset \sim p_1)$
10		$\sim \sim p_2$
11		p_2
12		$(\sim p_1 \supset p_2)$
13		p_2
14		p_2
15		$(p_2 \supset p_2)$
16		p_2
17		$(p_1 \supset p_2)$

- a. $\sim E$, 10 ; $\supset I$, 3, 11 ; $\vee E$, 1, 6, 15.
- b. R , 4; $\supset I$, 3, 11 ; $\supset E$, 11, 15.
- c. $\sim I$, 6, 9 ; $\supset I$, 3, 11 ; R , 13.
- d. $\sim E$, 10 ; $\supset I$, 3, 11 ; $\vee E$, 1, 12, 15.
- e. $\sim E$, 10 ; $\supset I$, 3, 11 ; R , 11.

3. P dilinin ' $(\sim(p_1 \wedge p_2) \equiv (p_1 \supset \sim p_2))$ ' iyi biçimli formülünün PF biçimsel sistemindeki kanıtlamasının grafiğinde eksik kalan alta sıralı türemenin iyi biçimli formül ve dedüksiyon kuralları hangi seçenekte yer alır?

1		$\sim(p_1 \wedge p_2)$
2		p_1
3		p_2
4		p_1
5		p_2
6		$(p_1 \wedge p_2)$
7		$(p_2 \supset (p_1 \wedge p_2))$
8		
9		
10		
11		$\sim p_2$
12		$(p_1 \supset \sim p_2)$
13		$(\sim(p_1 \wedge p_2) \supset (p_1 \supset \sim p_2))$

- a. p_1 Hyp; $(p_1 \vee \sim p_2)$ $\vee$ I, 2 ; $\sim p_2$ $\sim$ I, 5.
- b. p_2 R; $(p_1 \wedge p_2)$ R, 6; $(p_1 \wedge (p_1 \wedge p_2))$ $\wedge$ I, 8, 9.
- c. p_2 R; $(p_1 \wedge p_2) \supset E$, 7, 8; p_2 $\wedge$ E, 9.
- d. p_2 Hyp ; $\sim(p_1 \wedge p_2)$ R, 1 ; $(p_2 \supset \sim(p_1 \wedge p_2)) \supset$ I, 8, 9.
- e. $\sim(p_1 \wedge p_2)$ Hyp; $(\sim(p_1 \wedge p_2) \supset p_2) \supset$ I, 3, 8; $p_2 \supset$ E, 8, 9.

4. ' $((p_1 \equiv p_2) \equiv p_3) \supset ((p_1 \wedge p_2) \supset p_3)$ ' iyi biçimli formülünün PF biçimsel sistemindeki kanıtlamasının grafiğinde, 4, 9 ve 10 numaralı adımlarda uygulanan kurallar ile kuralların uygulandığı adımlar sırasıyla hangi seçenekte yer alır?

1		$((p_1 \equiv p_2) \equiv p_3)$
2		$(p_1 \wedge p_2)$
3		p_1
4		p_2
5		$(p_1 \supset p_2)$
6		p_2
7		p_1
8		$(p_2 \supset p_1)$
9		$(p_1 \equiv p_2)$
10		p_3
11		$((p_1 \wedge p_2) \supset p_3)$

- a. $\equiv$ E, 1, 3; $\supset$ I, 6, 8; $\equiv$ E, 1, 9
- b. 4. $\wedge$ E, 2; $\equiv$ I, 5, 8; $\equiv$ E, 1, 9
- c. $\wedge$ E, 2; $\equiv$ E, 1, 6; $\cdot$ $\equiv$ I, 5, 8;
- d. $\equiv$ E, 1, 4; $\wedge$ E, 2; $\equiv$ E, 6, 9
- e. $\wedge$ E, 2; $\equiv$ I, 5, 8; $\equiv$ E, 6, 9

5. PF biçimsel sistemindeki kanıtlamanın aşağıdaki grafiğinin olmasından seçeneklerdeki hangi sonuç çıkmaz?

1		$\sim (\sim p_1 \vee p_1)$
2		$\sim p_1$
3		$(\sim p_1 \vee p_1)$
4		$(\sim p_1 \supset (\sim p_1 \vee p_1))$
5		$\sim p_1$
6		$\sim (\sim p_1 \vee p_1)$
7		$(\sim p_1 \supset \sim (\sim p_1 \vee p_1))$
8		$\sim \sim p_1$
9		p_1
10		$(\sim p_1 \vee p_1)$
11		$(\sim (\sim p_1 \vee p_1) \supset (\sim p_1 \vee p_1))$
12		$\sim (\sim p_1 \vee p_1)$
13		$\sim (\sim p_1 \vee p_1)$
14		$(\sim (\sim p_1 \vee p_1) \supset \sim (\sim p_1 \vee p_1))$
15		$\sim \sim (\sim p_1 \vee p_1)$
16		$(\sim p_1 \vee p_1)$

- Tutarlılık üst teoremine göre ' $(\sim p_1 \vee p_1)$ ' iyi biçimli formülünün P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda modeli vardır.
- PF biçimsel sisteminin teoremi olmak tanımına göre ' $(\sim p_1 \vee p_1)$ ' iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremidir.
- Tutarlılık, model-kuramsal tutarlılık ve kanıt-kuramsal tutarlılık üst teoremlerine göre ' $(\sim p_1 \vee p_1)$ ' iyi biçimli formülü k -tutarlıdır.
- Tutarlılık üst teoremine göre ' $(\sim p_1 \vee p_1)$ ' iyi biçimli formülü P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda geçerlidir.
- Tutarlılık ve tamlık üst teoremlerine göre ' $\sim p_1$ ' iyi biçimli formülü veya ' p_1 ' iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin bir teoremidir.

6. Aşağıdaki grafikte, PF biçimsel sisteminin dedüksiyon kurallarına göre kendinden önce gelen iyi biçimli formül veya formüllerin dolaysız sonucu olmayan tüm iyi biçimli formüllerin elemanı olduğu küme hangi seçenekte yer alır?

1		$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (p_1 \wedge \sim p_3))$	<i>Hyp</i>
2		$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (p_1 \wedge \sim p_3))$	<i>R</i> , 1
3		$(p_1 \wedge \sim p_2)$	<i>Hyp</i>
4		p_1	$\wedge E$, 3
5		$\sim p_2$	$\wedge E$, 3
6		$(\sim p_2 \vee \sim p_3)$	$\vee I$, 5
7		$(p_2 \supset \sim p_3)$	$\supset I$, 4, 5
8		$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\wedge I$, 4, 5
9		$((p_1 \wedge \sim p_2) \supset (p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)))$	$\supset I$, 3, 8
10		$(p_1 \wedge \sim p_3)$	<i>Hyp</i>
11		p_1	$\wedge E$, 10
12		$\sim p_3$	$\wedge E$, 10
13		$(p_1 \supset \sim p_2)$	$\supset I$, 3, 12
14		$(\sim p_2 \vee \sim p_3)$	$\vee I$, 12
15		$((p_1 \supset \sim p_3) \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\wedge I$, 13, 14
16		$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\wedge I$, 11, 14
17		$((p_1 \wedge \sim p_3) \supset (p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)))$	$\supset I$, 10, 16
18		$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\vee E$, 2, 9, 17
19		$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (p_1 \wedge \sim p_3)) \supset (p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\supset I$, 1, 18

- $\{((p_1 \supset \sim p_3) \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)), (\sim p_2 \vee \sim p_3), (p_1 \wedge \sim p_3)\}$
- $\{(\sim p_2 \vee \sim p_3), (p_1 \supset \sim p_2), \sim p_3\}$
- $\{((p_1 \supset \sim p_3) \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)), (p_1 \supset \sim p_2), (p_2 \supset \sim p_3)\}$
- $\{(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)), ((p_1 \wedge \sim p_3) \supset (p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))), (\sim p_2 \vee \sim p_3)\}$
- $\{(\sim p_2 \vee \sim p_3), (p_2 \supset \sim p_3), (p_1 \supset \sim p_2)\}$

7. $\{A_j, A_k\} \models_P A_i$ ise, $A_j \vdash_{PF} (A_k \supset A_i)$ üst teoremini kanıtlamak için müracaat edilmesi gereken üst teoremler sırasıyla hangi seçenekte yer alır?

- a. Tamlık üst teoremi ikinci dolaysız çıkarım, PF biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremi.
- b. P dili için dedüksiyon üst teoremi, tutarlılık üst teoremi ikinci dolaysız çıkarım.
- c. P dili için dedüksiyon üst teoremi, PF biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremi.
- d. PF biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremi, tutarlılık üst teoremi.
- e. Tamlık üst teoremi ilk dolaysız çıkarım, tutarlılık üst teoremi ikinci dolaysız çıkarım.

8. Aşağıdaki seçeneklerdeki ifadelerden hangisi PF biçimsel sistemine ilişkin sonuçlarla birlikte tutulamaz?

- a. P dilinin tüm iyi biçimli formülleri PF biçimsel sisteminin teoremidir.
- b. P dilinin PF biçimsel sisteminde teorem olmayan en az bir iyi biçimli formülü vardır.
- c. A_i iyi biçimli formülü P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda geçerli değilse PF biçimsel sisteminin teoremi değildir.
- d. PF biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlı olan A_i iyi biçimli formülü P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda model-kuramsal tutarlıdır.
- e. A_i iyi biçimli formülünün A_j iyi biçimli formülünden PF biçimsel sisteminde bir türemesi varsa, $A_j \supset A_i$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin bir teoremidir.

9. $(A_1, \dots, A_n, A_j, A_i)$ sıralı $(n+2)$ -lisi A_i iyi biçimli formülünün $\{A_1, \dots, A_n, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinden PF biçimsel sisteminde bir türemesiye aşağıdaki ifadelerden hangisi PF biçimsel sisteminin üst teoremlerinin sonucudur?

- a. A_n iyi biçimli formülünün $\{A_1\}$ kümesinden türemesi vardır.
- b. A_j iyi biçimli formülünün $\{A_1, \dots, A_n, A_i\}$ kümesinden türemesi vardır.
- c. $(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremidir.
- d. $(A_j \supset A_i)$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremidir.
- e. $\{A_1, \dots, A_n\}$ iyi biçimli formül kümesinden $(A_j \supset A_i)$ iyi biçimli formülünün türemesi vardır.

10. Seçeneklerdeki hangi iyi biçimli formül kümesinin elemanları (A_i ve A_j hangi iyi biçimli formüller olursa olsun) PF biçimsel sisteminin birlikte teoremi olamaz?

- a. $\{(A_j \supset A_i), (A_i \supset A_j)\}$
- b. $\{\sim A_i, (A_i \wedge A_j)\}$
- c. $\{\sim A_i, (A_i \vee A_j)\}$
- d. $\{(A_j \supset A_i), \sim A_i\}$
- e. $\{(A_i \supset A_j), (A_i \supset \sim A_j)\}$

Kendimizi Sınavalım Yanıt Anahtarı

- 1. c** Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

7				$\sim p_1$	<i>Hyp</i>
8				p_1	<i>R</i> , 3
9				$(\sim p_1 \supset p_1)$	$\supset$ I, 7, 8

‘ $(\sim p_1 \supset (p_1 \supset p_2))$ ’ iyi biçimli formülünün ‘ $(\sim p_1 \vee p_2)$ ’ iyi biçimli formülünden PF biçimsel sisteminde yukarıda grafiği verilen türeme olmadan da türemesi vardır.

1		$(\sim p_1 \vee p_2)$	<i>Hyp</i>
2		$\sim p_1$	<i>Hyp</i>
3		p_1	<i>Hyp</i>
4		$\sim p_2$	<i>Hyp</i>
5		$\sim p_1$	<i>R</i> , 2
6		$(\sim p_2 \supset \sim p_1)$	$\supset$ I, 4, 5
7		$\sim p_2$	<i>Hyp</i>
8		p_1	<i>R</i> , 3
9		$(\sim p_2 \supset p_1)$	$\supset$ I, 7, 8
10		$\sim \sim p_2$	$\sim$ I, 6, 9
11		p_2	$\sim$ E, 10
12		$(p_1 \supset p_2)$	$\supset$ I, 3, 11
13		$(\sim p_1 \supset (p_1 \supset p_2))$	$\supset$ I, 1, 12

- 2. d** Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. PF biçimsel sistemindeki türemede 11, 12 ve 16. adımlarda uygulanan dedüksiyon kuralları ve kuralların uygulandığı adımlar sırasıyla $\sim$ E, 10 ; $\supset$ I, 3, 11 ; $\vee$ E, 1, 12,15 kuralları ve adımlarıdır.

1		$(\sim p_1 \vee p_2)$	<i>Hyp</i>
2		p_1	<i>Hyp</i>
3		$\sim p_1$	<i>Hyp</i>
4		$\sim p_2$	<i>Hyp</i>
5		p_1	<i>R</i> , 2
6		$(\sim p_2 \supset p_1)$	$\supset$ I, 4, 5
7		$\sim p_2$	<i>Hyp</i>
8		$\sim p_1$	<i>R</i> , 3
9		$(\sim p_2 \supset \sim p_1)$	$\supset$ I, 7, 8
10		$\sim \sim p_2$	$\sim$ I, 6, 9
11		p_2	$\sim$ E, 10
12		$(\sim p_1 \supset p_2)$	$\supset$ I, 3, 11
13		p_2	<i>Hyp</i>
14		p_2	<i>R</i> , 13
15		$(p_2 \supset p_2)$	$\supset$ I, 13, 14
16		p_2	$\vee$ E, 1, 12, 15
17		$(p_1 \supset p_2)$	$\supset$ I, 1, 16

- 3. d** Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

8 numaralı adım için ‘ p_2 ’ *Hyp*;

9 numaralı adım için ‘ $\sim(p_1 \wedge p_2)$ ’ *R*, 1;

10 numaralı adım için ‘ $(p_2 \supset \sim(p_1 \wedge p_2))$ ’ $\supset$ I, 8, 9

iyi biçimli formül, dedüksiyon kuralları, P dilinin ‘ $(\sim(p_1 \wedge p_2) \equiv (p_1 \supset \sim p_2))$ ’ iyi biçimli formülünün, PF biçimsel sistemindeki kanıtlamasının verilen grafiğinde eksik kalan alta sıralı türemenin iyi biçimli formül, dedüksiyon kuralları ve kuralların uygulandığı adımlardır.

1		$\sim(p_1 \wedge p_2)$	<i>Hyp</i>
2		p_1	<i>Hyp</i>
3		p_2	<i>Hyp</i>
4		p_1	<i>R</i> , 2
5		p_2	<i>R</i> , 3
6		$(p_1 \wedge p_2)$	$\wedge$ I, 4, 5
7		$(p_2 \supset (p_1 \wedge p_2))$	$\supset$ I, 3, 6
8		p_2	<i>Hyp</i>
9		$\sim(p_1 \wedge p_2)$	<i>R</i> , 1
10		$(p_2 \supset \sim(p_1 \wedge p_2))$	$\supset$ I, 8, 9
11		$\sim p_2$	$\sim$ E, 7, 10
12		$(p_1 \supset \sim p_2)$	$\supset$ I, 2, 11
13		$(\sim(p_1 \wedge p_2) \supset (p_1 \supset \sim p_2))$	$\supset$ I, 1, 12

- 4. b** Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. ‘ $((p_1 \equiv p_2) \equiv p_3) \supset ((p_1 \wedge p_2) \supset p_3)$ ’ iyi biçimli formülünün PF biçimsel sistemindeki kanıtlamasının grafiğinde 4, 9 ve 10 numaralı adımlarda uygulanan dedüksiyon kuralları ve dedüksiyon kurallarının uygulandığı adımlar 4 numaralı adım için $\wedge E$, 2; 9 numaralı adım için $\equiv I$, 5, 8; 10 numaralı adım için $\equiv E$, 1, 9 dedüksiyon kuralları ve dedüksiyon kurallarının uygulandığı adımlardır.

1		$((p_1 \equiv p_2) \equiv p_3)$	<i>Hyp</i>
2		$(p_1 \wedge p_2)$	<i>Hyp</i>
3		p_1	<i>Hyp</i>
4		p_2	$\wedge E$, 2
5		$(p_1 \supset p_2)$	$\supset I$, 3, 4
6		p_2	<i>Hyp</i>
7		p_1	$\wedge E$, 2
8		$(p_2 \supset p_1)$	$\supset I$, 6, 7
9		$(p_1 \equiv p_2)$	$\equiv I$, 5, 8
10		p_3	$\equiv E$, 1, 9
11		$((p_1 \wedge p_2) \supset p_3)$	$\supset I$, 2, 10

- 5. e** Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi ve P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumu İçin Üst-Teoremler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. ‘ $(\sim p_1 \vee p_1)$ ’ iyi biçimli formülü, PF biçimsel sisteminde kanıtlaması olduğu için teoremdir. Tutarlılık üst teoremine göre ‘ $(\sim p_1 \vee p_1)$ ’ iyi biçimli formülü P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda geçerlidir. Geçerlilik tanımına göre tüm y_i yorumlarında $y_i((\sim p_1 \vee p_1))$: *d* olur. $y_i((\sim p_1 \vee p_1))$: *d* olan iki yorum vardır : $y_1(p_1)$: *d* olan y_1 yorumu ve $y_2(p_1)$: *y* olan y_2 yorumu. $y_1(p_1)$: *d* olan y_1 yorumunda $y_1(\sim p_1)$: *y* olur. ‘ $\sim p_1$ ’ iyi biçimli formülü $y_i(\sim p_1)$: *y* olan bir y_i yorumu vardır. Bu nedenle geçerli değildir. Tutarlılık teoreminden ikinci dolaysız çıkarıma göre ‘ $\sim p_1$ ’ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin bir teoremi değildir. y_2 yorumunda $y_2(p_1)$: *y* olduğundan, ‘ p_1 ’ iyi biçimli formülü $y_i(p_1)$: *y* olan bir y_i yorumu vardır. Bu nedenle geçerli değildir. Tutarlılık teoreminden ikinci dolaysız çıkarıma göre ‘ p_1 ’ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin bir teoremi değildir. Sonuç: Ne ‘ $\sim p_1$ ’ iyi biçimli formülü ne de ‘ p_1 ’ iyi

biçimli formülü PF biçimsel sisteminin bir teoremidir.

- 6. c** Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\{((p_1 \supset \sim p_3) \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)), (p_1 \supset \sim p_2), (p_2 \supset \sim p_3)\}$ iyi biçimli formül kümesi, PF biçimsel sisteminin kurallarına göre grafikte olmaması gereken tüm iyi biçimli formüllerin kümesidir. ‘ $((p_1 \supset \sim p_3) \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$ ’ iyi biçimli formülü, ‘ $(p_1 \supset \sim p_3)$ ’ ve ‘ $(\sim p_2 \vee \sim p_3)$ ’ iyi biçimli formülleri grafikte ‘ $((p_1 \supset \sim p_3) \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$ ’ iyi biçimli formülünün türemesinin altasırallı olduğu bir türemede bulunuyorsa veya formülün bulunduğu aynı türemede (veya kanıtlamada) grafikte ‘ $((p_1 \supset \sim p_3) \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$ ’ iyi biçimli formülünden önce geliyorsa grafiğe yazılabilir. ‘ $(p_1 \supset \sim p_2)$ ’ iyi biçimli formülü ‘ p_1 ’ iyi biçimli formülünden ‘ $\sim p_2$ ’ iyi biçimli formülünün türemesi varsa, ‘ $(p_1 \supset \sim p_3)$ ’ iyi biçimli formülü ‘ p_1 ’ iyi biçimli formülünden ‘ $\sim p_3$ ’ iyi biçimli formülünün türemesi varsa grafiğe yazılabilir.

1		$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (p_1 \wedge \sim p_3))$	<i>Hyp</i>
2		$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (p_1 \wedge \sim p_3))$	<i>R</i> , 1
3		$(p_1 \wedge \sim p_2)$	<i>Hyp</i>
4		p_1	$\wedge E$, 3
5		$\sim p_2$	$\wedge E$, 3
6		$(\sim p_2 \vee \sim p_3)$	$\vee I$, 6
7		$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\wedge I$, 4, 5
8		$((p_1 \wedge \sim p_2) \supset (p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)))$	$\supset I$, 3, 7
9		$(p_1 \wedge \sim p_3)$	<i>Hyp</i>
10		p_1	$\wedge E$, 9
11		$\sim p_3$	$\wedge E$, 9
12		$(\sim p_2 \vee \sim p_3)$	$\vee I$, 11
13		$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\wedge I$, 9, 12
14		$((p_1 \wedge \sim p_3) \supset (p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3)))$	$\supset I$, 9, 13
15		$(p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\vee E$, 2, 8, 14
16		$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (p_1 \wedge \sim p_3)) \supset (p_1 \wedge (\sim p_2 \vee \sim p_3))$	$\supset I$, 1, 15

- 7. d** Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi ve P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumu İçin Üst-Teoremler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\{A_j, A_k\} \models_{PF} A_i$ ise, *tamlık üst teoremi ikinci dolaysız çıkarıma* göre $\{A_j, A_k\} \vdash_{PF} A_i$ olur. $\{A_j, A_k\} \vdash_{PF} A_i$ ise, *PF biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremine* göre $A_j \vdash_{PF} (A_k \supset A_i)$ olur.

8. a Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi ve P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumu İçin Üst-Teoremler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda geçerli olmayan bir iyi biçimli formül, tutarlılık üst teoreminin ilk sonucuna göre PF biçimsel sisteminin teoremi değildir. P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda geçerli olmayan en az bir iyi biçimli formül vardır. Öyleyse PF biçimsel sisteminin teoremi olmayan en az bir iyi biçimli formül vardır. P dilinin tüm iyi biçimli formülleri PF biçimsel sisteminin teoremi değildir.

9. e Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kuralları” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $(A_1, \dots, A_n, A_j, A_i)$ sıralı $(n+2)$ -lisi A_i iyi biçimli formülünün $\{A_1, \dots, A_n, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinden PF biçimsel sisteminde bir türemesi ise tanım gereği $\{A_1, \dots, A_n, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içerir: $\{A_1, \dots, A_n, A_j\} \vdash_{PF} A_i$. $\{A_1, \dots, A_n, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi ise $\{A_1, \dots, A_n\} \cup \{A_j\}$ kümesi ile aynıdır. Öyleyse A_i iyi biçimli formülünün $\{A_1, \dots, A_n\} \cup \{A_j\}$ kümesinden bir türemesi vardır: $\{A_1, \dots, A_n\} \cup \{A_j\} \vdash_{PF} A_i$. $\{A_1, \dots, A_n\} \cup \{A_j\} \vdash_{PF} A_i$ ise, P biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremine göre $\{A_1, \dots, A_n\}$ iyi biçimli formül kümesi $(A_j \supset A_i)$ iyi biçimli formülünü PF biçimsel sisteminde içerir: $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{PF} (A_n \supset A_i)$. Öyleyse $\{A_1, \dots, A_n\}$ iyi biçimli formül kümesinden $(A_j \supset A_i)$ iyi biçimli formülünün bir türemesi vardır.

10. b Yanıtınız yanlış ise “PF Biçimsel Sistemi ve P Dilinin $Y = (\Phi \cup T, P, Z)$ Yorumu İçin Üst-Teoremler” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $\sim A_i$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremiyse P dilinin Y yorumunda geçerlidir: tüm y_i yorumlarında $y_i(\sim A_i): d$ olur ve $y_i(A_i): y$ olur. Tüm y_i yorumlarında $y_i(A_i): y$ olduğundan $y_i(A_i \wedge A_j): y$ olur. $(A_i \wedge A_j)$ iyi biçimli formülü geçerlilik tanımı gereği geçerli değildir. Tutarlılık teoreminden ikinci dolaysız çıkarıma göre $(A_i \wedge A_j)$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremi değildir. $(A_i \wedge A_j)$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremiyse, P dilinin Y geçerlidir:

tüm y_i yorumlarında $y_i(A_i \wedge A_j): d$ olur. Öyleyse tüm y_i yorumlarında $y_i(A_i): d$ ve $y_i(A_j): d$ olur. Tüm y_i yorumlarında $y_i(A_i): d$ olduğundan tüm y_i yorumlarında $y_i(\sim A_i): y$ olur. $\sim A_i$ iyi biçimli formülü geçerlilik tanımı gereği geçerli değildir. Tutarlılık teoreminden ikinci dolaysız çıkarıma göre $\sim A_i$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremi değildir. $\sim A_i$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremi olduğunda $A_i \wedge A_j$ iyi biçimli formülü, $A_i \wedge A_j$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremi olduğunda $\sim A_i$ iyi biçimli formülü PF biçimsel sisteminin teoremi değildir. A_i ve A_j iyi biçimli formülleri hangi iyi biçimli formül olursa olsun, $\{\sim A_i, A_i \wedge A_j\}$ kümesinin elemanları PF biçimsel sisteminin birlikte teoremi olamaz. Diğer formül kümelerinin elemanlarının PF biçimsel sisteminin birlikte teoremi olup olmadığı A_i ve A_j iyi biçimli formüllerinin hangi formüller olduğuna bağlıdır. [Ayrıca bkz. Tutarlılık üst teoremi Sonuç 5. P dilinin A_i ve $\sim A_i$ iyi biçimli formüllerinin her ikisinin de $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda geçerli olduğu hiçbir $\{A_i, \sim A_i\}$ alt kümesi yoktur. Öyleyse, P dilinin A_i ve $\sim A_i$ iyi biçimli formüllerinin her ikisinin de PF biçimsel sisteminde teorem olduğu hiçbir $\{A_i, \sim A_i\}$ alt kümesi yoktur.]

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

1		$((p_1 \supset p_2) \wedge \sim p_2)$	<i>Hyp</i>
2		$(p_1 \supset p_2)$	$\wedge E, 1$
3		$\sim p_2$	$\wedge E, 1$
4		p_1	<i>Hyp</i>
5		$\sim p_1$	<i>R, 2</i>
6		$(p_1 \supset \sim p_2)$	$\supset I, 4, 5$
7		p_1	<i>hyp</i>
8		p_1	<i>hyp</i>
9		$(p_1 \supset p_1)$	$\supset I, 7, 8$
10		$\sim p_1$	$\sim I, 6, 9$
11		$((p_1 \supset p_2) \wedge \sim p_2) \supset \sim p_1$	$\supset I, 1, 10$

Sıra Sizde 2

1		$(p_1 \vee (\sim p_2 \wedge \sim p_3))$	<i>Hyp</i>
2		p_1	<i>Hyp</i>
3		p_1	<i>R, 2</i>
4		$(p_1 \vee \sim p_2)$	$\vee I, 2$
5		$(p_1 \vee \sim p_3)$	$\vee I, 2$
6		$((p_1 \vee \sim p_2) \wedge (p_1 \vee \sim p_3))$	$\wedge I, 4, 5$
7		$(p_1 \supset ((p_1 \vee \sim p_2) \wedge (p_1 \vee \sim p_3)))$	$\supset I, 1, 6$
8		$(\sim p_2 \wedge \sim p_3)$	<i>Hyp</i>
9		$\sim p_2$	$\wedge E, 8$
10		$\sim p_3$	$\wedge E, 8$
11		$(p_1 \vee \sim p_2)$	$\vee I, 9$
12		$(p_1 \vee \sim p_3)$	$\vee I, 10$
13		$((p_1 \vee \sim p_2) \wedge (p_1 \vee \sim p_3))$	$\wedge I, 11, 12$
14		$((\sim p_2 \wedge \sim p_3) \supset ((p_1 \vee \sim p_2) \wedge (p_1 \vee \sim p_3)))$	$\supset I, 8, 13$
15		$((p_1 \vee \sim p_3) \wedge (p_1 \vee \sim p_2))$	$\vee E, 1, 7, 14$
16		$((p_1 \vee (\sim p_2 \wedge \sim p_3)) \supset ((p_1 \vee \sim p_3) \wedge (p_1 \vee \sim p_2)))$	$\supset I, 1, 15$

Sıra Sizde 3

Hipotez 1: $'(\sim p_1 \wedge p_1)' \vdash_{PF} 'p_1'$ ve $'(\sim p_1 \wedge p_1)' \vdash_{PF} '\sim p_1'$.

$'(\sim p_1 \wedge p_1)' \vdash_{PF} 'p_1'$ ise, tutarlılık üst teoreminin ikinci sonucuna (yani, $\Gamma \vdash_{PF} A_i$ ise, $\Gamma \models_P A_i$) göre $'(\sim p_1 \wedge p_1)' \models_P 'p_1'$ olur. $'(\sim p_1 \wedge p_1)' \vdash_{PF} '\sim p_1'$ ise tutarlılık üst teoreminden ikinci dolaysız çıkarıma göre $'(\sim p_1 \wedge p_1)' \models_P '\sim p_1'$ olur.

Hipotez 2: $\not\vdash_{PF} '(\sim p_1 \wedge p_1)'$

$\not\vdash_{PF} '(\sim p_1 \wedge p_1)'$ ise, tamlık üst teoreminden üçüncü dolaysız çıkarıma ($\Gamma \not\vdash_{PF} A_i$ ise, $\Gamma \not\models_P A_i$) göre $\not\models_P '(\sim p_1 \wedge p_1)'$ olur. $\not\models_P '(\sim p_1 \wedge p_1)'$ ise $'(\sim p_1 \wedge p_1)'$ iyi biçimli formülünün P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda $y_k('(\sim p_1 \wedge p_1)')$: y olan en az bir yorumu vardır. Herhangi bir y_i yorumunda ya $y_i('p_1')$: d ya da $y_i('p_1')$: y olur. y_i yorumunda $y_i('p_1')$: d ise $y_i('(\sim p_1)')$: y ve $y_i('(\sim p_1 \wedge p_1)')$: y olur. $y_i('(\sim p_1 \wedge p_1)')$: y ise $y_i('(\sim p_1 \wedge p_1)')$: d olur. y_i yorumunda $y_i('p_1')$: y ise $y_i('(\sim p_1$

$\wedge p_1)')$: y olur. $y_i('(\sim p_1 \wedge p_1)')$: y ise $y_i('(\sim p_1 \wedge p_1)')$: d olur.

Sonuç: $'(\sim p_1 \wedge p_1)'$ iyi biçimli formülünün $y_i('(\sim p_1 \wedge p_1)')$: y olan hiçbir yorumu yoktur.

Dolayısıyla $\models_P '(\sim p_1 \wedge p_1)'$ olur.

$\models_P '(\sim p_1 \wedge p_1)'$ ise, tamlık üst teoremine göre $\vdash_{PF} '(\sim p_1 \wedge p_1)'$ olur.

$'(\sim p_1 \wedge p_1)' \vdash_{PF} 'p_1'$ ve $'(\sim p_1 \wedge p_1)' \vdash_{PF} '\sim p_1'$ ise $\vdash_{PF} '(\sim p_1 \wedge p_1)'$.

Sıra Sizde 4

Hipotez: P dilinin A_i iyi biçimli formülü m -tutarsızdır.

A_i iyi biçimli formülü m -tutarsız ise, model-teorik tutarlılık üst-teoremine göre P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumunda A_i iyi biçimli formülünün modeli yoktur, yani, A_i iyi biçimli formülünün $y_i(A_i)$: d olan hiçbir y_i yorumu yoktur. A_i iyi biçimli formülünün $y_i(A_i)$: d olan hiçbir y_i yorumu yoksa, A_i iyi biçimli formülünün tüm y_i yorumlarında $y_i(A_i)$: y olur. A_i iyi biçimli formülünün bir yorumu, $\sim A_i$ iyi biçimli formülünün de yorumu olduğundan, $\sim A_i$ iyi biçimli formülü tüm y_i yorumlarında $y_i(\sim A_i)$: d olur. P dilinin $(\Phi \cup T, P, Z)$ yorumundaki geçerlilik tanımına göre $\sim A_i$ iyi biçimli formülü geçerlidir: $\models_P \sim A_i$. Tamlık teoremine göre $\sim A_i$ iyi biçimli formülü P biçimsel sisteminin teoremidir: $\vdash_{PF} \sim A_i$.

Sonuç: $\sim A_i$ iyi biçimli formülü P biçimsel sisteminin teoremidir: $\vdash_{PF} \sim A_i$.

P dilinin A_i iyi biçimli formülü m -tutarsız ise $\sim A_i$ PF biçimsel sisteminde k -tutarlıdır.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Çoker, D. ve Karaçay, T. (1983). **Matematik Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. ve Onart, A. (1976). **Mantık Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. (1972). **Symbolic Logic**, Ankara: Faculty of Art and Sciences Publication.

Koç, Y. (1980). **Introduction to Logic**, İstanbul: Boğaziçi University Publications.

Mendelson, E. (1964). **Introduction to Mathematical Logic**, Princeton, NJ.: D. Van Nostrand Company, Inc.

Taşdelen, İ. (2010). **Sembolik Mantık**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

4

SEMBOLİK MANTIK

Amaçlarımız

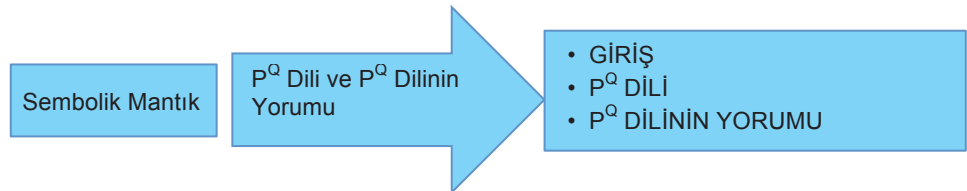
Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- 👁️ P^Q dilini açıklayabilecek,
- 👁️ P^Q dilinin bir iyi biçimli formülünün aynı dildeki tanımsal karşılığını ve P^Q dilinin alfabesinin tanımsal olarak tam olan alt kümelerini tanımlayabilecek,
- 👁️ P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunu ve P^Q dilinin bir $\mathcal{M}$ yorumunda iyi biçimli formüllerin yorumunu açıklayabilecek,
- 👁️ P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumuna bağlı olarak tanımlanan özellikleri açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Menzil
- Bağlı Olma
- Serbest Olma
- Açıklık
- Kapalılık
- Tanımsal Tamlık
- Fonksiyon
- Yorum
- Yorum Fonksiyonu
- Sonlu
- Sonsuz
- Sayılabilir Sonsuz
- Dizi
- Sonlu Dizi
- Sayılabilir Sonsuz Dizi
- Yeterlilik
- Doğruluk
- Geçerlilik

İçindekiler



P^Q Dili ve P^Q Dilinin Yorumu

GİRİŞ

Bu ünite de P^Q dili, dilin alfabesinin alt kümeleri için tanımsal tamlık tanımlanacak ve P^Q dilinin yorumu verilecektir. Değer kümelerinin alt küme olduğu kümeler ve yorum fonksiyonu türleri belirlenecek, farklı yorum fonksiyonu kümelerinin P^Q dilinin farklı yorumlarını oluşturduğu gösterilecektir. P^Q dilinin iyi biçimli formülleri, farklı yorumlardaki yorum fonksiyonlarında aldıkları değerlere bağlı olarak tanımlanan özellikler ile eşlenecektir

P^Q DİLİ

P^Q dili şöyle seçilir:

Alfabe:

$$\Lambda = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,), x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots, f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots, \forall, \exists\}$$

Biçimleme kuralları:

- i. P^Q dilinin bir iyi biçimli formülü, P^Q dilinin alfabesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan bir dizisidir.
- ii. (a) $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ ve $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümelerindeki elemanların her geçişi terimdir,
(b) $t_1, \dots, t_n$ terim ise $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ terimdir,
(c) Λ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (a) ve (b)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey terim değildir.
- iii. Λ kümesinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların her geçişi P^Q biçimsel dilinin iyi biçimli formülüdür.
- iv. t_i terim ise $F_k^n t_1 \dots t_n$ P^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.
- v. Eğer A_i P^Q dilinin iyi biçimli formülü ise $\sim A_i, (\forall x_j)A_i$ ve $(\exists x_j)A_i$ P^Q dilinin iyi biçimli formülleridir.
- vi. Eğer A_i ve A_j P^Q dilinin iyi biçimli formülleri ise $(A_i \wedge A_j), (A_i \vee A_j), (A_i \supset A_j), (A_i \equiv A_j)$ P^Q dilinin iyi biçimli formülleridir.
- vii. Λ kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (iii), (iv) ve (v)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey P^Q dilinin iyi biçimli formülü değildir.

ÖRNEK

' $(\exists x_1)F_1^1x_1$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür.
 ' $(\exists x_1)F_1^2x_1x_2$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür.
 ' $(\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2x_1x_2$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür.
 ' $((\exists x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_2)F_1^1x_1)$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür.
 ' $(\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2)$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür.
 ' $(\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_1)$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür.

ÖRNEK

' $(\forall x_1)F_1^1$ ', ' $F_1^1a_1$ ', ' $(\exists x_1)p_1$ ', ' $(\exists x_1)F_1^1x_1$ ', ' p_1 ' sonlu dizilerinden ' $(\forall x_1)F_1^1$ ' sonlu dizisi P^Q dilinin iyi biçimli bir formülü değildir. ' $(\forall x_1)F_1^1$ ' ancak ' $(\forall x_1)$ ' geçişini bir iyi biçimli formül takip ediyorsa bir iyi biçimli formüldür. ' F_1^1 ' harfinin geçişi biçimleme kurallarına göre bir iyi biçimli formül olmadığından, ' $(\forall x_1)F_1^1$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formül değildir.

ÖRNEK

' $(\forall x_1)$ ' tümel niceleyicidir', ' F_1^1 ' bir yüklem harfidir', ' x_1 ' bir değişken sembolüdür', ' $(\exists x_1)$ ' iyi biçimli formül değildir' ve ' a_1 ' bir sabittir' ifadelerinden sadece ' $(\exists x_1)$ ' iyi biçimli formül değildir' ifadesi P^Q dilinin biçimleme kurallarının bir sonucudur. P^Q dilinin biçimleme kurallarına göre '(', '∃', ' x_1 ', ') ' harflerinin geçişlerinden ibaret olan sonlu dizi P^Q dilinin bir iyi biçimli formülü değildir. Biçimleme kurallarında 'tümel niceleyici', 'yüklem harfi', 'değişken sembolü' ve 'sabit' tanımlı değildir.

P^Q dilinin p_i ve $F_k^n t_1 \dots t_n$ biçimindeki iyi biçimli formülleri P^Q dilinin atomik formülüdür.

P^Q dilinin p_i ve $F_k^n t_1 \dots t_n$ olmayan bir iyi biçimli formülü P^Q dilinin moleküler formülüdür.

$(\forall x_j)A_i$ iyi biçimli formülünde $(\forall x_j)$ 'nin hemen ardından gelen A_i iyi biçimli formülüne $(\forall x_j)$ 'nin menzili adı verilir. A_i iyi biçimli formülünde x_j harfinin geçişinin olması şart değildir. Benzer şekilde, $(\exists x_j)A_i$ iyi biçimli formülünde $(\exists x_j)$ 'nin hemen ardından gelen A_i iyi biçimli formülüne $(\exists x_j)$ 'nin menzili adı verilir. A_i iyi biçimli formülünde x_j harfinin geçişinin olması şart değildir.

x_j harfinin bir geçişi (i) parantez içindeki '∨' veya '∃' harfinin geçişinden hemen sonra geliyorsa veya (ii) $(\forall x_j)$ 'nin veya $(\exists x_j)$ 'nin menziline ise bağlıdır. Aksi durumda serbesttir.

Bir A_i iyi biçimli formülünde geçişi serbest olan hiçbir x_i yoksa, A_i iyi biçimli formülü kapalıdır. Aksi durumda açıktır.

' $A_i(x_j)$ ' ifadesi A_i iyi biçimli formülünde x_j harfinin geçişinin olduğunu gösterir.

ÖRNEK

' $(\exists x_1)F_1^1x_1x_2$ ', ' $F_1^2x_1a_2$ ', ' $(\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_1)$ ', ' $(\forall x_1)F_1^1x_1$ ' ve ' $(F_1^2x_1a_2 \supset p_1)$ ' dizilerden sadece ' $F_1^2x_1a_2$ ' dizisi, P^Q dilinin atomik iyi biçimli formülüdür. ' x_1 ' ve ' a_2 ' terimlerdir ve ' F_1^2 ' harfini takip ederler. Tanım gereği ' $F_1^2x_1a_2$ ' P^Q dilinin atomik iyi biçimli formülüdür.

ÖRNEK

' x_2 ' harfinin ' $F_1^2x_2a_1$ ', ' $(\forall x_1)(F_1^1x_2 \supset F_2^1x_1)$ ', ' $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2)$ ', ' $(F_1^1x_2 \supset (\forall x_1)(F_1^1x_1))$ ' ve ' $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_2)F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formüllerinden sadece ' $(\forall x_1)(F_1^1x_2 \supset F_2^1x_1)$ ' iyi biçimli formülündeki geçişi ' $(\forall x_1)$ ' dizisinin geçişinin menziline, ' $(\forall x_1)$ ' dizisinin geçişinin menziline olan iyi biçimli formüller ' $(F_1^1x_2 \supset F_2^1x_1)$ ' ve ' $F_1^1x_1$ ' formülleridir. Bunlardan sadece ' $(F_1^1x_2 \supset F_2^1x_1)$ ' formülünde ' x_2 ' harfinin geçiş vardır.

ÖRNEK

' $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_1)F_1^1x_2)$ ', ' $(\forall x_1)(F_1^1x_2 \supset F_2^1x_1)$ ', ' $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2)$ ', ' $(F_1^1x_2 \supset (\forall x_1)(F_1^1x_1))$ ' ve ' $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_2)F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formüllerin sadece ' $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_2)F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formülünde ' x_1 ' harfinin serbest geçişi vardır. Tanıma göre, ' x_1 ' harfinin bir geçişi ' $\forall$ ' veya ' $\exists$ ' harfinin geçişinden hemen sonra geliyorsa ya da ' $(\forall x_1)$ ' dizisinin veya ' $(\exists x_1)$ ' dizisinin geçişinin menziline ise bağlıdır. Aksi durumda serbesttir. ' x_1 ' harfinin ' $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_2)F_1^1x_1)$ ' formülündeki ikinci geçişi serbesttir.

ÖRNEK

' $(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülünde ' x_1 ' harfinin geçişleri serbest değildir. ' x_1 ' harfinin ilk geçişi ' $\forall$ ' harfinin geçişinden hemen sonra gelir, ikinci geçişi ise ' $(\forall x_1)$ ' dizisinin geçişinin menzili olan ' $F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülündedir. Ancak ' x_2 ' harfinin ' $F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülündeki geçişi ' $(\forall x_2)$ ' dizisinin bir geçişinin menziline olmadığından ' x_2 ' harfinin ' $F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülündeki geçişi bağlı değildir, serbesttir. ' $(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülünde bir ' x_i 'nin serbest geçişi olduğundan ' $(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülü açıktır.

ÖRNEK

' $(\forall x_2)(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülünde ' x_2 ' harfinin geçişinin olduğu ' $(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülü ' $(\forall x_2)$ ' dizisinin menzildir. ' x_2 ' harfinin ' $(\forall x_2)(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülündeki geçişi bağlıdır. ' $(\forall x_2)(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülünde ' x_1 ' harfinin hiçbir serbest geçişi olmadığından ' $(\forall x_2)(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülü kapalıdır.

SIRA SİZDE



1

' $((\forall x_2)(\forall x_1)F_1^2x_1x_2 \supset (\forall x_1)F_1^2x_1x_2)$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin kapalı bir formülü müdür?

P^Q Dili ile P^Q Dilinin Alt Kümeler Arasındaki Bağlıntılar

P^Q Dili ve P Dili

P^Q dilinin alfabesi Λ kümesi, P dilinin alfabesi olan $\Gamma = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,)\}$ kümesi ile $\Pi = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots, f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots, \forall, \exists\}$ kümesinin bileşimidir: $\Lambda = \Gamma \cup \Pi$. Başka deyişle Γ kümesi Λ kümesinin öz-alt kümesidir.

P^Q dilinin ikinci biçimleme kuralı, P dilinin bir iyi biçimli formülü olan p_i harfinin her geçişinin P^Q dilinin de bir iyi biçimli formülü olduğunu gösterir. Beşinci kural ise P dilinin tüm iyi biçimli formüllerinin P^Q dilinin iyi biçimli formülleri olduğunu gösterir. P^Q dilinin ' $F_1^1x_1$ ' iyi biçimli formülü P dilinin bir iyi biçimli formülü değildir. P dili P^Q dilinin bir öz-alt kümesidir.

ÖRNEK

P dilinin bir iyi biçimli formülü olan ' p_1 ' P^Q dilinin de iyi biçimli formülüdür. ' $(p_1 \supset (\exists x_1)F_1^1x_1)$ ' P^Q dilinin iyi biçimli formülüdür. Ancak P dilinin bir iyi biçimli formülü değildir.

P^Q Dili İçin Dönüştürme Kuralları

$$\sim \sim A_i =_{\text{tnm}} A_i$$

$$\sim (A_i \vee A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \wedge \sim A_j)$$

$$\sim (A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee \sim A_j)$$

$$A_i =_{\text{tnm}} A_i \wedge A_i$$

$$A_i =_{\text{tnm}} A_i \vee A_i$$

$$(A_i \supset A_j) =_{\text{tnm}} (\sim A_i \vee A_j)$$

$$(A_i \equiv A_j) =_{\text{tnm}} ((A_i \supset A_j) \wedge (A_j \supset A_i))$$

$$((A_i \vee A_j) \wedge (A_k \vee A_l)) =_{\text{tnm}} (((A_i \wedge A_k) \vee (A_i \wedge A_l)) \vee ((A_j \wedge A_k) \vee (A_j \wedge A_l)))$$

$$((A_i \wedge A_j) \vee (A_k \wedge A_l)) =_{\text{tnm}} (((A_i \vee A_k) \wedge (A_i \vee A_l)) \wedge ((A_j \vee A_k) \wedge (A_j \vee A_l)))$$

$$(A_i \wedge A_j) =_{\text{tnm}} (A_j \wedge A_i)$$

$$(A_i \vee A_j) =_{\text{tnm}} (A_j \vee A_i)$$

$$((A_i \vee A_j) \vee A_k) =_{\text{tnm}} (A_i \vee (A_j \vee A_k))$$

$$((A_i \wedge A_j) \wedge A_k) =_{\text{tnm}} (A_i \wedge (A_j \wedge A_k))$$

$$(\forall x_j)A_i =_{\text{tnm}} \sim(\exists x_j) \sim A_i$$

$$(\exists x_j)A_i =_{\text{tnm}} \sim(\forall x_j) \sim A_i$$

 P^Q Dilinde Tanımsal Karşılık

P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü ile A_j iyi biçimli formülü arasında, yukarıda listelenen dönüştürme kurallarına uygun bir dönüştürme varsa A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinde tanımsal karşılığıdır.

ÖRNEK

P^Q dilinin ' $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülü ' $\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığıdır.

P^Q dilinin ' $(\forall x_1)F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülü ' $\sim(\exists x_1) \sim F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığıdır.

 P^Q Dili İçin Tanımsal Tamlık

P^Q dilinin her iyi biçimli formülünün, formülde geçişi olan p_i, x_i, a_i, f_i^n ve F_i^n harflerinin ve sadece Δ kümesindeki elemanların geçişlerini içeren tanımsal karşılığı varsa P^Q dilinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists\}$ alt kümesinin Δ alt kümesi P^Q dili için tanımsal tamdır.

 P^Q Dilinin Alt Kümesi Olan Diller

P^Q dilinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists\}$ alt kümesinin Δ alt kümesi P^Q dili için tanımsal tamsa P^Q dilinin en az bir alt kümesi vardır ki, P^Q dilinin her iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığı olan iyi biçimli formül o kümenin elemanıdır. Bu küme tanım gereği bir biçimsel dildir. Bu dil sadece $p_i, x_i, a_i, f_i^n, F_i^n$ harflerinin ve Δ kümesindeki elemanların geçişlerinin bulunduğu iyi biçimli formüllerin kümesidir.

Θ kümesinin Δ alt kümesi, $\Delta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall\}$ olarak seçildiğinde sadece $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,), x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots$

$f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots, \forall\}$ kümesindeki elemanların geçişlerinin olduğu iyi biçimli formül kümesinde, $(\exists x_j)A_i \equiv_{\text{nm}} \sim(\forall x_j) \sim A_i$ dönüştürme kuralına göre P^Q dilinin ‘ $\exists$ ’ harfinin geçişini içeren her iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığı olan en az bir eleman vardır. Dolayısıyla, Δ alt kümesi P^Q dili için tanımsal olarak tamdır.

Alfabesi, P^Q dilinin alfabesinin B alt kümesi olan bu dilin kuralları şu şekilde saptanabilir:

R^Q dili

Alfabe: B

Biçimleme kuralları:

- i. R^Q dilinin bir iyi biçimli formülü B kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan bir dizisidir.
- ii. (a) $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ ve $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümelerindeki elemanların her geçişi terimdir.
(b) $t_1, \dots, t_n$ terim ise $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ terimdir.
(c) B kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (a) ve (b)’de belirtilenler hariç, hiçbir şey terim değildir.
- iii. B kümesinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların her geçişi R^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.
- iv. t_i terim ise $F_k^n t_1 \dots t_n$ R^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.
- v. Eğer A_i R^Q dilinin bir iyi biçimli formülü ise $\sim A_i$, $(\forall x_j)A_i$ R^Q dilinin iyi biçimli formülleridir.
- vi. Eğer A_i ve A_j R^Q dilinin iyi biçimli formülleri ise $(A_i \wedge A_j)$, $(A_i \vee A_j)$, $(A_i \supset A_j)$, $(A_i \equiv A_j)$ R^Q dilinin iyi biçimli formülleridir.
- vii. B kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (iii), (iv) ve (v)’de belirtilenler hariç, hiçbir şey R^Q dilinin iyi biçimli formülü değildir.

Bu şekilde seçilen R^Q dili P^Q dilinin öz-alt kümesidir. R^Q dilinin elemanı olan bütün iyi biçimli formüller, P^Q dilinin elemanıdır. Bu, R^Q dilinin P^Q dilinin alt kümesi olması için yeterlidir. Ancak ‘ $\exists$ ’ harfi B kümesinin elemanı olmadığından, P^Q dilinin bu harfin geçişlerini içeren iyi biçimli formülü, P^Q dilinin iyi biçimli formülü değildir. Bu, P^Q dilinin R^Q dilinin alt kümesi olmadığını gösterir. P^Q dilinin elemanı olan ‘ $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün R^Q dilinin elemanı olmadığını göstermek, P^Q dilinin R^Q dilinin alt kümesi olmadığını göstermek için yeterlidir.

Benzer şekilde, $\{\sim, \supset\}$, $\{\sim, \vee\}$, $\{\sim, \wedge\}$ kümeleri, Θ kümesinin $\{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ alt kümesi için tam olduğundan ve $\{\forall, \exists\}$ kümesindeki elemanların geçişlerinin olduğu tüm iyi biçimli formüllerin, dönüştürme kurallarına göre $\{\forall\}$ ya da $\{\exists\}$ kümesindeki elemanın geçişlerini içeren tanımsal karşılıkları olduğundan, Θ kümesinin Δ alt kümesi ya $\Delta = \{\sim, \supset, \forall\}$ ya $\Delta = \{\sim, \vee, \forall\}$ ya $\Delta = \{\sim, \wedge, \forall\}$ ya $\Delta = \{\sim, \supset, \exists\}$ ya $\Delta = \{\sim, \vee, \exists\}$ ya da $\Delta = \{\sim, \wedge, \exists\}$ olarak seçildiğinde, Δ kümesi P^Q dili için tanımsal tamdır. Δ kümesi bu şekilde seçildiğinde, alfabesi $\{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, (,), x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots, f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots\} \cup \Delta$ olan P^Q dilinin alt kümelerinde P^Q dilinin her bir elemanının en az bir tanımsal karşılığı vardır.



Θ kümesinin Δ alt kümesi $\Delta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \exists\}$ olarak seçildiğinde Δ kümesinin Θ kümesi için tanımsal olarak tam olduğunu gösterin.

Alfabesi $C = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, (,), x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots, f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots\} \cup \Delta$ olan K^Q dilini tanımlayın.

P^Q DİLİNİN YORUMU

P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumu İçin Tanımlar

- X ve Y kümesi ancak ve ancak elemanları aynı ise *aynıdır*.
- $a \in X$ ve $b \in Y$ için a ve b 'nin oluşturduğu *sıralı ikili*, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ kümesidir ve (a, b) biçiminde gösterilir.
- $a \in X$ (a, b) sıralı ikilisinin ilk bileşeni, $b \in Y$ (a, b) ikilisinin ikinci bileşenidir.
- (a, b) ve (x, y) küme ve $(a, b) = (x, y)$ ise $a = x$ ve $b = y$ olur.
- $x \in X$ ve $y \in Y$ olan tüm sıralı (x, y) ikilileri kümesine, X kümesi ile Y kümesinin *kartezyen çarpımı* adı verilir ve $X \times Y$ biçiminde gösterilir.
- Y kümesinin X kümesindeki tümleyeni, X kümesinin Y kümesinin elemanı olmayan elemanlarının kümesidir ve $X - Y$ biçiminde gösterilir.
- Elemanı küme olan küme *koleksiyondur*.

ÖRNEK

$\{\{a\}, \{a, b\}\}$ kümesi, elemanları $\{a\}$ kümesi ve $\{a, b\}$ kümesi olan koleksiyondur.

- Bir n tamsayısı için $n + 1$ sayısı n sayısının, bir X kümesi için $X \cup \{X\}$ kümesi X kümesinin ardışığıdır.
- X kümesi her elemanının ardışığını içeriyorsa ardışık kümedir.
- Bir doğal sayı boş olmayan tüm ardışık kümeler koleksiyonunun kesişimi olan ardışık kümenin elemanıdır.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, n, n+1, \dots\}$ kümesi doğal sayılar kümesidir.
- X ve Y kümeleri aralarında bire bir eşleme varsa eşdeğerdir.
- X kümesi bir n doğal sayısına eşdeğerse sonludur, aksi hâlde sonsuzdur.
- X kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine eşdeğerse sayılabilir sonsuzdur.

ÖRNEK

Elemanları çift sayılar olan $A = \{2, 4, 6, \dots, m, m+2, \dots\}$ kümesi ile doğal sayılar $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, n, n+1, \dots\}$ kümesi arasında bire bir eşleme vardır.

0	1	2	...	n	$n+1$	...
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	
2	4	6	...	m	$m+2$	...

- $(t_1, \dots, t_n)$ sıralı n -lisi (n bir doğal sayı iken) n elemanlı bir kümedir.

- $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni}, t_{(n+1)i}, \dots)$ ve $(t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj}, t_{(n+1)j}, \dots)$ sıralı n -lileri ancak ve ancak $t_{1i} = t_{1j}, t_{2i} = t_{2j}, \dots, t_{ni} = t_{nj}, t_{(n+1)i} = t_{(n+1)j}, \dots$ ise aynıdır.

ÖRNEK

$(a, b) = (x, y)$ ancak ve ancak $a = x$ ve $b = y$

$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$ ancak ve ancak $n = m$ ve $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$

- X kümesinin bir E_i numaralaması, elemanları sadece X kümesinin elemanı olan sonlu $(t_1, \dots, t_n)$ sıralı n -lisi veya sayılabilir sonsuz $(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{(n+1)}, \dots)$ sıralıdır.

ÖRNEK

$E_1 = (a, b), E_2 = (a, b, b_2, a), E_3 = (a, a, b, b)$ sıralı n -lileri $\Gamma = \{a, b\}$ kümesinin numaralamasıdır.

- $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{(n-1)i}, t_{ni})$ sıralı n -lisi $((t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{(n-1)i}), t_{ni})$ sıralı ikilidir.

ÖRNEK

$(a, b, c) = ((a, b), c)$

- Sonlu dizi $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sıralı n -lisidir.
- Bir X kümesi için, $X_1 \times \dots \times X_n$ kartezyen çarpımı $\{(t_1, \dots, t_n) : t_i \in X_i \text{ ve } \dots \text{ ve } t_n \in X_n\}$ kümesidir.
- Elemanı $(t_1, \dots, t_n)$ sıralı n -lileri olan R_i^n bağıntısı $X_1 \times \dots \times X_n$ kartezyen çarpımının alt kümesidir.

Tüm $(t_1, \dots, t_n)$ sıralı n -lileri $(n \geq 2)$ $(t_1, \dots, t_{n-1}), t_n$ sıralı ikilisi olduğundan, her R_i^n bağıntısı için bir R_i^2 bağıntısı vardır.

- f_i^n fonksiyonu, $X_1 \times \dots \times X_n \times X_{n+1}$ kartezyen çarpımının $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni}) = (t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj})$ ise $t_{(n+1)i} = t_{(n+1)j}$ şartını sağlayan alt kümesidir.
- $n \geq 1$ için f_i^n fonksiyonu $(n+1)$ -li bir R_i^{n+1} bağıntısının alt kümesidir.

$(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni-1}, t_{ni}) = (t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni-1}), t_{ni})$ olduğundan her f_i^n fonksiyonu için bir f_i^1 fonksiyonu vardır.

ÖRNEK

$(x, y, z_1) \in f_i^2$ ve $(x, y, z_2) \in f_i^2$ ancak ve ancak $z_1 = z_2$ şartını sağlayan 3-lü bir bağıntı olan ikili f_i^2 fonksiyonunun karşılığı $((x, y), z_1) \in f_i^1$ ve $((x, y), z_2) \in f_i^1$ ancak ve ancak $z_1 = z_2$ şartını sağlayan f_i^1 fonksiyondur

- R_i^n bağıntısının tanım kümesi $D(R_i^n)$, $D(R_i^n) = \{t_1 \in X_1 \text{ ve } \dots \text{ ve } t_{(n-1)} \in X_{(n-1)} : \text{en az bir } t_n \in X_n \text{ için, } (t_1, \dots, t_n) \in R_i^n\}$ olarak tanımlanan kümedir.

R_i^n bağıntısının tanım kümesi $D(R_i^n)$, $(t_1, \dots, t_{(n-1)}, t_n)$ sıralı n -lisi R_i^n kümesinin elemanı olduğunda, R_i^n bağıntısının elemanı olan $(t_1, \dots, t_{(n-1)}, t_n)$ n -lilerinin n . elemanı olan X_n kümesinin elemanları için $(t_1, \dots, t_{(n-1)}, t_n)$ n -lilerinin elemanı olan tüm $t_1 \in X_1 \dots$ ve $\dots t_{(n-1)} \in X_{(n-1)}$ olan tüm t_i 'lerin $(1 \leq i \leq n-1)$ kümesidir.

- R_i^n bağıntısının ters tanım kümesi $C(R_i^n)$, $C(R_i^n) = \{t_n \in X_n : \text{bazı } t_1 \in X_1, t_2 \in X_2, \dots, t_{(n-1)} \in X_{(n-1)} \text{ için } (t_1, \dots, t_n) \in R_i^n\}$ olarak tanımlanan kümedir.

R_i^n bağıntısının ters tanım kümesi $C(R_i^n)$, $(t_1, \dots, t_n)$ sıralı n -lisi R_i^n kümesinin elemanı olduğunda, $t_1 \in X_1$ ve ... ve $t_{(n-1)} \in X_{(n-1)}$ olan bazı t_i 'ler için R_i^n bağıntısının elemanı olan $(t_1, \dots, t_n)$ n -lilerinin n . elemanı olan X_n kümesinin tüm elemanlarının kümesidir. $C(R_i^n)$ kümesi R_i^n bağıntısının görüntü kümesi $\text{Im}(R_i^n)$ veya $R_i^n(E)$ olarak da adlandırılır.

- n -li bir R_i^n bağıntısının üzerinde tanımlandığı küme, R_i^n bağıntısının tanım kümesinin ve ters tanım kümesinin koleksiyonunun bileşimi olan $\Sigma(R_i^n) = D(R_i^n) \cup C(R_i^n)$ kümesidir. $\Sigma(R_i^n)$ kümesi, ' $x \in \Sigma(R_i^n)$ ' ancak ve ancak $x \in D(R_i^n)$ veya $x \in C(R_i^n)$ ' olarak tanımlanır.

ÖRNEK

3-lü $R^3 = \{(a, b, c), (a, b, b), (a, a, b)\}$ bağıntısının tanım kümesi $D(R^3) = \{a, b\}$ ve ters tanım kümesi $C(R^3) = \{b, c\}$ kümesidir. R^3 bağıntısının üzerinde tanımlandığı küme $\Sigma(R^3) = D(R^3) \cup C(R^3) = \{a, b, c\}$ kümesidir.

- f, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon ve g, Y kümesinden Z kümesine bir fonksiyonsa X kümesinden Z kümesine $h(x) = g(f(x))$ olarak tanımlanan h fonksiyonu g ve f fonksiyonlarının bileşkesidir.

P^Q Dilinin § Yorumu

P^Q dilinin § yorumu, tanım kümesi terim geçişi içermeyen veya $F_k^n t_1 \dots t_n$ biçimindeki iyi biçimli formüller kümesi olan fonksiyonları seçmekle başlar.

P Dilinin ℳ Yorumu

P dilinin ℳ yorumu $(\mathbb{T}, P \cup \{\Omega\}, \mathcal{Q})$ üçlüsüdür ki,

$\mathbb{T}$ kümesi T^n kümesinin ($n \geq 2$) kümesi $T = \{d, y\}$ kümesinin $T_1 \times \dots \times T_n$ sonlu kartezyen çarpımıdır) tüm alt kümelerinin, T^ω kümesinin (T^ω kümesi $T = \{d, y\}$ kümesinin $T_1 \times \dots \times T_n \times T_{n+1} \times \dots$ sonsuz kartezyen çarpımıdır) ve $T = \{d, y\}$ kümesinin koleksiyonudur.

$\mathcal{Q}$ kümesi z_i fonksiyonlarının, $s_j^{*z_i}$ fonksiyonlarının ve s_i fonksiyonlarının koleksiyonudur.

Ω kümesi P^Q dilinin $\{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ kümesidir.

$\mathcal{Q}$ koleksiyonundaki bir z_i fonksiyonu $P \cup \{\Omega\}$ kümesinden $\mathbb{T}$ koleksiyonuna bir $s_j^{*z_i}$ fonksiyonu Ω kümesinden T kümesine, bir s_i fonksiyonu P kümesinden T kümesine bir fonksiyondur.

DİKKAT



Bir a argümanının z_i fonksiyonunda aldığı değer ' $(a)^{z_i}$ ' ile gösterilecektir.

P Dilinin Bir ℳ Yorumu

P dilinin bir ℳ yorumu $(\mathbb{T}, P \cup \{\Omega\}, \{z_m, s_j^{*z_m}, s_m\})$ sıralı üçlüsüdür ki, $\mathcal{Q}$ koleksiyonunun bir alt kümesi olan $\{z_m, s_j^{*z_m}, s_m\}$ kümesi bir z_m fonksiyonunu, bir $s_j^{*z_m}$ fonksiyonunu ve bir s_m fonksiyonunu içerir.

$z_m: P \cup \{\Omega\} \rightarrow \mathbb{T}$ olan bir $z_m \in \mathcal{Q}$ fonksiyonunda, formülde geçişi bulunan harfleri $A_j^n(p_1 \dots p_n)$ şeklinde gösterilen A_j iyi biçimli formülünün değeri, T^{n+1} kümesinin bir alt kümesi olan f_j^n fonksiyonudur: $(A_j)^{z_m} = (A_j^n(p_1 \dots p_n))^{z_m} = f_j^n \in \mathbb{T}$. Her iyi biçimli A_j formülü için T^{n+1} kümesinin $(A_j^n(p_1 \dots p_n))^{z_m}$ olan tek bir alt kümesi vardır.

$\{\sigma_m\}$ kümesinin σ_m elemanı sayılabilir sonsuz diziler kümesinin bir elemanıdır.

$P \cup \{\Omega\}$ kümesindeki elemanların $z_m \in \mathcal{Q}$ fonksiyonunda şu değerleri alır:

- $\gamma^1_1 A_j$ biçimindeki her A_i iyi biçimli formülü için $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, T^{n+1} kümesinin bir alt kümesi olan bir $f_j^n = (\gamma^1_1 A_j)^{z_m}$ fonksiyonu
- $(A_j \gamma^2_1 A_k)$ biçimindeki her A_i iyi biçimli formülü için, $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, T^{n+1} kümesinin bir alt kümesi olan bir $f_k^n = (A_j \gamma^2_1 A_k)^{z_m}$ fonksiyonu
- p_j biçimindeki iyi biçimli formüllerin kümesi olan $\Omega = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ kümesi için $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, T^ω kümesinin tek elemanlı alt kümelerinden biri: $(\Omega)^{z_m} = \{\sigma_m\}$

DİKKAT



Bir z_i fonksiyonunda,

$\gamma^1_1 p_j$ biçimindeki her iyi biçimli formülün değeri, $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, T kümesinden T kümesine 1-li bir fonksiyon olan $N = f_j^1 = (\gamma^1_1 p_j)^{z_i}$ fonksiyonudur.

$(p_j \gamma^2_1 p_k)$ biçimindeki her iyi biçimli formülün değeri ise $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, $T \times T$ kümesinden T kümesine 2-li bir fonksiyon $f_i^2 = (A_j)^{z_i}$ olan C, D, I, E fonksiyonlarından biridir.

A_j ve A_k iyi biçimli formülleri Ω kümesinin elemanı değillerse $\gamma^1_1 A_j$ ve $(A_j \gamma^2_1 A_k)$ biçimindeki iyi biçimli formüllerin z_i fonksiyonundaki değerleri T veya $T_1 \times T_2$ kartezyen çarpım kümesinden T kümesine tanımlanan fonksiyonlar kümesinin alt kümesi olan $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesindeki elemanların bileşke fonksiyonlarının tanımladığı f_i^n fonksiyonlarıdır.

$s_m^{*z_m}: \Omega \rightarrow T$ olan bir $s_m^{*z_m} \in \mathcal{Q}$ fonksiyonunda, A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan her p_k harfinin değeri, $(\Omega)^{z_m} = \{\sigma_m\}$ kümesinin elemanı olan σ_m sayılabilir sonsuz dizinin k . elemanı olan σ_{mk} elemanıdır. A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan p_k harflerinin $s_m^{*z_m}$ fonksiyonundaki değerlerinin kümesi $(c_1, \dots, c_n) \in T^n$ sonlu dizisini üretir.

Formülde geçişi olan p_k harflerinin $s_m^{*z_m}$ fonksiyonunda aldığı değerlerin ürettiği $(c_1, \dots, c_n)$ sonlu dizisi için A_j iyi biçimli formülünün $s_m: P \rightarrow T$ olan bir $s_m \in \mathcal{Q}$ fonksiyonunda aldığı değer, $f_j^n = (A_j)^{z_m}$ fonksiyonunun elemanı olan $(c_1, \dots, c_n, c_{n+1})$ sonlu dizisinin $(n+1)$. elemanı olan $c_{n+1} \in T^n$ dir. $((c_1, \dots, c_n)$ sonlu dizisi ile $(c_1, \dots, c_n, c_{n+1})$ sonlu dizisinin i . elemanları $i \leq n$ için aynıdır.)

DİKKAT



Δ iyi biçimli formül kümesinin bir $\mathcal{N}$ yorumu için $\sigma_m \in (\Omega)^{z_m}$ ile bir $\mathcal{K}$ yorumu için $\sigma_k \in (\Omega)^{z_k}$ ve $\sigma_k \neq \sigma_m$ iken iyi biçimli formüllerde geçişi bulunan bütün p_j harfleri için $\mathcal{N}$ yorumunda $s_m^{*z_m}$ fonksiyonunun p_j harfine atadığı σ_m sonsuz dizisinin j . elemanı σ_{mj} ile $\mathcal{K}$ yorumunda $s_k^{*z_k}$ fonksiyonunun p_j harfine atadığı σ_k sayılabilir sonsuz dizisinin j . elemanı σ_{kj} aynı ise $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{K}$ yorumları Δ iyi biçimli formül kümesi için aynıdır. Yani, Δ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarında geçişi olan her p_j için $s_m^{*z_m}(p_j) = s_k^{*z_k}(p_j) = \sigma_{kj} = \sigma_{mj}$ ise $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{K}$ yorumları Δ iyi biçimli formül kümesi için aynıdır.

P^Q Dilinin $\mathcal{J}$ Yorumu

P^Q dilinin $\mathcal{J}$ yorumu $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ sıralı üçlüsüdür. $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ sıralı üçlüsünde,

$\mathcal{C}$ kümesi $\mathcal{D} \cup \mathcal{T} \cup S$ kümesidir:

- D^n (D^n ($n \geq 2$) kümesi herhangi bir D kümesinin $D_1 \times \dots \times D_n$ sonlu kartezyen çarpımıdır) kümesinin tüm alt kümelerinin, D^ω kümesinin (D^ω kümesi D kümesinin $D_1 \times \dots \times D_n \times D_{n+1} \times \dots$ sonsuz kartezyen çarpımıdır) tüm alt kümelerinin ve D kümesinin koleksiyonu olan $\mathcal{D}$ kümesi,
- T^n kümesinin (T^n ($n \geq 2$) kümesi $T = \{d, y\}$ kümesinin $T_1 \times \dots \times T_n$ sonlu kartezyen çarpımıdır) tüm alt kümelerinin, T^ω kümesinin (T^ω kümesi $T = \{d, y\}$ kümesinin $T_1 \times \dots \times T_n \times T_{n+1} \times \dots$ sonsuz kartezyen çarpımıdır) ve $T = \{d, y\}$ kümesinin koleksiyonu olan $\mathcal{T}$ kümesi ve
- $S = \{\alpha, \beta\}$ kümesinin bileşimi;

$\mathcal{L}$ kümesi $P^Q \cup T^Q \cup \{\Omega\} \cup \{A\}$ kümesidir:

- P^Q dili,
- P^Q dilinin T^Q terimler kümesi,
- P^Q dilinin $\Omega = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesi ve
- P^Q dilinin T^Q terimler kümesinin $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesinin bileşimi;

$\mathcal{V}$ kümesi ise:

- $P^{Qa} \cup (T^Q - (X \cup A)) \cup \{\Omega\} \cup \{A\}$ kümesinden, yani P^Q dilinin atomik iyi biçimli formüllerinin veya terim geçişinin olmadığı iyi biçimli formüllerinin kümesi olan P^{Qa} kümesi, P^Q dilinin T^Q terimler kümesinin $X = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ veya $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümelerinin elemanı olmayan terimlerinin kümesi, P^Q dilinin $\Omega = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesi ve P^Q dilinin T^Q terimler kümesinin $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesinin bileşiminden $\mathcal{D} \cup \mathcal{T}$ kümesine v_i fonksiyonları,
- $T^Q \cup \Omega$ kümesinden $D \cup T$ kümesine s_j^{*vi} fonksiyonları,
- P^Q kümesinden $S = \{\alpha, \beta\}$ kümesine s_{ij} fonksiyonları ve
- P^Q dilinin Π^Q alt kümesinden T kümesine m_i fonksiyonun koleksiyonudur.

P^Q Dilinin Bir $\mathcal{U}$ Yorumu

P^Q dilinin bir $\mathcal{U}$ yorumu olan $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ sıralı üçlüsünde, $\{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\}$ kümesi v_m fonksiyonunu, s_j^{*vi} fonksiyonlarını, s_{mj} fonksiyonunu ve m_m fonksiyonunu içerir.

P^Q dilinin bir $\mathcal{U}$ yorumundaki D kümesi herhangi bir küme olabileceği gibi P^Q dilinin veya bir alt kümesinin yorumunda D kümesi, yorumda her $F_j^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülüne atanan R_j^n bağıntısının üzerinde tanımlandığı $\Sigma(R_j^n)$ kümesinin elemanı olduğu koleksiyonun bileşimi olan ve $D(\mathcal{U})$ kümesi olarak adlandırılan kümeye kısıtlanabilir.

$v_m : P^{Qa} \cup \{\Omega\} \cup (T^Q - (X \cup A)) \cup \{A\} \rightarrow \mathcal{D} \cup \mathcal{T}$ fonksiyonunun seçilmesi:

$v_m : P^{Qa} \cup \{\Omega\} \cup (T^Q - (X \cup A)) \cup \{A\} \rightarrow \mathcal{D} \cup \mathcal{T}$ olan $v_m \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda formülde geçişi bulunan harflerin gösterildiği P^Q dilinin terim geçişi içermeyen $A_j = A_j^n(p_1 \dots p_n)$ iyi biçimli formülünün değeri, T^{n+1} kümesinin bir alt kümesi olan

f_j^n fonksiyonudur: $(A_j)^{vm} = (A_j^n(p_1 \dots p_n))^{vm} = f_j^n \in \mathcal{T}$. Her A_j iyi biçimli formülü için T^{n+1} kümesinin $(A_j^n(p_1 \dots p_n))^{vm}$ olan tek bir alt kümesi vardır.

$v_m \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda, P^Q dilinin terim geçişi içermeyen A_i iyi biçimli formülleri veya $\{\Omega\}$ kümesinin elemanları şu değerleri alır:

- P^Q dilinin $\gamma_1 A_j$ biçimindeki terim geçişi içermeyen her A_i iyi biçimli formülü için, $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, T^{n+1} kümesinin bir alt kümesi olan bir $f_j^n = (\gamma_1 A_j)^{vm}$ fonksiyonu
- P^Q dilinin $(A_j \gamma_1^2 A_k)$ biçimindeki terim geçişi içermeyen her A_i iyi biçimli formülü için $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, T^{n+1} kümesinin bir alt kümesi olan bir $f_k^n = ((A_j \gamma_1^2 A_k))^{vm}$ fonksiyonu
- p_j biçimindeki iyi biçimli formüllerin kümesi olan $\Omega = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ kümesi için, $\mathcal{T}$ kolleksiyonundan, T^ω kümesinin tek elemanlı alt kümelerinden biri: $(\Omega)^{vm} = \{\sigma_i\}$

$(A)^{vm} = \{s_a\} \subset D^\omega$ ki, $s_a \in D^\omega$ bu kümenin yegâne elemanıdır.

$v_m \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda, P^Q dilinin T^Q terim kümesinin alt kümesi olan $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümesi şu değeri alır:

- D^ω kümesinin alt kümelerinden $\{s_a\}$ kümesi.

$v_m \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda, P^Q dilinin terimler kümesi olan T^Q kümesinin $F = \{f_1^1(t_1), f_2^1(t_1), \dots, f_k^1(t_1), f_{k+1}^1(t_1), \dots, f_1^2(t_1 t_2), f_2^2(t_1 t_2), \dots, f_k^2(t_1 t_2), f_{k+1}^2(t_1 t_2), \dots, f_1^n(t_1 \dots t_n), f_2^n(t_1 \dots t_n), \dots, f_k^n(t_1 \dots t_n), f_{k+1}^n(t_1 \dots t_n), \dots, f_1^{n+1}(t_1 \dots t_{n+1}), f_2^{n+1}(t_1 \dots t_{n+1}), \dots, f_k^{n+1}(t_1 \dots t_{n+1}), f_{k+1}^{n+1}(t_1 \dots t_{n+1}), \dots\}$ alt kümesinin bir elemanı şu değeri alır:

- D kümesi üzerinde tanımlanan ve D^n kümesinden D kümesine n -li bir fonksiyon olan f_m^n fonksiyonu

$v_m \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda, P^Q dilinin terim geçişi içeren A_i iyi biçimli formülleri şu değerleri alır:

- formülde geçişi olan t_i 'nin T^Q kümesinin bir elemanı olduğu $F_j^1 t_1$ biçimindeki iyi biçimli formül için, D kümesinin bir alt kümesi olan P_j^1 kümesi
- formülde geçişi olan her t_i 'nin T^Q kümesinin bir elemanı olduğu $F_j^n t_1 \dots t_n$ ($n \geq 2$) biçimindeki her iyi biçimli formül için D kümesi üzerinde tanımlanan R_j^n bağıntısı

$s_j^{*vm}: \Omega \cup T^Q \rightarrow D \cup T$ fonksiyonunun seçilmesi:

$s_j^{*vm} \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda,

- A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan her p_i harfinin değeri, Ω kümesinin v_m fonksiyonunda aldığı değeri olan $\{\sigma_m\}$ kümesinin $[\{\sigma_m\} = (\Omega)^{vm} \in T^\omega]$ elemanı olan sayılabilir sonsuz σ_m dizisinden bir eleman,
- A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan her t_i teriminin değeri, A kümesinin v_m fonksiyonunda aldığı değeri olan $\{s_a\}$ kümesinin $[\{s_a\} = (A)^{vm} \in T^\omega]$ elemanı olan sayılabilir sonsuz s_a dizisinden bir elemanı ya da sayılabilir sonsuz s_j dizisinden $[s_j \in D^\omega]$ bir elemandır.

$s_j^{*vm}: \Omega \cup T^Q \rightarrow D \cup T$ olan $s_j^{*vi} \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda,

A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan harf Ω kümesinin elemanı olan p_k ise, p_k harfinin değeri σ_m $[\{\sigma_m\} = (\Omega)^{vm}]$ dizisinin k . elemanı olan σ_{mk} olur.

A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan harf veya sıralı harfler bir t_i terimi olduğunda:

- t_i terimi T^Q terim kümesinin A alt kümesinin elemanı olan a_k ise t_i teriminin değeri s_a $[\{s_a\} = (A)^{vm}]$ dizisinin k . elemanı s_{ak} olur.
- t_i terimi T^Q terim kümesinin x_k elemanı ise t_i teriminin değeri x_k terimine s_j sayılabilir sonsuz dizisinin k . elemanı olan s_{jk} olur.

$f_j^n = (f_j^n)^{vm}$ olan f_j^n fonksiyonu D^{n+1} kümesinin bir alt kümesi ve $\mathcal{D}$ koleksiyonunun bir elemanıdır.

$R_j^n = (F_j^n t_1 \dots t_n)^{vm}$ kümesi D^n kümesinin bir alt kümesi ve $\mathcal{D}$ koleksiyonunun bir elemanıdır. Her $F_j^n t_1 \dots t_n$ için D^n kümesinin alt kümesi olan tek bir küme vardır.

' s_j ' ve ' s_j^{*vm} ' ifadelerindeki ' j ', sonsuz dizilerin kendi aralarındaki sıralamadaki sayılarını ve s_j^{*vm} fonksiyonunun s_j sayılabilir sonsuz dizisinden seçim yaptığını gösterir.

$s_j^{*vm}(p_k) = \sigma_{mk}$ ki, $\{\sigma_m\}$ kümesi T^ω kümesinin alt kümesi ve $\mathcal{T}$ koleksiyonunun elemanıdır.

$s_j^{*vm}(a_k) = s_{ak}$ ki $\{s_a\}$ kümesi D^ω kümesinin alt kümesi ve $\mathcal{D}$ koleksiyonunun elemanıdır.

$s_j^{*vm}(x_k) = s_{jk}$ ki $\{s_j\}$ kümesi D^ω kümesinin alt kümesi ve $\mathbb{D}$ koleksiyonunun elemanıdır.

- t_i terimi T^Q terim kümesinin $f_k^n(t_1 \dots t_n)$ elemanı ise t_i teriminin değeri $(s_j^{*vm}(f_k^n(t_1, \dots, t_n)) = (f_k^n)^{vm}(s_j^{*vm}(t_1), \dots, s_j^{*vm}(t_n)) = \dots = (f_k^n)^{vm}(b_1, \dots, b_n)) = b_{n+1}$ koşuluyla $f_k^n(t_1 \dots t_n)$ teriminin v_m fonksiyonunda aldığı değer olan D kümesi üzerinde tanımlanan $(f_k^n)^{vm}$ fonksiyonunun $(b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$ elemanının $(n+1)$. elemanı olan b_{n+1} olur.

A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan harfler Ω kümesinin elemanları ise $s_j^{*vi} \in \mathcal{V}$ fonksiyonunun değer kümesi p_i harflerinin s_j^{*vm} fonksiyonunda aldığı $s_j^{*vm}(p_i)$ değerlerinin kümesi $(c_1, \dots, c_n) \in T^n$ sonlu dizisini üretir. A_j iyi biçimli formülünde geçişi olan harf veya sıralı harfler T^Q kümesinin elemanları ise t_i terimlerinin geçişlerinin sıralısı olan $(t_1, \dots, t_n)$ için terimlerin s_j^{*vm} fonksiyonunda aldığı $s_j^{*vm}(t_i)$ değerlerinin kümesi $(b_1, \dots, b_n) \in D^n$ sonlu dizisini üretir.

$(F_k^n)^{vm} = R_k^n$ ki, R_k^n kümesi D^n kümesinin alt kümesidir ve $\mathbb{D}$ koleksiyonunun elemanıdır.

D^ω kümesinin elemanı olan her s_j sayılabilir sonsuz dizisi için her s_j^{*vm} fonksiyonunun değer kümesi, elemanları D kümesinin elemanı olan tek bir $(b_1, \dots, b_n) \in D^n$ sonlu dizisi üretir. $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi $F_k^n(t_1 \dots t_n)$ 'in v_m fonksiyonundaki değeri olan bağıntının ya elemanıdır ya da elemanı değildir.

P^Q kümesinden $S = \{\alpha, \beta\}$ kümesine s_{mj} fonksiyonunun seçilmesi:

P^Q dilinin herhangi bir A_j iyi biçimli formülünün s_{mj} fonksiyonundaki değeri ya $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ya da $s_{mj}(A_j) = \beta$ olur.

$s_{mj}: P^Q \rightarrow S$ olan bir $s_{mj} \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülünün değeri, formülde geçişi olan p_k harfinin s_j^{*vm} fonksiyonunda aldığı değere ve formülde geçişi olan terimlerin s_j^{*vm} fonksiyonunda aldığı değerlerin ürettiği sonlu $(b_1, \dots, b_n)$ ($b_i \in D$) dizisine bağlı olarak $S = \{\alpha, \beta\}$ kümesinden bir elemandır.

' s_j ', ' s_j^{*vm} ' ve ' s_{mj} ' ifadelerindeki ' j ' sonsuz dizilerin kendi aralarındaki sıralamadaki sayılarını ve s_j^{*vm} ve s_{mj} fonksiyonlarının s_j sayılabilir sonsuz dizisinden seçim yaptığını gösterir.

P^Q iyi biçimli formül kümesinin A_j iyi biçimli formülünün s_{mj} fonksiyonunda aldığı değer,

$A_j = F_k^n t_1 \dots t_n$ ise:

- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunda t_1 teriminin değeri olan $b_i \in D$, $F_k^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan P_k^1 alt kümesinin elemanı ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$,
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunda t_1 teriminin değeri olan $b_i \in D$, $F_k^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan P_k^1 alt kümesinin elemanı değilse $s_{mj}(A_j) = \beta$
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ve D^n kümesinin elemanı olan $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_k^n ($R_k^n = (F_k^n)^{vm}$) bağıntısının elemanı ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ve D^n kümesinin elemanı olan $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_k^n ($R_k^n = (F_k^n)^{vm}$) bağıntısının elemanı değilse $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = p_k$ ise:

- Bir s_j^{*vm} fonksiyonundaki p_k 'nin değeri $d \in T = \{d, y\}$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonundaki p_k 'nin değeri $y \in T = \{d, y\}$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = \sim A_k$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$
- $s_{mj}(A_k) = \beta$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$

$A_j = (A_k \wedge A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \beta$ veya $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$

' $s_j^{k \rightarrow bi}$ ' ifadesi s_j sayılabilir sonsuz dizisinden en fazla k elemanı farklı sayılabilir sonsuz diziyi gösterir.

$A_j = (A_k \vee A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ veya $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (A_k \supset A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \beta$ veya $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (A_k \equiv A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ veya $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ veya $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (\forall x_k)A_p$ ise:

- Tüm $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonları için $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- En az bir $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonunda $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (\exists x_k)A_p$ ise:

- En az bir $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonu için $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- Tüm $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonları için $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$ olur.

P^Q dilinin alt kümesi Π^Q kümesinden $T = \{d, y\}$ kümesine m_m fonksiyonunun seçilmesi:

$\mathcal{V}$ koleksiyonunun elemanı olan bir m_m fonksiyonu P^Q dilinin bir alt kümesi olan Π^Q iyi biçimli formül kümesinden $T = \{d, y\}$ kümesine bir fonksiyondur. P^Q iyi biçimli formül kümesinin A_j iyi biçimli formülü ancak ve ancak tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise ya da tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \beta$ ise Π^Q iyi biçimli formül kümesinin elemanıdır.

$m_i: \Pi^Q \rightarrow T = \{d, y\}$ olan bir $m_m \in \mathcal{V}$ fonksiyonunda:

- Tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise $m_m(A_j) = d \in T$
- Tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \beta$ ise $m_m(A_j) = y \in T$

P^Q dilinin tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \alpha$ olmayan veya tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \beta$ olmayan A_j iyi biçimli formülü Π^Q kümesinin elemanı olmadığından m_m fonksiyonu A_j iyi biçimli formülü için tanımlı değildir.

DİKKAT



P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülünün m_m fonksiyonundaki değeri, ancak ve ancak tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise $m_m(A_j) = d \in T$ olur.

P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülünün m_m fonksiyonundaki değeri, ancak ve ancak tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_j) = \beta$ ise $m_m(A_j) = y \in T$ olur.

P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özellikler

Tanım 1. P^Q dilinin $\mathcal{U} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumu, $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda A_j iyi biçimli formülünün ancak ve ancak $m_m(A_j) = d \in T$ ise modelidir.

Tanım 1.1 P^Q dilinin $\mathcal{U} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumu, $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda Γ iyi biçimli formül kümesinin ancak ve ancak $\Gamma = \{A_j : A_j \in P^Q\}$ kümesinin elemanı olan tüm A_j iyi biçimli formülleri için $m_m(A_j) = d \in T$ ise modelidir.

Tanım 1.2. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda ancak ve ancak en az bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda en az bir s_{mj} fonksiyonundaki değeri $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise yeterlidir.

Tanım 1.2.1. P^Q dilinin $\Gamma = \{A_j : A_j \in P^Q\}$ iyi biçimli formül kümesi, $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda ancak ve ancak Γ kümesinin elemanı olan tüm A_j iyi biçimli formülleri için $s_{mj}(A_j) = \alpha$ olan en az bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda en az bir s_{mj} fonksiyonu varsa yeterlidir.

Tanım 1.3. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, P^Q dilinin $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda ancak ve ancak $m_m(A_j) = d \in T$ ise doğrudur.

Tanım 1.3.1. P^Q dilinin $\Gamma = \{A_j : A_j \in P^Q\}$ iyi biçimli formül kümesi, $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*mk}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda ancak ve ancak Γ kümesinin elemanı olan tüm A_j iyi biçimli formülleri için $m_m(A_j) = d \in T$ ise doğrudur.

Tanım 1.4. P^Q dilinin bir A_j iyi biçimli formülü, P^Q dilinin $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda ancak ve ancak $m_m(A_j) = y \in T$ ise yanlıştır.

Tanım 1.4.1. P^Q dilinin $\Gamma = \{A_j : A_j \in P^Q\}$ iyi biçimli formül kümesi, $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*mk}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda ancak ve ancak Γ kümesinin elemanı olan en az bir A_j iyi biçimli formülü için $m_m(A_j) = y \in T$ ise yanlıştır.

Tanım 1.5. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda ancak ve ancak tüm $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_i, s_j^{*vi}, s_{ij}, m_i\})$ yorumlarındaki tüm s_{ij} fonksiyonlarında $s_{ij}(A_j) = \alpha$ değerini alıyorsa geçerlidir: $\models_{P^Q} A_j$

Tanım 1.5.1. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda ancak ve ancak tüm $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_i, s_j^{*vi}, s_{ij}, m_i\})$ yorumlarında $m_m(A_j) = d \in T$ değerini alıyorsa geçerlidir: $\models_{P^Q} A_j$

Tanım 1.6. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü P^Q dilinin A_k iyi biçimli formülünü, P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda, ancak ve ancak $\Gamma = \{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_i, s_j^{*vi}, s_{ij}, m_i\})$ yorumlarında $s_{ij}(A_j) = \alpha$ olduğunda $s_{ij}(A_k) = \alpha$ ise içerir $A_j \models_{P^Q} A_k$.

Tanım 1.6.1. P^Q dilinin A_k iyi biçimli formülü P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülünün, P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda, ancak ve ancak $\Gamma = \{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_i, s_j^{*vi}, s_{ij}, m_i\})$ yorumlarında $s_{ij}(A_j) = \alpha$ olduğunda $s_{ij}(A_k) = \alpha$ ise sonucudur: $A_j \models_{P^Q} A_k$

P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlanan Tanımlar

Tanım 1. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, bir $\mathcal{M}$ yorumunda $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise s_j sayılabilir sonsuz dizisi tarafından karşılanır.

Tanım 2. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, bir $\mathcal{M}$ yorumunda $s_{mj}(A_j) = \beta$ ise s_j sayılabilir sonsuz dizisi tarafından karşılanmaz.

Tanım 3. P^Q dilinin, bir $\mathcal{M}$ yorumunda $m_i(A_j) = d \in T$ ise A_j iyi biçimli formülü doğrudur.

Tanım 4. P^Q dilinin bir $\mathcal{M}$ yorumunda $m_i(A_j) = y \in T$ ise A_j iyi biçimli formülü $\mathcal{M}$ yanlıştır.

Tanım 5. A_j iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda P^Q dilinin Π^Q alt kümesinin elemanı değilse A_j ne doğru ne de yanlıştır.

Tanım 6. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda en az bir s_{mj} fonksiyonundaki değeri $s_{mj}(A_j) = \beta$ ise doğru değildir.

Tanım 7. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda en az bir s_{mj} fonksiyonundaki değeri $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise yanlış değildir.

Kısayollar

P^Q dilinin $\mathcal{U} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*v_m}, s_{mj}, m_m\})$ yorumu, $D(\mathcal{U})$ kümesi P^Q dilinin ' $F_j^n t_1 \dots t_n$ ' iyi biçimli formüllerinin v_m fonksiyonundaki değerleri olan R_j^n bağıntılarının $[R_j^n = (F_j^n t_1 \dots t_n)^{v_m}]$ üzerinde tanımlandığı kümelerin bileşimi olan yorum olduğunda:

- $\Sigma = D(\mathcal{U})^\omega$ kümesi, $D(\mathcal{U})$ kümesinin numaralaması olan sayılabilir sonsuz s_i dizilerinin kümesidir.
- Σ kümesinin elemanı s_k sayılabilir sonsuz dizisi, her s_{jk} elemanı $D(\mathcal{U})$ kümesinin elemanı b_i olan $s_k = (s_{1k}, \dots, s_{mk}, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ dizisidir.
- Σ kümesinin alt kümesi olan Ψ_{s_k} kümesi, s_k sayılabilir sonsuz dizisinden en fazla m . elemanı farklı olan tüm $s_k^{m \rightarrow bi} = (s_{1k}, \dots, s_m^{m \rightarrow bi}, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizilerinin kümesidir.

Kabul 1. Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi P^Q dilinin bir A_i iyi biçimli formülünü ya karşılar ya da karşılamaz.

Kabul 2. P^Q dilinin bir $\mathcal{U}$ yorumunda $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise s_j sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü karşılar.

Kabul 3. P^Q dilinin bir $\mathcal{U}$ yorumunda $s_{mj}(A_j) = \beta$ ise s_j sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü karşılamaz.

Kısayol 1. P^Q dilinin bir A_i iyi biçimli formülü p_i ise Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak A_i iyi biçimli formülünün $s_k^{*v_m}$ fonksiyonundaki değeri $d \in T = \{d, y\}$ ise karşılar.

Kısayol 2.1 P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü $F_k^1 t_1$ olduğunda, Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak bir t_1 teriminin $s_j^{*v_m}$ fonksiyonunda aldığı değer ($b_i \in D$), $F_k^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonunda aldığı değer olan P_k^1 kümesinin elemanı ise karşılar.

Kısayol 2.2. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü $F_k^n t_1 \dots t_n$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak bir $s_k^{*v_m}$ fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonda aldığı değer olan R_k^n bağıntısının elemanı ise karşılar.

Kısayol 3. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $\sim A_j$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa karşılar.

Kısayol 4. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(A_j \wedge A_p)$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak s_k dizisi A_j ve A_p iyi biçimli formüllerini karşılıyorsa karşılar.

Kısayol 5. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(A_j \vee A_p)$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak s_k dizisi A_j veya A_p iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar.

Kısayol 6. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(A_j \supset A_p)$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak s_k dizisi A_j iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa veya A_p iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar.

Kısayol 7. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(A_j \equiv A_p)$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak s_k dizisi A_j ve A_p iyi biçimli formüllerini karşılıyor veya A_j ve A_p iyi biçimli formüllerini karşılamıyorsa karşılar.

Kısayol 8. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(\forall x_j)A_p$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak Ψ_{s_k} kümesinin elemanı olan tüm $s_k^{j \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizileri A_p iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar.

Kısayol 9. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(\exists x_j)A_p$ olduğunda Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak Ψ_{s_k} kümesinin elemanı olan en az bir $s_k^{j \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi A_p iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar.

DİKKAT



P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumuna dayanan kısayollarda v_m fonksiyonunun $\gamma^1_1 A_j$ ve $(A_j \gamma^2_1 A_k)$ biçimindeki iyi biçimli formüllere atadığı $\Phi = \{N, C, D, I, E\}$ kümesinin elemanlarından oluşan bileşke fonksiyonlara dair kısayollar yoktur. $\mathcal{S}$ yorumu kısayollardan farklı olarak sadece $\Gamma = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,)\}$ kümesindeki elemanların geçişlerinden oluşan P^Q dilinin iyi biçimli formüllerinin bir $\mathcal{M}_i$ yorumunu kurma imkânını sağlar.

P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Kısayollarla Bağlanan Tanımlar

Tanım 1. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{S}$ yorumunda ancak ve ancak formülü karşılayan en az bir s_k sayılabilir sonsuz dizisinin olduğu en az bir $\mathcal{M}$ yorumu varsa yeterlidir.

Tanım 1.1. P^Q dilinin $\Gamma = \{A_j : A_j \in P^Q\}$ iyi biçimli formül kümesi, $\mathcal{S}$ yorumunda ancak ve ancak Γ kümesinin elemanı olan tüm A_j iyi biçimli formüllerini karşılayan en az bir s_k sayılabilir sonsuz dizisinin olduğu en az bir $\mathcal{M}$ yorumu varsa yeterlidir.

Tanım 2. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda ancak ve ancak Σ kümesinin elemanı olan tüm s_k sayılabilir sonsuz dizileri A_i iyi biçimli formülünü karşılıyorsa doğrudur.

Tanım 2.1. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü bir $\mathcal{M}$ yorumunda doğru ise $\mathcal{M}$ yorumu A_i iyi biçimli formülünü doğrulayan yorumdur.

Tanım 3. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda ancak ve ancak Σ kümesinin elemanı olan hiçbir s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa yanlıştır.

Tanım 3.1. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda yanlış ise $\mathcal{M}$ yorumu A_i iyi biçimli formülünü yanlışlayan yorumdur.

Tanım 4. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{S}$ yorumunda ancak ve ancak tüm $\mathcal{M}$ yorumlarında doğru ise P^Q dilinin geçerlidir: $\models_{P^Q} A_i$

Tanım 5. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, $\mathcal{S}$ yorumunda P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülünün, ancak ve ancak $\Gamma = \{A_i, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm $\mathcal{M}$ yorumlarında A_i formülünü karşılayan tüm s_i sayılabilir sonsuz dizileri A_j iyi biçimli formül kümesini karşılıyorsa sonucudur: $A_i \models_{P^Q} A_j$

DİKKAT



P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda bir $\mathcal{M}k = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ yorumunu, v_{mk} fonksiyonunun değer kümesi, v_{mk} fonksiyonunun değer kümesindeki elemanların üzerinde tanımlandıkları kümelerin bileşimi olan $D(\mathcal{M}k)$ kümesi, $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümesinin bu fonksiyonda aldığı $(A)^{v_{mk}} = \{s_a\}$ değeri ve $\Omega = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ kümesinin bu fonksiyonda aldığı $(\Omega)^{v_{mk}} = \{s_m\}$ değeri ile belirtmek yeterlidir.

ÖRNEK

P^Q dilinin $I = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda

$\mathcal{M}_6: D(\mathcal{M}_6) = \mathbb{N}$,

$(F_1^2 t_1 t_2)^{vm6} = R_6^2 = \{(x, y) : x = y\}$ yorumu

' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün modelidir.

$\mathcal{M}_6$ yorumundaki her s_i^{*vm6} fonksiyonunun değer kümesinin elemanı olan $s_i^{*vm6}('x_1') = s_{il}$ değerinin ürettiği (s_{il}, s_{il}) sıralı ikilisi $F_1^2 t_1 t_2$ biçimindeki ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün v_{mk} fonksiyonunda aldığı değer olan $R_6^2 = \{(x, y) : x = y\}$ bağıntısının elemanıdır. Dolayısıyla, tüm s_{m6i} fonksiyonlarında $s_{m6i}('F_1^2 x_1 x_1') = \alpha$ olduğu için tüm sayılabilir sonsuz s_i dizileri P^Q dilinin ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü $\mathcal{M}_6$ yorumunda karşılar.

Kısayollarla: $\mathcal{M}_6$ yorumundaki her s_i^{*vm6} fonksiyonunun değer kümesinin elemanı olan $s_i^{*vm6}('x_1') = s_{il}$ değerinin ürettiği sıralı (s_{il}, s_{il}) ikilisi $R_6^2 = \{(x, y) : x = y\}$ bağıntısının elemanı olduğundan sayılabilir sonsuz s_i dizisi P^Q dilinin ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü karşılar. $\mathcal{M}_6$ yorumu ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün modelidir.

ÖRNEK

P^Q dilinin ' $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ ' iyi biçimli formülü bir $\mathcal{M}_k$ yorumunda yeterlidir:

$\mathcal{M}_k = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*vmk}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ P^Q dilinin aşağıdaki yorumu olsun :

$D(\mathcal{M}_k) = \{x : x \in \mathbb{Z}\}$

$(F_1^1 t_1)^{vmk} = P_1^1$

$(F_1^2 t_1 t_2)^{vmk} = R_1^2$

$(A)^{vmk} = \{s_a\}$

$P_1^1 = \{x : x \in \mathbb{Z}^+\}$

$R_1^2 = \{(x, y) : x = y\}$

$s_a = (1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots)$

$s_1 = (1, 3, 5, \dots)$

$s_1^{*vmk}('x_1') = 1$ ve 1 sayısı $F_1^1 t_1$ biçimindeki ' $F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün v_{mk} fonksiyonundaki değeri olan P_1^1 kümesinin elemanı olduğundan, 'bir s_j^{*vm} fonksiyonunda t_1 teriminin değeri $b_i \in D$ $F_k^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyondaki değeri olan P_k^1 alt kümesinin elemanı ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$ olur' tanımı gereği $s_{mk1}('F_1^1 x_1') = \alpha$ olur.

$s_1^{*vmk}('x_1') = 1$, $s_1^{*vmk}('a_2') = 2$ olduğundan ve bu değerlerin ürettiği $(1, 2)$ ikilisi $F_1^2 t_1 t_2$ biçimindeki ' $F_1^2 x_1 a_2$ ' iyi biçimli formülünün v_{mk} fonksiyonunda aldığı değer olan R_1^2 kümesinin elemanı olmadığından 'bir s_j^{*vm} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ve D^n kümesinin elemanı olan $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonda aldığı değer olan R_k^n bağıntısının elemanı değilse $s_{mj}(A_j) = \beta$ olur' tanımı gereği $s_{mk1}('F_1^2 x_1 a_2') = \beta$ olur.

$s_1^{*vmk}('x_3') = 5$, $s_1^{*vmk}('a_1') = 1$ olduğundan ve bu değerlerin ürettiği $(5, 1)$ ikilisi $F_1^2 t_1 t_2$ biçimindeki ' $F_1^2 x_3 a_1$ ' iyi biçimli formülünün v_{mk} fonksiyonundaki değeri olan R_1^2 kümesinin elemanı olmadığından 'bir s_j^{*vm} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ve D^n kümesinin elemanı olan $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_k^n bağıntısının elemanı değilse $s_{mj}(A_j) = \beta$ olur' tanımı gereği $s_{mk1}('F_1^2 x_3 a_1') = \beta$ olur.

$s_{mk1}('F_1^2 x_1 a_2') = \beta$ ve $s_{mk1}('F_1^2 x_3 a_1') = \beta$ olduğundan,

' $A_j = (A_k \equiv A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ veya $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ veya $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$

tanımı gereği $s_{mk1}('F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1') = \alpha$ olur.

$s_{mkI}('F_1^1x_1') = \alpha$ ve $s_{mkI}('(F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1)') = \alpha$ olduğundan,

' $A_j = (A_k \supset A_p)$ ' ise:

- $s_{mj}(A_k) = \beta$ veya $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$

tanımı gereği $s_{mkI}('(F_1^1x_1 \supset (F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1))') = \alpha$ olur.

' P^Q dilinin bir $\mathcal{M}$ yorumunda $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise s_j sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü karşılar' kabulü gereği s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $(F_1^1x_1 \supset (F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1))$ ' iyi biçimli formülünü karşılar.

' P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{S}$ yorumunda ancak ve ancak formülü karşılayan en az bir s_k sayılabilir sonsuz dizisinin olduğu en az bir $\mathcal{M}$ yorumu varsa yeterlidir.' tanımı gereği ' $(F_1^1x_1 \supset (F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1))$ ' iyi biçimli formülü $\mathcal{S}$ yorumunda yeterlidir.

Çözüm kısayollarla verilecek olursa:

(i) $s_1^{*v_{mk}}('x_1') = 1$ olur. 1 sayısı $F_1^1t_1$ biçimindeki ' $F_1^1x_1$ ' iyi biçimli formülünün v_{mk} fonksiyonundaki değeri olan P_1^1 kümesinin elemanıdır.

(ii) $s_1^{*v_{mk}}('x_1') = 1$ ve $s_1^{*v_{mk}}('a_2') = 2$ olur. Bu değerlerin ürettiği (1, 2) ikilisi $F_1^2t_1t_2$ biçimindeki ' $F_1^2x_1a_2$ ' iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_1^2 kümesinin elemanı değildir.

(iii) $s_1^{*v_{mk}}('x_3') = 5$. ve $s_1^{*v_{mk}}('a_1') = 1$ olur. Bu değerlerin ürettiği (5, 1) ikilisi $F_1^2t_1t_2$ biçimindeki ' $F_1^2x_3a_1$ ' iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_1^2 kümesinin elemanı değildir.

' P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü $F_k^1t_1$ olduğunda, Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak bir t_1 teriminin $s_j^{*v_m}$ fonksiyonunda aldığı değer ($b_i \in D$), $F_k^1t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonunda aldığı değer olan P_k^1 kümesinin elemanı ise karşılar' kısayolu ve (i)'ye göre, s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $F_1^1x_1$ ' iyi biçimli formülünü karşılar.

' P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü $F_k^n t_1 \dots t_n$ olduğunda, Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak bir $s_k^{*v_m}$ fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ($b_1, \dots, b_n$) sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonda aldığı değer olan R_k^n bağıntısının elemanı ise karşılar' kısayolu ve (ii)'ye göre s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $F_1^2x_1a_2$ ' iyi biçimli formülünü karşılamaz. Aynı kısayol ve (iii)'ye göre s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $F_1^2x_3a_1$ ' iyi biçimli formülünü karşılamaz.

' P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(A_j \equiv A_p)$ olduğunda, Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak s_k dizisi A_j ve A_p iyi biçimli formüllerini karşılıyor veya A_j ve A_p iyi biçimli formüllerini karşılamıyorsa karşılar' kısayolu gereği, s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $F_1^2x_1a_2$ ' ve ' $F_1^2x_3a_1$ ' iyi biçimli formüllerinin karşılamadığından, s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $(F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1)$ ' iyi biçimli formülünü karşılar.

' P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü $(A_j \supset A_p)$ olduğunda, Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü, ancak ve ancak s_k dizisi A_j iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa veya A_p iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar' kısayolu gereği s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $F_1^1x_1$ ' ve ' $(F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1)$ ' iyi biçimli formüllerini karşıladığından, s_1 sayılabilir sonsuz dizisi ' $(F_1^1x_1 \supset (F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1))$ ' iyi biçimli formülünü karşılar.

ÖRNEK

$\mathcal{U}_1: D(\mathcal{U}_1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$(F_1^2 t_1 t_2)^{vm1} = R_1^2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ yorumunda,

$s_5 = (5, 6, \dots, s_n, s_{(n+1)}, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizisi ' $F_1^2 x_1 x_2$ ' iyi biçimli formülünü karşılar.

$\mathcal{U}_1$ yorumundaki s_5^{*vm1} fonksiyonunun değer kümesinin elemanı olan $s_5^{*vm1}(x_1) = 5$ ve $s_5^{*vm1}(x_2) = 6$ değerlerinin ürettiği $(5, 6)$ sıralı ikilisi $R_1^2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ bağıntısının elemanıdır. ' P^Q iyi biçimli formül kümesinin A_j iyi biçimli formülünün s_{mj} fonksiyonunda aldığı değer,

$A_j = F_k^n t_1 \dots t_n$ ise:

- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ve D^n kümesinin elemanı olan $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_k^n ($R_k^n = (F_k^n)^{vm}$) bağıntısının elemanı ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$

tanımına göre $s_{m15}(F_1^2 x_1 x_2) = \alpha$ olur. Bu sebepten, ' P^Q dilinin bir $\mathcal{U}$ yorumunda $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise s_j sayılabilir sonsuz dizisi A_j iyi biçimli formülünü karşılar' kabulüne göre sayılabilir sonsuz $s_5 = (5, 6, \dots, s_n, s_{(n+1)}, \dots)$ dizisi P^Q dilinin ' $F_1^2 x_1 x_2$ ' iyi biçimli formülünü $\mathcal{U}_1$ yorumunda karşılar.

Kısayollarla: $\mathcal{U}_1$ yorumundaki s_5^{*vm1} fonksiyonunun değer kümesinin elemanı olan $s_5^{*vm1}(x_1) = 5$ ve $s_5^{*vm1}(x_2) = 6$ değerlerinin ürettiği $(5, 6)$ sıralı ikilisi $R_1^2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ bağıntısının elemanı olduğundan sayılabilir sonsuz $s_5 = (5, 6, \dots, s_n, s_{(n+1)}, \dots)$ dizisi, P^Q dilinin ' $F_1^2 x_1 x_2$ ' iyi biçimli formülünü $\mathcal{U}_1$ yorumunda karşılar.

ÖRNEK

$\mathcal{U}_6: D(\mathcal{U}_6) = \mathbb{N}$,

$(F_1^2 t_1 t_2)^{vm6} = R_6^2 = \{(x, y) : x = y\}$ yorumunda,

P^Q dilinin ' $(\forall x_1)(F_1^2 x_1 x_1 \wedge \sim F_1^2 x_1 x_1)$ ' iyi biçimli formülünü karşılayan hiçbir sayılabilir sonsuz dizi yoktur.

Kısayollarla: $\mathcal{U}_6$ yorumundaki Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi ' $(\forall x_1)(F_1^2 x_1 x_1 \wedge \sim F_1^2 x_1 x_1)$ ' iyi biçimli formülünü ancak ve ancak Σ kümesinin alt kümesi olan Ψ_{sk} kümesinin elemanı olan tüm $s_k^{j \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizileri ' $(F_1^2 x_1 x_1 \wedge \sim F_1^2 x_1 x_1)$ ' iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar. Ψ_{sk} kümesinin elemanı olan $s_k^{j \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi ' $(F_1^2 x_1 x_1 \wedge \sim F_1^2 x_1 x_1)$ ' iyi biçimli formülünü ancak ve ancak $s_k^{j \rightarrow bi}$ dizisi ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü ve $s_k^{j \rightarrow bi}$ dizisi ' $\sim F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar. Ψ_k kümesinin elemanı olan $s_k^{j \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi ' $\sim F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü ancak ve ancak $s_k^{j \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa karşılar. $s_k^{j \rightarrow bi}$ dizisi ' $(F_1^2 x_1 x_1 \wedge \sim F_1^2 x_1 x_1)$ ' iyi biçimli formülünü ancak ve ancak ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü hem karşılar hem de karşılamazsa karşılar. Ancak Ψ_{sk} kümesinin elemanı olan $s_k^{j \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi P^Q dilinin bir ' $F_1^2 x_1 x_1$ ' iyi biçimli formülünü ya karşılar ya da karşılamaz. Σ kümesinin elemanı olan hiçbir s_k sayılabilir sonsuz dizisi ' $(\forall x_1)(F_1^2 x_1 x_1 \wedge \sim F_1^2 x_1 x_1)$ ' iyi biçimli formülünü karşılamaz. ' $(\forall x_1)(F_1^2 x_1 x_1 \wedge \sim F_1^2 x_1 x_1)$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{U}_6$ yorumunda yeterli değildir.

ÖRNEK

$\Delta = \{F_1^1 x_1, (\exists x_1)F_1^1 x_1, (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^2 x_1 x_1), (\exists x_1)F_1^2 x_1 x_1, (\forall x_1)F_1^2 x_1 x_1\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarından sadece ' $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin

$\mathcal{U}_2: D(\mathcal{U}_2) = \{1, 2, 3\}$,

$(F_1^2 t_1 t_2)^{vm2} = R_1^2 = \{(3, 2), (2, 3)\}$,

$(F_1^1 t_1)^{vm1} = P_1^1 = \{1, 2, 3\}$

yorumunda doğrudur.

P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü için tüm s_{mj} fonksiyonlarında $s_{mj}(A_i) = \alpha$ ise $\mathcal{M}_2$ yorumunda $m_{m2}(A_i) = d \in T$ olur. Aksi hâlde $m_{m2}(A_i) = d \in T$ değildir. P^Q dilinin bir A_i iyi biçimli formülü $m_m(A_i) = d \in T$ ise P^Q dilinin $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğrudur. Aksi hâlde doğru değildir.

Δ kümesinde bulunan iyi biçimli formüllerin parçası olan atomik iyi biçimli formüller sırasıyla $'F_1^1x_1'$, $'F_1^2x_1x_1'$, $'F_1^2x_2x_2'$ iyi biçimli formülleridir. $\mathcal{M}_2$ yorumunda $D(\mathcal{M}_2) = \{1, 2, 3\}$ olduğundan $\mathcal{M}_2$ yorumundaki Σ kümesinin birinci elemanları aynı üç ayrık (hiçbirinin bir diğeriyle ortak elemanı olmayan) $[A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, A_2 \cap A_3 = \emptyset]$ alt kümesi vardır. Her kümenin her s_j elemanı için diğer kümede $s_j^{1 \rightarrow bi}$ olan tek bir eleman vardır. Σ kümesinin elemanları bu şekilde eşlenebilir ve her üçlüdeki bir sayılabilir sonsuz dizi bir diğerine göre $s_j^{1 \rightarrow bi}$ dizisidir: $s_1 = (1, \dots, s_{na}, s_{(n+1)a}, \dots)$, $s_2 = (2, \dots, s_{na}, s_{(n+1)a}, \dots)$, $s_3 = (3, \dots, s_{na}, s_{(n+1)a}, \dots)$. [$'s_n'$ ifadesinde $'n'$ altdamgasını takip eden $'a'$ altdamgası dizilerdeki n . elemanın aynı olduğunu gösterir.]

$'F_1^1x_1'$ iyi biçimli formülü $'x_1'$ teriminin bir s_j^{*vm2} fonksiyonundaki değeri olan $D(\mathcal{M}_2) = \{1, 2, 3\}$ kümesinin b_i elemanı $(F_1^1t_1)^{vm2} = P_1^1 = \{1, 2\}$ kümesinin elemanı ise tüm s_{m2j} fonksiyonlarında $s_{m2j}('F_1^1x_1') = \alpha$ değerini alır. Ancak $s_3^{*vm2}('x_1') = 3$ P_1^1 kümesinin elemanı değildir ve s_{m23} fonksiyonunda $'F_1^1x_1'$ iyi biçimli formülü $s_{m23}('F_1^1x_1') = \beta$ değerini alır. Dolayısıyla tüm s_{m2j} fonksiyonlarında $s_{m2j}('F_1^1x_1') = \alpha$ değerini almaz. $'F_1^1x_1'$ iyi biçimli formülü $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğru değildir.

$'(\exists x_1)F_1^1x_1'$ iyi biçimli formülü için $s_j^{1 \rightarrow bi}$ dizisi s_j sayılabilir sonsuz dizisinden en fazla 1. elemanı itibariyle farklı olan sayılabilir sonsuz dizi olduğunda en az bir $s_j^{1 \rightarrow bi} *vm2$ fonksiyonu için $s_{m2j}^{1 \rightarrow bi}('F_1^1x_1') = \alpha$ ise $s_{m2j}('(\exists x_1)F_1^1x_1') = \alpha$ olur. $s_2^{*vm2}('x_1') = 2$ P_1^1 kümesinin elemanı olduğundan ve sayılabilir sonsuz s_2 dizisi türünden tüm diziler için $s_2 = s_1^{1 \rightarrow 2} = s_3^{1 \rightarrow 2}$ olduğundan, tüm s_{m2i} fonksiyonlarında $'F_1^1x_1'$ iyi biçimli formülünün değeri $s_{m2i}('F_1^1x_1') = \alpha$ olur. $'(\exists x_1)F_1^1x_1'$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğrudur.

P^Q dilinin $'F_1^2x_1x_1'$ iyi biçimli formülü için bir s_j^{*vm2} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği (b_i, b_i) sonlu dizisi $F_1^2t_1t_2$ biçimindeki iyi biçimli formülünün v_{m2} fonksiyonunda aldığı değer olan $R_1^2 = \{(3, 2), (2, 3)\}$ bağıntısının elemanı ise $s_{m2j}('F_1^2x_1x_1') = \alpha$ olur. Aksi hâlde $s_{m2j}('F_1^2x_1x_1') = \beta$ olur.

$'(\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1)'$ iyi biçimli formülünün s_{m2j} fonksiyonundaki değeri, $s_j^{1 \rightarrow bi}$ dizisi s_j sayılabilir sonsuz dizisinden en fazla 1. elemanı itibariyle farklı olan sayılabilir sonsuz dizi olduğunda, en az bir $s_j^{1 \rightarrow bi} *vm$ fonksiyonu için $s_{m2j}^{1 \rightarrow bi}('F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1') = \alpha$ ise $s_{m2j}('(\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1)') = \alpha$ olur. P^Q dilinin $'(F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1)'$ iyi biçimli formülünün $s_{m2j}^{1 \rightarrow bi}$ fonksiyonundaki değeri ancak ve ancak $s_{m2j}^{1 \rightarrow bi}('F_1^1x_1') = \beta$ veya $s_{m2j}^{1 \rightarrow bi}('F_1^2x_1x_1') = \alpha$ ise $s_{m2j}^{1 \rightarrow bi}('F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1') = \alpha$ olur.

$s_1^{1 \rightarrow 1} *vm2('x_1') = 1$ P_1^1 kümesinin elemanıdır ve bu fonksiyonun değer kümesinin ürettiği $(1, 1)$ sıralı ikilisi R_1^2 bağıntısının elemanı değildir. Dolayısıyla $s_{m2j}^{1 \rightarrow 1}('F_1^1x_1') = \alpha$ ve $s_{m2j}^{1 \rightarrow 1}('F_1^2x_1x_1') = \beta$ olur. Dolayısıyla $s_{m2j}^{1 \rightarrow 1}('F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1') = \alpha$ değildir.

$s_j^{1 \rightarrow 2} *vm2('x_1') = 2$ P_1^1 kümesinin elemanıdır ve bu fonksiyonun değer kümesinin ürettiği $(2, 2)$ sıralı ikilisi R_1^2 bağıntısının elemanı değildir. Dolayısıyla $s_{m2j}^{1 \rightarrow 2}('F_1^1x_1') = \alpha$ ve $s_{m2j}^{1 \rightarrow 2}('F_1^2x_1x_1') = \beta$ olur. Dolayısıyla $s_{m2j}^{1 \rightarrow 2}('F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1') = \alpha$ değildir.

$s_j^{1 \rightarrow 3} *vm2('x_1') = 3$ P_1^1 kümesinin elemanıdır ve bu fonksiyonun değer kümesinin ürettiği $(3, 3)$ sıralı ikilisi R_1^2 bağıntısının elemanı değildir. Dolayısıyla $s_{m2j}^{1 \rightarrow 3}('F_1^1x_1') = \alpha$ ve $s_{m2j}^{1 \rightarrow 3}('F_1^2x_1x_1') = \beta$ olur. Dolayısıyla $s_{m2j}^{1 \rightarrow 3}('F_1^1x_1 \supset F_1^2x_1x_1') = \alpha$ değildir.

Dolayısıyla sayılabilir sonsuz $s_j^{1 \rightarrow bi}$ dizisi sayılabilir sonsuz s_j dizisinden en fazla 1. elemanı itibarıyla farklı sayılabilir sonsuz dizi olduğunda hiçbir s_j^{*vm2} fonksiyonu için $s_{m2}((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^2 x_1 x_1)) = \alpha$ değildir. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^2 x_1 x_1)$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğru değildir.

$s_j^{1 \rightarrow bi *vm2}$ fonksiyonlarının hiçbirisi için, $F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünün $s_{m2}^{1 \rightarrow bi}$ fonksiyonundaki değeri $s_{m2}^{1 \rightarrow bi}(F_1^2 x_1 x_1) = \alpha$ olmadığından, $(\exists x_1)F_1^2 x_1 x_1$ ve $(\forall x_1)F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülleri P^Q dilinin $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğru değildir.

Kısayollarla 1: P^Q dilinin $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülü ancak ve ancak $\mathcal{M}_2$ yorumundaki Σ kümesinin elemanı olan tüm s_k sayılabilir sonsuz dizileri $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğrudur. Σ kümesinin elemanı olan s_k sayılabilir sonsuz dizisi $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü ancak ve ancak Ψ_{s_k} kümesinin elemanı olan en az bir $s_k^{1 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa karşılar. Ψ_k kümesinin elemanı olan $s_k^{1 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü ancak ve ancak bir $s_k^{1 \rightarrow bi *vm2}$ fonksiyonunda x_1 teriminin değeri olan $b_i \in D(\mathcal{M}_2)$ $F_1^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_{m2} fonksiyonundaki değeri olan P_1^1 bağıntısının elemanı ise karşılar. $s_2^{*vm2}(x_1) = 2$ P_1^1 kümesinin elemanı olduğundan ve sayılabilir sonsuz s_2 dizisi türünden tüm diziler için $s_2 = s_1^{1 \rightarrow 2} = s_3^{1 \rightarrow 2}$ olduğundan, tüm sayılabilir sonsuz diziler $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılar. $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülü $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğrudur.

Kısayollarla 2: P^Q dilinin $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülü ancak ve ancak $\mathcal{M}_2$ yorumundaki Σ kümesinin elemanı olan tüm s_i sayılabilir sonsuz dizileri $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa P^Q dilinin $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğrudur. Aksi hâlde doğru değildir. $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğru olmadığı kabul edildiğinde, bu kabülden $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılamayan bir s_k sayılabilir sonsuz dizisinin olduğu sonucu çıkar. Böyle ise $F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılayan hiçbir $s_k^{1 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi yoktur. $s_2^{*vm2}(x_1) = 2$ P_1^1 kümesinin elemanı olduğundan, s_2 sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılar. Birinci elemanı 2 olan s_2 dizisi, s_k sayılabilir sonsuz dizisi için $s_k^{1 \rightarrow bi} [s_2 = s_k^{1 \rightarrow 2}]$ sayılabilir sonsuz dizilerinden biridir. Öyleyse $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{M}_2$ yorumunda doğrudur.

ÖRNEK

P^Q dilinin $F_1^1 x_2$ iyi biçimli formülü

$\mathcal{M}_8: D(\mathcal{M}_8) = \{a, b, c\},$

$(F_1^1 t_1)^{vm8} = P_1^1 = \{a, c\}$

yorumunda doğru değildir.

Kısayollarla: $\mathcal{M}_8$ yorumundaki Σ kümesinin elemanı olan sayılabilir sonsuz $s_3 = (c, b, \dots, s_{n3}, s_{(n+1)3}, \dots)$ dizisi için, $s_3^{*vm8}(x_2) = b$ P_1^1 kümesinin elemanı değildir, s_3 dizisi $F_1^1 x_2$ iyi biçimli formülünü karşılamaz. $F_1^1 x_2$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{M}_8$ yorumunda doğru değildir.

ÖRNEK

P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda geçerlidir: $\models_{\mathcal{P}} (F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$

Kısayollarla: P^Q dilinin $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumuna kısayollarla bağlanan geçerlilik tanıma göre P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü, P^Q dilinin $\mathcal{F}$ yorumunda ancak ve ancak tüm $\mathcal{M}$ yorumlarında doğru ise geçerlidir. Yine tanıma göre P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü ancak ve ancak bir

$\mathcal{M}$ yorumunun Σ sayılabilir sonsuz diziler kümesinin elemanı olan tüm s_i sayılabilir sonsuz dizileri $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa $\mathcal{M}$ yorumunda doğrudur. Tanımlara göre $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü, formülü karşılamayan bir sayılabilir sonsuz s_k dizisinin olduğu bir $\mathcal{M}$ yorumu varsa geçerli değildir.

' x_1 ' teriminin bir $\mathcal{M}$ yorumundaki herhangi bir $s_i^{*v_m}$ fonksiyonunda aldığı değer olan $s_i^{*v_m}('x_1') = b_i \in D(\mathcal{M})$ $F_1^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonunda aldığı değer olan P_1^1 kümesinin ya elemanıdır ya da elemanı değildir.

$s_i^{*v_m}('x_1') \in D(\mathcal{M})$ P_1^1 kümesinin elemanı ise s_i dizisi $(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılar. Dolayısıyla kısayol gereği $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılar. $s_i^{*v_m}('x_1') \in D(\mathcal{M})$ P_1^1 kümesinin elemanı değilse s_i dizisi $(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamaz. Dolayısıyla kısayol gereği $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılar. Bir $\mathcal{M}$ yorumunda $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ formülünü karşılamayan hiçbir s_i dizisi yoktur. Tüm s_i dizileri $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılar. Dolayısıyla $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamayan sayılabilir sonsuz bir s_k dizisinin olduğu bir $\mathcal{M}$ yorumu yoktur. Öyleyse $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $\mathcal{I}$ yorumunda geçerlidir.

ÖRNEK

P^Q dilinin $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{I} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda sonucudur: $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1) \models_{P^Q} (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$

Hipotez: $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{I}$ yorumunda sonucu değildir.

Kısayollarla: P^Q dilinin $\mathcal{I} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumuna kısayollarla bağlanan sonuç tanımına göre $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün, $\mathcal{I}$ yorumunda ancak ve ancak tüm $\mathcal{M}$ yorumlarında $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılayan tüm sayılabilir sonsuz s_i dizileri $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa sonucudur. Hipotezden bu tanıma göre en az bir $\mathcal{M}_k$ yorumunda en az bir sayılabilir sonsuz s_k dizisinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşıladığı ve $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ formülünü karşılamadığı sonucu çıkar. $s_k = (s_{1k}, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ dizisi $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa $(\forall x_j)A_k$ biçimindeki formüllerinin karşılanması kısayoluna göre $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamayan en az bir sayılabilir sonsuz $s_k^{1 \rightarrow bi} = (s_{1k \rightarrow bi}, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ dizisi vardır. Bir önceki örnekte gösterildiği üzere tüm $\mathcal{M}$ yorumlarındaki sayılabilir sonlu s_i dizileri $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılar. $\mathcal{M}_k$ yorumunun sayılabilir sonsuz $s_k^{1 \rightarrow bi} = (s_{1k \rightarrow bi}, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ dizisi $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılar. Bir sayılabilir sonsuz s_i dizisinin bir iyi biçimli formülü karşıladığı ve karşılamadığı birlikte tutulamaz. Hipotezden $\mathcal{M}_k$ yorumunun sayılabilir sonsuz $s_k^{1 \rightarrow bi} = (s_{1k \rightarrow bi}, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ dizisinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşıladığı ve karşılamadığı sonucu çıktığı için $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{I}$ yorumunda sonucudur.



‘ $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ ’ iyi biçimli formülü, P^Q dilinin

$\mathcal{M}_k = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$:

$D(\mathcal{M}_k) = \{x : x \in \mathbb{Z}\}$

$(F_1^1 t_1)^{v_{mk}} = P_1^1$

$(F_1^2 t_1 t_2)^{v_{mk}} = R_1^2$

$(A)^{v_{mk}} = \{s_a\}$

$P_1^1 = \{x : x \in \mathbb{Z}^+.\}$

$R_1^2 = \{(x, y) : x = y\}$

$s_a = (1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots)$

$s_1 = (1, 3, 5, \dots)$

$s_2 = (2, 3, 5, \dots)$

yorumunda yanlış değilse doğru mudur?



‘ P^Q dilinin

$\mathcal{M}_k = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$:

$D(\mathcal{M}_k) = \{x : x \in \mathbb{Z}\}$

$(F_1^1 t_1)^{v_{mk}} = P_1^1$

$(F_1^2 t_1 t_2)^{v_{mk}} = R_1^2$

$(A)^{v_{mk}} = \{s_a\}$

$P_1^1 = \{x : x \in \mathbb{Z}^+.\}$

$R_1^2 = \{(x, y) : x = y\}$

$s_a = (1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots)$

$s_1 = (1, 3, 5, \dots)$

$s_2 = (2, 3, 5, \dots)$

yorumunda s_2 sayılabilir sonsuz dizisi P^Q dilinin ‘ $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ ’ iyi biçimli formülünü karşılar mı?



‘ $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin

$\mathcal{M}_k = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$:

$D(\mathcal{M}_k) = \{x : x \in \mathbb{Z}\}$

$(F_1^1 t_1)^{v_{mk}} = P_1^1$

$(F_1^2 t_1 t_2)^{v_{mk}} = R_1^2$

$(A)^{v_{mk}} = \{s_a\}$

$P_1^1 = \{x : x \in \mathbb{Z}^+.\}$

$R_1^2 = \{(x, y) : x = y\}$

$s_a = (1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots)$

$s_1 = (1, 3, 5, \dots)$

$s_2 = (2, 3, 5, \dots)$

yorumunda yanlış mıdır?



‘ $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü ‘ $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda sonucu mudur?

Tanım 15. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda, P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_{P^Q} A_j$ ve $A_i \models_{P^Q} \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa A_i iyi biçimli formülü *model-teorik tutarlıdır*. [*m-tutarlı*].

Tanım 16. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda, P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \models_p^Q A_j$ ve $A_i \models_p^Q \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa A_i iyi biçimli formülü *model-teorik tutarsızdır*. [*m-tutarsız*].

Tanım 17. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda, P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi için $\Delta \models_p^Q A_j$ ve $\Delta \models_p^Q \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa iyi biçimli formül kümesi Δ *model-teorik tutarlıdır*.

Tanım 18. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda, P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi için $\Delta \models_p^Q A_j$ ve $\Delta \models_p^Q \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa iyi biçimli formül kümesi Δ *model-teorik tutarsızdır*.

P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumu İçin Üst-Teorem

P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumunda Dedüksiyon Üst-Teoremi

P^Q dilinin A_i iyi biçimli kapalı formülü P^Q dilinin A_j iyi biçimli kapalı formülünü $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda *içeriyorsa*, $(A_i \supset A_j)$ iyi biçimli kapalı formülü $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda *geçerlidir*: $A_i \models_p^Q A_j$ ise $\models_p^Q (A_i \supset A_j)$

Özet



P^Q dilini açıklamak.

Biçimsel dil ‘alfabe’ adı verilen kümeden, belirli kurallara göre oluşturulmuş boş olmayan sonlu dizilerin kümesidir. P^Q , bu şartlara uyduğu için biçimsel bir dildir: P^Q dilinin elemanları, dilin alfabesi olan $\Lambda = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,), x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots, f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots, \forall, \exists\}$ kümesinin elemanlarından, dilin biçimleme kurallarına uygun olarak seçilmiş boş olmayan sonlu dizilerdir.



P^Q dilinin bir iyi biçimli formülünün aynı dildeki tanımsal karşılığını ve P^Q dilinin alfabesinin tanımsal olarak tam olan alt kümelerini tanımlamak.

P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülünü sonlu sayıda adımda A_i iyi biçimli formülüne karşılık getirme işlemine ‘dönüştürme’ adı verilir. P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülünün A_i iyi biçimli formülünden belirli kurallara uygun bir dönüştürmesi varsa A_j iyi biçimli formülü A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığıdır.

P^Q dilinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists\}$ alt kümesinin Δ alt kümesi, P^Q dilinin her iyi biçimli formülünün, formülde geçişi olan $p_i, x_i, a_i, f_i^n, F_i^n$ harflerinin ve sadece Δ kümesindeki elemanların geçişlerini içeren tanımsal karşılığı varsa Δ alt kümesi P^Q dili için tanımsal tamdır.

P^Q dilinin, her bir elemanı için tanımsal karşılık olan en az bir elemanın olduğu alt kümeleri vardır.



P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunu ve P^Q dilinin bir $\mathcal{M}$ yorumunda iyi biçimli formüllerin yorumunu açıklamak.

P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumu $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ sıralı üçlüsüdür. $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ sıralı üçlüsünde,

$\mathcal{C}$ kümesi $\mathcal{D} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ kümesidir:

- D^n (D^n ($n \geq 2$) kümesi herhangi bir D kümesinin $D_1 \times \dots \times D_n$ sonlu kartezyen çarpımıdır) kümesinin tüm alt kümelerinin, D^ω kümesinin (D^ω kümesi D kümesinin $D_1 \times \dots \times D_n \times D_{n+1} \times \dots$ sonsuz kartezyen çarpımıdır) tüm alt kümelerinin ve D kümesinin koleksiyonu olan $\mathcal{D}$ kümesi,
- T^n kümesinin (T^n ($n \geq 2$) kümesi $T = \{d, y\}$ kümesinin $T_1 \times \dots \times T_n$ sonlu kartezyen çarpımıdır) tüm alt kümelerinin, T^ω kümesinin (T^ω kümesi $T = \{d, y\}$ kümesinin $T_1 \times \dots \times T_n \times T_{n+1} \times \dots$ sonsuz kartezyen çarpımıdır) ve $T = \{d, y\}$ kümesinin koleksiyonu olan $\mathcal{T}$ kümesi ve

- $S = \{\alpha, \beta\}$ kümesinin bileşimi;

$\mathcal{L}$ kümesi $P^Q \cup T^Q \cup \{\Omega\} \cup \{A\}$ kümesidir:

- P^Q dili,
- P^Q dilinin T^Q terimler kümesi,
- P^Q dilinin $\Omega = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesi ve
- P^Q dilinin T^Q terimler kümesinin $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesinin bileşimi;

$\mathcal{V}$ kümesi ise:

- $P^{Qa} \cup (T^Q - (X \cup A)) \cup \{\Omega\} \cup \{A\}$ kümesinden, yani P^Q dilinin atomik iyi biçimli formüllerinin veya terim geçişinin olmadığı iyi biçimli formüllerinin kümesi olan P^{Qa} kümesi, P^Q dilinin T^Q terimler kümesinin $X = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ veya $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümelerinin elemanı olmayan terimlerinin kümesi, P^Q dilinin $\Omega = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesi ve P^Q dilinin T^Q terimler kümesinin $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ alt kümesinin kümesinin bileşiminden $\mathcal{D} \cup \mathcal{T}$ kümesine v_i fonksiyonları,

- $T^Q \cup \Omega$ kümesinden $D \cup T$ kümesine s_j^{*vi} fonksiyonları,
- P^Q kümesinden $S = \{\alpha, \beta\}$ kümesine s_{ij} fonksiyonları ve
- P^Q dilinin Π^Q alt kümesinden T kümesine m_i fonksiyonun koleksiyonudur.

P^Q dilinin bir $\mathfrak{U}$ yorumu olan $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ sıralı üçlüsünde, $\{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\}$ kümesi v_m fonksiyonunu, s_j^{*vi} fonksiyonlarını, s_{mj} fonksiyonunu ve m_m fonksiyonunu içerir.

P^Q dilinin bir $\mathfrak{U}$ yorumundaki D kümesi herhangi bir küme olabileceği gibi P^Q dilinin veya bir alt kümesinin yorumunda D kümesi, yorumda her $F_j^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülüne atanan R_j^n bağıntısının üzerinde tanımlandığı $\Sigma(R_j^n)$ kümesinin elemanı olduğu koleksiyonun bileşimi olan ve $D(\mathfrak{U})$ kümesi olarak adlandırılan kümeye kısıtlanabilir.



P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumuna bağlı olarak tanımlanan özellikleri açıklamak.

P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumuna bağlı olan tanımlar bir A_j iyi biçimli formülü bir $\mathfrak{U}$ yorumunda bir s_{mj} fonksiyonunda aldığı değere göre verilir. Bu tanımların ilki ve diğer tanımların dayandığı tanım P^Q dilinin bir A_j iyi biçimli formülü için yeterlilik tanımıdır. P^Q dilinin bir A_j iyi biçimli formülünün en az $\mathfrak{U} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda en az bir s_{mj} fonksiyonundaki değeri $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise A_j iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathfrak{U})$ yorumunda yeterlidir.

$s_{mj}: P^Q \rightarrow S$ olan bir $s_{mj} \in \mathfrak{U}$ fonksiyonunda P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülünün değeri, formülde geçişi olan p_k harfinin s_j^{*vm} fonksiyonunda aldığı değere ve formülde geçişi olan terimlerin s_j^{*vm} fonksiyonunda aldığı değerlerin ürettiği sonlu $(b_1, \dots, b_n)$ ($b_i \in D$) dizisine bağlı olarak $S = \{\alpha, \beta\}$ kümesinden bir elemandır.

P^Q iyi biçimli formül kümesinin A_j iyi biçimli formülünün s_{mj} fonksiyonunda aldığı değer,

$A_j = F_k^n t_1 \dots t_n$ ise:

- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunda t_1 teriminin değeri olan $b_i \in D$, $F_k^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan P_k^1 alt kümesinin elemanı ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$,
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunda t_1 teriminin değeri olan $b_i \in D$, $F_k^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan P_k^1 alt kümesinin elemanı değilse $s_{mj}(A_j) = \beta$
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ve D^n kümesinin elemanı olan $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_k^n ($R_k^n = (F_k^n)^{vm}$) bağıntısının elemanı ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği ve D^n kümesinin elemanı olan $(b_1, \dots, b_n)$ sonlu dizisi, $F_k^n t_1 \dots t_n$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonundaki değeri olan R_k^n ($R_k^n = (F_k^n)^{vm}$) bağıntısının elemanı değilse $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = p_k$ ise:

- Bir s_j^{*vm} fonksiyonundaki p_k 'nin değeri $d \in T = \{d, y\}$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- Bir s_j^{*vm} fonksiyonundaki p_k 'nin değeri $y \in T = \{d, y\}$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = \sim A_k$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$
- $s_{mj}(A_k) = \beta$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$

$A_j = (A_k \wedge A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \beta$ veya $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (A_k \vee A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ veya $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (A_k \supset A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \beta$ veya $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (A_k \equiv A_p)$ ise:

- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ veya $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- $s_{mj}(A_k) = \alpha$ ve $s_{mj}(A_p) = \beta$ veya $s_{mj}(A_k) = \beta$ ve $s_{mj}(A_p) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (\forall x_k)A_p$ ise:

- Tüm $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonları için $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \alpha$ ise, $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- En az bir $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonunda $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \beta$ ise, $s_{mj}(A_j) = \beta$

$A_j = (\exists x_k)A_p$ ise:

- En az bir $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonu için $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \alpha$ ise $s_{mj}(A_j) = \alpha$
- Tüm $s_j^{k \rightarrow bi \ast vm}$ fonksiyonları için $s_{mj}^{k \rightarrow bi}(A_p) = \beta$ ise $s_{mj}(A_j) = \beta$ olur.

P^Q dilinin A_j iyi biçimli formülü, $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda ancak ve ancak en az bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda en az bir s_{mj} fonksiyonundaki değeri $s_{mj}(A_j) = \alpha$ ise yeterlidir.

P^Q dilinin $\Gamma = \{A_j : A_j \in P^Q\}$ iyi biçimli formül kümesi, $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda ancak ve ancak Γ kümesinin elemanı olan tüm A_j iyi biçimli formülleri için $s_{mj}(A_j) = \alpha$ olan en az bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_m, s_j^{*vm}, s_{mj}, m_m\})$ yorumunda en az bir s_{mj} fonksiyonu varsa yeterlidir.

Kendimizi Sıneyalım

1. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin kapalı iyi biçimli formülüdür?

- $((\forall x_1)F_1^1 x_1 \supset (\forall x_2)F_1^1 x_1)$
- $(F_1^1 x_1 \supset (\forall x_1)(F_1^1 x_1))$
- $(p_2 \supset (\forall x_1)(F_1^1 x_1))$
- $((\forall x_1)F_1^1 x_1 \supset (\forall x_1)F_1^1 x_2)$
- $(\forall x_1)(F_1^1 x_2 \supset F_2^1 x_1)$

2. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin ' $\sim(\forall x_1)F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığıdır?

- $(\exists x_1)F_1^1 x_1$
- $(\exists x_1) \sim F_1^1 x_1$
- $\sim(\exists x_1) \sim F_1^1 x_1$
- $(\exists x_1) \sim \sim F_1^1 x_1$
- $\sim(\exists x_1) \sim \sim F_1^1 x_1$

3. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin ' $\sim(\exists x_1)F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığıdır?

- $\sim(\forall x_1)F_1^1 x_1$
- $\sim F_1^1 x_1$
- $\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$
- $(\forall x_1)F_1^1 x_1$
- $(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$

4. Aşağıdaki gibi seçilen Q dilinin biçimleme kuralları ve P^Q dilinin biçimleme kuralları ile seçeneklerden hangisi birlikte tutulur?

Alfabe : $A = \{\sim, \supset, (,), x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots, f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots, \forall\}$

Biçimleme kuralları:

- Q dilinin bir iyi biçimli formülü A kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan bir dizisidir.
- (a) $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ ve $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümelerindeki elemanların her geçişi terimdir.
(b) $t_1, \dots, t_n$ terim ise $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ terimdir.
(c) A kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (a) ve (b)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey terim değildir.
- t_i terim ise $F_k^n t_1 \dots t_n$ Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür.
- Eğer A_i Q dilinin iyi biçimli formülü ise, $\sim A_i$ ve $(\forall x_i)A_i$ Q dilinin iyi biçimli formülleridir.
- Eğer A_i ve A_j Q dilinin iyi biçimli formülleri ise, $(A_i \supset A_j)$ Q dilinin iyi biçimli formülüdür.
- A kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (iii), (iv) ve (v)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey Q dilinin iyi biçimli formülü değildir.
- Q dilinin tüm iyi biçimli formülleri P^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.
- Q dilinde P^Q dilinin her A_i iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığı vardır.
- Eğer A_i P^Q dilinin iyi biçimli formülü ise A_i Q dilinin de iyi biçimli formülüdür.
- Q dili ve P^Q dili aynı dildir.
- Q dilinin P^Q dilinin iyi biçimli formülü olmayan bir iyi biçimli formülü vardır.

5. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin ' $(\sim(\exists x_1)F_1^1x_1 \vee (\exists x_1)F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formülünün Q dilindeki tanımsal karşılığıdır?

- a. $((\forall x_1) \sim F_1^1x_1 \supset \sim(\forall x_1) \sim F_1^1x_1)$
- b. $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_1) \sim F_1^1x_1)$
- c. $(\sim(\forall x_1) \sim F_1^1x_1 \supset \sim(\forall x_1) \sim F_1^1x_1)$
- d. $((\exists x_1)F_1^1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^1x_1)$
- e. $((\forall x_1) \sim F_1^1x_1 \vee \sim(\forall x_1) \sim F_1^1x_1)$

6. $\mathcal{M}_9$: $D(\mathcal{M}_9) = \{a, b\}$,

$$(F_1^2t_1t_2)^{vm9} = R_1^2 = \{(a, a), (b, a), (a, b)\}$$

P^Q dilinin $\mathcal{M}_9$ yorumunda seçeneklerdeki iyi biçimli formüllerden hangisi **yanlış değildir**?

- a. $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$
- b. $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$
- c. $\sim(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$
- d. $(\forall x_1) \sim F_1^2x_1x_1$
- e. $\sim(\exists x_1) \sim F_1^2x_1x_1$

7. $\mathcal{M}_{10}$: $D(\mathcal{M}_{10}) = \{d, e, f\}$,

$$(F_1^2t_1t_2)^{vm9} = R_1^2 = \{(d, d), (e, e), (f, f), (d, f)\}$$

P^Q dilinin $\mathcal{M}_{10}$ yorumunda seçeneklerdeki iyi biçimli formüllerden hangisi **yanlıştır**?

- a. $((\exists x_3)F_1^2x_3x_3 \wedge (\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2x_2x_3)$
- b. $(\forall x_1) \sim F_1^2x_1x_1$
- c. $\sim(\exists x_4) \sim F_1^2x_4x_4$
- d. $(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2x_2x_3$
- e. $(\exists x_3)(\exists x_2)F_1^2x_2x_3$

8. P^Q dilinin ' $(\forall x_1)(F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formülü, seçeneklerdeki iyi biçimli formüllerden hangisinin P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda **sonucudur**?

- a. $(\forall x_1)(F_2^1x_1)$
- b. $(\exists x_1)(F_1^1x_1)$
- c. $(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_1^1x_1)$
- d. $((\forall x_1)F_1^1x_1 \supset (\forall x_1)F_1^1x_1)$
- e. $(\forall x_2)(F_1^1x_2)$

9. P^Q dilinin ' $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$ ' iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda **sonucu** seçeneklerdeki iyi biçimli formüllerden hangisi **değildir**?

- a. $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$
- b. $\sim(\forall x_1) \sim F_1^2x_1x_1$
- c. $((\exists x_1)F_1^2x_1x_1 \vee (\forall x_1)F_1^2x_1x_1)$
- d. $(\sim(\forall x_1) \sim F_1^2x_1x_1 \vee (\forall x_1)F_1^2x_1x_1)$
- e. $((\exists x_1)F_1^2x_1x_1 \supset \sim(\forall x_1) \sim F_1^2x_1x_1)$

10. P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumunda seçeneklerdeki iyi biçimli formüllerden hangisi **geçerlidir**?

- a. $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \equiv (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$
- b. $((\exists x_1)F_1^2x_1x_1 \equiv (\forall x_1)F_1^2x_1x_1)$
- c. $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$
- d. $((\exists x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\forall x_1)F_1^2x_1x_1)$
- e. $(\exists x_1)(F_1^2x_1x_1 \vee F_1^2x_1x_1)$

Kendimizi Sınavalım Yanıt Anahtarı

- 1. c** Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dili” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Tanıma göre, bir iyi biçimli formülde hiçbir ‘ x_i ’ harfinin serbest geçişi yoksa, o iyi biçimli formül P^Q dilinin kapalı iyi biçimli formülüdür. ‘ x_1 ’ harfinin a seçeneğindeki iyi biçimli formüldeki üçüncü geçişi, b seçeneğindeki iyi biçimli formüldeki ilk geçişi, ‘ x_2 ’ harfinin d ve e seçeneklerindeki iyi biçimli formüllerdeki geçişleri serbesttir. c seçeneğindeki iyi biçimli formülde hiçbir ‘ x_i ’ harfinin serbest geçişi yoktur. ‘ x_1 ’ harfinin formüldeki her iki geçişi de bağlıdır.
- 2. b** Yanıtınız yanlış ise “Tanımsal Karşılık” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $(\forall x_j)A_i =_{\text{tm}} \sim(\exists x_j) \sim A_i$ dönüştürme kuralına göre ‘ $(\forall x_1)F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığı ‘ $\sim(\exists x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülüdür. $\sim \sim A_i =_{\text{tm}} A_i$ dönüştürme kuralına göre de ‘ $\sim(\forall x_1)F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığı ‘ $(\exists x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülüdür.
- 3. e** Yanıtınız yanlış ise “Tanımsal Karşılık” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $(\exists \forall x_j)A_i =_{\text{tm}} \sim(\forall x_j) \sim A_i$ dönüştürme kuralına göre ‘ $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığı ‘ $\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülüdür. $\sim \sim A_i =_{\text{tm}} A_i$ dönüştürme kuralına göre de ‘ $\sim(\exists x_1)F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığı ‘ $(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülüdür.
- 4. a** Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dili ile P^Q Dilinin Alt Kümeleri Arasındaki Bağlılıklar” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. Q dilinin alfabesi P^Q dilinin alfabesinin alt kümesi olduğundan ve P^Q dilinin biçimleme kuralları Q dilinin biçimleme kurallarını içerdiğinden, Q dilinin tüm iyi biçimli formülleri P^Q dilinin iyi biçimli formülüdür. P^Q dilinin alfabesinin elemanı olan ama Q dilinin alfabesinin elemanı olmayan harfler ve P^Q dilinin bu harflerin geçişlerinin olduğu iyi biçimli formülleri olduğundan, P^Q dilinin elemanı olan ve Q dilinin elemanı olmayan boş olmayan ve sonlu diziler vardır. c, d ve e seçenekleri bu sebepten kabul edilemez. Ancak P^Q dilinin elemanı

olan ve P^Q dilinin alt kümesi Q dilinin elemanı olmayan boş olmayan sonlu dizilerin olması, Q dilinde P^Q dilinin her A_i iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığı olmadığı sonucunu içermez. Fakat $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ kümesindeki elemanların geçişlerini içeren P^Q dilinin iyi biçimli formülleri için Q dilinin alfabesindeki elemanların boş olmayan sonlu dizisi olan tanımsal karşılıklar belirlenmediği için b seçeneği de kabul edilemez.

- 5. c** Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dili ile P^Q Dilinin Alt Kümeleri Arasındaki Bağlılıklar” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. P^Q dilinin $(A_i \supset A_j) =_{\text{tm}} (\sim A_i \vee A_j)$ dönüştürme kuralına göre ‘ $((\exists x_1)F_1^1 x_1 \supset (\exists x_1)F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü, ‘ $(\sim(\exists x_1)F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1)F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığıdır. $(\exists x_j)A_i =_{\text{tm}} \sim(\forall x_j) \sim A_i$ dönüştürme kuralına göre de, P^Q dilinin ‘ $\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülü, P^Q dilinin ‘ $(\exists x_1)F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün tanımsal karşılığıdır. Öyleyse, P^Q dilinin ‘ $(\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1 \supset \sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü ‘ $((\exists x_1)F_1^1 x_1 \supset (\exists x_1)F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığıdır. ‘ $(\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1 \supset \sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1)$ ’ boş olmayan sonlu dizisi Q dilinin alfabesindeki elemanların geçişlerinin biçimleme kurallarına uygun bir dizisi olduğundan, Q dilinin elemanıdır ve P^Q dilinin ‘ $((\exists x_1)F_1^1 x_1 \supset (\exists x_1)F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin alt kümesi Q dilindeki tanımsal karşılığıdır.
- 6. a** Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin $\mathcal{G} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{O})$ Yorumuna Bağlı Tanımlar” ve “Kısayollar” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. **Kısayollarla:** ‘ $(\exists x_1)F_1^2 x_1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünde geçişi olan terim ‘ x_1 ’ terimidir. $D(\mathcal{M}_9) = \{a, b\}$ kümesinin elemanları a ve b olduğundan, $\mathcal{M}_9$ yorumunun Σ kümesi, ortak elemanları olmayan $\Sigma_a = \{s_i : s_i = (a, \dots, s_{ni}, s_{(n+1)i}, \dots)\}$ ve $\Sigma_b = \{s_j : s_j = (a, \dots, s_{nj}, s_{(n+1)j}, \dots)\}$ alt kümelerine ayrılabilir. $s_k = (a, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ Σ_a kümesindeki elemanların, $s_m = (b, \dots, s_{nm}, s_{(n+1)m}, \dots)$ Σ_b kümesindeki elemanların örneğidir. P^Q dilinin ‘ $F_1^2 x_1 x_1$ ’

iyi biçimli formülü için bir s_k^{*vm9} fonksiyonunun değerler kümesinin ürettiği (a, a) sonlu dizisi $F_1^2 t_1 t_2$ iyi biçimli formülünün v_{m9} fonksiyondaki değeri olan $\{(a, a), (b, a), (a, b)\}$ bağıntısının elemanıdır. Σ kümesinin elemanı olan sayılabilir sonsuz bir $s_k = (a, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ dizisi $F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılar. Sayılabilir sonsuz bir $s_k = (a, \dots, s_{nk}, s_{(n+1)k}, \dots)$ dizisi, sayılabilir sonsuz bir $s_k^{1 \rightarrow a}$ dizisi olduğundan, s_k dizisi $(\exists x_1) F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılar. $(\exists x_1) F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{M}_9$ yorumunda yanlış değildir.

- 7. b** Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlanan Tanımlar”, “Kısayollar” ve “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Kısayollarla Bağlanan Tanımlar” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. **Kısayollarla:** $(\forall x_1) \sim F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü $\mathcal{M}_{10}$ yorumunda karşılayan, Σ kümesinin elemanı hiçbir sayılabilir sonsuz s_i dizisi yoktur: Σ kümesinin elemanı olan herhangi bir sayılabilir sonsuz s_i dizisinin $(\forall x_1) \sim F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılaması için, Ψ_{s_i} kümesinin elemanı olan tüm $s_i^{1 \rightarrow bi}$ dizilerinin, $D(\mathcal{M}_{10}) = \{d, e, f\}$ kümesi olması sebebiyle tüm $s_i^{1 \rightarrow d}$, $s_i^{1 \rightarrow e}$ ve $s_i^{1 \rightarrow f}$ dizilerinin $\sim F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılaması ve kısayola göre $F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılamaması gerekir. Her $s_i^{1 \rightarrow bi * vm10}$ fonksiyonu için, x_1 teriminin $s_i^{1 \rightarrow bi * vm10}$ fonksiyonundaki değeri olan $s_i^{1 \rightarrow bi * vm10}(x_1) = s_{i1 \rightarrow bi} = b_i \in D(\mathcal{M}_{10})$ ’in ürettiği (b_i, b_i) sıralı ikilerinden hiçbirinin $F_1^2 t_1 t_2$ iyi biçimli formülünün v_{m10} fonksiyonunda aldığı değer olan $(F_1^2 t_1 t_2)^{vm10} = R_1^2$ bağıntısının elemanı olmaması gerekir. $s_i^{1 \rightarrow d * vm10}(x_1) = d$ değeri için (d, d) ; $s_i^{1 \rightarrow e * vm10}(x_1) = e$ değeri için (e, e) ; $s_i^{1 \rightarrow f * vm10}(x_1) = f$ değeri için (f, f) sıralı ikilerinden hiçbirinin R_1^2 bağıntısının elemanı olmaması gerekir. (d, d) , (e, e) ve (f, f) sıralı ikileri R_1^2 bağıntısının elemanlarıdır. En az bir (b_i, b_i) ikilisinin R_1^2 bağıntısının elemanı olması bir sayılabilir sonsuz s_i dizisinin $(\forall x_1) \sim F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılamaması için yeterlidir. $\mathcal{M}_{10}$ yorumundaki Σ kümesinin elemanı olan hiçbir sayılabilir sonsuz s_i dizisi $(\forall x_1) \sim F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılamaz. $(\forall x_1) \sim F_1^2 x_1 x_1$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{M}_{10}$ yorumunda yanlıştır.

- 8. e** Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlanan Tanımlar”, “Kısayollar” ve “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Kısayollarla Bağlanan Tanımlar” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda sonucudur: $(\forall x_2)(F_1^1 x_2) \models_{P^Q} (\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ **Kısayollarla:** P^Q dilinin $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ iyi biçimli formülünün, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda ancak ve ancak $\Gamma = \{(\forall x_2)(F_1^1 x_2), (\forall x_1)(F_1^1 x_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm $\mathcal{M}_i$ yorumlarında $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ formülünü karşılayan tüm s_i sayılabilir sonlu dizileri $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa sonucudur. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda sonucu olmadığı hipotezinden, en az bir $\mathcal{M}_k$ yorumunun Σ kümesinde $\Gamma = \{(\forall x_2)(F_1^1 x_2), (\forall x_1)(F_1^1 x_1)\}$ kümesinin $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ iyi biçimli formülünü karşılayan ve $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamayan en az bir sayılabilir sonsuz s_m dizisinin olduğu sonucu çıkar. Sayılabilir sonsuz s_m dizisi $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa, $\mathcal{M}_k$ yorumunun Ψ_{s_m} kümesinin elemanı olan tüm $s_m^{2 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizileri $F_1^1 x_2$ iyi biçimli formülünü karşılar: $D(\mathcal{M}_k)$ kümesinin tüm b_i elemanları $F_1^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonunda aldığı değer olan P_1^1 kümesinin elemanıdır. s_m dizisi $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa, $\mathcal{M}_k$ yorumunun Ψ_m kümesinin elemanı olan en az bir $s_m^{1 \rightarrow bk}$ sayılabilir sonsuz dizisi vardır ve $s_m^{1 \rightarrow bk}$ dizisi $F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılamaz: $D(\mathcal{M}_k)$ kümesinin, $F_1^1 t_1$ iyi biçimli formülünün v_m fonksiyonunda aldığı değer olan P_1^1 kümesinin elemanı olmayan en az bir b_i elemanı vardır. $D(\mathcal{M}_k)$ kümesinin tüm elemanlarının P_1^1 kümesinin elemanı olduğu ve $D(\mathcal{M}_k)$ kümesinin en az bir elemanının P_1^1 kümesinin elemanı olmadığı birlikte tutulamayacağından, $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda sonucu olmadığı hipotezi kabul edilemez. P^Q dilinin $(\forall x_1)(F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $(\forall x_2)(F_1^1 x_2)$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{S}$ yorumunda sonucudur.

9. a Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlanan Tanımlar”, “Kısayollar” ve “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Kısayollarla Bağlanan Tanımlar” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. P^Q dilinin ‘ $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin ‘ $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *sonucu* değildir. **Kısayollarla:** ‘ $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülü ‘ $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *sonucu* olmadığını göstermek için karşı örnek vermek yeterlidir. 6. soruda $\mathcal{D}(\mathcal{M}(\mathcal{S})) = \{a, b\}$, $(F_1^2t_1t_2)^{vm9} = R_1^2 = \{(a, a), (b, a), (a, b)\}$ olarak verilen yorumdaki Σ kümesinin elemanı olan $s_2 = (b, b, \dots, s_{n2}, s_{(n+1)2}, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizisi ‘ $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılar. O halde, Ψ_{s_2} kümesinin ‘ $F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılayan en az bir elemanı vardır. Ψ_{s_2} kümesinin elemanı olan $s_2^{1 \rightarrow a} = (a, b, \dots, s_{n2}, s_{(n+1)2}, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizisi ‘ $F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılar. $s_2^{1 \rightarrow a * vm9}(x_1) = a$ değerinin ürettiği (a, a) sıralı ikilisi $R_1^2 = \{(a, a), (b, a), (a, b)\}$ bağıntısının elemanıdır. Ψ_{s_2} kümesinin elemanı olan $s_2^{1 \rightarrow b} = (b, b, \dots, s_{n2}, s_{(n+1)2}, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizisi ‘ $F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamaz. $s_2^{1 \rightarrow b * vm9}(x_1) = b$ değerinin ürettiği (b, b) sıralı ikilisi $R_1^2 = \{(a, a), (b, a), (a, b)\}$ bağıntısının elemanı değildir. $s_2 = (b, b, \dots, s_{n2}, s_{(n+1)2}, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizisi ‘ $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamaz. $\Gamma = \{(\exists x_1)F_1^2x_1x_1, (\forall x_1)F_1^2x_1x_1\}$ iyi biçimli formül kümesinin, Σ kümesinde, ‘ $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılayan ve ‘ $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamayan bir s_i sayılabilir sonlu dizisinin olduğu bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır.

10. c Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlanan Tanımlar”, “Kısayollar” ve “ P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Kısayollarla Bağlanan Tanımlar” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz. P^Q dilinin ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir: $\models_{P^Q} ‘((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)’$ **Kısayollarla:** ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülü ancak ve ancak tüm $\mathcal{M}$ yorumlarında doğru ise P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir. ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülü ancak ve ancak Σ kümesinin elemanı olan tüm s_k sayılabilir sonsuz dizileri A_i iyi biçimli formülünü karşılıyorsa

bir $\mathcal{M}$ yorumunda doğrudur. ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün doğru olmadığı bir $\mathcal{M}_i$ yorumu varsa Σ kümesinin ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamayan en az bir elemanı vardır. Σ kümesinin ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamayan elemanı sayılabilir sonsuz s_k dizisi olsun. Sayılabilir sonsuz s_k dizisi ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa, ‘ $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılar ve ‘ $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamaz. Sayılabilir sonsuz s_k dizisi ‘ $(\forall x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa, Ψ_{s_k} kümesinin elemanı olan tüm $s_k^{1 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizileri ‘ $F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılar. $\mathcal{D}(\mathcal{M}(\mathcal{L}))$ kümesinin tüm b_i elemanları için (b_i, b_i) sıralı ikilisi $F_1^2t_1t_2$ iyi biçimli formülünün v_{mk} fonksiyonunda aldığı değer olan R_1^2 bağıntısının elemanıdır. Sayılabilir sonsuz s_k dizisi ‘ $(\exists x_1)F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa Ψ_{s_k} kümesinin elemanı olan hiçbir $s_k^{1 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi ‘ $F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamaz. $\mathcal{D}(\mathcal{M}(\mathcal{L}))$ kümesinin b_i elemanlarının hiçbir (b_i, b_i) sıralı ikilisi $F_1^2t_1t_2$ iyi biçimli formülünün v_{mk} fonksiyonundaki değeri olan R_1^2 bağıntısının elemanı değildir. ‘ P^Q dilinin bir $\mathcal{M}$ yorumunda, Σ kümesinin elemanı olan ve $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamayan bir sayılabilir sonsuz s_k dizisi vardır’ hipotezini takip eden ‘ Ψ_{s_k} kümesinin elemanı olan tüm $s_k^{1 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizileri ‘ $F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılar’ ve ‘ Ψ_{s_k} kümesinin elemanı olan hiçbir $s_k^{1 \rightarrow bi}$ sayılabilir sonsuz dizisi ‘ $F_1^2x_1x_1$ ’ iyi biçimli formülünü karşılamaz’ sonuçları birlikte tutulamaz. ‘ $((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir: $\models_{P^Q} ‘((\forall x_1)F_1^2x_1x_1 \supset (\exists x_1)F_1^2x_1x_1)’$

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

' $((\forall x_2)(\forall x_1)F_1^2x_1x_2 \supset (\forall x_1)F_1^2x_1x_2)$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin bir kapalı formülü değildir. ' $((\forall x_2)(\forall x_1)F_1^2x_1x_2 \supset (\forall x_1)F_1^2x_1x_2)$ ' iyi biçimli formülünde ' x_2 ' harfinin ' $(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülündeki geçişi serbesttir. ' $(\forall x_2)$ ' dizisinin menziline değildir. ' $(\forall x_2)$ ' dizisinin menzili ' $(\forall x_1)F_1^2x_1x_2$ ' iyi biçimli formülüdür.

Sıra Sizde 2

' $(\forall x_1)p_2$ ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülüdür. ' p_2 ' P^Q dilinin alfabesinin elemanıdır. P^Q dilinin (i) ve (iii) numaralı biçimleme kurallarına göre ' p_2 ' P^Q dilinin iyi biçimli formülüdür. ' p_2 ' P^Q dilinin bir iyi biçimli formülü olduğundan, (v) numaralı biçimleme kuralına göre ' $(\forall x_1)p_2$ ' P^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.

Sıra Sizde 3

P^Q dilinin ' $(\forall x_1)(\forall x_2)F_1^1x_1x_2$ ' iyi biçimli formülünün P^Q dilindeki tanımsal karşılığı ' $\sim(\exists x_1)(\exists x_2) \sim F_1^1x_1x_2$ ' iyi biçimli formülüdür: ' $(\forall x_j)A_i =_{\text{tm}} \sim(\exists x_j) \sim A_i$ ' kuralına göre ' $(\forall x_1)(\forall x_2)F_1^1x_1x_2 =_{\text{tm}} \sim(\exists x_1) \sim(\forall x_2)F_1^1x_1x_2$ ' ve ' $(\forall x_2)F_1^1x_1x_2 =_{\text{tm}} \sim(\exists x_2) \sim F_1^1x_1x_2$ ' olduğundan, ' $\sim(\exists x_1) \sim(\forall x_2)F_1^1x_1x_2$ ' iyi biçimli formülündeki ' $(\forall x_2)F_1^1x_1x_2$ ' yerine ' $\sim(\exists x_2) \sim F_1^1x_1x_2$ ' konulduğunda, ' $\sim(\exists x_1) \sim(\forall x_2)F_1^1x_1x_2 =_{\text{tm}} \sim(\exists x_1) \sim\sim(\exists x_2) \sim F_1^1x_1x_2$ olur. $\sim\sim A_i =_{\text{tm}} A_i$ kuralına göre de ' $(\forall x_1)(\forall x_2)F_1^1x_1x_2 =_{\text{tm}} \sim(\exists x_1)(\exists x_2) \sim F_1^1x_1x_2$ ' olur.

Sıra Sizde 4

K^Q dilinin alfabesi $C = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, \sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, (,), x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^1, f_{k+1}^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_k^2, f_{k+1}^2, \dots, f_1^n, f_2^n, \dots, f_k^n, f_{k+1}^n, \dots, f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}, f_{k+1}^{n+1}, \dots, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_{k+1}^1, \dots, F_1^2, F_2^2, \dots, F_k^2, F_{k+1}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_k^n, F_{k+1}^n, \dots, F_1^{n+1}, F_2^{n+1}, \dots, F_k^{n+1}, F_{k+1}^{n+1}, \dots, \exists\}$ olsun.

$\Delta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \exists\}$ olarak seçildiğinde, sadece C kümesindeki elemanların geçişlerini içeren iyi biçimli formüller kümesinde, ' $(\forall x_j)A_i =_{\text{tm}} \sim(\exists x_j) \sim A_i$ ' dönüştürme kuralı göre P^Q dilinin ' $\forall$ ' harfinin geçişlerinin olduğu her formülünün tanımsal karşılığı olan en az bir eleman vardır. Δ alt kümesi P^Q dili için için tanımsal olarak tamdır.

Alfabesi, P^Q dili alfabesinin alt kümesi olan bu küme tanım gereği biçimsel bir dildir.

K^Q dilinin biçimleme kuralları şu şekilde saptanabilir:

i) K^Q dilinin bir iyi biçimli formülü K^Q dilinin alfabesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan bir dizisidir.

ii) (a) $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ ve $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ kümelerindeki elemanların her geçişi terimdir.

(b) $t_1, \dots, t_n$ terim ise $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ terimdir.

(c) C kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (a) ve (b)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey terim değildir.

iii) C kümesinin $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ alt kümesindeki elemanların her geçişi K^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.

iv) t_i terim ise $F_k^n t_1 \dots t_n$ K^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.

v) Eğer A_i K^Q dilinin bir iyi biçimli formülü ise, $\sim A_i, (\exists x_j)A_i$ K^Q dilinin iyi biçimli formülüdür.

vi) Eğer A_i ve A_j K^Q dilinin iyi biçimli formülleri ise, $(A_i \wedge A_j), (A_i \vee A_j), (A_i \supset A_j), (A_i \equiv A_j)$ K^Q dilinin iyi biçimli formülleridir.

vii) C kümesindeki elemanların geçişlerinin sonlu ve boş olmayan dizilerinden (iii), (iv) ve (v)'de belirtilenler hariç, hiçbir şey K^Q dilinin iyi biçimli formülü değildir.

Sıra Sizde 5

P^Q dilinin $\mathcal{M}$ yorumunda ' $(F_1^1x_1 \supset (F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1))$ ' iyi biçimli formülünü karşılayan en az bir sonsuz dizi (*yani* s_1) olduğu için ' P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda ancak ve ancak Σ kümesinin elemanı olan hiçbir s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa *yanlıştır*' kısayolu gereği yanlıştır. Ancak P^Q dilinin ' $(F_1^1x_1 \supset (F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1))$ ' iyi biçimli formülünün $\mathcal{M}$ yorumunda doğru olması için ' P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda ancak ve ancak Σ kümesinin elemanı olan tüm s_k sayılabilir sonsuz dizileri A_i iyi biçimli formülünü karşılıyorsa *doğrudur*.' kısayolu gereği yorumdaki bütün s_i sayılabilir sonsuz dizilerinin formülü karşılaması gerekir. Ancak P^Q dilinin ' $(F_1^1x_1 \supset (F_1^2x_1a_2 \equiv F_1^2x_3a_1))$ ' iyi biçimli formülünün $\mathcal{M}$ yorumunda karşılayan en az bir sonsuz dizi olmasından $\mathcal{M}$

yorumunda $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünü tüm s_i sayılabilir dizilerinin karşıladığı sonucu çıkmaz. P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{M}$ yorumunda doğru olması için formülü karşılamayan hiçbir s_i sonsuz dizisinin olmaması gerekir.

Sıra Sizde 6

P^Q dilinin $\mathcal{M}$ yorumunda $s_2 = (2, 3, 5, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizisi P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünü karşılamaz.

$s_2^{*vmk}('x_1') = 2$ ve 2 sayısı P_1^1 kümesinin elemanı olduğundan, s_2 sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılar.

$s_2^{*vmk}('x_1') = 2$, $s_2^{*vmk}('a_2') = 2$ ve $(2, 2)$ sıralı ikilisi R_1^2 bağıntısının elemanı olduğundan, s_2 sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^2 x_1 a_2$ iyi biçimli formülünü karşılar.

$s_2^{*vmk}('x_3') = 5$, $s_2^{*vmk}('a_1') = 2$ ve $(5, 1)$ sıralı ikilisi R_1^2 bağıntısının elemanı olmadığından, s_2 sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^2 x_3 a_1$ iyi biçimli formülünü karşılamaz.

s_2 sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^2 x_1 a_2$ iyi biçimli formülünü karşılayıp, $F_1^2 x_3 a_1$ iyi biçimli formülünü karşılamadığından, kısayol gereği $(F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamaz.

s_2 sayılabilir sonsuz dizisi $F_1^1 x_1$ iyi biçimli formülünü karşılayıp $(F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamadığından, kısayol gereği $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünü karşılamaz.

Sıra Sizde 7

P^Q dilinin $\mathcal{M}$ yorumunda $s_2 = (2, 3, 5, \dots)$ sayılabilir sonsuz dizisinin $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünü karşılamamasından $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{M}$ yorumunda yanlış olduğu sonucu çıkmaz. $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{M}$ yorumunda yanlış olması için P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü, $\mathcal{M}$ yorumunda ancak ve ancak Σ kümesinin elemanı olan hiçbir s_k sayılabilir sonsuz dizisi A_i iyi biçimli formülünü karşılamıyorsa *yanlıştır* kısayolu gereği hiçbir s_i sayılabilir sonsuz dizisinin formülü

karşılamaması gerekir. Ancak $\mathcal{M}$ yorumunda $s_1 = (1, 3, 5, \dots)$ sonsuz dizisi $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülünü karşılar. P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset (F_1^2 x_1 a_2 \equiv F_1^2 x_3 a_1))$ iyi biçimli formülü $\mathcal{M}$ yorumunda *yanlış değildir*.

Sıra Sizde 8

Hipotez: P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *sonucu* değildir.

P^Q dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumuna kısayollarla bağlanan tanımlardaki sonuç tanımına göre, $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda ancak ve ancak tüm $\mathcal{M}$ yorumlarında $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılayan tüm sayılabilir sonsuz s_i dizileri $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa *sonucudur*. Hipotezden bu tanıma göre çıkan sonuç en az bir $\mathcal{M}_k$ yorumunda en az bir sayılabilir sonsuz s_k dizisinin $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşıladığı ve $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılamadığıdır. $\mathcal{M}_k$ yorumunda s_k dizisi $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılıyorsa, s_k dizisinden en fazla birinci elemanı itibariyle farklı olan tüm sayılabilir sonsuz $s_k^{1 \rightarrow bi}$ dizileri $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşılar. $\mathcal{M}_k$ yorumunda sayılabilir sonsuz s_k dizisi, $s_k^{1 \rightarrow bi}$ dizilerinden biridir $[s_k = s_k^{1 \rightarrow 1}]$, ve hipoteze göre s_k dizisi $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü karşıladığından, $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü de karşılar. Hipotezden çıkan sonuç s_k dizisinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünü hem karşıladığı hem de karşılamadığıdır. Bu sonuç tutulamayacağından P^Q dilinin $(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülü $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün $\mathcal{S}$ yorumunda sonucudur.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. ve Onart, A. (1976). **Mantık Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. (1972). **Symbolic Logic**, Ankara: Faculty of Art and Sciences Publication.

Koç, Y. (1980). **Introduction to Logic**, İstanbul: Boğaziçi University Publications

Mendelson, E. (1964). **Introduction to Mathematical Logic**, Princeton: D. Van Nostrand Company, Inc.

Taşdelen, İ. (2010), **Sembolik Mantık**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

5

SEMBOLİK MANTIK

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;



P^Q dilinin bir kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumundaki çizelge analizini açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Çizelge Analizi
- Kapalı İyi Biçimli Formül

İçindekiler



P^Q Dilinin Bir Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $\mathcal{S}$ Yorumundaki Yorumlarının Analizi

GİRİŞ

Bu ünite P^Q dilinin kapalı iyi biçimli formül kümelerinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumuna bağlı olarak tanımlanan özellikleri için etkin bir saptama yönergesi olan çizelge analizi tanımlanacaktır.

P^Q DİLİNİN KAPALI İYİ BİÇİMLİ FORMÜL KÜMESİNİN $\mathcal{S}$ YORUMUNDAKİ $\mathcal{M}$ YORUMLARI İÇİN ÇİZELGE ANALİZİ

P^Q Dilinin $\{A_i\}$ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumundaki Çizelge Analizi

P^Q iyi biçimli formül kümesinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak ya tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \alpha$ ya da tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \beta$ ise Π^Q iyi biçimli formül kümesinin elemanıdır.

P^Q dilinin bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ yorumunda $\mathcal{V}$ koleksiyonunun elemanı olan bir m_{mk} fonksiyonu, P^Q dilinin alt kümesi olan Π^Q iyi biçimli formül kümesinden $T = \{d, y\}$ kümesine bir fonksiyondur.

Kapalı formüller için üst teorem: Bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ yorumunda, P^Q dilinin bir kapalı iyi biçimli A_i formülünün değeri ya tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \alpha$ ya da tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \beta$ olur.

Dolaysız çıkarım 1. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ yorumundaki m_{mk} fonksiyonundaki değeri ya $m_{mk}(A_i) = d \in T$ ya da $m_{mk}(A_i) = y \in T$ olur.

Dolaysız çıkarım 2. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülü Π^Q iyi biçimli formül kümesinin elemanıdır.

P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumundaki yorumlarının çizelge analizi, P^Q dilinin alfabesi olan Λ kümesinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists\}$ alt kümesindeki elemanların geçişlerinin bulunduğu A_i kapalı iyi biçimli formülünün bir m_{mk} fonksiyonunda aldığı değeri veya $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların bir m_{mk} fonksiyonunda aldığı değerleri sabitleyerek, bu değeri veya değerleri aldığı m_{mj} fonksiyonlarını ve $\mathcal{M}_i$ yorumlarını saptama yöntemidir.

P^Q dilinin bir A_i iyi biçimli formülünün $\mathcal{M}$ yorumunda s_{mkj} fonksiyonunda aldığı değer, A_i iyi biçimli formülünün kendisi ya da parçası olan p_k ya da $F_k^n t_1 \dots t_n$ biçimindeki formüllerin s_{mkj} fonksiyonunda aldığı değerlere göre belirlenir.

Çizelge P^Q dilinin bir genişmesi olan P^Q_D = P^Q $\cup$ D dili ile çalışır. Sayılabilir sonsuz D = $\{d_1, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots\}$ kümesi bir harf kümesidir. P^Q diline eklenen yeni harfler P^Q_D dilinin terimleridir. Bu terimlere dair D($\mathcal{M}$) kümesinin

elemanlarına karşılık gelmek haricinde hiçbir kabulde bulunulmadığından, bu harflere ‘parametreler’ adı verilir. P^Q_D dilinin a_i terimi ile d_i terimleri, P^Q_D dilinin ‘zemin terimi’ olarak adlandırılır ve Z_i kümesinin elemanlarıdır.

DİKKAT



P^Q_D dili P^Q dilinden terim kümesi bakımından farklıdır. P^Q_D dilinin biçimleme kuralları, terim kümesinin seçimi haricinde P^Q dilinin biçimleme kuralları ile aynıdır. Bu sebepten P^Q dili P^Q_D dilinin öz-alt kümesidir. P^Q dilinin kapalı iyi biçimli formül kümesinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{O})$ yorumundaki $\mathcal{N}$ yorumları için çizelge analizi P^Q_D dili ile yapıldığı için P^Q_D dilinin Π^Q_D kapalı formül kümesinden $T = \{d, y\}$ kümesine m_m fonksiyonunun seçilmesi gerekir. Çizelge analiz kuralları, fonksiyonun nasıl seçildiği belirtilmeden, Π^Q_D kümesindeki A_j iyi biçimli formülünün fonksiyonda aldığı değere bağlı olarak verilecektir.

P^Q Dilinin Bir Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumundaki $\mathcal{N}$ Yorumları İçin Analiz Çizelgesinin Tanımlanması ve Çizelge Oluşturma Kuralları

Tanım 1. Bir çizelge $T_0, \dots, T_n$ çizelgelerinin ($n \geq 0$) bütünüdür. T_0 ilk segmentir.

Tanım 2. Tüm $1 \leq i \leq n$ için T_i çizelgesi T_{i-1} çizelgesinin çizelge kurallarına uygun genişlemesidir.

Tanım 3. Bir T_i çizelgesinin her sonlu segment dizisi bir daldır.

Kural 1. Bir T_i çizelgesinin her sonlu segmentinin sağına veya soluna P^Q_D dilinin bir kapalı iyi biçimli formülünün adı yazılır.

Kural 1.1. Bir T_i çizelgesindeki bir segmente yazılan adda tek tırnak işareti kullanılmaz.

Kural 2. Bir T_i çizelgesinde, bir segmentin sağına veya soluna adı yazılan P^Q_D dilinin kapalı iyi biçimli formülünde $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists\}$ kümesinin elemanlarından en az birinin geçişi varsa, o formül için çizelge kuralları uygulanır.

Kural 7. Bir T_i çizelgesinde analiz edilen her iyi biçimli formülünün yanına çizelge kuralı ve T_i çizelgesindeki çizelge kuralı uygulama sıra numarası yazılır.

Kural 8. P^Q_D dilinin kapalı iyi biçimli formülünün adı T_i çizelgesine T_{i-1} çizelgesindeki iyi biçimli formüle çizelge kuralı uygulanması sonucu yazılıyorsa, kuralın uygulandığı iyi biçimli formülün T_{i-1} çizelgesindeki çizelge kuralı uygulama sıra numarası parantez içinde yazılır.

Tanım 3. T_n çizelgesindeki bir dalın her iki tarafında da aynı kapalı iyi biçimli formülün adı bulunuyorsa o dal kapalıdır.

Tanım 3.1. T_n çizelgesindeki bir dal kapalı ise o dal bir yorumu göstermez.

Kural 9. T_n çizelgesindeki kapalı dal ‘x’ ile gösterilir.

Tanım 4. Bir dal kapalı değilse açıktır.

Tanım 4.1. Bir dal açık ise o dal bir yorumu gösterir.

Kural 10. T_n çizelgesindeki açık dal ‘o’ ile gösterilir.

Tanım 5. T_n çizelgesindeki tüm dallar kapalı ise T_n çizelgesi kapalıdır.

Tanım 6. T_n çizelgesinde kapalı olmayan en az bir dal varsa çizelge kapalı değildir.

Tanım 6.1 T_n çizelgesi kapalı değilse açıktır.

Çizelgenin Analiz Kuralları

P_D^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün adı bir T_i çizelgesinde bir dalın sol tarafında ise P^Q dilinin bir kapalı iyi biçimli A_i formülünün bir m_{mi} fonksiyonundaki değeri $m_{mi}(A_i) = d$, sağ tarafında ise P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün bir m_{mi} fonksiyonundaki değeri ise $m_{mi}(A_i) = y$ olur.

P_D^Q dilinin iyi biçimli A_i formülü dalın solunda ise A_i Sol, sağında ise Sağ A_i yazılır.

P_D^Q dilinin $\sim A_j$ iyi biçimli formülü için kurallar:

- $\sim A_j$ Sol: $m_{mi}(\sim A_j) = d$: $m_{mi}(A_j) = y$
Sağ A_j
- Sağ $\sim A_j$: $m_{mi}(\sim A_j) = y$: $y_i(A_j) = d$
 A_j Sol

P_D^Q dilinin $(A_j \wedge A_k)$ iyi biçimli formülü için kurallar:

- $(A_j \wedge A_k)$ Sol: $m_{mi}((A_j \wedge A_k)) = d$: $m_{mi}(A_j) = d$ ve $m_{mi}(A_k) = d$
 A_j Sol ve A_k Sol
- Sağ $(A_j \wedge A_k)$: $m_{mi}((A_j \wedge A_k)) = y$: $m_{mi}(A_j) = y$ veya $m_{mi}(A_k) = y$
Sağ A_j veya Sağ A_k

P_D^Q dilinin $(A_j \vee A_k)$ iyi biçimli formülü için kurallar:

- $(A_j \vee A_k)$ Sol: $m_{mi}((A_j \vee A_k)) = d$: $m_{mi}(A_j) = d$ veya $m_{mi}(A_k) = d$
 A_j Sol veya A_k Sol
- Sağ $(A_j \vee A_k)$: $m_{mi}((A_j \vee A_k)) = y$: $m_{mi}(A_j) = y$ ve $m_{mi}(A_k) = y$
Sağ A_j ve Sağ A_k

P_D^Q dilinin $(A_j \supset A_k)$ iyi biçimli formülü için kurallar:

- $(A_j \supset A_k)$ Sol: $m_{mi}((A_j \supset A_k)) = d$: $m_{mi}(A_j) = y$ veya $m_{mi}(A_k) = d$
Sağ A_j veya A_k Sol
- Sağ $(A_j \supset A_k)$: $m_{mi}((A_j \supset A_k)) = y$: $m_{mi}(A_j) = d$ ve $m_{mi}(A_k) = y$
 A_j Sol ve Sağ A_k

P_D^Q dilinin $(A_j \equiv A_k)$ iyi biçimli formülü için kurallar:

- $(A_j \equiv A_k)$ Sol: $m_{mi}((A_j \equiv A_k)) = d$: $m_{mi}(A_j) = d$ ve $m_{mi}(A_k) = d$ veya
 $m_{mi}(A_j) = y$ ve $m_{mi}(A_k) = y$
 A_j Sol ve A_k Sol veya Sağ A_j ve Sağ A_k
- Sağ $(A_j \equiv A_k)$: $m_{mi}((A_j \equiv A_k)) = y$: $m_{mi}(A_j) = d$ ve $m_{mi}(A_k) = y$ veya
 $m_{mi}(A_j) = y$ ve $m_{mi}(A_k) = d$
 A_j Sol ve Sağ A_k veya Sağ A_j ve A_k Sol

P_D^Q dilinin $(\forall x_i)A_j$ kapalı iyi biçimli formülü için kurallar:

- $(\forall x_i)A_j$ Sol: $m_{mi}((\forall x_i)A_j) = d$: $m_{mi}(A_j(x_i \rightarrow t_i)) = d$ tüm $t_i \in Z_i$ için;
 $A_j(x_i \rightarrow t_i)$ Sol
- Sağ $(\forall x_i)A_j$: $m_{mi}((\forall x_i)A_j) = y$: $m_{mi}(A_j(x_i \rightarrow d_k)) = y$ en az bir $d_k \in Z_i$
Sağ $A_j(x_i \rightarrow d_i)$

P_D^Q dilinin $(\exists x_i)A_j$ kapalı iyi biçimli formülü için kurallar:

- $(\exists x_i)A_j$ Sol: $m_{mi}((\exists x_i)A_j) = d$: $m_{mi}(A_j(x_i \rightarrow d_k)) = d$ en az bir $d_k \in Z_i$
 $A_j(x_i \rightarrow d_i)$ Sol
- Sağ $(\exists x_i)A_j$: $m_{mi}((\exists x_i)A_j) = y$: $m_{mi}(A_j(x_i \rightarrow d_i)) = y$ tüm $t_i \in Z_i$ için;
Sağ $A_j(x_i \rightarrow d_i)$

Çizelgenin Genleşme Kuralları

Bir T_n çizelgesi ikili bir ağaç olarak görselleştirilir. Çizelgenin dalları örtük olarak ayrıktır. Bir daldaki iyi biçimli formüller örtük olarak bitişiktir. T_n çizelgesindeki bir dal, iki yanına yazılan iyi biçimli formüller ile belirlenir.

Bir T_i çizelgesi, T_i çizelgesinin bir dalı seçilerek, daldaki bir A_k iyi biçimli formülüne çizelge analiz kuralları uygulanması sonucu oluşacak alt dal ile genişir.

Aşağıdaki liste T_i çizelgeleri için genleşme kuralı şemalarını gösterir.

P^Q dilinin ' $\sim$ ', ' $\wedge$ ', ' $\vee$ ', ' $\supset$ ', ve ' $\equiv$ ' harflerinin geçişlerini içeren kapalı iyi biçimli formülleri için çizelge kuralları

P^Q_D dilinin $\sim A_j$ kapalı iyi biçimli formülü için:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} N\text{-sol} \quad m \\ n \quad (m) \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim A_j \mid \\ \mid A_j \quad (m) \quad n \end{array} \\
 \begin{array}{c} n \quad (m) \end{array} \quad \begin{array}{c} \mid \sim A_j \quad m \\ A_j \mid \end{array} \quad N\text{-sağ}
 \end{array}$$

P^Q_D dilinin $(A_j \wedge A_k)$ kapalı iyi biçimli formülü için:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} C\text{-sol} \quad m \\ n \quad (m) \\ n+j \quad (m) \end{array} \quad \begin{array}{c} (A_j \wedge A_k) \mid \\ A_j \mid \\ A_k \mid \end{array} \\
 \begin{array}{c} n \quad (m) \end{array} \quad \begin{array}{c} \mid (A_j \wedge A_k) \quad m \\ \wedge \\ \mid A_j \quad \mid A_k \quad (m) \quad n \end{array} \quad C\text{-sağ}
 \end{array}$$

P^Q_D dilinin $(A_j \vee A_k)$ kapalı iyi biçimli formülü için:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} D\text{-sol} \quad m \\ n \quad (m) \end{array} \quad \begin{array}{c} (A_j \vee A_k) \mid \\ \wedge \\ A_j \mid \quad A_k \mid \quad (m) \quad n \end{array} \\
 \begin{array}{c} \mid (A_j \vee A_k) \quad m \\ \mid A_j \quad (m) \quad n \\ \mid A_k \quad (m) \quad n+j \end{array} \quad D\text{-sağ}
 \end{array}$$

P^Q_D dilinin $(A_j \supset A_k)$ kapalı iyi biçimli formülü için:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} I\text{-sol} \quad m \\ n \quad (m) \end{array} \quad \begin{array}{c} (A_j \supset A_k) \mid \\ \wedge \\ A_j \mid \quad A_k \mid \quad (m) \quad n \end{array} \\
 \begin{array}{c} n \quad (m) \\ n+1 \quad (m) \end{array} \quad \begin{array}{c} \mid (A_j \supset A_k) \quad m \\ A_j \mid \\ A_k \end{array} \quad I\text{-sağ}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
E-sol & m & & (A_j \equiv A_k) & | & & \\
& & & \bigwedge & & & \\
& n & (m) & A_j & | & A_j & (m) \quad n \\
& n+1 & (m) & A_k & | & A_k & (m) \quad n+1 \\
& & & & & & \\
& & & & | & (A_j \equiv A_k) & m \quad E-sag \\
& & & \bigwedge & & & \\
& n & (m) & A_j & | & A_j & (m) \quad n \\
n+1 & (m) & & & | & A_k & (m) \quad n+1
\end{array}$$

P^Q_D dilinin $(\forall x_i)A_j$ kapalı iyi biçimli formülü için:

P^Q_D dilinin $(\exists x_i)A_j$ kapalı iyi biçimli formülü için:

$$\begin{array}{lcl}
T\text{-sol} & m & (\exists x_i)A_j \\
& m+j & (m) \quad A_j(d_k) \\
[d_k \text{ yeni bir parametredir.}] & & \\
& & \\
& & | \quad (\exists x_i)A_j \quad m \quad T\text{-sağ} \\
& & | \quad A_j(t) \quad (m) \quad m+j \\
& & | \quad (\exists x_i)A_j \quad (m) \quad m+k \\
& & [t \text{ bir zemin terimidir.}]
\end{array}$$

T_n çizelgesinde tüm dallar kapalı ise A_i iyi biçimli formülünün $m_{mi}(A_i) = d$ olan hiçbir $\mathfrak{N}_i$ yorumu yoktur. Yani P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* yoktur.

P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi Biçimli Formülünün $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması

P^Q_D dilinin A_i iyi biçimli formülünün adı T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazılır.

T_n çizelgesinde açık olan bir dal varsa, o dalın gösterdiği $\mathcal{M}$ yorumunda $m_{mk}(A_i) = y$ olur. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülünün $m_{mi}(A_i) = y$ olan en az bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır. Yani P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* olmayan en az bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır.

T_n çizelgesinde tüm dallar kapalı ise P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülünün $m_{mi}(A_i) = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}$ yorumu yoktur. Yani tüm $\mathcal{M}$ yorumları P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli*dir.

P^Q Dilinin Δ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması

P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adları T_0 çizelgesinin sol tarafına yazılır.

T_n çizelgesinde açık olan bir dal varsa, o dalın gösterdiği P^Q dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $\mathcal{M}$ yorumunda $m_{mk}(\Delta) = d$ olur. P^Q dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ olan en az bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır. Yani P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.

T_n çizelgesinde tüm dallar kapalı ise P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ olan hiçbir $\mathcal{M}$ yorumu yoktur. Yani P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* yoktur.

P^Q Dilinin Δ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin Tüm A_i Elemanlarının m_{mi} Fonksiyonunda Aldığı Değerin $m_{mi}(A_i) = y$ Olduğu Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması

P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adları T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazılır.

T_n çizelgesinde açık olan bir dal varsa, o dalın gösterdiği P^Q dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $\mathcal{M}$ yorumunda, Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin tüm A_i elemanlarının m_{mk} fonksiyonunda aldığı değer $m_{mk}(A_i) = y$ olur. P^Q dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin tüm A_i elemanları için $m_{mi}(A_i) = y$ olan en az bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır.

T_n çizelgesinde tüm dallar kapalı ise P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesinin tüm A_i elemanları için $m_{mi}(A_i) = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}$ yorumu yoktur.

P^Q Dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması

P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adları T_0 çizelgesinin sol tarafına, A_i iyi biçimli formülünün adı T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazılır.

T_n çizelgesinde açık olan bir dal varsa, o dalın gösterdiği P^Q dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $\mathcal{M}$ yorumunda $m_{mk}(\Delta) = d$ ve $m_{mk}(A_i) = y$ olur. P^Q dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ olan en az bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır.

T_n çizelgesinde tüm dallar kapalı ise P^Q dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ olan hiçbir $\mathcal{U}_i$ yorumu yoktur.

P^Q Dilinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ Yorumuna Bağlı Olarak Tanımlanan Özelliklerin Çizelgeden Okunması

Tanım 1. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün $m_{mi}(A_i) = d$ olan bir $\mathcal{U}_i$ yorumu varsa, A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.

Okuma 1. $P^Q_D A_i$ dilinin kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı açık bir T_n çizelgesi varsa, A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.

Tanım 2. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün $m_{mi}(A_i) = d$ olan hiçbir $\mathcal{U}_i$ yorumu yoksa, A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda hiçbir *modeli* yoktur.

Okuma 2. $P^Q_D A_i$ dilinin kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı kapalı bir T_n çizelgesi varsa, A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda hiçbir *modeli* yoktur.

Tanım 2.1. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda hiçbir *modeli* yoksa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *çelişkidir*.

Okuma 2.1. $P^Q_D A_i$ dilinin kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı kapalı bir T_n çizelgesi varsa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *çelişkidir*.

Tanım 3. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}(A_i) = y$ olan $\mathcal{U}_i$ yorumu yoksa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerlidir*.

Okuma 3. $P^Q_D A_i$ dilinin kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı kapalı bir T_n çizelgesi varsa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerlidir*.

Tanım 3.1. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}(A_i) = y$ olan $\mathcal{U}_i$ yorumu varsa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerli* değildir.

Okuma 3.1 $P^Q_D A_i$ dilinin kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı açık bir T_n çizelgesi varsa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerli* değildir.

Tanım 4. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mk}(A_i) = d$ olan en az bir $\mathcal{U}_k$ yorumu ve $m_{mi}(A_i) = y$ olan en az bir $\mathcal{U}_l$ yorumu varsa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *olumsaldır*.

Okuma 4. $P^Q_D A_i$ dilinin kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı açık bir T_m çizelgesi ve adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı açık bir T_n çizelgesi varsa, A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *olumsaldır*.

Tanım 5. P^Q dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ olan en az bir $\mathcal{U}_i$ yorumu varsa, Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.

Okuma 5. P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı açık bir T_n çizelgesi varsa, Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.

Tanım 5.1. P^Q dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ olan hiçbir $\mathcal{U}_i$ yorumu yoksa, $\Delta \cup \{A_i\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.

Okuma 5.1 P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına, A_i iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı kapalı bir T_n çizelgesi varsa, P^Q dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.

Okuma 5.2. P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanlarının adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına, A_i iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı açık bir T_n çizelgesi varsa, P^Q dilinin $\Delta \cup \{A_i\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ olan bir $\mathcal{U}_i$ yorumu vardır.

Tanım 6. P^Q dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ olan hiçbir $\mathcal{U}_i$ yorumu yoksa, Δ iyi biçimli formülü kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* yoktur.

Okuma 6. P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanlarının adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı kapalı bir T_n çizelgesi varsa, Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* yoktur.

Tanım 6.1. P^Q dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda hiçbir modeli yoksa, Δ kapalı iyi biçimli formül kümesi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *çelişkidir*.

Okuma 6.1. P^Q_D dilinin Δ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı kapalı bir T_n çizelgesi varsa, Δ iyi biçimli formül kümesi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *çelişkidir*.

ÖRNEK

$$\models_{PQ} '((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1 x_1))'$$

		$((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1 x_1))$		0. <i>I-sağ</i>
<i>T-sol</i>	d_1/x_1	1. (0)	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) $	
		$((\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1 x_1)$		(0)
<i>C-sol</i>	3. (1)	$F_1^1 d_1 \wedge F_2^1 d_1 $		2. <i>T-sağ</i>
	4. (3)	$F_1^1 d_1 $		
	5. (3)	$F_2^1 d_1 $		
		$\wedge$		
	6. (2)	$(\exists x_1)F_1^1 x_1$	d_1/x_1	<i>T-sağ</i>
	(6)	$F_1^1 d_1$	$(\exists x_1)F_2^1 x_1$	(2)
			$F_2^1 d_1$	(7)
		$\times$		$\times$

P^Q_D dilinin $'((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1 x_1))'$ kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_6 çizelgesinde tüm dallar kapalı olduğundan çizelge kapalıdır. P^Q dilinin $'((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1 x_1))'$ kapalı iyi biçimli formülünün $m_{mi}('((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1 x_1))') = y$ olan hiçbir $\mathcal{U}_i$ yorumu yoktur. $'((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1 x_1))'$ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerlidir*.

ÖRNEK

P^Q dilinin $\{((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1), (\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)\}$ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}('((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1)') = d$ ve $m_{mi}('(\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)') = y$ olan bir yorumu vardır.

C-sol	0.	$((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1) \mid (\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)$	5. d_1/x_1	9. d_2/x_1	T-sağ
T-sol	d_1/x_1	1. (0)	$(\exists x_1)F_1^1x_1 \mid$		
T-sol	d_2/x_1	2. (0)	$(\exists x_1)F_2^1x_1 \mid$		
		3. (1)	$F_1^1d_1 \mid$		
		4. (2)	$F_2^1d_2 \mid$		
			$\mid F_1^1d_1 \wedge F_2^1d_1$	(5) 6.	C-sağ
			$\wedge$		
		7. (6)	$\mid F_1^1d_1$		(6) 8.
			$\times$	$\mid F_2^1d_2$	(9) 10. C-sağ
				$\mid F_1^1d_2 \wedge F_2^1d_2$	
				$\wedge$	
			(10) $\mid F_1^1d_2$	$\mid F_2^1d_2$	(10)
			$\wedge$	$\times$	

P^Q_D dilinin $\{((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1), (\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına, A_i iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_6 çizelgesinde açık olan bir dal vardır. P^Q dilinin $\{((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1), (\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin, o dalın gösterdiği $\mathcal{M}$ yorumunda, $m_{mk}('((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1)') = d$ ve $m_{mk}('(\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)') = y$ olur. P^Q dilinin $\{((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1), (\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ olan en az bir $\mathcal{M}_i$ yorumu vardır.

ÖRNEK

$$\models_{P^Q} '((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2))'$$

			$\mid ((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2))$	0.	I-sağ
U-sol	a_1/x_1	9. d_2/x_1	(0) $(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \mid$		
			$\mid (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2)$	(1) 4. d_1/x_2	12. d_3/x_2 T-sağ
T-sol	d_1/x_2	2. (1)	$(\exists x_2)(F_1^1a_1 \supset F_2^1x_2) \mid$		
I-sol		3. (2)	$F_1^1a_1 \supset F_2^1d_1 \mid$		
			$\mid (\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1d_1)$	(4) 5. d_2/x_1	U-sağ
			$\mid F_1^1d_2 \supset F_2^1d_1$	(6) 6.	I-sağ
		7. (6)	$F_1^1d_2 \mid$		
			$\mid F_2^1d_1$	(6) 8.	
T-sol	d_3/x_2	10. (9)	$(\exists x_2)(F_1^1d_2 \supset F_2^1x_2) \mid$		
I-sol		11. (10)	$F_1^1d_2 \supset F_2^1d_3 \mid$		
			$\mid (\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1d_3)$	(12) 13. d_4/x_1	U-sağ
			$\mid F_1^1d_4 \supset F_2^1d_3$	(13) 14.	I-sağ
		15. (14)	$F_1^1d_4 \mid$		
			$\mid F_2^1d_3$	(14) 16.	
			$\wedge$		
		17. (3)	$\mid F_1^1a_1$	$F_2^1d_1 \mid$	(3)
			$\wedge$	$\times$	
(11)			$\mid F_1^1d_2$	$F_2^1d_3 \mid$	(11)
			$\times$	$\times$	

P_D^Q dilinin ' $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2))$ ' kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_{12} çizelgesinde tüm dallar kapalıdır; P^Q dilinin ' $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2))$ ' kapalı iyi biçimli formülünün m_{mi} (' $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2))$ ' = y olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu yoktur. ' $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2))$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir.

SIRA SİZDE



1

' $\sim(\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formülü, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli midir?

SIRA SİZDE



2

' $\sim(\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formülünün, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli var mıdır?

SIRA SİZDE



3

' $(\exists x_1) \sim(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formülünün, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli var mıdır?

SIRA SİZDE



4

' $\sim(\forall x_1) (F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$ ' iyi biçimli formülünün, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli var mıdır?



P^Q dilinin bir kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumundaki çizelge analizini açıklamak.

P^Q iyi biçimli formül kümesinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak ya tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \alpha$ ya da tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \beta$ ise Π^Q iyi biçimli formül kümesinin elemanıdır.

P^Q dilinin bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ yorumunda $\mathcal{V}$ koleksiyonunun elemanı olan bir m_{mk} fonksiyonu, P^Q dilinin alt kümesi olan Π^Q iyi biçimli formül kümesinden $T = \{d, y\}$ kümesine bir fonksiyondur.

Kapalı formüller için üst teorem: Bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ yorumunda, P^Q dilinin bir kapalı iyi biçimli A_i formülünün değeri ya tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \alpha$ ya da tüm s_{mkj} fonksiyonlarında $s_{mkj}(A_i) = \beta$ olur.

Dolaysız çıkarım 1. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülünün bir $\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \{v_{mk}, s_j^{*v_{mk}}, s_{mkj}, m_{mk}\})$ yorumundaki m_{mk} fonksiyonundaki değeri ya $m_{mk}(A_i) = d \in T$, ya da $m_{mk}(A_i) = y \in T$ olur.

Dolaysız çıkarım 2. P^Q dilinin A_i kapalı iyi biçimli formülü Π^Q iyi biçimli formül kümesinin elemanıdır.

P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumundaki yorumlarının çizelge analizi, P^Q dilinin alfabesi olan Λ kümesinin $\Theta = \{\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists\}$ alt kümesindeki elemanların geçişlerinin bulunduğu A_i kapalı iyi biçimli formülünün bir m_{mk} fonksiyonunda aldığı değeri veya $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesindeki elemanların bir m_{mk} fonksiyonunda aldığı değerleri sabitleyerek, bu değeri veya değerleri aldığı m_{mj} fonksiyonlarını ve $\mathcal{M}_j$ yorumlarını saptama yöntemidir.

P^Q dilinin bir A_i iyi biçimli formülünün $\mathcal{M}$ yorumunda s_{mkj} fonksiyonunda aldığı değeri, A_i iyi biçimli formülünün kendisi ya da parçası olan p_k ya da $F_k^n t_1 \dots t_n$ biçimindeki formüllerin s_{mkj} fonksiyonunda aldığı değerlere göre belirlenir.

Çizelge P^Q dilinin bir genişmesi olan $P^Q_D = P^Q \cup D$ dili ile çalışır. Sayılabilir sonsuz $D = \{d_1, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots\}$ kümesi bir harf kümesidir. P^Q diline eklenen yeni harfler P^Q_D dilinin terimleridir. Bu terimlere dair $D(\mathcal{M})$ kümesinin elemanlarına karşılık gelmek haricinde hiçbir kabulde bulunulmadığından, bu harflere ‘parametreler’ adı verilir. P^Q_D dilinin a_i terimi ile d_i terimleri, P^Q_D dilinin ‘zemin terimi’ olarak adlandırılır ve Z_i kümesinin elemanlarıdır.

P^Q_D dili P^Q dilinden terim kümesi bakımından farklıdır. P^Q_D dilinin biçimleme kuralları, terim kümesinin seçimi haricinde P^Q dilin biçimleme kuralları ile aynıdır. Bu sebepten P^Q dili P^Q_D dilinin öz-alt kümesidir. P^Q dilinin kapalı iyi biçimli formül kümesinin $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ yorumundaki $\mathcal{M}$ yorumları için çizelge analizi P^Q_D dili ile yapıldığı için, P^Q_D dilinin Π^Q_D kapalı formül kümesinden $T = \{d, y\}$ kümesine m_m fonksiyonunun seçilmesi gerekir. Ancak ünite de çizelge analiz kuralları, fonksiyonun nasıl seçildiği belirtilmeden Π^Q_D kümesindeki A_j iyi biçimli formülünün fonksiyonda aldığı değere bağlı olarak verilmiştir.

Kendimizi Sıneyalım

1. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir?

- $((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_2))$
- $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset (\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_2))$
- $((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2))$
- $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_2))$
- $((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_2))$

2. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli **değildir**?

- $((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_2)(\sim F_1^1 x_2 \vee F_2^1 x_2))$
- $((\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$
- $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$
- $(\sim(\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$
- $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset \sim(\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$

3. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumundaki tüm $\mathcal{M}_i$ yorumlarının model olduğu iyi biçimli formül hangi seçenekte verilmiştir?

- $((\exists x_1)F_1^1 x_1 \supset (\forall x_1)F_1^1 x_1)$
- $((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$
- $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$
- $((\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$
- $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$

4. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda **olumsaldır**?

- $(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_1 x_2)$
- $\sim(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_1 x_2)$
- $(\exists x_1)(\forall x_2) \sim(F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_1 x_2)$
- $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim(F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_1 x_2)$
- $\sim(\exists x_1)(\forall x_2) \sim(F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_1 x_2)$

5. Aşağıdaki iyi biçimli formüllerden hangisi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda **olumsal değildir**?

- $((\forall x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_2 x_1 \supset \sim(\forall x_1)(\exists x_2)F_2^2 x_1 x_2)$
- $((\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_2 x_1 \vee (\exists x_2)(\forall x_1) \sim F_2^2 x_1 x_2)$
- $((\forall x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_2 x_1 \supset \sim(\forall x_1)(\exists x_2)F_2^2 x_1 x_2)$
- $((\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge (\forall x_2)(\exists x_1) \sim F_2^2 x_1 x_2)$
- $((\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge \sim(\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_1 x_2)$

6. Aşağıdaki iyi biçimli formül kümelerinden hangisinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda **modeli vardır**?

- $\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$
- $\{(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, \sim(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$
- $\{(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, \sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$
- $\{(\forall x_3)(\forall x_2)(\forall x_1) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, \sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$
- $\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, \sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$

7. Aşağıdaki iyi biçimli formül kümelerinden hangisinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda **hiçbir modeli yoktur**?

- $\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3, F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$
- $\{\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3, F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$
- $\{(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3, F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$
- $\{(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3, F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$
- $\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3, \sim F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$

8. Aşağıdaki hangi iyi biçimli formül kümesinin tüm elemanları için P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}(A_i) = y$ olan en az bir $\mathcal{M}_i$ yorumu vardır?

- $\{(\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2, (\exists x_1)(\exists x_2) \sim F_1^2 x_1 x_2\}$
- $\{(\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2, (\forall x_1)(\forall x_2) \sim F_1^2 x_1 x_2\}$
- $\{\sim(\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2, (\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2\}$
- $\{\sim(\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2, (\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2\}$
- $\{(\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2, \sim(\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2\}$

9. $\Delta = \{\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3), (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3\}$ iyi biçimli formül kümesine dair aşağıdaki iddialardan hangisi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumuna uygundur?

- Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda bir modeli vardır.
- Δ iyi biçimli formül kümesinin elemanlarından hiçbirinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda bir modeli yoktur.
- Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}('(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3') = d$ ve $m_{mi}('(\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3)')) = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu yoktur.
- P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumundaki tüm $\mathcal{M}_i$ yorumları Δ iyi biçimli formül kümesinin modelidir.
- Δ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}('(\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3)')) = d$ ve $m_{mi}('(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3') = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu yoktur.

10. $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}(A_i) = d$ ve $m_{mi}(A_j) = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu yoksa, aşağıdakilerden hangisi P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunun üst-dilinin $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesine dair bir ifadesidir?

- $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli vardır.
- $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli yoktur.
- $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin elemanı olan A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli vardır.
- $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesinin elemanı olan A_j iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli vardır.
- Hiçbiri.

Kendimizi Sınavalım Yanıt Anahtarı

1. c Yanıtınız yanlış ise “P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi Biçimli Formülünün m_{mi}(A_i) = y Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

$$\models_P^Q ((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2))'$$

		((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2)) 0.		I-sağ
U-sol	1. a ₁ /x ₁ 10. d ₂ /x ₁ (0)	(\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2)	(\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2)	(1) 4. d ₁ /x ₂ 13. d ₃ /x ₂ T-sağ
T-sol	d ₁ /x ₂ 2. (1)	(\exists x_2)(\sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 x_2)		
I-sol	3. (2)	(\sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 d_1)		
		(\forall x_1) (\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 d_1)	(4) 5. d ₂ /x ₁	U-sağ
		(\sim F_1^1 d_2 \vee F_2^1 d_1)	(6) 6.	D-sağ
		\sim F_1^1 d_2	(6) 7.	N-sağ
		F_2^1 d_1	(6) 8.	
		9. (7) F_1^1 d_2		
T-sol	d ₃ /x ₂ 11. (10)	(\exists x_2)(\sim F_1^1 d_2 \vee F_2^1 x_2)		
I-sol	12. (11)	(\sim F_1^1 d_2 \vee F_2^1 d_3)		
		(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 d_3)	(13) 14. d ₄ /x ₁	U-sağ
		(\sim F_1^1 d_4 \vee F_2^1 d_3)	(14) 15.	D-sağ
		\sim F_1^1 d_4	(15) 16.	N-sağ
		F_2^1 d_3	(15) (16)	
		F_1^1 d_4		
		\wedge		
N-sol	17. (3)	\sim F_1^1 a_1	(3) F_2^1 d_1	
		F_1^1 a_1 (17)	\times	
		\wedge		
N-sol	18. (12)	\sim F_1^1 d_2 (12) F_2^1 d_3		
		F_1^1 d_2 (18) \times		
		\times		

P^Q_D dilinin ‘((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2))’ iyi biçimli formülünün adının T₀ çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T₁₄ çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. P^Q dilinin ‘((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2))’ iyi biçimli formülünün m_{mi}(‘((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2))’) = y olan hiçbir $\mathfrak{M}_i$ yorumu yoktur. ‘((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2))’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathfrak{F}$ yorumunda geçerlidir.

2. b Yanıtınız yanlış ise “P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi Biçimli Formülünün m_{mi}(A_i) = y Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

$$\not\models_P^Q ((\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))'$$

		((\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)) 0.		I-sağ
T-sol	1. d ₁ /x ₁ (0)	(\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1)		
		\sim (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)	(0) 2.	N-sağ
D-sol	7. (1)	(\sim F_1^1 d_1 \vee F_2^1 d_1)		
T-sol	3. d ₁ /x ₁ (2)	(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)		
I-sol	4. (3)	(F_1^1 d_1 \supset F_2^1 d_1)		
		\wedge		
		F_1^1 d_1 (4) 5.	F_2^1 d_1 (4) 6.	
		\wedge	\wedge	
N-sol	8. (7)	\sim F_1^1 d_1 (7) F_2^1 d_1	N-sol	8. (7) \sim F_1^1 d_1 (7) F_2^1 d_1
		F_2^1 d_1 (8) 0		
		0		
		0		

P^Q_D dilinin ‘ $((\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$ ’ iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_8 çizelgesinde açık olan en az bir dal vardır. P^Q dilinin ‘ $((\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$ ’ iyi biçimli formülünün m_{mi} ‘ $((\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$ ’ = y olan en az bir $\mathcal{U}_i$ yorumu vardır. ‘ $((\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1) \supset \sim (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli değildir.

3. c Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin A_i İyi Biçimli Formülünün $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

				$ ((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1)) \quad 0.$	I-sağ
T-sol	1.	a_1/x_1	(0)	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \quad $	
				$ (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1)$	(0) 3. a_1/x_1 T-sağ
I-sol	2.		(1)	$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1) \quad $	
				$ \sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 a_1$	(3) 4. D-sağ
				$ \sim F_1^1 a_1$	(4) 5. N-sağ
				$ F_2^1 a_1$	(5) 6.
	7.		(5)	$F_1^1 a_1 \quad $	
				$\wedge$	
				$ F_1^1 a_1 \quad (2)$	
				$ F_2^1 a_1 \quad (2)$	
				$\times$	$\times$

P^Q_D dilinin ‘ $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$ ’ iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_6 çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. P^Q dilinin ‘ $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$ ’ iyi biçimli formülünün m_{mi} ‘ $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$ ’ = y olan hiçbir $\mathcal{U}_i$ yorumu yoktur. ‘ $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$ ’ iyi biçimli formülünün tüm $\mathcal{U}_i$ yorumlarındaki m_{mi} fonksiyonlarındaki değeri m_{mi} ‘ $((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$ ’ = d olur. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumundaki tüm $\mathcal{U}_i$ yorumları ‘ $((\forall x_1)(\exists x_2)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2))$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modelidir.

4. d Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi biçimli Formülünün $m_{mi}(A_i) = d$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması”, “ P^Q Dilinin A_i İyi Biçimli Formülünün $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

U-sol	0.	a_1/x_1		$(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1) \quad $	
T-sol	1.	d_1/x_2	(0)	$(\exists x_2) \sim (F_1^2 a_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 a_1) \quad $	
N-sol	2.		(1)	$\sim (F_1^2 a_1 d_1 \supset F_2^2 d_1 a_1) \quad $	
				$ (F_1^2 a_1 d_1 \supset F_2^2 d_1 a_1)$	(2) 3. N-sağ
			(3)	$F_1^2 a_1 d_1 \quad $	
				$ F_2^2 d_1 a_1$	(3)
				$\circ$	

P^Q_D dilinin ‘ $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı T_4 çizelgesinde en az bir açık dal vardır. P^Q dilinin ‘ $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün m_{mk} ‘ $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)$ ’ = d olan en az bir $\mathcal{U}_k$ yorumu vardır.

			$ (\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1) $	0.	d_1/x_1	<i>U-sağ</i>
			$ (\exists x_2) \sim (F_1^2 d_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 d_1) $	(0) 1.	d_1/x_1	<i>Tsağ</i>
			$ \sim (F_1^2 d_1 d_1 \supset F_2^2 d_2 d_1) $	(1) 2.		<i>N-sağ</i>
<i>I-sol</i>	3. (2)		$(F_1^2 d_1 d_1 \supset F_2^2 d_2 d_1) $			
			$\wedge$			
			$ F_1^2 d_1 d_1 $	(3)		
			$ F_2^2 d_2 d_1 $	(3)		
			$ F_1^2 d_1 d_1 $	0		
			$ F_2^2 d_2 d_1 $	0		

P^Q_D dilinin ‘ $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_4 çizelgesinde en az bir açık dal vardır. P^Q dilinin ‘ $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün $m_{ml}((\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)) = y$ olan en az bir $\mathcal{U}$ yorumu vardır.

P^Q dilinin ‘ $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mk}((\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)) = d$ olan en az bir $\mathcal{U}$ yorumu ve $m_{ml}((\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)) = y$ olan en az bir $\mathcal{U}$ yorumu olduğu için ‘ $(\forall x_1)(\exists x_2) \sim (F_1^2 x_1 x_2 \supset F_2^2 x_2 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda olumsaldır.

5. e Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi Biçimli Formülünün $m_{ml}(A_i) = d$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması”, “ P^Q Dilinin A_i İyi Biçimli Formülünün $m_{ml}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

<i>C-sol</i>	0.		$((\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge \sim (\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_1 x_2) $			
<i>T-sol</i>	d_2/x_2	2. (0)	$(\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_2 x_1 $			
<i>N-sol</i>	1. (0)		$\sim (\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_1 x_2 $			
			$ (\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_1 x_2 $	(1) 3.	d_1/x_2	<i>U-sağ</i>
<i>U-sol</i>	d_1/x_1	4. (2)	$(\forall x_1)F_1^2 d_2 x_1 $			
			$ (\exists x_1)F_1^2 x_1 d_1 $	(3) 5.	d_2/x_1	<i>T-sağ</i>
		(2)	$F_1^2 d_2 d_1 $			
			$ F_1^2 d_2 d_1 $	(5)	d_1/x_1	<i>T-sağ</i>
			$\times$			

P^Q_D dilinin ‘ $((\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge \sim (\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_1 x_2)$ ’ iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı T_7 çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. P^Q dilinin ‘ $((\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge \sim (\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_1 x_2)$ ’ iyi biçimli formülünün $m_{ml}((\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge \sim (\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_1 x_2)) = d$ olan hiçbir $\mathcal{U}$ yorumu yoktur. P^Q dilinin ‘ $((\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge \sim (\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_1 x_2)$ ’ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mk}(A_i) = d$ olan hiçbir $\mathcal{U}$ yorumu olmadığından ‘ $((\forall x_2)(\exists x_1)F_1^2 x_2 x_1 \wedge \sim (\exists x_2)(\forall x_1)F_1^2 x_1 x_2)$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda olumsal değildir.

6. a Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin Δ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $m_{ml}(\Delta) = d$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

			$\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$			
<i>T-sol</i>	0.	d_1/x_1	$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3 $			
<i>T-sol</i>	4.	d_4/x_1	$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) F_1^2 x_1 x_2 x_3 $			
<i>T-sol</i>	1.	d_2/x_2 (0)	$(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 d_1 x_2 x_3 $			
<i>T-sol</i>	2.	d_3/x_3 (1)	$(\exists x_3) \sim F_1^2 d_1 d_2 x_3 $			
<i>N-sol</i>	3.	(2)	$\sim F_1^3 d_1 d_2 d_3 $			
			$ F_1^3 d_1 d_2 d_3 $	(3)		
<i>T-sol</i>	5.	d_5/x_2 (4)	$(\exists x_2)(\exists x_3) F_1^2 d_4 x_2 x_3 $			
<i>T-sol</i>	6.	d_6/x_3 (5)	$(\exists x_3) F_1^2 d_4 d_5 x_3 $			
			$F_1^3 d_4 d_5 d_6 $	0		

P^Q_D dilinin $\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı T_7 çizelgesinde açık olan en az bir dal vardır. P^Q dilinin $\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3) = d$ ve $m_{mi}((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) F_1^2 x_1 x_2 x_3) = d$ olan en az bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır. P^Q dilinin $\{(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^2 x_1 x_2 x_3, (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) F_1^2 x_1 x_2 x_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli vardır.

7. d Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin A_i Kapalı İyi Biçimli Formülünün $m_{mi}(A_i) = d$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” konularını yeniden gözden geçiriniz.

<i>U-sol</i>	0.	a_1/x_1	$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3 \mid$ $F_1^3 a_1 a_2 a_3 \mid$	
<i>U-sol</i>	1.	a_2/x_2 (0)	$(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^3 a_1 x_2 x_3 \mid$	
<i>U-sol</i>	2.	a_3/x_3 (1)	$(\forall x_3) \sim F_1^3 a_1 a_2 x_3 \mid$	
<i>N-sol</i>	3.	(2)	$\sim F_1^3 a_1 a_2 a_3 \mid$ $\mid F_1^3 a_1 a_2 a_3$	(3)
			$\times$	

P^Q_D dilinin $\{(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3, F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adlarının T_0 çizelgesinin sol tarafına yazıldığı T_4 çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. P^Q dilinin $\{(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3, F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}((\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3) = d$ ve $m_{mi}(F_1^3 a_1 a_2 a_3) = d$ olan hiçbir $\mathcal{M}$ yorumu yoktur. P^Q dilinin $\{(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3, F_1^3 a_1 a_2 a_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda hiçbir modeli yoktur.

8. b Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin Bir Δ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin Tüm A_i Elemanlarının m_{mi} Fonksiyonunda Aldığı Değerin $m_{mi}(A_i) = y$ Olduğu Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

$\{(\forall x_1)(\forall x_2) F_1^2 x_1 x_2, (\forall x_1)(\forall x_2) \sim F_1^2 x_1 x_2\}$				
	$\mid (\forall x_1)(\forall x_2) F_1^2 x_1 x_2$	0	d_1/x_1	<i>U-sağ</i>
	$\mid (\forall x_1)(\forall x_2) \sim F_1^2 x_1 x_2$	2.	d_3/x_3	<i>U-sağ</i>
	$\mid (\forall x_2) F_1^2 d_1 x_2$	(0) 1.	d_2/x_2	<i>U-sağ</i>
	$\mid F_1^2 d_1 d_2$			
	$\mid (\forall x_2) \sim F_1^2 d_3 x_2$	(2) 3.	d_4/x_3	<i>U-sağ</i>
	$\mid \sim F_1^2 d_3 d_4$	(3) 4.		<i>N-sağ</i>
	$F_1^2 d_3 d_4 \mid$	(3)		
	$\mid$			
	$\circ$			

P^Q_D dilinin $\{(\forall x_1)(\forall x_2) F_1^2 x_1 x_2, (\forall x_1)(\forall x_2) \sim F_1^2 x_1 x_2\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların adlarının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_5 çizelgesinde açık bir dal vardır. $\{(\forall x_1)(\forall x_2) F_1^2 x_1 x_2, (\forall x_1)(\forall x_2) \sim F_1^2 x_1 x_2\}$ iyi biçimli formül kümesinin P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}((\forall x_1)(\forall x_2) F_1^2 x_1 x_2) = y$ ve $m_{mi}((\forall x_1)(\forall x_2) \sim F_1^2 x_1 x_2) = y$ olan en az bir $\mathcal{M}$ yorumu vardır.

9. e Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin Bir $\Delta \cup \{A_i\}$ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” ve “Çizelgenin Okunması” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

$$\begin{array}{lcl}
 N-sol & 0. & \sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3) \mid \\
 & & \mid (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3 \\
 & & \mid (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3) \quad (0) \quad 1. \quad d_1/x_1 \quad U-sağ \\
 & & \mid (\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 d_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 d_1 x_2 x_3) \quad (1) \quad 2. \quad d_2/x_2 \quad U-sağ \\
 & & \mid (\forall x_3)(F_1^3 d_1 d_2 x_3 \supset F_1^3 d_1 d_2 x_3) \quad (1) \quad 3. \quad d_3/x_3 \quad U-sağ \\
 & & \mid F_1^3 d_1 d_2 d_3 \supset F_1^3 d_1 d_2 d_3 \quad (3) \quad 4. \quad D-sağ \\
 & & F_1^3 d_1 d_2 d_3 \mid \quad (3) \\
 & & \mid F_1^3 d_1 d_2 d_3 \quad (3) \\
 & & \times
 \end{array}$$

P^Q_D dilinin $\{\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3), (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanı olan $\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3)$ iyi biçimli formülün adının T_0 çizelgesinin sol tarafına, $(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3$ elemanının adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_5 çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. $\{\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3), (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanı olan $\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3)$ iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $m_{mi}(\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3)) = d$ olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu olmadığından, $\{\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3), (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3\}$ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(\sim(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F_1^3 x_1 x_2 x_3 \supset F_1^3 x_1 x_2 x_3)) = d$ ve $m_{mi}((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)F_1^3 x_1 x_2 x_3) = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu yoktur.

10. e Yanıtınız yanlış ise “ P^Q Dilinin Bir $\Delta \cup \{A_i\}$ Kapalı İyi Biçimli Formül Kümesinin $m_{mi}(\Delta) = d$ ve $m_{mi}(A_i) = y$ Olan Yorum veya Yorumlarının Çizelge ile Araştırılması” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

$\Delta = \{A_i, A_j\}$ kümesinin elemanı olan A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli yoksa, $m_{mi}(A_j)$ değeri ne olursa olsun, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda Δ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(A_i) = d$ ve $m_{mi}(A_j) = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu yoktur. Bu durumda a, c ve d seçeneklerindeki ifadeler P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunun üst-dilinin $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kapalı iyi biçimli formül kümesine dair bir ifadesi değildir. $\Delta = \{A_i, A_j\}$ kümesinin elemanı olan A_i iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli olan bir $\mathcal{M}_k$ yorumu varsa, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda Δ iyi biçimli formül kümesinin $m_{mi}(A_i) = d$ ve $m_{mi}(A_j) = y$ olan hiçbir $\mathcal{M}_i$ yorumu olmadığından, $\mathcal{M}_k$ yorumunda $m_{mk}(A_j) = d$ olur. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda $\mathcal{M}_k$ yorumu Δ iyi biçimli formül kümesinin modelidir.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

$$\begin{array}{lcl}
 & & \mid \sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \quad 0. \quad N-sağ \\
 T-sol & d_1/x_1 & 1. (0) \quad (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \mid \\
 D-sol & & 2. (1) \quad (F_1^1 d_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \mid \\
 & & \wedge \\
 & (2) \quad F_1^1 d_1 \mid & N-sağ \quad 4. (2) \quad \sim F_2^1 d_1 \mid \\
 & o & \mid F_1^1 d_1 \quad (4) \\
 & & o
 \end{array}$$

P_D^Q dilinin ' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_4 çizelgesinde açık olan en az bir dal vardır. P^Q dilinin ' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün m_{mi} (' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ') = y olan en az bir $\mathfrak{U}$ yorumu vardır. ' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli değildir.

Sıra Sizde 2

$N\text{-sol}$	0.	$\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \mid$			
		$\mid (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	(0) 1.	d_1/x_1	$T\text{-sağ}$
		$\mid (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	(1) 2.		$D\text{-sağ}$
		$\mid F_1^1 a_1$	(2)		
		$\mid \sim F_1^1 a_1$	(2) 3.		$N\text{-sağ}$
	(3)	$F_1^1 a_1 \mid$			
		$\times$			

P_D^Q dilinin ' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_4 çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. P^Q dilinin ' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün m_{mi} (' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ') = d olan hiçbir $\mathfrak{U}$ yorumu yoktur. ' $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli yoktur.

Sıra Sizde 3

$T\text{-sol}$	d_1/x_1	0.	$(\exists x_1) \sim(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \mid$		
$N\text{-sol}$		1. (0)	$\sim(F_1^1 d_1 \vee \sim F_1^1 d_1) \mid$		
			$\mid (F_1^1 d_1 \vee \sim F_1^1 d_1)$	(1) 2.	$D\text{-sağ}$
			$\mid F_1^1 d_1$	(2)	
			$\mid \sim F_1^1 d_1$	(2) 3.	$N\text{-sağ}$
	(3)		$F_1^1 d_1 \mid$		
			$\times$		

P_D^Q dilinin ' $(\exists x_1) \sim(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_4 çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. P^Q dilinin ' $(\exists x_1) \sim(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün m_{mi} (' $(\exists x_1) \sim(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ') = d olan hiçbir $\mathfrak{U}$ yorumu yoktur. ' $(\exists x_1) \sim(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli yoktur.

Sıra Sizde 4

' $\sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ '

$N\text{-sol}$	0.	$\sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \mid$			
		$\mid (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	(0) 1.	d_1/x_1	$U\text{-sağ}$
		$\mid (F_1^1 d_1 \vee \sim F_1^1 d_1)$	(1) 2.		$D\text{-sağ}$
		$\mid F_1^1 d_1$	(2)		
		$\mid \sim F_1^1 d_1$	(2) 3.		$N\text{-sağ}$
	(3)	$F_1^1 d_1 \mid$			
		$\times$			

P_D^Q dilinin ' $\sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün adının T_0 çizelgesinin sağ tarafına yazıldığı T_4 çizelgesinde tüm dallar kapalıdır. P^Q dilinin ' $\sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün m_{mi} (' $\sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ') = d olan hiçbir $\mathfrak{U}$ yorumu yoktur. ' $\sim(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' kapalı iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda modeli yoktur.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Bernhard Beckert. (1995). “**Semantic Tableaux with Equality**”,

<http://i12.www.ira.uka.de/~beckert>, Institute for Logic, Complexity and Deduction Systems, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany.

Çoker, D. ve Karaçay, T. (1983). **Matematik Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. ve Onart, A. (1976). **Mantık Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. (1972). **Symbolic Logic**, Ankara: Faculty of Art and Sciences Publication.

Koç, Y. (1980). **Introduction to Logic**, İstanbul: Boğaziçi University Publications.

Mendelson, E. (1964). **Introduction to Mathematical Logic**, Princeton, NJ.: D. Van Nostrand Company, Inc.

Taşdelen, İ. (2010). **Sembolik Mantık**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

6

SEMBOLİK MANTIK

Amaçlarımız

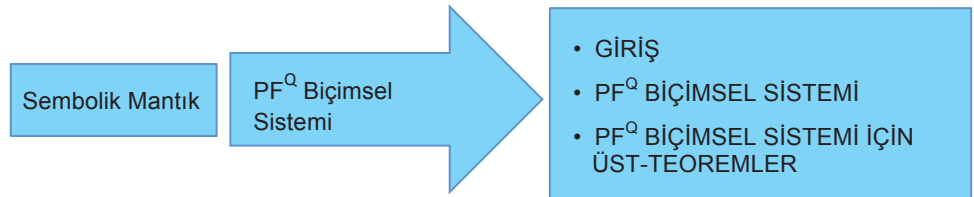
Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- PF^Q biçimsel sistemini açıklayabilecek,
- PF^Q biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremini tanımlayabilecek,
- PF^Q biçimsel sistemi ve P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumu için tutarlılığı ifade edebilecek,
- PF^Q biçimsel sistemi ve P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumu için tamlığı açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Biçimsel Sistem
- PF^Q Biçimsel Sistemi
- Dedüksiyon Kuralı
- Dolaysız Sonuç
- Kanıtlama
- Teorem
- Türeme
- PF^Q Biçimsel Sisteminde İçerme
- Dedüksiyon
- Tutarlılık
- Tamlık
- Kanıt-Kuramsal Tutarlılık

İçindekiler



PF^Q Biçimsel Sistemi

GİRİŞ

Bu ünite PF^Q biçimsel sistemi, PF^Q biçimsel sistemine dair üst teoremler ve PF^Q biçimsel sistemi ile P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunu bir araya getiren üst teoremler anlatılacaktır.

PF^Q BİÇİMSEL SİSTEMİ

PF^Q biçimsel sisteminin iyi biçimli formül kümesi P^Q dili ile aynıdır. Bu yüzden PF^Q biçimsel sisteminin bir iyi biçimli formülü ‘P^Q dilinin iyi biçimli formülü’ adıyla anılır. PF^Q biçimsel sistemi, P^Q dili ve her biri $P^Q_1 \times \dots \times P^Q_m$ kartezyen çarpımının alt kümesi olan R_i bağıntılarının sonlu $\mathcal{K} = \{R_1, \dots, R_n\}$ koleksiyonundan oluşan sıralı ikilidir: (P^Q, $\mathcal{K}$). K koleksiyonunun elemanı olan her R_i bağıntısına ‘dedüksiyon kuralı’ adı verilir. $\{A_1, \dots, A_j\}$ ($j \geq 1$) iyi biçimli formül kümesi için $(A_1, \dots, A_j, A_k)$ sıralısı $\mathcal{K}$ koleksiyonunun elemanı olan R_i bağıntısının elemanı ise, A_k iyi biçimli formülü $\{A_1, \dots, A_j\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların PF^Q biçimsel sisteminde dolaysız sonucudur.

DİKKAT



PF^Q biçimsel sisteminin aksiyomu yoktur.

PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kuralları

- i. R_1 : $\{A_i\}$ iyi biçimli formül kümesi için (A_i, A_i) sıralı ikilisi R_1 bağıntısının elemanıdır.
 A_i iyi biçimli formülü, $\{A_i\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanın dolaysız sonucudur. [kural adı: R]
- ii. R_2 : $\{\sim\sim A_i\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(\sim\sim A_i, A_i)$ sıralı ikilisi R_2 bağıntısının elemanıdır.
 A_i iyi biçimli formülü, $\{\sim\sim A_i\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanın dolaysız sonucudur. [kural adı: $\sim$ E]
- iii. R_3 : $\{(A_j \wedge A_k)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_j \wedge A_k), A_j)$ ve $((A_j \wedge A_k), A_k)$ sıralı ikilileri R_3 bağıntısının elemanıdır.
 A_j iyi biçimli formülü ve A_k iyi biçimli formülü, $\{(A_j \wedge A_k)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanın dolaysız sonuçlarıdır. [kural adı: $\wedge$ E]
- iv. R_4 : $\{(A_j \vee A_k), (A_j \supset A_i), (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_j \vee A_k), (A_j \supset A_i), (A_j \supset A_i), A_i)$ sıralı dördlüsü R_4 bağıntısının elemanıdır.
 A_j iyi biçimli formülü, $\{(A_j \vee A_k), (A_j \supset A_i), (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\vee$ E]
- v. R_5 : $\{A_j, (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, (A_j \supset A_i), A_i)$ sıralı üçlüsü R_5 bağıntısının elemanıdır.

A_i iyi biçimli formülü, $\{A_j, (A_j \supset A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\supset E$]

vi. R_6 : $\{A_i, A_j, (A_j \equiv A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, (A_j \equiv A_i), A_i)$ ve $(A_i, (A_j \equiv A_i), A_j)$ sıralı üçlülere R_6 bağıntısının elemanıdır.

A_i iyi biçimli formülü, $\{A_j, (A_j \equiv A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların, A_j iyi biçimli formülü $\{A_i, (A_j \equiv A_i)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\equiv E$]

vii. R_7 : $\{(A_i \supset A_j), (A_i \supset \sim A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_i \supset A_j), (A_i \supset \sim A_j), \sim A_i)$ sıralı üçlüsü R_7 bağıntısının elemanıdır.

$\sim A_i$ iyi biçimli formülü, $\{(A_i \supset A_j), (A_i \supset \sim A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\sim I$]

viii. R_8 : $\{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, A_k, (A_j \wedge A_k))$ sıralı üçlüsü R_8 bağıntısının elemanıdır.

$(A_j \wedge A_k)$ iyi biçimli formülü, $\{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\wedge I$]

ix. R_9 : $\{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, (A_j \vee A_k))$ ve $(A_k, (A_j \vee A_k))$ sıralı ikilileri R_9 bağıntısının elemanıdır.

$(A_j \vee A_k)$ iyi biçimli formülü, $\{A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının veya $\{A_k\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının dolaysız sonucudur. [kural adı: $\vee I$]

x. R_{10} : $\{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j, A_k, (A_j \supset A_k))$ sıralı üçlüsü R_{10} bağıntısının elemanıdır.

$(A_j \supset A_k)$ iyi biçimli formülü $\{A_j, A_k\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\supset I$]

xi. R_{11} : $\{(A_j \supset A_k), (A_k \supset A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((A_j \supset A_k), (A_k \supset A_j), (A_j \equiv A_k))$ sıralı üçlüsü R_{11} bağıntısının elemanıdır.

$(A_j \equiv A_k)$ iyi biçimli, formülü $\{(A_j \supset A_k), (A_k \supset A_j)\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\equiv I$]

xii. R_{12} : $\{(\forall x_i)A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((\forall x_i)A_j, A_j(a_i/x_i))$ sıralı ikilileri R_{12} bağıntısının elemanıdır.

$\{A_j(a_1/x_i), \dots, A_j(a_n/x_i), A_j(a_{n+1}/x_i), \dots\}$ iyi biçimli formül kümesinin tüm elemanları, $\{(\forall x_i)A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının dolaysız sonucudur. [kural adı: $\forall E$]

[Burada ' $A_j(a_i)$ ' ifadesi a_i teriminin geçişinin olduğu, ' $A_j(x_i)$ ' ifadesi x_i teriminin geçişinin olduğu aynı biçimdeki formülleri gösterir. ' $A_j(x_i/a_i)$ ' ifadesi, $A_j(x_i)$ dizisinde, a_i teriminin $A_j(a_i)$ dizisindeki geçişinin olduğu sırada x_i teriminin geçişinin olduğu, ' $A_j(a_i/x_i)$ ' ifadesi, $A_j(a_i)$ dizisinde, x_i teriminin $A_j(x_i)$ dizisindeki geçişinin olduğu sırada a_i teriminin geçişinin olduğu aynı biçimdeki formülleri gösterir.]

xiii. R_{13} : $\{(\exists x_i)A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi için $((\exists x_i)A_j, A_j(a_i/x_i))$ sıralı üçlülerinden en az biri R_{13} bağıntısının elemanıdır.

$\{A_j(a_1/x_i), \dots, A_j(a_n/x_i), A_j(a_{n+1}/x_i) \dots\}$ iyi biçimli formül kümesinin en az bir elemanı, $\{(\exists x_i)A_j\}$ iyi biçimli formül kümesinin elemanının dolaysız sonucudur. [kural adı: $\exists E$]

xiv. R_{14} : $\{y : A_j(a_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j(a_1), \dots, A_j(a_n), A_j(a_{n+1}) \dots, (\forall x_i)A_j(x_i/a_i))$ sayılabilir sonsuz dizisi R_{14} bağıntısının elemanıdır.

$(\forall x_i)A_j$ iyi biçimli formülü, $\{A_j(a_1), \dots, A_j(a_n), A_j(a_{n+1}) \dots\}$ iyi biçimli formül kümesindeki elemanların dolaysız sonucudur. [kural adı: $\forall I$]

xv. R_{15} : $\{y : A_j(a_i)\}$ iyi biçimli formül kümesi için $(A_j(a_i), (\exists x_i)A_j(x_i/a_i))$ sıralı ikilileri R_{15} bağıntısının elemanıdır.

$(\exists x_i)A_j$ iyi biçimli formül, $\{y : A_j(a_i)\}$ iyi biçimli formül kümesinin her elemanının dolaysız sonucudur. [kural adı: $\exists I$]

PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği

Kural 1: *Hyp*

1		A_i	<i>Hyp</i>
2		—	

Kural 2: *R*

1		A_i	
2		A_i	<i>R</i> , 1

Kural 3: $\sim E$

1		$\sim\sim A_i$	
2		A_i	$\sim E$, 1

Kural 4: $\wedge E$

1		$(A_j \wedge A_k)$	
2		A_j	$\wedge E$, 1
1		$(A_j \wedge A_k)$	
2		A_k	$\wedge E$, 1

Kural 5: $\vee E$

1		$(A_j \vee A_k)$	
2		$(A_j \supset A_i)$	
3		$(A_k \supset A_i)$	
4		A_i	$\vee E$, 1,2,3

Kural 6: $\supset E$

1		$(A_j \supset A_k)$	
2		A_j	
3		A_k	$\supset E$, 1,2

Kural 7: $\equiv E$

1		$(A_j \equiv A_k)$	
2		A_j	
3		A_k	$\equiv E, 1,2$
1		$(A_j \equiv A_k)$	
2		A_k	
3		A_j	$\equiv E, 1,2$

Kural 8: $\sim I$

1		$(A_i \supset \sim A_j)$	
2		$(A_i \supset \sim A_k)$	
3		$\sim A_i$	$\sim I, 1,2$

Kural 7: $\wedge I$

1		A_j	
2		A_k	
3		$(A_j \wedge A_k)$	$\wedge I, 1,2$

Kural 8: $\vee I$

1		A_j	
2		$(A_j \vee A_k)$	$\vee I, 1$
1		A_k	
2		$(A_j \vee A_k)$	$\vee I, 1$

Kural 9: $\supset I$

1		A_j	hyp
2		A_k	
3		$(A_j \supset A_k)$	$\supset I, 1,2$

Kural 10: $\equiv I$

1		$(A_j \supset A_k)$	
2		$(A_k \supset A_j)$	
3		$(A_j \equiv A_k)$	$\equiv I, 1,2$

Kural 11: $\forall E$

1		$(\forall x_i)A_j$	
2		$A_j(a_1)$	$\forall E, 1 \ a_1/x_i$
3			
4		$A_j(a_n)$	$\forall E, 1 \ a_n/x_i$
5		$A_j(a_{n+1})$	$\forall E, 1 \ a_{n+1}/x_i$
6			

[‘ a_i/x_i ’ ifadesi, a_i teriminin $A_j(a_i)$ dizisindeki geçiş sırasının x_i teriminin $(\forall x_i)$ dizisinin geçişinin menzilinde bulunan A_j dizisindeki geçiş sırasıyla aynı olduğunu gösterir.]

Kural 12: $\exists E$

1		$(\exists x_i)A_j$	
2		a_k $A_j(a_k)$	$\exists Hyp, 1 \ a_k/x_i$
3		A_p	
4		A_p	$\exists E, 1-3$

[a_k terimi, $A_j(a_k)$ iyi biçimli formülünü takip eden alta sıralı türemede a_k harfinin geçişinin olduğu bir iyi biçimli formülün R kuralı ile dolaysız sonuç olarak yazılamayacağını ve a_k harfinin geçişinin olduğu bir iyi biçimli formülün türemenin dışına alınmayacağını gösterir. A_p iyi biçimli formülünde a_k harfinin geçişi yoktur.]

Kural 13: $\forall I$

1		a_k	
2			
3		$A_j(a_k)$	
4		$(\forall x_i)A_j$	$\forall I, 1-3 \ x_i/a_k$

[Çizginin solundaki a_k terimi, öncesinde a_k harfinin geçişinin olduğu iyi biçimli formüle ikinci kuralın [R] uygulanamayacağını gösterir.]

[‘ x_i/a_i ’ ifadesi, x_i teriminin $(\forall x_i)$ dizisinin geçişinin menzilinde bulunan A_j dizisindeki geçiş sırasının, a_i teriminin $A_j(a_i)$ dizisindeki geçiş sırasıyla aynı olduğunu gösterir.]

Kural 14: ‘ $\exists$ ’I

1		$A_j(a_i)$	
2		$(\exists x_i)A_j$	$\exists I, 1 \ x_i/a_i$

PF^Q Biçimsel Sisteminde Türeme ve Kanıtlama

PF^Q dilinin A_{n+1} iyi biçimli formülünün PF^Q biçimsel sistemindeki bir kanıtlaması PF^Q dilinin iyi biçimli formüllerinin $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ sonlu dizisidir. Dizideki her A_i ya PF^Q biçimsel sisteminin teoremi ya da önce gelen iyi biçimli formül ya da formüllerin dolaysız sonucudur.

P^Q dilinin A_{n+1} iyi biçimli formülünün P^Q dilinin Γ iyi biçimli formül kümesinden PF^Q biçimsel sistemindeki bir türemesi de P^Q dilinin iyi biçimli formüllerinin $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ sonlu dizisidir. Bu dizideki her A_i ya PF^Q biçimsel sisteminin teoremi ya Γ kümesinin elemanı ya da önce gelen formül ya da formüllerin dolaysız sonucudur.

PF^Q Biçimsel Sisteminde İçerme ve Teorem

Tanım 1. P^Q dilinin Γ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü ancak ve ancak Γ iyi biçimli formül kümesinden PF^Q biçimsel sisteminde bir türemesi varsa PF^Q biçimsel sisteminde içerir: $\Gamma \vdash_{PF^Q} A_i$

Tanım 2. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü ancak ve ancak PF^Q biçimsel sisteminde bir kanıtlaması varsa PF^Q biçimsel sisteminde teoremdir: $\vdash_{PF^Q} A_i$

ÖRNEK

$$\vdash_{PF^Q} '((\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1) \vee \sim (\exists x_1) F_1^1 x_1'$$

1		$\sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
2		$\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1$	<i>Hyp</i>
3		$(\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	$\vee I, 2$
4		$(\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \supset (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1))$	$\supset I, 2, 3$
5		$\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1$	<i>Hyp</i>
6		$\sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	<i>R, 1</i>
7		$(\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \supset \sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1))$	$\supset I, 5, 6$
8		$\sim \sim (\exists x_1) F_1^1 x_1$	$\sim I, 4, 7$
9		$(\exists x_1) F_1^1 x_1$	$\sim E, 9$
10		$(\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	$\vee I, 9$
11		$(\sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1) \supset (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1))$	$\supset I, 1, 10$
12		$\sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
13		$\sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	<i>R, 12</i>
14		$(\sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1) \supset \sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1))$	$\supset I, 12, 13$
15		$\sim \sim (\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	$\sim I, 11, 14$
16		$(\sim (\exists x_1) F_1^1 x_1 \vee (\exists x_1) F_1^1 x_1)$	$\sim E, 15$

ÖRNEK

$$'(\sim (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3) \vdash_{PF^Q} '(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) F_1^3 x_1 x_2 x_3'$$

1		$\sim (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3$	<i>Hyp</i>
2		$a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \sim F_1^3 a_1 a_2 a_3$	<i>Hyp</i>
3		$\sim F_1^3 a_1 a_2 a_3$	<i>R, 2</i>
4		$(\exists x_3) \sim F_1^3 a_1 a_2 x_3$	$\exists I, 3 \ x_3/a_3$
5		$(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 a_1 x_2 x_3$	$\exists I, 4 \ x_2/a_2$
6		$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3$	$\exists I, 5 \ x_1/a_1$
7		$(\sim F_1^3 a_1 a_2 a_3 \supset (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3)$	$\supset I, 2-6$
8		$\sim F_1^3 a_1 a_2 a_3$	<i>Hyp</i>
9		$\sim (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3$	<i>R, 1</i>
10		$(\sim F_1^3 a_1 a_2 a_3 \supset \sim (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3) \sim F_1^3 x_1 x_2 x_3)$	$\supset I, 8-9$
11		$\sim \sim F_1^3 a_1 a_2 a_3$	$\sim I, 7-10$
12		$F_1^3 a_1 a_2 a_3$	$\sim E, 11$
13		$(\forall x_3) F_1^3 a_1 a_2 x_3$	$\forall I, 12 \ x_3/a_3$
14		$(\forall x_2)(\forall x_3) F_1^3 a_1 x_2 x_3$	$\forall I, 13 \ x_2/a_2$
15		$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) F_1^3 x_1 x_2 x_3$	$\forall I, 14 \ x_1/a_1$

ÖRNEK

$$‘(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)F_1^3x_1x_2x_3’ \vdash_{PF}^Q ‘\sim(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3’$$

1	$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)F_1^3x_1x_2x_3$	<i>Hyp</i>
2	$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	<i>Hyp</i>
3	$a_1 \quad (\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3a_1x_2x_3$	$\exists$ <i>Hyp</i> , 2 a_1/x_1
4	$a_2 \quad (\exists x_3)\sim F_1^3a_1a_2x_3$	$\exists$ <i>Hyp</i> , 3 a_2/x_2
5	$a_3 \quad \sim F_1^3a_1a_2a_3$	$\exists$ <i>Hyp</i> , 4 a_3/x_3
6	$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	<i>Hyp</i>
7	$\sim F_1^3a_1a_2a_3$	<i>R</i> , 5
8	$((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3 \supset \sim F_1^3a_1a_2a_3)$	$\supset$ I, 6-7
9	$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	<i>Hyp</i>
10	$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)F_1^3x_1x_2x_3$	<i>R</i> , 1
11	$(\forall x_2)(\forall x_3)F_1^3a_1x_2x_3$	$\forall$ E, 10 a_1/x_1
12	$(\forall x_3)F_1^3a_1a_2x_3$	$\forall$ E, 11 a_2/x_2
13	$F_1^3a_1a_2a_3$	$\forall$ E, 12 a_3/x_3
14	$((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3 \supset F_1^3a_1a_2a_3)$	$\supset$ I, 9-13
15	$\sim(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	$\sim$ I, 8-14
16	$\sim(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	$\exists$ E, 5-15
17	$\sim(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	$\exists$ E, 4-16
18	$\sim(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	$\exists$ E, 3-17
19	$((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3 \supset \sim(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3)$	$\supset$ I, 2-18
20	$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	<i>Hyp</i>
21	$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	<i>R</i> , 20
22	$((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3 \supset (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3)$	$\supset$ I, 20-21
23	$\sim(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\sim F_1^3x_1x_2x_3$	$\sim$ I, 22

ÖRNEK

$$\vdash_{PF}^Q ‘((\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset \sim(\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_2))’$$

1	$(\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
2	$a_1 \quad (F_1^1a_1 \supset F_2^1a_1)$	$\exists$ <i>Hyp</i> , 1 a_1/x_1
3	$(\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
4	$F_1^1a_1$	<i>Hyp</i>
5	$F_2^1a_1$	$\supset$ E, 2,4
6	$(\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1)$	$\vee$ I, 5
7	$(F_1^1a_1 \supset (\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1))$	$\supset$ I, 4-6
8	$F_1^1a_1$	<i>Hyp</i>
9	$\sim(\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1)$	$\forall$ E, 3 a_1/x_1
10	$(F_1^1a_1 \supset \sim(\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1))$	$\supset$ I, 8-9
11	$\sim\sim F_1^1a_1$	$\sim$ I, 7-10
12	$F_1^1a_1$	$\sim$ E, 11
13	$F_2^1a_1$	$\supset$ E, 3, 12
14	$(\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1)$	$\vee$ I, 13
15	$((\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_1) \supset (\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1))$	$\supset$ I, 3-14
16	$(\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
17	$\sim(\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1)$	$\forall$ E, 16 a_1/x_1
18	$((\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_1) \supset \sim(\sim F_1^1a_1 \vee F_2^1a_1))$	$\supset$ I, 16-17
19	$\sim(\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_1)$	$\sim$ I, 15-18
20	$\sim(\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_1)$	$\exists$ E, 2-21
21	$((\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_1) \supset \sim(\forall x_1)\sim(\sim F_1^1x_1 \vee F_2^1x_1))$	$\supset$ I, 1, 20

ÖRNEK

$$\vdash_{PF}^O '(\sim(\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_2) \supset (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2))'$$

1	$\sim(\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
2	$\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
3	$a_1 \quad \sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 a_1$	<i>Hyp</i>
4	$F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
5	$\sim F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
6	$\sim F_2^1 a_1$	<i>Hyp</i>
7	$F_1^1 a_1$	<i>R, 4</i>
8	$(\sim F_2^1 a_1 \supset F_1^1 a_1)$	$\supset, 6-7$
9	$\sim F_2^1 a_1$	<i>Hyp</i>
10	$\sim F_1^1 a_1$	<i>R, 5</i>
11	$(\sim F_2^1 a_1 \supset \sim F_1^1 a_1)$	$\supset, 9-10$
12	$\sim \sim F_2^1 a_1$	$\sim I, 8-11$
13	$F_2^1 a_1$	$\sim E, 12$
14	$(\sim F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\supset I, 5-13$
15	$F_2^1 a_1$	<i>Hyp</i>
16	$F_2^1 a_1$	<i>R, 15</i>
17	$(F_2^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\supset I, 15-16$
18	$F_2^1 a_1$	$\vee E, 3, 14, 17$
19	$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\supset I, 4, 18$
20	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	$\exists I, 19 \ x_1/a_1$
21	$((\sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 a_1) \supset (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$	$\supset I, 3-20$
22	$\sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 a_1$	<i>Hyp</i>
23	$\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	<i>R, 2</i>
24	$((\sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 a_1) \supset \sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$	$\supset I, 22-23$
25	$\sim(\sim F_1^1 a_1 \vee F_2^1 a_1)$	$\sim I, 21-24$
26	$(\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1)$	$\forall I, x_1/a_1$
27	$(\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$	$\supset I, 2-26$
28	$\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
29	$\sim(\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1)$	<i>R, 1</i>
30	$(\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset \sim(\forall x_1) \sim(\sim F_1^1 x_1 \vee F_2^1 x_1))$	$\supset I, 28-29$
31	$\sim \sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	$\sim I, 27-30$
32	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	$\sim E, 31$

ÖRNEK

$$\vdash_{PF}^Q ((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2))'$$

1	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2	$\sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>Hyp</i>
3	$a_1 \mid F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
4	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>R</i> , 1
5	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\forall E$, 4 a_1/x_1
6	$a_2 \mid (F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_2)$	$\exists Hyp$, 5 a_2/x_2
7	$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_2)$	<i>R</i> , 6
8	$F_1^1 a_1$	<i>R</i> , 3
9	$F_2^1 a_2$	$\supset E$, 7-8
10	$a_1 \mid F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
11	$F_2^1 a_2$	<i>R</i> , 9
12	$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_2)$	$\supset I$, 10-11
13	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 a_2)$	$\forall I$, 12 x_1/a_1
14	$(\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\exists I$, 13 x_2/a_2
15	$(\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\exists E$, 5-14
16	$\sim F_2^1 a_2$	<i>Hyp</i>
17	$(\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>R</i> , 15
18	$\sim F_2^1 a_2 \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\supset I$, 16-17
19	$\sim F_2^1 a_2$	<i>Hyp</i>
20	$\sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>R</i> , 2
21	$\sim F_2^1 a_2 \supset \sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\supset I$, 19-20
22	$\sim \sim F_2^1 a_2$	$\sim I$, 18-21
23	$F_2^1 a_2$	$\sim E$, 22
24	$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_2)$	$\supset I$, 3-23
25	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 a_2)$	$\forall I$, 24 x_1/a_1
26	$(\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\exists I$, 25 x_2/a_2
27	$\sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\supset I$, 2-26
28	$\sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>Hyp</i>
29	$\sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>R</i> , 28
30	$\sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset \sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	<i>R</i> , 28-29
31	$\sim \sim (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\sim I$, 27-30
32	$(\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\sim E$, 31
33	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2)$	$\supset I$, 1-32

SIRA SİZDE

1



PF^Q biçimsel sisteminin aşağıdaki teoremini kanıtlayın.

$$\vdash_{PF^Q} '((\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2x_1x_2 \supset (\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2x_1x_2)'$$

SIRA SİZDE

2



PF^Q biçimsel sisteminin aşağıdaki teoremini kanıtlayın.

$$\vdash_{PF^Q} '((\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_1^1x_1))'$$

SIRA SİZDE

3



PF^Q biçimsel sisteminin aşağıdaki teoremini kanıtlayın.

$$\vdash_{PF^Q} '((\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_2) \supset \sim (\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_2))'$$

SIRA SİZDE

4



PF^Q biçimsel sistemindeki aşağıdaki içermeyi kanıtlayın.

$$' \sim (\forall x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1) ' \vdash_{PF^Q} '(\forall x_1)F_1^1x_1'$$

PF^Q BİÇİMSEL SİSTEMİ İÇİN ÜST-TEOREMLER

PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Üst Teoremi

Teorem: A_n , PF^Q biçimsel sisteminin kapalı iyi biçimli formülü olduğunda, $\Gamma \cup \{A_n\}$ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF^Q biçimsel sisteminde içeriyorsa Γ iyi biçimli formül kümesi $(A_n \supset A_i)$ iyi biçimli formülünü PF^Q biçimsel sisteminde içerir: $\Gamma \cup \{A_n\} \vdash_{PF^Q} A_i$ ise, $\Gamma \vdash_{PF^Q} (A_n \supset A_i)$

PF^Q Biçimsel Sistemi ve P^Q Dilinin $\mathcal{S}$ Yorumu İçin Üst-Teoremler

PF^Q biçimsel sistemi *saptanmaz* bir sistemdir: PF^Q biçimsel sisteminde P^Q dilinin bir A_i iyi biçimli formülünün PF^Q biçimsel sisteminin teoremi olmadığını saptayacak etkin bir yönerge yoktur. Bu sebepten P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülünün PF^Q biçimsel sisteminin teoremi olmadığını saptamak için PF^Q biçimsel sistemi ve P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunu bağlayan üst teoremlere müracaat edilir.

Tutarlılık Üst Teoremi

Teorem: P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin teoremiyse, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir: $\vdash_{PF^Q} A_i$ ise, $\models_{\mathcal{S}} A_i$

Dolaysız çıkarım 1. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli değilse PF^Q biçimsel sisteminin teoremi değildir: $\not\models_{\mathcal{S}} A_i$ ise, $\not\vdash_{PF^Q} A_i$

ÖRNEK

' $((\exists x_1) F_1^2x_1 \vee \sim (\exists x_1)F_1^2x_1)$ ' iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin bir teoremidir. Öyleyse ' $((\exists x_1) F_1^2x_1 \vee \sim (\exists x_1)F_1^2x_1)$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir.

' $(\exists x_1) F_1^2x_1$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli değildir. Öyleyse ' $(\exists x_1) F_1^2x_1$ ' iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin bir teoremi değildir.

Dolaysız çıkarım 2. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli olmayan en az bir formülü vardır. Öyleyse P^Q dilinin PF^Q biçimsel sisteminin teoremi olmayan en az bir iyi biçimli formülü vardır.

Dolaysız çıkarım 3. P^Q dilinin A_i ve $\sim A_i$ iyi biçimli formüllerinin her ikisinin de $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli olduğu hiçbir $\{A_i, \sim A_i\}$ alt kümesi yoktur. Öyleyse P^Q dilinin A_i ve $\sim A_i$ iyi biçimli formüllerinin her ikisinin de PF^Q biçimsel sisteminin teoremi olduğu hiçbir $\{A_i, \sim A_i\}$ alt kümesi yoktur.

Tamlık Üst Teoremi

Teorem: P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerliyse PF^Q biçimsel sisteminin teoremidir: $\models_P^Q A_i$ ise, $\vdash_{PF}^Q A_i$

Dolaysız çıkarım 1. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin teoremi değilse P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli değildir: $\not\models_P^Q A_i$ ise, $\not\vdash_P^Q A_i$

ÖRNEK

' $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2))$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir. Öyleyse ' $((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2) \supset (\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_2))$ ' iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin teoremidir.

' $(\exists x_1) F_1^2 x_1$ ' iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin bir teoremi değildir. Öyleyse ' $(\exists x_1) F_1^2 x_1$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli değildir.

Kanıt-Kuramsal Tutarlılık

Tanım 1. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF}^Q A_j$ ve $A_i \vdash_{PF}^Q \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa A_i iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıdır [k -tutarlı].

Tanım 1.1. P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi için $\Delta \vdash_{PF}^Q A_j$ ve $\Delta \vdash_{PF}^Q \sim A_j$ olan hiçbir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi yoksa Δ iyi biçimli formül kümesi PF^Q biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarlıdır.

Tanım 2. P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF}^Q A_j$ ve $A_i \vdash_{PF}^Q \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa A_i iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarsızdır [k -tutarsız].

Tanım 2.1. P^Q dilinin Δ iyi biçimli formül kümesi için $\Delta \vdash_{PF}^Q A_j$ ve $\Delta \vdash_{PF}^Q \sim A_j$ olan bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa Δ iyi biçimli formül kümesi iyi biçimli formül kümesi PF^Q biçimsel sisteminde kanıt-kuramsal tutarsızdır.

Özet



PF^Q biçimsel sistemini açıklamak.

PF^Q biçimsel sisteminin iyi biçimli formül kümesi P^Q dili ile aynıdır. Bu yüzden PF^Q biçimsel sisteminin bir iyi biçimli bir formülü ‘P^Q dilinin iyi biçimli formülü’ adıyla anılır. PF^Q biçimsel sistemi P^Q dili ve her biri P^Q₁ × ... × P^Q_m kartezyen çarpımının alt kümesi olan R_i bağıntılarının sonlu $\mathcal{K} = \{R_1, \dots, R_n\}$ koleksiyonundan oluşan sıralı ikilidir: (P^Q, K). K koleksiyonunun elemanı olan her R_i bağıntısına ‘dedüksiyon kuralı’ adı verilir. {A₁, ..., A_j} (j ≥ 1) iyi biçimli formül kümesi için (A₁, ..., A_j, A_k) sıralısı $\mathcal{K}$ koleksiyonunun elemanı olan R_i bağıntısının elemanı ise A_k iyi biçimli formülü {A₁, ..., A_j} iyi biçimli formül kümesindeki elemanların PF^Q biçimsel sisteminde dolaysız sonucudur.



PF^Q biçimsel sistemi için dedüksiyon üst teoremini tanımlamak.

A_n PF^Q biçimsel sisteminin kapalı iyi biçimli formül olduğunda, $\Gamma \cup \{A_n\}$ iyi biçimli formül kümesi A_i iyi biçimli formülünü PF^Q biçimsel sisteminde içeriyorsa Γ iyi biçimli formül kümesi (A_n $\supset$ A_i) iyi biçimli formülünü PF^Q biçimsel sisteminde içerir: $\Gamma \cup \{A_n\} \vdash_{PF}^Q A_i$ ise, $\Gamma \vdash_{PF}^Q (A_n \supset A_i)$



PF^Q biçimsel sistemi ve P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumu için tutarlılığı ifade etmek.

P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin teoremiyse, P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerlidir: $\vdash_{PF}^Q A_i$ ise, $\models_P^Q A_i$



PF^Q biçimsel sistemi ve P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumu için tamlığı açıklamak.

P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerliyse, PF^Q biçimsel sisteminin teoremidir: $\models_P^Q A_i$ ise, $\vdash_{PF}^Q A_i$

Kendimizi Sıneyalım

1. Aşağıdaki grafikteki hangi adımlar silindiğinde geride kalan grafik P^Q dilinin $(\forall x_2)(F_1^1 x_2 \supset F_2^1 x_2)$ iyi biçimli formülünün $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$ iyi biçimli formülünden PF^Q biçimsel sistemindeki türemesinin grafiğı olur?

1		$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
2		$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\forall E, 1 \ a_1/x_1$
3		$F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
4		$F_2^1 a_1$	$\supset E, 2-3$
5		$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\supset I, 3-4$
6		$(\forall x_2)(F_1^1 x_2 \supset F_2^1 x_2)$	$\forall I, 2 \ x_2/a_1$
7		$((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\forall x_2)(F_1^1 x_2 \supset F_2^1 x_2))$	$\supset I, 1-3$

- 1, 2, 5
- 3, 4, 5
- 5, 6, 7
- 1, 5, 6
- 2

2. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \vdash_{PF^Q} (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$. PF^Q biçimsel sistemindeki türemesinin grafiğinde 3 ve 6 numaralı adımlarda uygulanan dedüksiyon kuralları ile dedüksiyon kurallarının uygulandığı adımlar hangi seçenekte sırasıyla yer alır?

1		$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1)$
2		$F_1^1 a_1$
3		$(F_1^1 a_1 \wedge F_2^1 a_1)$
4		$F_2^1 a_1$
5		$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$
6		$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$
7		$((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$

- $\wedge I, 2; \supset I, 5$.
- $R, 1; \exists I, 5 \ x_1/a_1$.
- $\wedge I, 2; \exists I, 5 \ x_1/a_1$.
- $\forall E, 1 \ a_1/x_1; \supset I, 5$.
- $\forall E, 1 \ a_1/x_1; \exists I, 5 \ x_1/a_1$.

3. P^Q dilinin $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün PF^Q biçimsel sistemindeki kanıtlamasının grafiğinde eksik kalan altasıralı türemenin iyi biçimli formülleri, dedüksiyon kuralları ve dedüksiyon kurallarının uygulandığı adımlar hangi seçenekte yer alır?

1		$F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
2		$F_1^1 a_1$	<i>R, 2</i>
3		$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I, 3$
4		$(F_1^1 a_1 \supset (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I, 2-4$
5		$F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
6		$F_1^1 a_1$	<i>R, 6</i>
7		$\sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I, 7$
8		$(F_1^1 a_1 \supset \sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I, 6-8$
9		$\sim F_1^1 a_1$	$\sim I, 5-9$
10		$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I, 10$
11		$(\sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1) \supset (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I, 1, 12$
12		$\sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	<i>Hyp</i>
13		$\sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	<i>R, 13</i>
14		$(\sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1) \supset \sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I, 13, 14$
15		$\sim \sim (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\sim I, 12, 15$
16		$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\sim E, 16$
17		$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\sim E, 16$
18			

- $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ *Hyp*;
18. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \forall I, 7, x_1/a_1$.
- $(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$ *Hyp*;
18. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \exists I, 7, x_1/a_1$.
- $\sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$ *Hyp*;
18. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \forall I, 7, x_1/a_1$.
- $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ *Hyp*;
18. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \forall I, 7, x_1/a_1$.
- $(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$ *Hyp*;
18. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \forall I, 7, x_1/a_1$.

4. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1)$ iyi biçimli formülünün $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1)$ iyi biçimli formülünden PF^Q biçimsel sistemindeki türemesinin grafiğinde 6, 7, 8, 9 ve 10 numaralı adımlardaki iyi biçimli formüller, dedüksiyon kuralları ile dedüksiyon kurallarının uygulandığı adımlar hangi seçenekte verilmiştir?

1		$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
2		a_1	
3		$F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
4		$F_2^1 a_1$	$\wedge E, 2$
5		$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\supset I, 3-4$
6			
7			
8			
9			
10			
11		$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1)$	$\exists E, 2-10$

6. $F_1^1 a_1$ *Hyp*;
7. $F_2^1 a_1$ $\wedge E, 2$;
8. $(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1) \supset I, 6-7$;
9. $(F_1^1 a_1 \equiv F_2^1 a_1) \equiv I, 5-8$;
10. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \exists I, 9 \ x_1/a_1$.
6. $F_2^1 a_1$ *Hyp*;
7. $F_1^1 a_1$ $\wedge E, 2$;
8. $(F_2^1 a_1 \supset F_1^1 a_1) \supset I, 6-7$;
9. $(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \equiv I, 5-8$;
10. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \exists I, 9 \ x_1/a_1$.
6. $F_1^1 a_1$ *Hyp*;
7. $F_2^1 a_1$ $\wedge E, 2$;
8. $(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1) \supset I, 6-7$;
9. $(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \equiv I, 5-8$;
10. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \exists I, 9 \ x_1/a_1$.
6. $F_2^1 a_1$ *Hyp*;
7. $F_1^1 a_1$ $\wedge E, 2$;
8. $(F_2^1 a_1 \supset F_1^1 a_1) \supset I, 6-7$;
9. $(F_1^1 a_1 \equiv F_2^1 a_1) \equiv I, 5-8$;
10. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \exists I, 9 \ x_1/a_1$.
6. $F_1^1 a_1$ *Hyp*;
7. $F_1^1 a_1$ $R, 3$;
8. $(F_2^1 a_1 \supset F_1^1 a_1) \supset I, 6-7$;
9. $(F_1^1 a_1 \equiv F_2^1 a_1) \equiv I, 5-8$;
10. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \exists I, 9 \ x_1/a_1$.

5. PF^Q biçimsel sistemindeki türemenin aşağıdaki grafiğinde eksik olan iyi biçimli formüller, dedüksiyon kuralları ve dedüksiyon kurallarının uygulandığı adımlar hangi seçenekte verilmiştir?

1		$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2		a_1	
3		$F_1^1 a_1$	$\wedge E, 2$
4		$(\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2$	$\wedge E, 2$
5			
6			
7			
8			
9			
10		$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	$\forall I, 9 \ x_1/a_1$

5. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \wedge I, 3-4$;
6. $F_1^1 a_1$ $R, 3$;
7. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \wedge I, 5-6$;
8. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists I, 7 \ x_2/a_2$;
9. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists E, 5-8$.
5. $F_1^2 a_1 a_2 \exists$ *Hyp*, 4 a_2/x_2 ;
6. $(\forall x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2 \forall I, 5 \ x_1/a_1$;
7. $(F_1^1 a_1 \wedge (\forall x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2) \wedge I, 3-6$;
8. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\forall x_1)(\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2) \forall I, 7 \ x_1/a_1$;
9. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \forall E, 8 \ a_1/x_1$.
5. $F_1^2 a_1 a_2$ *Hyp*;
6. $F_1^2 a_1 a_2$ $R, 5$;
7. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \wedge I, 5-6$;
8. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 a_2) \forall I, 7 \ x_1/a_1$;
9. $(\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \exists I, 8 \ x_2/a_2$.
5. $F_1^2 a_1 a_2 \exists$ *Hyp*, 4 a_2/x_2 ;
6. $(F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2) \wedge I, 3-4$;
7. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \exists E, 6 \ a_2/x_2$;
8. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 a_2) \forall I, 7 \ x_1/a_1$;
9. $(\exists x_2)(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \exists I, 8 \ x_2/a_2$.
5. $F_1^2 a_1 a_2 \exists$ *Hyp*, 4 a_2/x_2 ;
6. $F_1^1 a_1$ $R, 3$;
7. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \wedge I, 5-6$;
8. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists I, 7 \ x_2/a_2$;
9. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists E, 5-8$.

6. PF^Q biçimsel sistemindeki türemenin aşağıda verilen grafiğini tamamlamak için gereken iyi biçimli formüller, dedüksiyon kuralları ve dedüksiyon kurallarının uygulandığı adımlar hangi seçenekte verilmiştir?

1	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	$\exists E, 2-8$

- a. 2. $(\exists x_1)F_1^1 x_1 \wedge E, 1;$
3. $(\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2 \wedge E, 1;$
4. $F_1^2 x_1 a_2 \forall E, 3 a_2/x_2;$
5. $F_1^1 a_1 \exists Hyp, 2 a_1/x_1;$
6. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 x_1 a_2) \wedge I, 4-5;$
7. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \exists I, 6 x_2/a_2;$
8. $(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \forall I, 7, x_1/a_1.$
- b. 2. $(F_1^1 a_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2) \exists Hyp, 1 a_1/x_1;$
3. $F_1^1 a_1 \wedge E, 2;$
4. $(\forall x_2)F_1^1 x_1 \exists I, 2;$
5. $F_1^2 a_1 a_2 \forall E, 4 a_2/x_2;$
6. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \wedge I, 4-5;$
7. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists I, 6 x_2/a_2;$
8. $(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \forall I, 7, x_1/a_1.$
- c. 2. $(F_1^1 a_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2) \exists Hyp, 1 a_1/x_1;$
3. $F_1^1 a_1 \wedge E, 2;$
4. $(\exists x_2)F_1^2 x_1 \exists I, 3 x_1/a_1;$
5. $F_1^2 a_1 a_2 \forall E, 2 a_2/x_2;$
6. $((\exists x_2)F_1^2 x_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \wedge I, 4-5;$
7. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists I, 6 x_2/a_2;$
8. $(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \forall I, 7, x_1/a_1.$

- d. 2. $(F_1^1 a_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2) \exists Hyp, 1 a_1/x_1;$
3. $F_1^1 a_1 \wedge E, 2;$
4. $(\exists x_2)F_1^2 x_2 \exists I, 3 x_1/a_1;$
5. $(\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2 \wedge E, 2;$
6. $F_1^2 a_1 a_2 \forall E, 5 a_2/x_2;$
7. $((\exists x_2)F_1^2 x_2 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \wedge I, 4-6;$
8. $(\forall x_1)((\exists x_2)F_1^2 x_2 \wedge F_1^2 x_1 a_2) \forall I, 6 x_1/a_1.$
- e. 2. $(F_1^1 a_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2) \exists Hyp, 1 a_1/x_1;$
3. $F_1^1 a_1 \wedge E, 2;$
4. $(\exists x_2)F_1^2 x_1 \exists I, 3 x_1/a_1;$
5. $F_1^2 a_1 a_2 \forall E, 2 a_2/x_2;$
6. $(\exists x_2)(F_1^2 x_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists I, 5 x_2/a_2;$
7. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists E, 6 a_1/x_1;$
8. $(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \forall I, 7, x_1/a_1.$

7. Grafikte kendinden önce gelen iyi biçimli formül veya formüllerin, PF^Q biçimsel sisteminin dedüksiyon kurallarına göre dolaysız sonucu olmayan ancak grafikte yer alan tüm iyi biçimli formüllerin elemanı olduğu, grafikteki adım numaralarına göre sıralanmış sıralı üçlü hangi seçenekte yer alır?

1	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\forall E, 1 a_1/x_1$
3	$a_2 \mid (F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\exists Hyp, 2 a_2/x_2$
4	$a_1 \mid (F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	<i>R, 3</i>
5	$F_1^2 a_1 a_2$	$\wedge E, 4$
6	$(\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2$	$\forall I, 5 x_2/a_2$
7	$a_1 \mid (\forall x_2)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	<i>R, 1</i>
8	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\forall E, 1 a_1/x_1$
9	$a_2 \mid (F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\exists Hyp, 8 a_2/x_2$
10	$F_1^1 a_1$	$\wedge E, 8$
11	$F_1^1 a_1$	$\exists E, 9-10$
12	$(\forall x_1)F_1^1 x_1$	$\forall I, 11 x_1/a_1$
13	$(\forall x_1)F_1^1 x_1$	$\exists E, 3-12$

- a. 4, 5 ve 6 numaralı adımlar için, $((F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2), F_1^2 a_1 a_2, (\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2)$
- b. 3, 7 ve 9 numaralı adımlar için, $((F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2), (\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2), (F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2))$
- c. 3, 8 ve 12 numaralı adımlar için, $((F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2), (\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2), (\forall x_1)F_1^1 x_1)$
- d. 3, 7 ve 11 numaralı adımlar için, $((F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2), (\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2), F_1^1 a_1)$
- e. 9, 10 ve 11 numaralı adımlar için, $((F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2), F_1^1 a_1, F_1^1 a_1)$

8. Aşağıda verilen grafikte PF^Q biçimsel sisteminin dedüksiyon kurallarına göre kendinden önce gelen iyi biçimli formül veya formüllerin dolaysız sonucu olmayan tüm iyi biçimli formüllerin elemanı olduğu, türeme grafiğindeki sıralarına göre sıralanmış sıralı ikili hangi seçenekte verilmiştir?

1	$(\exists x_1)(\forall x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2	$a_2 \mid a_1 \mid (\forall x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\exists E, 1 \ a_1/x_1$
3	$(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\forall E, 2 \ a_2/x_2$
4	$F_1^1 a_1$	$\wedge E, 3$
5	$(\exists x_1)F_1^1 x_1$	$\exists I, 4 \ x_1/a_1$
6	$F_1^2 a_1 a_2$	$\wedge E, 3$
7	$(\exists x_2)F_1^1 a_1 x_2$	$\exists I, 6 \ x_2/a_2$
8	$(F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^1 a_1 x_2)$	$\wedge I, 4-7$
9	$(F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^1 a_1 x_2)$	$\exists E, 2-8$
10	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_2)F_1^1 a_1 x_2)$	$\forall I, 9 \ x_1/a_1$

- 8 ve 9 numaralı adımlar için, $((F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2), (F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2))$
- 6 ve 7 numaralı adımlar için, $(F_1^2 a_1 a_2, (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2)$
- 4 ve 5 numaralı adımlar için $(F_1^1 a_1, (\exists x_1)F_1^1 x_1)$
- 5 ve 7 numaralı adımlar için, $((\exists x_1)F_1^1 x_1, (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2)$
- 9 ve 10 numaralı adımlar için, $((F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2), (\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2))$

9. Seçeneklerdeki ifadelerden hangisi PF^Q biçimsel sistemine ilişkin sonuçlara aykırıdır?

- P^Q dilinin bütün iyi biçimli formülleri PF^Q biçimsel sisteminin teoremidir.
- P^Q dilinin PF^Q biçimsel sisteminin teoremi olmayan en az bir iyi biçimli formülü vardır.
- A_i iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda geçerli değilse PF^Q biçimsel sisteminin teoremi değildir.
- PF^Q biçimsel sisteminin en az bir teoremi vardır.
- A_i iyi biçimli formülünün A_j kapalı iyi biçimli formülünden PF^Q biçimsel sisteminde bir türemesi varsa, $(A_j \supset A_i)$ iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin teoremidir.

10. Aşağıda verilen ardışık türeme grafiklerinin olmasından PF^Q biçimsel sistemine dair üst teoremlere göre çıkan sonuç hangi seçenekte yer alır?

1	$\sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
2	$a_1 \mid F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
3	$F_1^1 a_1$	<i>R, 2</i>
4	$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I, 3$
5	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	$\exists I, 4 \ x_1/a_1$
6	$(F_1^1 a_1 \supset (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1))$	$\supset I, 2-5$
7	$F_1^1 a_1$	<i>Hyp</i>
8	$\sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	<i>R, 1</i>
9	$(F_1^1 a_1 \supset \sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1))$	$\supset I, 7-8$
10	$\sim F_1^1 a_1$	$\sim I, 6-9$
11	$(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$	$\forall I, 10 \ x_1/a_1$

1	$\sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	<i>Hyp</i>
2	$(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$	<i>Hyp</i>
3	$\sim F_1^1 a_1$	$\forall E, 2 \ a_1/x_1$
4	$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I, 3$
5	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	$\exists I, 4 \ x_1/a_1$
6	$((\forall x_1) \sim F_1^1 x_1 \supset (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1))$	$\supset I, 2-5$
7	$(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$	<i>Hyp</i>
8	$\sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	<i>R, 1</i>
9	$((\forall x_1) \sim F_1^1 x_1 \supset \sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1))$	$\supset I, 7-8$
10	$\sim (\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$	$\sim I, 6,9$

- ' $\sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' iyi biçimli formülünün P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *modeli* vardır.
- ' $\sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin teoremidir.
- ' $\sim (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ' iyi biçimli formülü *k-tutarsızdır*.
- ' $\sim (\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerlidir*.
- ' $\sim (\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülü veya ' $(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ' iyi biçimli formülü PF^Q biçimsel sisteminin teoremidir.

Kendimizi Sınavalım Yanıt Anahtarı

1. b Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

3. $F_1^1 a_1$ Hyp, 4. $F_2^1 a_1$ E, 2-3, 5. $(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1) \supset I$, 3-4.

$\vdash_{PF}^Q ((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\forall x_2)(F_1^1 x_2 \supset F_2^1 x_2))$,

1	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	Hyp
2	$a_1 \mid (F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\forall E$, 1 a_1/x_1
3	$(\forall x_2)(F_1^1 x_2 \supset F_2^1 x_2)$	$\forall I$, 2 x_2/a_1
4	$((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1) \supset (\forall x_2)(F_1^1 x_2 \supset F_2^1 x_2))$	$\supset I$, 1-3

2. e Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

3. $\forall E$, 1 a_1/x_1 ; 6. $\exists I$, 5 x_1/a_1 .

$\vdash_{PF}^Q ((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$,

1	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1)$	Hyp
2	$F_1^1 a_1$	Hyp
3	$(F_1^1 a_1 \wedge F_2^1 a_1)$	$\forall E$, 1 a_1/x_1
4	$F_2^1 a_1$	$\wedge E$, 3
5	$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\supset I$, 2-4
6	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1)$	$\exists I$, 5 x_1/a_1
7	$((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \supset (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \supset F_2^1 x_1))$	$\supset I$, 1-6

3. c Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

1. $\sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$ Hyp; 8. $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1) \forall I$, 7, x_1/a_1

$\vdash_{PF}^Q ((\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1))$,

1	$a_1 \mid \sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	Hyp
2	$F_1^1 a_1$	Hyp
3	$F_1^1 a_1$	R , 2
4	$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I$, 3
5	$(F_1^1 a_1 \supset (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I$, 2-4
6	$F_1^1 a_1$	Hyp
7	$F_1^1 a_1$	R , 6
8	$\sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I$, 7
9	$(F_1^1 a_1 \supset \sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I$, 6-8
10	$\sim F_1^1 a_1$	$\sim I$, 5-9
11	$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\vee I$, 10
12	$(\sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1) \supset (F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I$, 1, 12
13	$\sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	Hyp
14	$\sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	R , 13
15	$(\sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1) \supset \sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1))$	$\supset I$, 13, 14
16	$\sim \sim(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\sim I$, 12, 15
17	$(F_1^1 a_1 \vee \sim F_1^1 a_1)$	$\sim E$, 16
18	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$	$\forall I$, 17 x_1/a_1

4. d Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

6. $F_2^1 a_1$ Hyp; 7. $F_1^1 a_1 \wedge E$, 2; 8. $(F_2^1 a_1 \supset F_1^1 a_1) \supset I$, 6-7; 9. $(F_1^1 a_1 \equiv F_2^1 a_1) \equiv I$, 5-8; 10. $(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1) \exists I$, 9 x_1/a_1 .

$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1) \vdash_{PF}^Q (\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1)$,

1	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge F_2^1 x_1)$	Hyp
2	$a_1 \mid (F_1^1 a_1 \wedge F_2^1 a_1)$	$\exists$ Hyp, 1 a_1/x_1
3	$F_1^1 a_1$	Hyp
4	$F_2^1 a_1$	$\wedge E$, 2
5	$(F_1^1 a_1 \supset F_2^1 a_1)$	$\supset I$, 3-4
6	$F_2^1 a_1$	Hyp
7	$F_1^1 a_1$	$\wedge E$, 2
8	$(F_2^1 a_1 \supset F_1^1 a_1)$	$\supset I$, 6-7
9	$(F_1^1 a_1 \equiv F_2^1 a_1)$	$\equiv I$, 5-8
10	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1)$	$\exists I$, 9 x_1/a_1
11	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \equiv F_2^1 x_1)$	$\exists E$, 2-10

5. e Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

5. $F_1^2 a_1 a_2 \exists$ Hyp, 4 a_2/x_2 ; 6. $F_1^1 a_1 R$, 3; 7. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \wedge I$, 5-6; 8. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists I$, 7 x_2/a_2 ; 9. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists E$, 5-8.

$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2) \vdash_{PF}^Q ((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2))$,

1	$(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2)$	Hyp
2	$a_1 \mid (F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2)$	$\forall E$, 1 a_1/x_1
3	$F_1^1 a_1$	$\wedge E$, 2
4	$(\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2$	$\wedge E$, 2
5	$a_2 \mid F_1^2 a_1 a_2$	$\exists$ Hyp, 4 a_2/x_2
6	$F_1^1 a_1$	R , 3
7	$(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\wedge I$, 5-6
8	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\exists I$, 7 x_2/a_2
9	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\exists E$, 5-8
10	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	$\forall I$, 9 x_1/a_1

6. b Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

2. $(F_1^1 a_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2) \exists$ Hyp, 1 a_1/x_1 ; 3. $F_1^1 a_1 \wedge E$, 2; 4. $(\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2 \wedge E$, 2; 5. $F_1^2 a_1 a_2 \forall E$, 4 a_2/x_2 ; 6. $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2) \wedge I$, 4-5; 7. $(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2) \exists I$, 6 x_2/a_2 ; 8. $(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \forall I$, 7, x_1/a_1 .

$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2) \vdash_{PF}^Q ((\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2))$,

1	$(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 x_1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2	$a_1 \mid (F_1^1 a_1 \wedge (\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2)$	$\exists Hyp, 1 \ a_1/x_1$
3	$F_1^1 a_1$	$\wedge E, 2$
4	$(\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2$	$\wedge E, 2$
5	$F_1^2 a_1 a_2$	$\forall E, 4 \ a_2/x_2$
6	$(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\wedge I, 4-5$
7	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\exists I, 6 \ x_2/a_2$
8	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	$\forall I, 7 \ x_1/a_1$
9	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	$\exists E, 2-8$

7. a Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

$\forall I$ kuralındaki kısıtlama [çizginin solundaki a_k terimi, öncesinde a_k harfinin geçişinin olduğu iyi biçimli formüle R dedüksiyon kuralının uygulanamayacağını gösterir] ‘ a_1 ’ terimi üzerinde olduğundan, ‘ a_1 ’ harfinin geçişinin olduğu ‘ $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$ ’ iyi biçimli formülü iyi biçimli formül olduğundan, R dedüksiyon kuralıyla türemenin 4 numaralı satırında yer alamaz. 5 numaralı adımdaki ‘ $F_1^2 a_1 a_2$ ’ ile 6 numaralı ‘ $(\forall x_2)F_1^2 a_1 x_2$ ’ iyi biçimli formülleri ‘ $(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$ ’ iyi biçimli formülünün sonuçlarıdır.

$$‘(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2) \vdash_{PF^Q} ‘(\forall x_1) F_1^1 x_1’$$

1	$(\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\forall E, 1 \ a_1/x_1$
3	$a_2 \mid (F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\exists Hyp, 2 \ a_2/x_2$
4		
5		
6		
7	$a_1 \mid (\forall x_1)(\exists x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	$R, 1$
8	$(\exists x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\forall E, 1 \ a_1/x_1$
9	$a_2 \mid (F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\exists Hyp, 8 \ a_2/x_2$
10	$F_1^1 a_1$	$\wedge E, 8$
11	$F_1^1 a_1$	$\exists E, 9-10$
12	$(\forall x_1)F_1^1 x_1$	$\forall I, 11 \ x_1/a_1$
13	$(\forall x_1)F_1^1 x_1$	$\exists E, 3-12$

8. e Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sistemi İçin Dedüksiyon Kurallarının Grafiği” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

4 numaralı satırdaki ‘ $F_1^1 a_1$ ’ ve 7 numaralı satırdaki ‘ $(\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2$ ’ iyi biçimli formüllerinin $\wedge I$ kuralıyla dolaysız sonucu olarak 8 numaralı satırda yer alan ‘ $(F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2)$ ’ iyi biçimli formülü, $\exists E$ kuralındaki sınırlama [a_1 harfinin geçişinin olduğu bir iyi biçimli formül türemenin dışına alınamaz] sebebiyle $\exists E$ dedüksiyon kuralıyla 9 numaralı satırda yer alamaz. ‘ $(F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2)$ ’ iyi biçimli

formülü türemede yer almadığı için, ‘ $(\forall x_1)(F_1^1 x_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 x_1 x_2)$ ’ iyi biçimli formülü ‘ $(F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2)$ ’ iyi biçimli formülünün $\forall I$ dedüksiyon kuralıyla dolaysız sonucu olarak türemede yer almaz.

1	$(\exists x_1)(\forall x_2)(F_1^1 x_1 \wedge F_1^2 x_1 x_2)$	<i>Hyp</i>
2	$a_2 \mid a_1 \mid (\forall x_2)(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 x_2)$	$\exists E, 1 \ a_1/x_1$
3	$(F_1^1 a_1 \wedge F_1^2 a_1 a_2)$	$\forall E, 2 \ a_2/x_2$
4	$F_1^1 a_1$	$\wedge E, 3$
5	$(\exists x_1)F_1^1 x_1$	$\exists I, 4 \ x_1/a_1$
6	$F_1^2 a_1 a_2$	$\wedge E, 3$
7	$(\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2$	$\exists I, 6 \ x_2/a_2$
8	$(F_1^1 a_1 \wedge (\exists x_2)F_1^2 a_1 x_2)$	$\wedge I, 4-7$
9		
10		

9. a Yanıtınız yanlış ise “Tutarlılık Üst Teoremi” başlıklı konuyu yeniden gözden geçiriniz.

P^Q dilinin tüm iyi biçimli formülleri PF^Q *biçimsel sisteminin teoremi* değildir. P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerli* olmayan bir iyi biçimli formül, tutarlılık üst teoreminden ilk dolaysız çıkarıma göre PF *biçimsel sisteminin teoremi* değildir. ‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü P^Q dilinin $\mathcal{S}$ yorumunda *geçerli* değildir. Tutarlılık üst teoremine göre ‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü PF^Q *biçimsel sisteminin teoremi* değildir. P^Q dilinin PF^Q *biçimsel sisteminin teoremi* olmayan en az bir iyi biçimli formülü vardır.

10. c Yanıtınız yanlış ise “PF^Q Biçimsel Sisteminde İçerme ve Teorem” ve “Kanıt-Kuramsal Tutarlılık” başlıklı konuları yeniden gözden geçiriniz.

‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü *k-tutarsızdır*. PF^Q *biçimsel sisteminde* ‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünden ‘ $(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün türemesi vardır. ‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü ‘ $(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünü PF^Q *biçimsel sisteminde* içerir. PF^Q *biçimsel sisteminde* ‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülünden ‘ $\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünün türemesi vardır. ‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü ‘ $\sim(\forall x_1) \sim F_1^1 x_1$ ’ iyi biçimli formülünü PF^Q *biçimsel sisteminde* içerir. ‘P^Q dilinin A_i iyi biçimli formülü için $A_i \vdash_{PF^Q} A_j$ ve $A_i \vdash_{PF^Q} \sim A_j$ olan en az bir $\{A_j, \sim A_j\}$ iyi biçimli formül kümesi varsa A_i iyi biçimli formülü PF^Q *biçimsel sisteminde* kanıt-kuramsal tutarsızdır’ tanımına göre ‘ $\sim(\exists x_1)(F_1^1 x_1 \vee \sim F_1^1 x_1)$ ’ iyi biçimli formülü *k-tutarsızdır*.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

$$\vdash_{\text{PF}}^Q ((\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2x_1x_2 \supset (\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2x_1x_2))$$

1		$(\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2x_1x_2$	<i>Hyp</i>
2		$(\forall x_2)F_1^2a_1x_2$	$\forall E, 1 a_1/x_1$
3		$F_1^2a_1a_2$	$\forall E, 2 a_2/x_2$
4		$(\exists x_2)F_1^2a_1x_2$	$\exists I, 3 x_2/a_2$
5		$(\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2x_1x_2$	$\exists I, 3 x_1/a_1$
6		$((\forall x_1)(\forall x_2)F_1^2x_1x_2 \supset (\exists x_1)(\exists x_2)F_1^2x_1x_2)$	$\supset I, 1-5$

Sıra Sizde 2

$$\vdash_{\text{PF}}^Q ((\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1))$$

1		$(\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
2		$(F_1^1a_1 \wedge F_2^1a_1)$	$\exists Hyp, 1 a_1/x_1$
3		$F_1^1a_1$	$\wedge E, 2$
4		$F_2^1a_1$	$\wedge E, 2$
5		$(\exists x_1)F_2^1x_1$	$\exists I, 3 x_1/a_1$
6		$(\exists x_1)F_1^1x_1$	$\exists I, 4 x_1/a_1$
7		$((\exists x_1)F_2^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_1^1x_1)$	$\wedge I, 5-6$
8		$((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1)$	$\exists E, 2-7$
9		$((\exists x_1)(F_1^1x_1 \wedge F_2^1x_1) \supset ((\exists x_1)F_1^1x_1 \wedge (\exists x_1)F_2^1x_1))$	$\supset I, 1, 8$

Sıra Sizde 3

$$\vdash_{\text{PF}}^Q ((\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_1) \supset \sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1))$$

1		$(\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
2		$(F_1^1a_1 \supset F_2^1a_1)$	$\exists Hyp, 1 a_1/x_1$
3		$(\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
4		$(F_1^1a_1 \wedge \sim F_2^1a_1)$	$\forall E, 3 a_1/x_1$
5		$F_1^1a_1$	$\wedge E, 4$
6		$\sim F_2^1a_1$	$\supset E, 2-5$
7		$((\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1) \supset F_2^1a_1)$	$\supset I, 3-6$
8		$(\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
9		$(F_1^1a_1 \wedge \sim F_2^1a_1)$	$\forall E, 8 a_1/x_1$
10		$\sim F_2^1a_1$	$\wedge E, 9$
11		$((\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1) \supset \sim F_2^1a_1)$	$\supset I, 8-10$
12		$\sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1)$	$\sim I, 7-11$
13		$\sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1)$	$\exists E, 2-12$
14		$((\exists x_1)(F_1^1x_1 \supset F_2^1x_1) \supset \sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \wedge \sim F_2^1x_1))$	$\supset I, 1-13$

Sıra Sizde 4

$$' \sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_2^1x_1)' \vdash_{\text{PF}}^Q '(\forall x_1)F_1^1x_1'$$

1		$\sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_2^1x_1)$	<i>Hyp</i>
2		$\sim F_1^1a_1$	<i>Hyp</i>
3		$\sim F_1^1a_1$	<i>R, 2</i>
4		$(F_1^1a_1 \vee \sim F_1^1a_1)$	$\vee I, 3$
5		$(\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$	$\exists I, 4 x_1/a_1$
6		$(\sim F_1^1a_1 \supset (\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1))$	$\supset I, 2-5$
7		$\sim F_1^1a_1$	<i>Hyp</i>
8		$(\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$	<i>Hyp</i>
9		$\sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	<i>Hyp</i>
10		$\sim F_1^1a_2$	<i>Hyp</i>
11		$\sim F_1^1a_2$	<i>R, 10</i>
12		$(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	$\vee I, 11$
13		$(\sim F_1^1a_2 \supset (F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2))$	$\supset I, 10-13$
14		$\sim F_1^1a_2$	<i>Hyp</i>
15		$\sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	<i>R, 9</i>
16		$(\sim F_1^1a_2 \supset \sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2))$	$\supset I, 14-15$
17		$\sim \sim F_1^1a_2$	$\sim I, 13-16$
18		$F_1^1a_2$	$\sim E, 17$
19		$(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	$\vee I, 18$
20		$(\sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2) \supset (F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2))$	$\supset I, 9, 19$
21		$\sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	<i>Hyp</i>
22		$\sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	<i>R, 21</i>
23		$(\sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2) \supset \sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2))$	$\supset I, 21, 22$
24		$\sim \sim(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	$\sim I, 20, 23$
25		$(F_1^1a_2 \vee \sim F_1^1a_2)$	$\sim E, 24$
26		$(\forall x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$	$\forall I, 25 x_1/a$
27		$((\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1) \supset (\forall x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1))$	$\supset I, 8, 26$
28		$(\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$	<i>Hyp</i>
29		$\sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$	<i>R, 1</i>
30		$((\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1) \supset \sim(\forall x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1))$	$\supset I, 28, 29$
31		$\sim(\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1)$	$\sim I, 27-30$
32		$(\sim F_1^1a_1 \supset \sim(\exists x_1)(F_1^1x_1 \vee \sim F_1^1x_1))$	$\supset I, 7-31$
33		$\sim \sim F_1^1a_1$	$\sim I, 6-32$
34		$F_1^1a_1$	$\sim E, 33$
35		$(\forall x_1) \sim F_1^1x_1$	$\forall I, 34 x_1/a$

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Çoker, D. ve Karaçay, T. (1983). **Matematik Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. ve Onart, A. (1976). **Mantık Terimleri Sözlüğü**, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Grünberg, T. (1972). **Symbolic Logic**, Ankara: Faculty of Art and Sciences Publication.

Koç, Y. (1980). **Introduction to Logic**, İstanbul: Boğaziçi University Publications.

Mendelson, E. (1964). **Introduction to Mathematical Logic**, Princeton, NJ.: D. Van Nostrand Company, Inc.

Taşdelen, İ. (2010). **Sembolik Mantık**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.